

# **LAS FRECUENCIAS RELATIVAS Y SUS PROPIEDADES EN LOS TEXTOS ESPAÑÓLES DE BACHILLERATO**

*Juan Jesús Ortiz, Carmen Batanero y Luis Serrano*

*EMA, 2(1), 29-48, 1996*

## **RESUMEN**

*En este trabajo analizamos la presentación del concepto de frecuencia relativa en 11 textos de Primer Curso de Bachillerato publicados durante el período 1975-1991, justificando la investigación por la importancia que tiene la correcta comprensión de este concepto en el estudio de la probabilidad. Como consecuencia, se describen criterios para el desarrollo del tema en futuros libros de texto y para la acción didáctica en el aula de matemáticas. A pesar de lo específico del caso español, este artículo es un aporte para el contexto colombiano, ya que arroja luces sobre la manera como podría abordarse de forma efectiva el tratamiento de algunos conceptos básicos de la estadística y la probabilidad en secundaria.*

## **INTRODUCCION**

En este trabajo analizamos la presentación del concepto de frecuencia relativa, como punto de partida en el estudio de la probabilidad, en una muestra de libros de texto de Bachillerato en España. El estudio se justifica por el énfasis que, en los nuevos diseños curriculares para la primaria y secundaria, se da a la enseñanza de la probabilidad y por la metodología recomendada, que se basa en la experimentación y simulación de experimentos aleatorios, es decir en el enfoque frecuencial de la probabilidad.

La comprensión de la idea de frecuencia relativa y de la convergencia de las frecuencias relativas a algún valor que representa la probabilidad son, sin duda, puntos claves para lograr el éxito de la enseñanza con este nuevo enfoque. Son, sin embargo, frecuentes las dificultades sobre estos conceptos por parte de los alumnos, como se muestra en las investigaciones de Konold (1989, 1991). Este autor se interesó por el modo en que los alumnos comprenden las preguntas sobre la probabilidad, indicando que algunos estudiantes no interpretan la repetición de un experimento aleatorio como parte de una serie de ensayos. Estos sujetos consideran que cada una de las repeticiones del experimento está aislada; no tiene por qué guardar relación con las anteriores o posteriores. Denomina a esta conducta, que consiste en interpretar las preguntas sobre probabilidad en forma no probabilística, "outcome approach" (enfoque en un resultado aislado).

Cuando se pide explícitamente calcular la probabilidad de un suceso, en estos casos, se piensa que hay que predecir si el suceso ocurrirá o no en el siguiente experimento. Las probabilidades se evalúan comparándolas con los valores 0%, 50% y 100%. Si la probabilidad se acerca a los extremos 0% o 100%, el suceso se creará imposible o seguro, respectivamente. Sólo si la probabilidad del suceso se acerca al 50% se considerará verdaderamente aleatorio. La ocurrencia de resultados inesperados se explica mediante mecanismos causales y no probabilísticos. Si, por ejemplo, un meteorólogo da una probabilidad de lluvia de un 80% para un día y luego no llueve, se pensará en que el viento se llevó las nubes o que el meteorólogo era poco fiable, en lugar de recordar que había un 20 % de probabilidades de que no lloviera. En

consecuencia, consideramos que el análisis de la presentación de las frecuencias relativas a los estudiantes tiene la suficiente importancia para justificar nuestra investigación.

Nos basamos también en la importancia del libro de texto como material didáctico, señalada por diversos autores. Por ejemplo, en el Informe Cockcroft (1985) se afirma que *"los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula"* (pg.114). Para Goetz y Lecompte (1988) el análisis de libros de texto sirve para establecer las diferencias entre los objetivos de un programa y los medios llevados a cabo para su puesta en práctica. También perfila los sesgos de los contenidos y objetivos de los currícula: *"la recogida y análisis de libros de texto, guías curriculares, apuntes de clase,... y otros archivos ofrece una fuente inestimable de datos de clase"* (pg.63). Romberg y Carpenter (1988, pg. 867) por su parte indican que *"el libro de texto es visto como la autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje"*. Chevallard (1985) afirma que los libros de texto ofrecen una concepción legitimada del texto del saber a enseñar y se convierten en la norma de progresión del conocimiento de los alumnos.

Los trabajos de investigación sobre libros de texto en Matemáticas están cobrando una gran importancia, como se muestra en los ejemplos de Brewer (1986), Romberg y Robinet (1989), Sanz (1994), Harwell (1994) y Chandler y Brosnan(1995). En consecuencia, todas estas referencias ponen de manifiesto el interés del libro de texto como material didáctico y han justificado el estudio que presentamos, como continuación de otros trabajos, en especial los de Navarro-Pelayo (1991) y Malara (1989).

Nuestro análisis ha sido llevado a cabo en 11 textos de Primer Curso de Bachillerato, seleccionados entre una primera lista de 21 manuales que se elaboró basándose en nuestra experiencia personal docente a lo largo de más de quince años en el nivel de Bachillerato, así como en una encuesta realizada a diferentes compañeros de las provincias de J  n, Córdoba y Granada y en la ciudad de Melilla. La muestra final cubre 11 años diferentes del período y 10 editoriales distintas. Esperamos que los resultados de este estudio sean útiles para futuros desarrollos del tema.

La lista de libros de texto se incluye como Anexo, junto con una letra que servirá de referencia para hacer menc  n a cada texto en el resto del trabajo. En relación con las conclusiones expuestas, deseamos indicar que en modo alguno suponen una valoración general de los textos analizados. Solamente se refieren al punto concreto tratado. Quede aquí también expreso nuestro reconocimiento de la labor de los autores de libros de texto, que realizan una importante y difícil tarea cual es transformar los conocimientos matemáticos en contenidos para ser enseñados de la manera más eficaz posible.

## **ELEMENTOS DEL SIGNIFICADO DEL CONCEPTO DE FRECUENCIA RELATIVA**

Los conceptos de frecuencia absoluta y relativa de un suceso y las propiedades de las frecuencias relativas tienen una gran importancia como base para el estudio de la probabilidad y la estadística por tres motivos, íntimamente relacionados:

- A. Las propiedades de las frecuencias relativas, que pueden observarse empíricamente, son la base de la definición axiomática de la probabilidad, ya que los axiomas son abstracciones de estas propiedades. El cálculo de probabilidades que se deriva de estos axiomas no determina el contenido específico del término probabilidad en cada aplicación particular, sino que su función principal es descubrir, a partir de ciertas probabilidades iniciales dadas,

otras probabilidades implicadas por ellas. Sin embargo, los axiomas pueden usarse para definir implícitamente lo que es la probabilidad, limitando así las posibles interpretaciones de este término. Además, dichos axiomas han contribuido a establecer una base satisfactoria del Cálculo de Probabilidades, dando respuestas a las paradojas e inconsistencias observadas con anterioridad.

- B. La idea de frecuencia relativa es la base de la concepción frecuencial de la probabilidad y sirve de puente entre la estadística y la probabilidad. La inferencia estadística tiene como fin principal la obtención de conclusiones sobre poblaciones a partir de datos obtenidos de muestras de las mismas. Gran parte de los procedimientos estadísticos están basados en hipótesis sobre las distribuciones de probabilidad de las poblaciones subyacentes y su aplicación requiere la estimación del valor particular de los parámetros de dichas distribuciones en los casos particulares. Es precisamente la acepción frecuencial de la probabilidad la que permite justificar esta estimación.
- C. Los teoremas de límite, de tanta importancia en el Cálculo de Probabilidades, están basados en admitir la posibilidad de repetición de un experimento y en las frecuencias relativas o en la distribución de frecuencias. Estos teoremas permiten precisar la idea de convergencia estocástica y proporcionan aproximaciones para distribuciones de probabilidad que de otro modo serían difíciles de calcular. Más recientemente, los teoremas de límite, combinados con las posibilidades informáticas, proporcionan una base para la utilización de la simulación como método de resolución de problemas probabilísticos complejos.

En Batanero y Serrano (1995) hemos analizado cómo el concepto de aleatoriedad lleva implícitas dos ideas matemáticas: repetibilidad de un experimento aleatorio e independencia de los ensayos sucesivos. En el estudio de las frecuencias relativas se encuentran implícitas estas dos exigencias, por lo que su comprensión precisa la de experimento aleatorio. Este ha sido también un aspecto analizado en los libros de texto, cuyos resultados han sido publicados en Ortiz de Haro (1995) y Ortiz de Haro y cols. (1996). Otro punto importante es el desarrollo del razonamiento proporcional en el alumno, puesto que la frecuencia relativa se define precisamente mediante una proporción.

Respecto al estudio de las frecuencias relativas y sus propiedades. Malara (1989) señala los siguientes objetivos que deberían contemplarse para el nivel no universitario:

- Conocimiento del hecho de que puede observarse empíricamente una estabilización gradual de las frecuencias relativas en series de ensayos suficientemente largas. Esto se observa en datos socio-económicos, biológicos, atmosféricos, médicos, etc. que pueden obtenerse en distintos anuarios estadísticos
- Comprensión intuitiva de la idea teórica de convergencia y de las posibilidades que ofrece para la obtención de valores aproximados para las probabilidades, a partir de la observación o simulación de fenómenos aleatorios.
- Apreciación de las ventajas y limitaciones de las estimaciones experimentales de la probabilidad, según las características de las situaciones analizadas

En consecuencia, consideramos que este tema es lo suficientemente fundamental, para que sea deseable su análisis en los libros de texto. En primer lugar hemos diferenciado el tipo de tratamiento que en los textos se da a este tema, pudiéndose encontrar explícito, implícito o no tratarse. Hemos hallado un tratamiento explícito en

[A], [C], [D], [F], [G], [I] y [K] y un tratamiento implícito en [B], [E] y [H]. En [J] no se trata este tema.

### *Significados personales e institucionales de los objetos matemáticos*

Nuestro análisis está basado en un modelo teórico tomado de Godino y Batanero (1994), en el cual se postula que la génesis de los conocimientos del sujeto tiene lugar como consecuencia de su interacción con situaciones-problemas, mediatizada por los contextos institucionales en los que desarrolla su actividad. Generalmente los problemas no aparecen aislados, sino englobados en *campos de problemas* similares, para los cuales puede ser válida una misma solución o soluciones similares.

Cuando los sujetos tratan de resolver un problema, realizan *prácticas* o actuaciones de tipo diverso (representaciones simbólicas o verbales, búsqueda de similitudes con otras situaciones, razonamientos, etc) encaminadas a su solución. En general, al estudio didáctico no le interesan las prácticas esporádicas o aisladas de una sólo persona, sino aquellas prototípicas o *sistema de prácticas asociados a un campo de problemas*. A partir de esta actividad de resolución de problemas, y de la creación del sistema de prácticas asociados, se produce progresivamente la emergencia de los objetos matemáticos, que en un momento dado son reconocidos y nombrados y más tarde serán dotados de propiedades, generalizados y relacionados con otros objetos o bien usados como útiles en la resolución de nuevos problemas.

Por ejemplo, del problema general de predicción del comportamiento a largo plazo de las series de ensayos aleatorios, han surgido las prácticas de registrar los resultados obtenidos en cada experimento de la serie (obtención de datos estadísticos), resumir estos datos en forma de tablas y gráficos y comparar el número de apariciones de cada suceso posible con el total de ensayos. El análisis de las regularidades observadas, así como de la variabilidad intrínseca a los experimentos aleatorios, la introducción de una nomenclatura adecuada, la estandarización de las representaciones usadas han llevado progresivamente a la definición del concepto de frecuencia relativa y al estudio de sus propiedades, así como a la abstracción de este concepto para la posterior definición de la probabilidad.

El sistema de prácticas asociadas a un cierto objeto matemático es lo que Godino y Batanero (1994) denominan *significado del objeto*, por lo cual consideran el significado de un objeto matemático como una entidad compleja. Bajo este supuesto, sería difícil encontrar un alumno que "comprende" o "no comprende" en su totalidad un concepto matemático. Por el contrario, resultaría conveniente identificar los puntos específicos que le resultan asequibles y los que no.

Un punto importante en este desarrollo teórico es el reconocimiento de una doble dimensión en los objetos matemáticos y sus significados: personal e institucional. Puesto que los problemas matemáticos y las prácticas para resolverlos son compartidos en determinadas instituciones, el significado de un determinado objeto es relativo a cada institución en donde tiene un uso. Para el caso de las frecuencias relativas es claro que no es lo mismo comprender este concepto en el nivel de educación secundaria que en un curso avanzado del Cálculo de Probabilidades en la Universidad, donde se exigiría a los alumnos un dominio de los teoremas de límite.

Por otro lado, puesto que las personas se desarrollan en una diversidad de instituciones, el *significado personal* de un cierto objeto matemático para una persona dada puede no estar totalmente de acuerdo con el admitido dentro de una institución de la que es miembro o *significado institucional* del objeto. Es precisamente el interés de una institución por adecuar los significados personales de sus miembros sobre unos ciertos objetos, lo que plantea la problemática didáctica.

Los libros de texto son un medio cuyo análisis nos proporciona un conocimiento del significado fijado dentro de una institución didáctica dada para un cierto concepto. Como hemos indicado, un punto importante en la teorización usada es la consideración del significado de un concepto como una entidad compleja. Por ello conviene analizar separadamente sus componentes o "*elementos de significado*", ya que los elementos específicos contemplados en los diversos textos podrían no ser los mismos o incluso, alguno de ellos pudiera no aparecer en ninguno de los textos, dando como resultado un sesgo en el significado presentado a los alumnos. Para el caso particular de la frecuencia relativa, los elementos de significado que hemos considerado en el análisis de los textos son los siguientes:

1. En un experimento aleatorio realizado  $n$  veces la frecuencia relativa de cada posible suceso  $A$  es el cociente  $nA/n$  entre el número de veces que sucede  $A$  y el número de repeticiones del experimento.
2. La frecuencia relativa de cada suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
3. La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.
4. La frecuencia relativa de la unión de dos sucesos excluyentes es la suma de las frecuencias relativas de estos sucesos.
5. Al aumentar el número de ensayos se produce una convergencia (en sentido estocástico) de la frecuencia relativa hacia un valor constante teórico.

A continuación analizamos la presentación en los libros de texto de este concepto en lo que se refiere a los elementos de significado E1 a E4. Por la importancia de la convergencia estocástica (E5), este elemento de significado se analizará separadamente, analizando las actividades que consideramos convenientes para su adquisición por los alumnos.

La definición de la frecuencia relativa, así como la presentación de sus propiedades suele ser muy similar a la presentada en el siguiente ejemplo (texto [A]): "*Sea un determinado experimento aleatorio, realizado  $N$  veces. Si el suceso aleatorio  $A$  aparece  $n$  veces, se dice que, en la referida muestra de  $N$  pruebas, la frecuencia absoluta del suceso  $A$  es  $n$  y la frecuencia relativa es  $n/N$ .*"(pg.45). Este texto continúa en el apartado 4.5, denominado "*Propiedades de las frecuencias*" con el enunciado y demostración de tres propiedades de la frecuencia relativa: que es un número comprendido entre 0 y 1, la frecuencia relativa del suceso contrario, la frecuencia relativa de la unión de sucesos incompatibles y la de la unión de sucesos compatibles (pg.46).

Otros textos definen la frecuencia relativa y sus propiedades por medio de un ejemplo como [K]. Otras veces el tema se trata en forma implícita. Así en [B] no menciona explícitamente ninguno de esos conceptos, aunque al exponer ejercicios y problemas resueltos, habla del número de veces que ocurre un suceso en un determinado número de repeticiones del experimento: "*De cada 100 veces que saquemos dos bolas de la bolsa, aproximadamente 50 (la mitad) las bolas serán del mismo color.*" (pg.29).

En consecuencia, todos los textos analizados incluyen la definición de frecuencia relativa y sus propiedades, es decir, los cuatro primeros elementos de significado analizados en nuestro estudio. Sin embargo, en un libro sólo se trata el tema a nivel de un ejemplo y en otro la mención al mismo es sólo implícita. A nuestro parecer en estos casos se produce un vacío importante en el tema de la probabilidad, ya que se concede escasa importancia a la base experimental de donde se han abstraído los axiomas de probabilidad y se pierde una ocasión importante de conectar la estadística y la probabilidad.

## ACTIVIDADES IMPLICADAS EN EL ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS

Para analizar la forma en que los libros de texto presentan la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad (E5), hemos tenido en cuenta ocho tipos de actividades que Malara (1989) diferencia y pueden proponerse a los alumnos, relacionados con el estudio de las frecuencias relativas y el enfoque experimental de la probabilidad. Como hemos indicado al describir nuestro modelo teórico, la actividad de resolución de problemas nos parece previa a la conceptualización. Cada una de las siguientes actividades, descritas por Malara, pueden considerarse problemáticas para nuestros alumnos y podría dar lugar en ellos a prácticas significativas en la comprensión de la idea de convergencia estocástica.

- *Estudio de la frecuencia relativa de un suceso en una serie de experimentos, cuando se conoce la probabilidad teórica de los mismos.*
- *Análisis de la variación de la frecuencia relativa al aumentar el número de experiencias.*
- *Enunciado de la ley empírica de los grandes números y confrontamiento con los resultados obtenidos en experimentos realizados por el alumno.*
- *Atribución de probabilidades a sucesos, en base a la frecuencia relativa de un gran número de pruebas.*
- *Presentación de ejemplos del carácter aproximado de esta medida.*
- *Presentación de ejemplos de valoraciones experimentales de la probabilidad a partir de series grandes de experimentos.*
- *Reflexión sobre la inadecuación de la valoración clásica de la probabilidad de un suceso cuando se puede obtener una mejor valoración a partir del conocimiento de tipo estadístico.*
- *Presentación de experimentos sencillos para los cuales no es posible estudiar a priori la probabilidad de los sucesos.*

A continuación analizamos cada uno de estos apartados:

*Estudio de la frecuencia relativa de un suceso en una serie de experimentos, cuando se conoce la probabilidad teórica de los mismos.* Esta actividad permite confrontar los valores esperados con los observados en un conjunto de datos, mostrando la variabilidad asociada a los experimentos. Este aspecto es recogido en [G], [I] y [K]. En [I], dedica una sección completa a las frecuencias absoluta y relativa que denomina "*distribución esperada y distribución empírica*" y estudia la convergencia de la frecuencia relativa hacia la probabilidad teórica, utilizando para ello la idea de distribución esperada y distribución empírica. (pgs.229-236), es decir la idea de variable aleatoria. Esta es una de las ideas estocásticas fundamentales, según Heitele (1975), quien resalta en una variable aleatoria la importancia de los conceptos de distribución y esperanza matemática. Esta última podría ser incluso previa a la idea de probabilidad, aunque es poco tratada en los textos analizados.

Este texto [I] presenta la probabilidad de un suceso como el valor esperado en la variable "frecuencia relativa del suceso en una serie de experimentos". Va mostrando a través de un ejemplo la convergencia de la distribución empírica según aumenta el número de experimentos hacia la distribución teórica (o esperada) (pgs.229-236). Señala que en algunos casos (dado sesgado) no conocemos la distribución esperada, por lo que tendremos que estimarla a partir de un número grande de pruebas: "*Hay ocasiones en que la experiencia aleatoria que se va a realizar tiene unas condiciones de regularidad*

*tales que podemos tener, a priori (antes de hacer ninguna experiencia), la distribución esperada...Pero otras veces no hay ninguna referencia a priori. Sólo la experimentación nos permitirá obtener datos sobre el comportamiento de los distintos sucesos. Los datos obtenidos serán tanto mejores (tanto más fiables) cuanto más larga sea la experimentación."* (pg.231)

Esta presentación no resalta suficientemente, sin embargo dos problemas importantes en la estimación empírica de probabilidades, esto es, en la aproximación frecuencial. En primer lugar, no se especifican con claridad las características específicas de la convergencia aleatoria. Se señala la aproximación gradual de los resultados empíricos a los observados, pero no se hace mención a las fluctuaciones esporádicas que acompañan a esta convergencia. Además, se obvia el hecho de que la idea de regularidad (el principio de indiferencia) es un postulado teórico, lo mismo que la independencia de sucesos, pensada también para aplicar las leyes de límite. Como señala (Steinbring, 1986), incluso en los dispositivos aparentemente más perfectos, como el aparato de Galton puede haber una pequeña dependencia en los sucesivos experimentos. El resto de los libros no recoge este aspecto.

*Análisis de la variación de la frecuencia relativa al aumentar el número de experiencias.* La variabilidad asociada a los experimentos aleatorios no puede suprimirse, pero sí reducirse al aumentar el tamaño de las muestras. Precisamente uno de los sesgos más insistentemente resaltados por autores como Kahneman y cols. (1982), Pérez Echevarría (1988) o Shaughnessy (1992) es la falta de apreciación del efecto del tamaño muestral sobre la variabilidad aleatoria. Incluso en la investigación de Serrano (1993) se encontraron alumnos que pensaban que al aumentar el tamaño de la muestra, la variabilidad aleatoria aumenta, en lugar de disminuir. Por ello creemos que este tipo de situaciones son muy necesarias en la enseñanza para permitir a los alumnos confrontar sus creencias erróneas y ayudarles a superarlas.

[I], a partir de un ejemplo sobre el lanzamiento de un dado, realiza un estudio sobre la frecuencia absoluta y afirma que "*La distribución de frecuencias relativas se parece tanto más a la distribución esperada (distribución teórica) cuanto mayor sea el número de lanzamientos. Y llega a ser casi idéntica si el número de lanzamientos es muy grande*" (pg. 230). Del resto de los libros, sólo [G] analiza la variación de la frecuencia relativa al aumentar el número de experiencias.

*Enunciado de la ley empírica de los grandes números y confrontamiento con los resultados obtenidos en experimentos realizados por el alumno.* Respecto a la convergencia de la frecuencia relativa de un suceso hacia la correspondiente probabilidad teórica, Heitele (1975) señala que es preciso diferenciar entre las leyes empíricas de los grandes números y las correspondientes leyes matemáticas. La primera es observable en la realidad, por ejemplo, al contemplar como cae la lluvia sobre un pavimento. Una regularidad global surge a partir de la aleatoriedad local, o, dicho de otro modo, existe una libertad individual sujeta a una restricción colectiva. Ello hace que las leyes matemáticas de los grandes números -los teoremas de límite- se acepten como modelos matemáticos adecuados a la descripción de estos hechos empíricos. La pregunta de interés didáctico es si es posible separar el modelo de la realidad en un cierto nivel cognitivo de los alumnos. Heitele indica que las posibilidades didácticas que se deducen de las experiencias empíricas son más limitadas de los que sugieren los textos escolares. Las sucesiones aleatorias obtenidas en clase convergen lentamente. Debido a su carácter aleatorio, puede ocurrir que no se obtenga el resultado deseado cuando se quiere mostrar con una simulación una cierta propiedad.

En [I] se plantean situaciones para que los alumnos realicen experimentos y calculen las frecuencias absolutas y relativas. Por ejemplo, al comienzo del tema

(pg.226) propone un juego de lanzamientos de monedas, que da origen a una caminata aleatoria sobre los enteros, y en el que propone estudiar experimentalmente el número de lanzamientos hasta la meta. A partir de los datos recogidos, pide a los alumnos calcular las frecuencias relativas de caras y cruces (usa el término proporción en vez de frecuencia relativa). Propone, asimismo, observar como se aproximan las proporciones de caras y cruces al valor teórico 0.5 según aumenta el número de lanzamientos para alcanzar la meta.

En [K], a partir de un ejemplo consistente en lanzar una moneda cien veces y anotar el resultado, define las frecuencias absoluta y relativa, así como las propiedades de ésta última. Explica que si aumenta el número de lanzamientos, los resultados de las frecuencias relativas *"tenderían a estabilizarse" hacia el valor 0'50, que, como más tarde veremos es la probabilidad del suceso cara o del suceso cruz.*" Concluye afirmando que *"esta estabilización de las frecuencias relativas de un suceso se conoce con el nombre de regularidad estadística."* (pg. 411).

En [G] dedica un apartado a definir las frecuencias absoluta y relativa. Para comentar la estabilidad de la frecuencia relativa, propone dos ejemplos, uno el lanzamiento de una moneda (obtener cara) y otro de lanzamiento de un dado (obtener y leer dos puntos). Presenta, a continuación, dos tablas, una para cada experiencia, donde figuran tres columnas, la primera para el número de pruebas, la segunda para las frecuencias absolutas y la última para las frecuencias relativas. Indica que *"puede observarse que, a medida que se eleva el número de pruebas  $n$ , las frecuencias,  $h$ , "tienden" a estabilizarse alrededor de un valor determinado, que en el caso de las monedas es 0,5, y en el caso de los dados,  $1/6$ ."* (pg.202).

[D] concluye con un comentario sobre la importancia del concepto de la frecuencia relativa y su estabilidad. Así, después de un ejemplo, encontramos: *"La importancia de la frecuencia relativa se deduce de esta ley del azar: Al aumentar el número de experiencias, la frecuencia relativa de un determinado suceso tiende a estabilizarse alrededor de un número que llamaremos probabilidad de dicho suceso."* (pg.76).

En [E], dentro del capítulo de la probabilidad, no dedica ningún apartado al estudio de las frecuencias absoluta y relativa, aunque se refiere a ésta última en algunos momentos. También la menciona en algunos ejercicios propuestos (pg.176), y en la introducción de la definición de probabilidad (pg.177). El resto de los libros no presenta este tipo de actividades.

*Atribución de probabilidades a sucesos, en base a la frecuencia relativa de un gran número de pruebas.* La interpretación frecuencial de la probabilidad, según Nagel (1968), se halla implícita en Aristóteles, aunque no ha llegado a ser relevante en Estadística hasta el siglo pasado. La idea central es que la probabilidad de un suceso se refiere a la frecuencia relativa típica del mismo. La interpretación frecuencial de la probabilidad incorpora la idea de frecuencia relativa, que se omite en las acepciones clásica y subjetiva. Como consecuencia, la probabilidad viene dada por una relación analizable y material, para la que se necesita evidencia empírica. Aunque este método de asignar probabilidades tiene sus dificultades filosóficas, es el único plausible en muchas aplicaciones prácticas.

En [J], no define explícitamente la frecuencia de un suceso, pero la utiliza implícitamente para asignar probabilidades a los sucesos elementales en base a la frecuencia de ocurrencia. Aunque la definición que da de probabilidad es subjetiva, como grado de confianza, sin embargo la asignación de probabilidad sugiere una concepción frecuencial implícita como recogemos a continuación: *"Observa que la zona roja ocupa la cuarta parte del total de la ruleta, y la blanca las tres cuartas partes*



restantes". Es lógico pensar que si repetimos el juego muchísimas veces, aproximadamente la cuarta parte de ellas saldrá Rojo, y las restantes Blanco. Por consiguiente la aplicación frecuencial puede ser la siguiente:

Rojo ----->  $1/4$

Blanco ----->  $3/4$  " (pg.293/294)

Incluso utiliza la palabra aplicación frecuencial para referirse a esta asignación de probabilidades: "efectuamos un reparto proporcional del número 1 entre todos los resultados posibles; a este reparto le llamaremos aplicación frecuencial" (pg.293).

En [H], después del estudio de una partida de ajedrez entre dos personas y los posibles resultados, concluye afirmando que hay dos formas de asignar la probabilidad a un suceso, una en el caso de que todos los resultados sean equiprobables y otra "utilizando la frecuencia relativa del suceso en un número elevado de experiencias. Esta probabilidad requiere la realización del experimento. La denominaremos probabilidad "a posteriori". (pg.197). El resto de los libros no recoge este punto. Presentación de ejemplos del carácter aproximado de esta medida. Este aspecto está recogido en [I] al realizar la diferenciación entre distribución esperada y distribución empírica, pues ello da la idea de que estas dos distribuciones no deben coincidir exactamente, aunque sí en forma aproximada. También se hace una reflexión explícita sobre el carácter aproximado de estas valoraciones

[C] concluye ya en el siguiente apartado denominado " Probabilidad ", comentando la estabilidad de las frecuencias de la siguiente forma: " Según se ha visto, en un experimento aleatorio la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse, a oscilar cada vez menos bruscamente alrededor de un cierto valor. Este valor es posible que lo conozcamos aproximadamente, pero nunca podremos saber su expresión exacta. " (pg.72). El resto de los libros no habla del carácter aproximado de la asignación frecuencial de probabilidades.

*Presentación de ejemplos de valoraciones experimentales de la probabilidad a partir de series grandes de experimentos.*

Para mayor claridad, [G], incluye una gráfica construida con el número de pruebas y las frecuencias relativas de ambos sucesos donde se observa la estabilidad de las frecuencias relativas mencionadas anteriormente. Según los autores "esta tendencia constituye la ley del azar, que dice:

*En series largas de pruebas, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse alrededor de un número" (pg. 202).* El resto de los libros no presenta valoraciones experimentales de la probabilidad.

*Reflexión sobre la inadecuación de la valoración clásica de la probabilidad de un suceso cuando se puede obtener una mejor valoración a partir del conocimiento de tipo estadístico.* No se hace este tipo de reflexión en los libros analizados.

*Presentación de experimentos sencillos para los cuales no es posible estudiar a priori la probabilidad de los sucesos.* El único ejemplo de este tipo que hemos encontrado ha sido en el texto [I], donde en un apartado denominado Revista Matemática, propone una experiencia consistente en lanzar chinchetas, advirtiendo: "Ahora no hay simetría que te ayude. Lo que puedes hacer es dejar caer la chincheta 100 veces (o, con menos trabajo, dejar caer 10 veces 10 de esas chinchetas) y contar las veces que ha caído con la punta hacia arriba. Imagínate que han sido 30 veces. Podrás decir que la probabilidad experimental de que la chincheta quede con la punta hacia arriba es  $30/100 = 3/10$ ." (pg. 240).

Hemos visto a lo largo de esta sección que son pocos los libros de texto que recogen las actividades señaladas por Malara (1989), e incluso que alguna de ellas no aparece en ninguno de los libros analizados. Hay también una notable variabilidad de los textos, ya que, en la mayoría es muy grande la limitación del tipo de actividades relacionadas con el estudio de las frecuencias relativas, aunque también podemos señalar notables excepciones, como los textos [I] y [G] que realizan un estudio muy completo del tema y emplean el enfoque experimental. Finalmente, señalamos que hay un contraste notable entre la limitación de actividades prácticas relacionadas con la frecuencia relativa y la presentación teórica de los elementos de significado E1) a E4) que es mucho más general.

### **IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA**

Un punto a destacar en nuestro estudio es que la mayoría de los libros analizados sigue el esquema teoría-práctica en la presentación de los contenidos, pues los ejemplos y ejercicios se introducen sólo una vez que se ha estudiado las definiciones y propiedades de las frecuencias relativas. Se da también un énfasis excesivo a la teoría, mientras el tipo de situaciones problemáticas presentadas es limitado, respecto a las potencialmente adecuadas en este nivel de enseñanza. Hemos visto, como los elementos de significado de tipo teórico (E1 a E4) son presentados en prácticamente todos los libros y, asimismo, se hace alusión a la convergencia de la frecuencia relativa hacia la probabilidad de modo teórico (E5). Sin embargo, cuando hemos analizados las diversas actividades que Malara (1989) considera necesarias para hacer que el alumno adquiera de una forma práctica una comprensión intuitiva de la convergencia, vemos que estas actividades son incompletas o incluso inexistentes en los textos analizados.

Hay, por tanto, una falta de ejercicios interpretativos, ya que la mayoría de los ejercicios que hemos encontrado en nuestro análisis se reducen al cálculo de frecuencias relativas en series de datos. No hay un análisis experimental del fenómeno de la convergencia, lo que contrasta con la presentación teórica, que es mucho más general. En consecuencia, se presenta a los alumnos las propiedades teóricas de las frecuencias relativas, pero no hay una contrapartida de situaciones problemáticas a partir de las cuales ellos pudieran construir este conocimiento, de acuerdo con nuestro modelo teórico.

Además de estas conclusiones, en nuestro estudio hemos identificado un conjunto de elementos de significado diferenciados en el estudio de la frecuencia relativa que permite destacar la complejidad de comprensión del mismo frente a su aparente simplicidad. Asimismo hemos descrito un conjunto de situaciones problemáticas asociadas al concepto que sería necesario plantear a los alumnos para que ellos adquieran una comprensión intuitiva suficiente del fenómeno de la convergencia durante su educación secundaria.

Ambos puntos tienen interés desde el punto de vista didáctico ya que pueden ser utilizados en la construcción de instrumentos de evaluación, para identificar los aspectos específicos en los cuales los alumnos muestran dificultades de comprensión. Por otro lado, resaltamos la importancia de la identificación de estos elementos para la elaboración de propuestas curriculares en la enseñanza de la probabilidad a nivel de la educación secundaria. Como indica Konold (1995), no es suficiente pedir a los alumnos que hagan previsiones y las comparen con los datos experimentales para cambiar sus concepciones incorrectas, porque raramente se recogen suficientes datos para revelar los patrones probabilísticos. Además, la atención de los alumnos es limitada y la variabilidad del muestreo se suele ignorar. Por ello, la identificación de actividades didácticas fundamentales para la adecuada comprensión de un concepto y faltantes en

los libros de texto y materiales se revela un paso fundamental en elaboración de nuevas propuestas curriculares orientadas a la construcción del conocimiento de los alumnos.

#### **ANEXO I: LISTA DE TEXTOS EMPLEADOS EN EL ESTUDIO.**

- [A]: Valdés, J, y Marsinyach, S.(1975). *Matemáticas Bachillerato 1º*. Madrid: Bruño.
- [B]: Pérez,†J. M.(1977). *Matemáticas BUP 1º*. León: Everest.
- [C]: Etayo, J, y Colera, J. (1978). *Matemáticas 1º*. Salamanca: Anaya.
- [D]: Lazcano, Y. y Barolo, P.(1980). *Matemáticas 1º BUP*. Zaragoza: Edelvives.
- [E]: Peña, J. y Taniguchi, P. (1981). *Matemáticas Bachillerato 1º*. Madrid: Magisterio español.
- [F]: Caruncho, J. Gutiérrez, M. y Gil, J. (1985). *Matemáticas. BUP 1º*. Madrid: Santillana.
- [G]: Negro, A. y Pérez, S, (1986). *Matemáticas, 1º BUP*. Madrid: Alhambra, Reimpresión 1986.
- [H]: Compostela†,B., Gonzalez, A. y otros.(1987). *Matemáticas 1º BUP*. Madrid: Akal.
- [I]: Guzman, M., Colera, J. y Salvador, A. (1988). *Matemáticas, Bachillerato 1º*. Madrid: Anaya.
- [J]: Alvarez, F. y Garcia, C. (1990) . Factor- 1. *BUP 1º*. Barcelona: Ed.Vicens Vives.
- [K]: Vizmanos, J.R., Anzola, M. y Primo, A. (1991). *Funciones 1. Matemáticas 1º BUP*. Madrid: SM.

#### **REFERENCIAS**

- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO.*, 5, 15-28.
- Batanero, C., Serrano, L. y Garfield, J. (1996). Heuristics and biases in secondary students' reasoning about probability. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the XX PME Conference*, (v.2, pp. 43-50).
- Brewer, J. K. (1986). Behavioral statistics textbooks: source of myths and misconceptions?. En R. Davidson y J. Swift (Ed.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 127-131). University of Victoria.
- Chandler, D. G. y Brosnan, P. A. (1995). A comparison between mathematics textbook content and a statewide mathematics proficiency test. *School Science and Mathematics*, 95(3), 118-123.
- Chevallard, Y.(1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée sauvage.
- Cockcroft, W. H.(1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988): *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
- Godino, J. D. y Batanero, M. C.(1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Harwell, M. R. (1994). Evaluating statistics texts used in education and psychology. Comunicación en la *American Educational Research Association*. New Orleans.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: University Press.
- Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.

- Konold, C. (1991). Understanding student's beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed), *Radical constructivism in Mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.
- Konold, C. (1995). Confessions of a coin flipper and would-be instructor. *The American Statistician*, 49(2), 203-209.
- Malara, N. (1989). *Probabilità e statistica nella scuola media. Analisi di alcuni libri di testo*. Progetto strategico del C.N.R. Università di Modena.
- Nagel, E. (1968). Significado de la probabilidad. En J. R. Newnam (Ed.), *Sigma: El mundo de las matemáticas* (pp.186-198). Barcelona: Grijalbo (Edición original inglesa de 1956).
- Navarro-Pelayo, V. (1991): *La enseñanza de la combinatoria en Bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Ortiz de Haro, J. J. (1996). *Significado de conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.
- Ortiz de Haro, J. J. , Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad en los textos de Bachillerato. En L. Berenguer, P. Flores y J. M. Sánchez. (Eds.), *Investigación en el aula de Matemáticas* (pp. 203-209). Universidad de Granada.
- Pérez Echevarría, M. (1988). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: ICI
- Robert, A; Robinet, J.(1989). *Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels*. (IREM).Université Paris VII.
- Romberg, T.A. y Carpenter, T. P. (1988). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 850-869). New York: Mac Millan.
- Sanz, I. (1994). *La construcción del lenguaje matemático a través de los textos escolares. Las configuraciones gráficas de datos*. Tesis Doctoral. Universidad del País Vasco.
- Serrano, L. (1993). *Aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad y conceptos elementales sobre procesos estocásticos: Un estudio de concepciones iniciales*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.
- Serrano, L., Batanero C. y Ortiz, J. J (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de Bachillerato. *SUMA*, 22, 43-50
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grows(Ed): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Mac Millan, 465-494.
- Steimbring, H. (1986). L'independance stochastique. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 7(3), 5 - 49.