RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN LA VIDA COTIDIANA: UN DESAFÍO EDUCATIVO[1]

Carmen Batanero

Universidad de Granada, España

batanero@ugr.es

RESUMEN

El azar es inherente a nuestras vidas y aparece en múltiples situaciones cotidianas o de la vida profesional. Pero las intuiciones en probabilidad con frecuencia nos engañan y una enseñanza formal es insuficiente para superar los sesgos de razonamiento que pueden llevar a decisiones incorrectas. En este trabajo defendemos la necesidad reforzar la formación del razonamiento probabilístico en la educación primaria y secundaria y proporcionar con ello a los alumnos un instrumento que oriente la acción ante la incertidumbre.

1. Introducción

Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos no universitarios en los últimos 20 años, encontramos una tendencia reciente a renovar su enseñanza, haciéndola más experimental, en forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde su infancia (e.g., M.E.C., 1992; N.C.T.M. 2000, SEP; 2006). Estos cambios nos llevan a reflexionar sobre la naturaleza de la probabilidad, y los fines de su enseñanza en la educación obligatoria, que son dos principalmente:

- La probabilidad es parte de la matemática y base de otras disciplinas.
- La probabilidad es esencial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (Bennet, 1998).

Estas dos razones, no completamente separadas, debieran orientar el contenido y la

[1] En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. ISBN: 84-688-0573-4 . CD ROM

metodología de la acción didáctica, aunque con frecuencia nos centramos en la primera de ellas, suponiendo que de ella se derivará la segunda (Gal, 2005). En este trabajo queremos reflexionar sobre las situaciones aleatorias de la vida cotidiana, que suelen ser más complejas que los problemas escolares presentados en la enseñanza de la probabilidad. Finalizamos sugiriendo el interés de mostrar una amplia gama de aplicaciones de la probabilidad, sobre todo en la enseñanza secundaria, y de reforzar en el desarrollo del razonamiento probabilístico para la vida real.

2. **Probabilidad en la enseñanza no universitaria**

Una mirada a los diseños curriculares de matemáticas para la Educación Primaria y Secundaria nos indica un cambio, en las dos últimas décadas. Centrándonos en las orientaciones curriculares de la Junta de Andalucía para la Enseñanza Primaria, aunque la probabilidad por si misma no figura como bloque de contenido, encontramos las siguientes indicaciones para el tercer ciclo: "*En este ciclo conviene aprovechar el interés que suelen suscitar en los niños las situaciones donde ha de analizarse y preverse la probabilidad de un suceso o repetición de un elemento. Siempre en un tono investigativo y lúdico pueden proponérseles actividades tendentes a discriminar lo seguro, lo posible. lo probable. etc.*" (Junta de Andalucía, 1992, pg. 111).

El carácter marcadamente experimental de la metodología sugerida se muestra en las siguientes recomendaciones: "*Igualmente importantes resultan las actividades experimentales sobre modelos de probabilidad. Se plantea a los alumnos, por ejemplo, una experiencia práctica probabilística y se les invita a que aventuren resultados. Luego anotarán lo que sucede a medida que realizan la actividad e irán descubriendo progresivamente que puede saberse qué suceso es más probable y "cuánto" más probable es. No se abordará el conocimiento de las fórmulas ni que los niños y las niñas realicen cálculos probabilísticos desvinculados de la realidad, sino que exploren sucesos y situaciones bajo esta dimensión matemática*" (pg. 119). Todo ello se resume en los siguientes contenidos: "*Aproximación a la noción de probabilidad. Exploración del grado de probabilidad de sucesos sencillos*" (pg. 126).

Respecto a la Educación Secundaria Obligatoria (Junta de Andalucía 1992 b) las propuestas son mucho más detalladas, incluyendo dentro del bloque de tratamiento de la información, las siguientes orientaciones: "*Estimación y medición de la probabilidad de distintos tipos de sucesos mediante experimentación reiterada y, aplicando la Ley de Laplace, en los casos equiprobables y Resolución de problemas de probabilidad condicionada* "(p. 19). Se sugiere usar el ordenador y experimentar con muestras de tamaño creciente, de modo que se vaya tomando consciencia de la estabilización de las frecuencias relativas a medida que aumenta el número de pruebas para introducir gradualmente la aproximación frecuencial a la probabilidad. La aplicación de la regla de Laplace irá precedida del análisis previo del experimento. Se sugiere que las alumnas y los alumnos lleguen a comprender que la toma de decisiones en el estudio de los fenómenos aleatorios es algo que se puede sistematizar y que, además de la probabilidad, interviene la ganancia o pérdida asociada, lo que puede llevar a introducir la noción de esperanza matemática. Orientaciones similares pueden encontrarse en otros diseños curriculares, como los del NCTM (2000) o SEP (2006) y la incidencia del tema en algunas especialidades de Bachillerato es aún mayor, llegándose al estudio de las variables aleatorias discretas y continuas, incluyendo las distribuciones binomial y normal.

Pensamos que estas orientaciones y las sugerencias sobre uso de diversos contextos (no sólo juegos de azar) posibilita el introducir a los estudiantes de los últimos años de la educación secundaria obligatoria y Bachillerato en problemas interesantes de toma de decisión y previsión, relacionados con problemas a los que tendrán que enfrentarse a lo largo de la vida. En lo que sigue analizamos las características de estas situaciones y mostramos algunos ejemplos de las posibles consecuencias de un pobre razonamiento probabilístico.

3. Probabilidad en la vida cotidiana

El azar está presente en la vida cotidiana en muchos contextos en los que aparecen nociones de incertidumbre, riesgo y probabilidad, por ejemplo, el pronóstico del tiempo, diagnóstico médico, estudio de la posibilidad de tomar un seguro de vida o efectuar una inversión, evaluación de un estudiante, etc. No sólo los profesionales, sino cualquier persona ha de reaccionar a mensajes en que aparecen estos elementos, tomar decisiones que le pueden afectar, emitir juicios sobre relación entre sucesos o efectuar inferencias y predicciones (Gigerenzer, 2002). En estas situaciones la probabilidad no es una propiedad física tangible- por tanto objetiva de los sucesos que nos afectan (como sería el peso, color, superficie, temperatura) sino una percepción o grado de creencia en la verosimilitud de la persona que asigna la probabilidad sobre la plausibilidad de ocurrencia del suceso (que ocurrirá o no).

Tabla 1. Elementos que Caracterizan los Diferentes Significados de la Probabilidad

SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD	PROBLEMAS ANALIZADOS	PROCEDIMIENTOS DE ASIGNACIÓN	LENGUAJE	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
Intuitivo	- Sorteos - Adivinación	- Manipulación de generadores de azar: dados, cartas...	- Lenguaje ordinario	-Opinión Impredecible, creencia	- Suerte - Destino
Clásica	- Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar	- Combinatoria - Proporciones - Análisis a priori de la estructura del experimento	- Triángulo aritmético - Listados de sucesos - Fórmulas combinatorias	- Cociente de casos favorables y posibles - Equiprobabilidad de sucesos simples	- Esperanza - Equitatividad - Independen-cia
Frecuencial	-Estimación de parámetros en poblaciones	- Registros de datos estadísticos a posteriori - Ajuste de curvas matemáticas - Análisis matemático -Simulación	- Tablas y gráficos estadísticos - Curvas de densidad - Tablas de números aleatorios - Tablas de distribuciones	- Límite de las frecuencias relativas - Carácter objetivo basado en la evidencia empírica	- Frecuencia relativa - Universo - Variable aleatoria - Distribución de probabilidad
Subjetiva	- Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	-Teorema de Bayes -Asignación subjetiva de probabilidades	-Expresión de la probabilidad condicional	- Carácter Subjetivo - Revisable con la experiencia	- Probabilidad condicional - Distribuciones a priori y a posteriori
Axiomática	- Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos	- Teoría de conjuntos -Álgebra de conjuntos -Teoría de la medida	-Símbolos conjuntistas	- Función medible	-Espacio muestral -Espacio de probabilidad -Conjuntos de Borel

La elusividad del concepto de probabilidad se debe, por un lado a sus diversos significados que afectan al tipo de problemas que se resuelven, la forma de asignar probabilidades e incluso sus propiedades, conceptos relacionados y terminología y que resumimos en la Tabla 1 (Batanero, 2005). El significado matemático-axiomático es un significado estructural, que responde a una problemática de organización y estructuración de los restantes significados parciales de la probabilidad. Por otro lado, en la vida real estos significados aparecen con frecuencia mezclados en la misma situación.

Muchos de estos problemas (toma de decisión, efectuar un juicio o una predicción) son abiertos o tienen más de una posible decisión y en su solución intervienen tanto factores matemáticos como extra matemáticos. Entre ellos, encontramos la posible utilidad de una decisión, que no siempre coincide con su esperanza matemática; por ejemplo, al jugar a la lotería, quinielas u otros juegos de azar la esperanza matemática es negativa para los jugadores. El juego se explica porque la utilidad de una posible aunque muy improbable ganancia de una gran apuesta es mayor que la utilidad de una muy probable, pero pequeña ganancia.

Por otro lado, en las decisiones y juicios de probabilidad en la vida cotidiana nos dejamos llevar por la intuición que con frecuencia nos engaña y cometemos falacias que no se suelen corregir simplemente con un aprendizaje formal de la probabilidad (Shaughnessy, 1986). En lo que sigue analizamos algunos ejemplos.

3.1. La falacia del fiscal

Supongamos que se ha cometido un robo y se encuentra una muestra de material genético (como sangre). en la escena del crimen. Esta muestra se compara con los datos disponibles en 20000 casos de los registros policiales y se encuentra una coincidencia entre el ADN de la muestra y el de la persona A, cuyos datos figuran en los registros. Supongamos que la probabilidad de encontrar una persona al azar con este tipo de ADN es solo 1 entre 10,000. ¿Podemos considerar que la persona A es la culpable del robo?

¡Por supuesto que no! La probabilidad de que entre los 20000 casos comprobados aparezca al menos una coincidencia con el ADN de la muestra es bastante alta, exactamente

$1-\left(1-\frac{1}{10000}\right)^{20000} \approx 86\%$. Sería equivocado condenar a la persona A sólo con esta evidencia. Sin embargo, este error, conocido como *falacia del fiscal*, aparece con frecuencia en procesos judiciales o en la prensa. Por ejemplo, el diario el País publicó en Septiembre de 2003 una noticia sobre el resultado del análisis del ADN de restos hallados en el cuerpo de Sonia Carabantes, afirmando que la probabilidad de que dichos restos pertenecieran a la misma persona que había dejado sus huellas genéticas en un cigarrillo encontrado junto al cadáver de Rocío Wanninkhof era 99.999997 % . La razón es que, al cotejar la policía la muestra con sus archivos encontró que una coincidencia con los encontrados en el citado cigarrillo (Corberán y Montes, 2003). Es posible que otros tipos de evidencia involucrasen a la misma persona en los dos casos, pero la probabilidad calculada por el diario el País era incorrecta. Algunos fallos en el razonamiento (en general al razonamiento que lleva a la falacia del fiscal son):

- Tomar una persona o un caso de los archivos policiales no es lo mismo que tomar una persona al azar de la población; es posible que no se cumpla el supuesto de independencia.
- Se ha invertido una probabilidad condicionada. Consideremos los sucesos: A “poseer un cierto DNA” y B “elegir una persona al azar de la población”. Podemos, a partir de ellos, calcular dos probabilidades condicionales *P(A/B),* “tomado un sujeto al azar en la población, que esta persona posea el DNA dado”, y *P (B/A):* “tomado un cierto DNA, que una persona tomada al azar de la población lo tenga”. La probabilidad calculada por el diario el Pais fue *1- P(B/A),* dada que la persona implicada en el caso Carabantes tiene el DNA estudiado, probabilidad de que esta persona no fuese una persona cualquiera, tomada al azar de la población. Puesto que la probabilidad es muy alta, *P(noB/A)=1-P(B/A)= 99.999997%* la consecuencia deducida fue que la persona no era aleatoria, sino la misma implicada en el caso anterior.

En el caso comentado, es posible que hubiese otras evidencias que involucrasen a la misma persona en ambos delitos; el comentario hecho anteriormente se refiere solamente al cálculo de probabilidades realizado en un periódico de tirada nacional, que muestra un ejemplo de la llamada *falacia de la condicional transpuesta* (Falk, 1989), que consiste en confundir las dos probabilidades condicionales P(A/B) y P (B/A). Sin embargo, la falacia del fiscal ha llevado en algunos casos célebres a procesar a un inocente (Schuman, 1987).

Uno de ellos ocurrió en 1964, cuando una mujer mayor, que caminaba de regreso a su casa en un suburbio de la ciudad de Los Angeles, fue asaltada por una joven rubia con cola de caballo. La joven fue vista poco después en un coche amarillo conducido por un hombre negro con barba y bigote. La policía de Los Angeles detuvo a Janet Collins, rubia, que se peinaba con cola de caballo y tenía un amigo negro con barba y bigote, que era poseedor de un coche amarillo. El fiscal argumentó que la probabilidad de encontrar en Los Angeles una pareja que tuviese todas las características citadas era sólo 1/12000000, y esto probaba la culpabilidad de los detenidos. Afortunadamente el defensor, utilizando datos estadísticos de las frecuencias de las características de la pareja (por ejemplo, frecuencia de coches amarillos) probó que la probabilidad de encontrar el menos otra pareja más con las mismas características en la ciudad de Los Angeles era 0,1836, que no puede considerarse un suceso raro. Joan Collins fue absuelta por falta de evidencia

En otros casos los procesados fueron menos afortunados. Por ejemplo, Sally Clark, fue acusada en el Reino Unido de asesinar a sus hijos cuando dos de ellos sufrieron sucesivamente de muerte súbita en el recién nacido. Sally fue separada de su familia y estuvo en prisión durante tres años, hasta que un juez decidió revisar todos los casos de muerte súbita y observó que cada año en el Reino Unido aproximadamente 50 matrimonios que habían perdido un hijo por muerte súbita, perdían un segundo. Sally Clark fue entonces declarada inocente, aunque nadie le pudo devolver los tres años de vida familiar perdida.

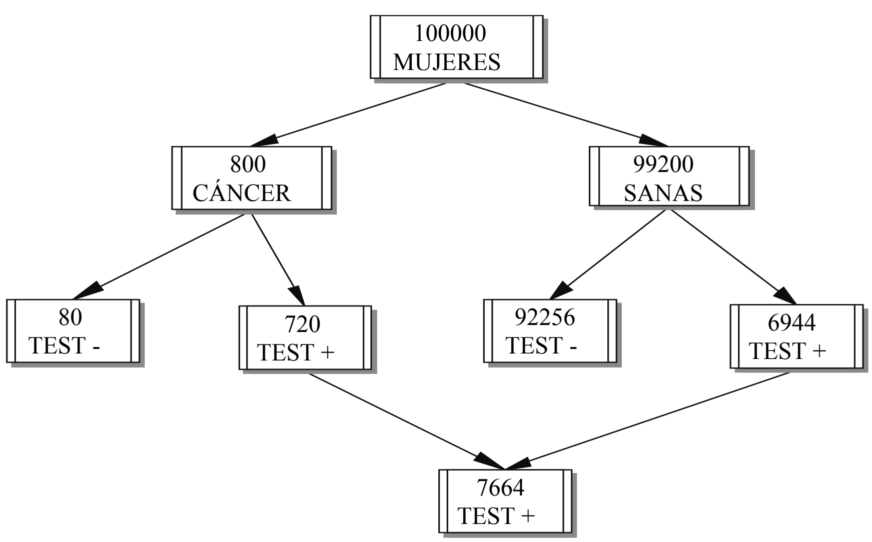
3.2. Evaluación de riesgos médicos en las pruebas de prevención masivas

Otro ejemplo de confusión de una probabilidad condicional y su transpuesta aparece en la situaciones de diagnóstico médico, donde estas probabilidades pueden ser substancialmente diferentes, sobre todos en los casos de campañas masivas, donde toda una población es sujeta a pruebas médicas preventivas. Uno de los casos recientemente controvertidos es el de la política de realizar mamografías anuales a las mujeres a partir de los 40 años. En lo que sigue comentaremos este caso, para este grupo de edad, restringiéndonos a las que no presentan ningún otro síntoma, ni antecedentes familiares o de otro tipo que pudieran indicar mayor probabilidad de cáncer entre 40 y 49 años; las probabilidades en mujeres mayores o de otras características pudieran variar.

Para el caso de una mujer americana de entre 40 y 50 años sin síntomas, tenga cáncer de pecho es 0,8 %. Si una mujer tiene cáncer de pecho tendrá una mamografía positiva con probabilidad 90%. También el 7% de mujeres sanas dan positivo en la mamografía. Supongamos que una mamografía da positiva, ¿Cuál es la probabilidad de que la mujer en realidad tenga cáncer de pecho? (Eddy, 1982).

La persona que recibe este resultado positivo pudiera recibir un sobresalto, al pensar que estas probabilidades son altas, o no diferenciar las probabilidades condicionales: "tener la mamografía positiva si se tiene cáncer de pecho" y "tener cáncer de pecho, si se tiene la mamografía positiva. Calculemos esta segunda probabilidad, ayudándonos de un esquema en forma de árbol y pensando en términos de frecuencias absolutas, para lo cual consideraremos un grupo de 100000 mujeres de estas características (Figura 1). Con la proporción supuesta de cáncer en la población, aproximadamente 800 de estas mujeres estarían enfermas y de ellas 720 serían detectadas en la mamografía (90%). El 7 % de ellas recibirían un resultado positivo, aunque estén sanas (falso positivo), lo que supone un total de 6944 mujeres. En total tenemos 7664 mamografías positivas en las 100000 mujeres, aproximadamente, la mayor parte de las cuales son, en realidad de personas sanas,

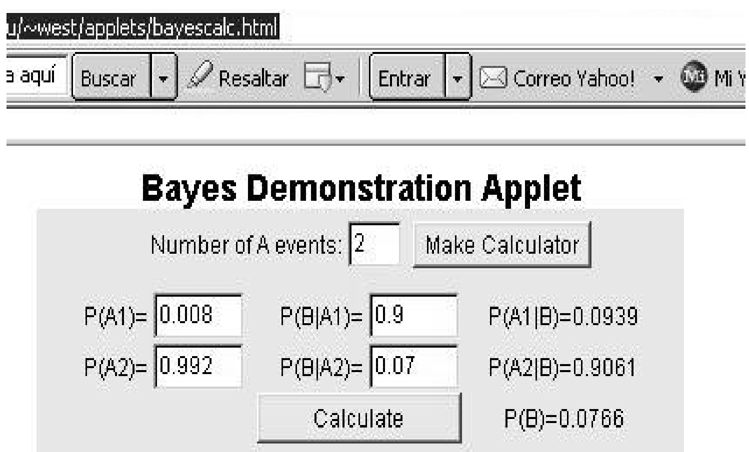
Figura 1. Partición de la población supuesta de 100000 mujeres



Aplicando simplemente la regla de Laplace, obtenemos que la probabilidad de que la mujer que reciba el resultado positivo realmente tenga un cáncer es el cociente 720/7664 que da un valor de 0,0939; es decir, solo el 9% de las mujeres que obtienen una mamografía positiva en este grupo de edad realmente están enfermas.

El resultado puede parecer sorprendente y es debido a la alta tasa de mujeres sanas en la población que anualmente se realizan la prueba, lo que lleva al número tan grande de falsos positivos. Por otro lado, incluso para las mujeres con cáncer la prueba no es concluyente, pues aproximadamente un 10% de casos queda sin detectar (falsos negativos). Las probabilidades podrían ser muy diferentes si la tasa de enfermos en la población fuese mayor (por ejemplo, si se tratase de detectar la gripe, o si la probabilidad de falso positivo fuese menor (por ejemplo en mujeres de mayor edad). Se puede explorar como cambia el resultado, usando algunos applets disponibles en Internet, como el que mostramos en la Figura 2.

Figura 2. Applet de demostración del teorema de Bayes



La decisión de someterse o no a una mamografía anualmente a partir de los 40 años, en principio debiera ser tomada por las mujeres, con conocimiento suficiente de las posibles consecuencias de tomar o no la mamografía y sus probabilidades. Con frecuencia los médicos toman la decisión sin contar con la opinión de las mujeres y desconocen o no informan a éstas de los posibles riesgos. En la situación citada, el riesgo posible de no someterse a examen es tener un cáncer no diagnosticado (con probabilidad 0,8%). Hay diferentes riesgos de someterse a la prueba (Gigerenzer, 2002): En primer lugar, un falso positivo (probabilidad del 7%) podría llevar a una biopsia o incluso un tratamiento médico innecesario, aparte del estrés de la persona hasta que se confirma que no existe el supuesto cáncer. Hay que tener también en cuenta que si una mujer en el periodo 40-49 años se somete a 10 mamografías, la probabilidad de un falso positivo crece notablemente, sería exactamente igual a $1-(1-0,07)^{10} \approx 51,6\%$, lo que significa que ¡¡la mitad de estas mujeres tendrán un falso positivo en el periodo!!

Para acabar de complicar las cosas, la radiación a que la mujer se ve sometida durante la mamografía es acumulativa y pudiera (aunque con muy pequeña probabilidad) inducir un cáncer de pecho en la mujer en los siguientes 20 años desde que empieza el screening anual. Los defensores de las mamografías anuales insisten en los supuestos beneficios y en la reducción de las muertes (o la prolongación de la vida de la enferma) desde que se detecta el cáncer; pero de hecho el número de cánceres de pecho está aumentando notablemente. En todo caso, la prestigiosa revista Lancet publicó un estudio donde se pone en duda el supuesto beneficio de la mamografía anual en este grupo de edad (Gotzsche y Olsen, 2000). Las conclusiones de este estudio y otros que lo analizan puede resumirse en la recomendación de López Ruano y cols., (2002): *"Resumiendo: debería informarse a toda mujer con riesgo medio de padecer cáncer de mama cuya edad esté comprendida entre 40 y 49 años y que desee someterse a mamografía, que los estudios que existen en la actualidad son contradictorios, y que en el mejor de los casos se necesitan realizar entre 500 y 1.500 mamografías durante 10 años para prevenir una muerte por cáncer de mama. Idealmente, para mejorar su capacidad de decisión, también debería ser informada de los riesgos potenciales en el caso de un falso positivo"* (pg. 517).

4¿Por qué nos engaña la intuición sobre la probabilidad?

Los dos ejemplos analizados muestran drásticamente las potenciales consecuencias de una pobre intuición sobre la probabilidad y la importancia de las posibles decisiones que tomamos en situaciones de incertidumbre. Como sostuvo Fischbein (1975) la distinción entre el azar y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales, porque está influenciada por las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna, que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas. La investigación en didáctica de la probabilidad muestra la prevalencia de estas intuiciones erróneas (Shaughnessy, 1992; Jones, 2005).

Además, los conceptos probabilísticos, incluso los aparentemente simples, son altamente complejos, porque cada uno de ellos describe un continuo, están conectados entre sí, y su comprensión requiere un periodo dilatado, que habitualmente no se tiene en cuenta (Gal, 2005). Consideremos, por ejemplo, el siguiente ítem, usado en las investigaciones de Green (1991) con chicos de 11 a 16 años para evaluar su percepción de la aleatoriedad.

> **Ítem 1**. Se pidió a dos niñas lanzar una moneda equilibrada 150 veces y anotaran los resultados. Estos son los datos que presentaron al profesor:
>
> Clara: c+c++cc++cc+c+c++c++c+ccc+++ ccc++c++c+c+c++cc+ccc+c+c+cc+++c
> c++c+c++cc+c++cc+c++cc+cc+c+++c ++cc++c++c+c+cc+c++cc+c+c++cc
> c+cc++c+c++cc+++c+++c+c++ccc++
>
> Luisa: +cc+++c++++c+cc+++cc+cc+++cc+ccc+++c++++++c+c+c+c++++cccccc+
> ccc+c+cc+ccccc+ccc++ccc+c+cccc ccccc++c+ccccccc+++++cccc++c+
> c+cc+cc+cc++++++c+cc++ccc++ccc
>
> ¿Hicieron trampas Clara o Luisa? ¿Por qué?

La respuesta no es sencilla, incluso cuando el experimento aleatorio es el más sencillo posible, sólo con dos sucesos equiprobables. Ello es debido a que no es fácil encontrar una definición exacta que podamos aplicar para decidir con seguridad si una o las dos secuencias de resultados son aleatorias[2]. Una de las estrategias que siguen los estudiantes para resolver el problema anterior, es contar el número de caras de cada una de las secuencias y comparar con el número esperado (75 caras si consideramos que la moneda está bien equilibrada). Nosotros hemos realizado este recuento, presentando los resultados en la Tabla 2.

---

[2] Mientras que podemos, por el contrario, aplicar definiciones que nos permitan reconocer si un objeto geométrico es un poliedro o si una función es biyectiva, por citar algunos ejemplos.

Tabla 2. Resultados teóricos y observados en el ítem 1

	Cara	Cruz
Clara	72	78
Luisa	67	83
Teórica	75	75

Observamos que ningunas de las dos secuencias tiene una frecuencia de caras y cruces exactamente igual a la esperada (teórica), pero, de todos modos, si se hubiese obtenido exactamente la frecuencia teórica, nos hubiese resultado sospechoso. Esperamos que la frecuencia observada (de Clara y Luisa) se asemeje a la teórica, pero no demasiado. ¿Cuánta es la diferencia que aceptamos? Intuitivamente parece que Luisa se aparta demasiado y, por tanto, hizo trampas.

Continuando el análisis, analizamos la frecuencia de resultados posibles cuando contamos los resultados de dos en dos o tres en tres (Tablas 3 y 4). Ahora se observa más claramente la mayor diferencia de Clara respecto a la distribución teórica (por ejemplo, nunca obtiene tres caras seguidas, cuando teóricamente se esperarían 6 rachas de este tipo).

Tabla 3. Frecuencias de posibles sucesos al contar los resultados 2 a 2

	CC	C+	+C	++
Clara	12	30	18	15
Luisa	25	21	12	17
Teórica	19	19	19	19

Tabla 4. Frecuencias de posibles sucesos al contar los resultados 3 a 3

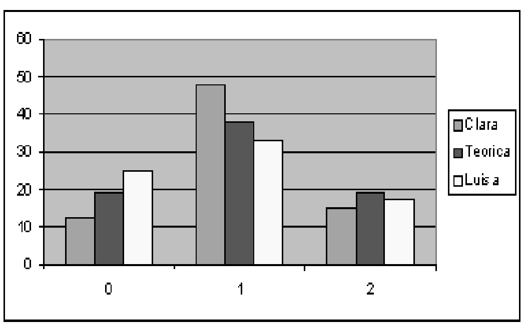
	CCC	CC+	C+C	C+C	+CC	+C+	++C	+++
Clara	0	2	13	9	6	7	10	1
Luisa	8	11	6	3	6	4	5	6
Teórica	6	6	6	6	6	6	6	6

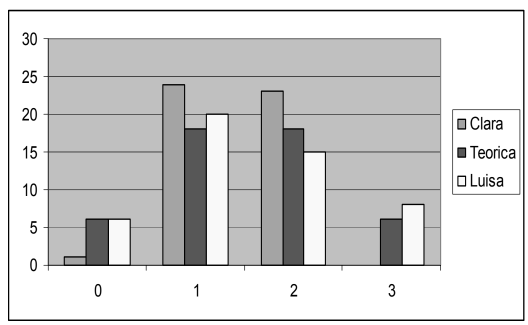
También podemos ver que Clara se aparta más que Luisa de lo esperado al representar gráficamente el número de caras obtenidas en cada dos o tres lanzamientos en las tres secuencias (Figura 3).

Este estudio, que hemos hecho en forma elemental, estaría al alcance de los alumnos de secundaria (podría hacerse a nivel más formal, en la universidad utilizando el contraste chi-cuadrado). A nosotros nos sirve para reflexionar que la idea de aleatoriedad, base de la estadística, no tiene una definición sencilla. Por un lado, aleatoriedad puede considerarse como ausencia de modelos, pero, al analizar una secuencia de resultados aleatorios, observamos que aparecen una multitud de modelos, como el de convergencia de las frecuencias relativas, el producto de experimentos o la distribución binomial.

Además, para poder rechazar con fundamento alguna de las secuencias anteriores como aleatorias, deberíamos hacer un contraste de hipótesis y ver si resulta estadísticamente significativo. Pero un contraste de hipótesis es una idea estocástica avanzada y su comprensión requiere la comprensión previa de la idea de aleatoriedad. Llegamos así a una situación circular.

Figura 3. Número de caras en dos y en tres lanzamientos en las secuencias





Por otro lado, la historia de la probabilidad está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes (Székely, 1986; Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los alumnos, quienes deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo. Si el profesor de matemáticas que debe enseñar probabilidad a sus alumnos no es consciente de esta problemática, difícilmente podrá comprender algunas dificultades de sus estudiantes, quienes encuentran a lo largo de su aprendizaje las mismas paradojas y situaciones contraintuivas que aparecieron en el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades.

5. Implicaciones para la enseñanza de la probabilidad

Una mirada a la historia permite también tomar conciencia del lento desarrollo de la probabilidad como concepto matemático y de los múltiples significados que todavía hoy recibe, algunos de los cuáles hemos resumido en la Tabla 2 (Batanero, 2005). En consecuencia, la probabilidad ha de presentarse desde sus diferentes perspectivas, que están ligadas dialécticamente, y cada una de las cuáles aporta una parte a la comprensión global del concepto: razón a priori de posibilidades a favor y en contra, evidencia proporcionada por los datos, grado de creencia personal y modelo matemático que nos ayuda a comprender la realidad.

Los ejemplos analizados indican la importancia de que la enseñanza de la probabilidad sirva para educar el razonamiento probabilístico necesario para enfrentarse al azar en la vida cotidiana y mejorar las intuiciones de los estudiantes. El estado actual de la tecnología permite las simulaciones y los experimentos, que ayudan a los estudiantes a resolver las paradojas que se presentan incluso en problemas de probabilidad aparentemente sencillos y podrían servir para explorar situaciones probabilísticas de la vida real, sin necesidad de un gran nivel de formalización. Algunos de estos recursos (en castellano) se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5. Recursos para explorar la probabilidad en Internet

Actividades para la clase	http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0224-04/ed99-0224-04.html
CICA	http://thales.cica.es./rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html
Descartes	http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Azar_y_probabilidad/index.htm#obje
Fermatsi	http://www.fermatsi.org/ProbBachExpeAleaProb.htm
Juego 3 puertas	http://www.dpye.iimas.unam.mx/proyectos/puertas/puertas.html
Probabilidad y estadística	http://www.cete-sonora.gob.mx/AFDA/recursos/mat/moe/galerie/wstat1/wstat1.html
Statmedia	http://www.ub.es/stat/docencia/Software/Statmedia/Welcome.html

Por supuesto que un enfoque experimental puro de la enseñanza de la probabilidad no es suficiente. Incluso cuando la simulación nos ayuda a encontrar las solución de problemas de probabilidad que surgen de la vida real, no puede probar que esta solución es la más adecuada, porque la simulación depende de las hipótesis establecidas de antemano y del modelo teórico que implementamos en el ordenador. Un conocimiento genuino de probabilidad solo se alcanza con el estudio de alguna probabilidad formal, aunque este estudio debe ser gradual y apoyado en la experiencia estocástica de los estudiantes. Es importante también mostrar aplicaciones que vayan más allá de la teoría de juegos; en Godino y cols. (1987) presentamos una variedad de aplicaciones reales de la probabilidad con actividades sencillas que permite introducir los conceptos de una manera gradual a lo largo de la educación obligatoria.

Algunos profesores se preguntan si merece la pena dedicar más tiempo a la enseñanza de la probabilidad, y si no sería mejor insistir en otros temas matemáticos que pudieran tener mayor aplicación. Para finalizar les remitiré a las palabras de Laplace (1986/1825, pp. 206-207): *La teoría de la probabilidad es el en fondo nada más que sentido común reducido a cálculo; nos permite apreciar con exactitud aquello que las mentes rigurosas pueden sentir con una especie de instinto que a veces no pueden explicar; nos enseña a evitar las ilusiones que con frecuencia nos engañan,... no hay ciencia más digna de nuestra contemplación, ni más útil para ser incluida en nuestro sistema de enseñanza pública".*

Agradecimiento. Este trabajo es parte del SEJ2004-00789, Madrid, MCYT y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime,* 8(3), 247-264.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Nueva York: Springer

Bennet, D. J. (1998). *Randomness.* New York: Cambridge University Press.

Corberán, A. y Montes, F. (2004). *La falacia del fiscal y el caso Sonia Carabantes***.** Universidad de Valencia.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* (New York: Cambridge University Press).

Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probabilities. In R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education: The teaching of statistics* (Vol. 7, pp. 175–184). Paris: UNESCO.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Gal, I. (2005). Democratic access to probability: Issues of probability literacy. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-64). Nueva York: Springer.

Gigerenzer, G. (2002). Reckoning with risk. Londres: Penguin Books .

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Gotzsche P. y Olsen, O. (2000). Is screening for breast cancer with mammography justifiable? *Lancet* 355, 129-34.

Green, D. R. (1991). A Longitudinal study of children=s probability concepts. En D. Vere-Jones (Wd.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320-328), International Statistical Institute, Voorburg.

Henry, M. (1997). L'enseignement des statistiques et des probabilities. En P. Legrand (Coord.), *Profession enseignant: Les maths en collège et en lycée* (pp. 254-273). Paris: Hachette-Éducation.

Jones, J. (Ed.) (2005). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning.* New York: Springer.

Laplace P. S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial (Trabajo original publicado en 1814).

López Ruano, P. Hernández Núñez, J. Caballos Villar, D. y Álvarez Montero, S. (2002). Mamografía en el diagnóstico precoz de cáncer de mama en mujeres de 40-49 años con riesgo medio de padecer la enfermedad. *Medifam*, 12 (8), 71-74.

Junta de Andalucía, Consejería de Educación y Ciencia (1992 a). *Orientaciones para la secuenciación de contenidos.* Colección de materiales curriculares para la Educación Primaria. Sevilla.

Junta de Andalucía, Consejería de Educación y Ciencia (1992 b). *Area de Matemáticas. Educación Secundaria Obligatoria*. Sevilla.

M.E.C. (1992). *Decretos de Enseñanza Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA; N.C.T.M. Disponible en Internet http://standards.nctm.org/

Schumann, E. (1987). Interpretation of statistical evidence in criminal trials: The prosecutor's fallacy and the defense attorney's fallacy. *Law and Human Behavior*, 11, 167-187.

SEP (2006). *Programa de estudio, educación secundaria.* Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.

Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics.* Dordrecht, the Netherlands: Reidel.