INFLUENCIA DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y COMBINATORIO Y DE CREENCIAS SUBJETIVAS EN LAS INTUICIONES PROBABILÍSTICAS PRIMARIAS

M. Jesús Cañizares

Tesis Doctoral

Directora: Dra. Carmen Batanero Bernabeu

GRANADA, 1997

INDICE

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas cuya enseñanza ha estado más influida por las teorías de Piaget ha sido la probabilidad. Piaget concebía el azar como complementario a la noción de causa y como composición de operaciones de mezcla no reversibles de mecanismos causales entre un conjunto de posibilidades de las que sólo algunas estarían presentes en cada suceso aleatorio particular. El azar sería, por tanto, un dominio complementario de la composición lógica, y no podría ser adquirido hasta que se constituyan las operaciones reversibles, por comparación con ellas. Sólo con la posesión de un esquema combinatorio capaz de considerar el conjunto de posibilidades y la proporción de los casos favorables a un suceso dado con el total de las mismas, aparece la idea de probabilidad. Por tanto, para Piaget la comprensión de la idea de azar y probabilidad requiere la adquisición de razonamiento combinatorio y proporcional y la idea de causalidad. Esto explica el retraso en la enseñanza de la probabilidad durante las dos décadas pasadas, en las que se venía iniciando a partir de la adolescencia. La opinión de Piaget también ha ocasionado que la enseñanza de la probabilidad se realizara con un enfoque clásico, basado en el cálculo combinatorio.

Nuestro país no ha estado exento de esta influencia, ya que en el anterior plan de estudios, la probabilidad se introducía en 1º curso de Bachillerato y aún entonces, sólo se dedicaban dos o tres semanas al tema, continuándose el mismo en el 3º curso de Bachillerato (16-17 años). El enfoque que se presentaba era excesivamente formal y se basaba en el cálculo combinatorio (Ortiz, 1996).

En los últimos años asistimos a una reforma de la enseñanza obligatoria que concede un mayor peso al estudio de la probabilidad por parte de los niños. Los nuevos diseños curriculares enfatizan la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y de cambiar también la metodología de enseñanza para hacerla más activa y exploratoria. Se sugiere que los alumnos realicen experimentos aleatorios, recojan datos de los mismos, analicen los resultados y estimen las probabilidades de los sucesos de interés a partir de las frecuencias relativas observadas. Este enfoque no precisa un razonamiento combinatorio fuerte y podría servir para confrontar a los alumnos con sus concepciones probabilísticas incorrectas, a partir de los datos experimentales.

El éxito de esta propuesta descansa, sin embargo, en la elección adecuada de las tareas a plantear a los alumnos, según sus capacidades en el razonamiento estocástico y sus prerrequisitos. Aunque el enfoque frecuencial de la probabilidad puede obviar la necesidad de razonamiento combinatorio, debido al uso de la experimentación y simulación para la resolución de problemas probabilísticos, el razonamiento proporcional sigue siendo preciso, puesto que la frecuencia relativa se define a partir de una proporción. Por otro lado, la idea de probabilidad es algo más que una proporción, puesto que, para asignar o comparar probabilidades, el niño debe movilizar su concepción sobre el experimento aleatorio. Debe ser capaz de diferenciar los sucesos posibles en este experimento (espacio muestral), asociar el número de casos favorables al suceso dado, el número de casos desfavorables al suceso contrario y considerar el número total de posibilidades. Finalmente, debe ser capaz de discriminar los casos en que sea posible o no aplicar el principio de indiferencia.

La pregunta general que nos planteamos en nuestra investigación es si los alumnos poseen los requisitos suficientes para que sea posible adelantar la enseñanza de la probabilidad antes de la adolescencia y qué tipo de tareas probabilísticas serían adecuadas para esta iniciación. En particular, nos hemos centrado en el intervalo de edad 10-14 años, para complementar, por un lado, la investigación llevada a cabo por Serrano (1996) en el intervalo 14-18 años, y porque es el intervalo común a dos investigaciones sobre el razonamiento probabilístico intuitivo que hemos tomado como base: las de Green (1982) y Fischbein y Gazit (1984). En síntesis, las preguntas que nos hemos planteado sobre el razonamiento probabilístico de estos niños son las siguientes:

- ¿Cual es el nivel de razonamiento probabilístico de los niños de nuestro entorno sociocultural? ¿Coincide con los resultados de Green (1982) para los escolares del Reino Unido de la misma edad? ¿Es el nivel de razonamiento probabilístico obtenido mediante el instrumento de Green un buen indicador de la capacidad de resolver problemas de probabilidad y del éxito en otros instrumentos de evaluación del razonamiento probabilístico?
- ¿Progresa el razonamiento probabilístico en forma lineal o tiene un carácter componencial y sistémico? ¿Podemos identificar componentes diferenciados en el razonamiento probabilístico de los niños que no han recibido instrucción en probabilidad? ¿Corresponde alguno de estos componentes al uso de elementos subjetivos en la asignación y comparación de probabilidades?
- ¿Cómo resuelven los niños que no han tenido instrucción en probabilidad, problemas de comparación de probabilidades simples? ¿Usan estrategias normativas o se dejan influir por elementos subjetivos? ¿Cómo cambian sus estrategias en el periodo 10-14 años? ¿Cómo dependen de su nivel de razonamiento proporcional?

Para responder estas preguntas, nuestra tesis se ha centrado en la evaluación del razonamiento probabilístico de los alumnos de edades comprendidas entre 10 y 14 años y ha sido abordada en dos fases sucesivas, en las cuales hemos procedido con diferente enfoque y profundidad.

En una primera fase, que se describe en el Capítulo 2, hemos llevado a cabo un estudio comparativo de dos instrumentos clásicos de evaluación de intuiciones probabilísticas sobre una misma muestra de 321 alumnos de los cursos 5º a 8º de E.G.B. Los instrumentos han sido tomados de Green (1982) y Fischbein y Gazit (1984) y ambos están pensados para alumnos de las edades utilizadas en nuestra investigación que no hayan recibido instrucción en probabilidad. El primero de ellos evalúa una gama muy amplia de contenidos probabilísticos y permite situar al alumno en un nivel de razonamiento probabilístico de acuerdo con las teorías de Piaget e Inhelder (1951). El segundo tiene un contenido más limitado, pero también evalúa el uso que hacen los niños de elementos subjetivos en la asignación de probabilidades. Además de comparar nuestros resultados con los de los autores citados, mostramos la falta de correlación entre las puntuaciones de ambos instrumentos, lo que indica que el test de Fischbein y Gazit contiene elementos no evaluados en el estudio de Green. Este resultado es confirmado con el estudio multivariante en el que los ítems de Fischbein que contienen elementos subjetivos se configuran como factores independientes en el análisis factorial conjunto.

En una segunda fase de la investigación profundizamos en el empleo, por parte de los niños, de estos elementos subjetivos en la asignación y comparación de probabilidades, y su relación con el razonamiento proporcional. Para ello construimos un nuevo instrumento de evaluación incluyendo el test completo de Fischbein y Gazit y algunos ítems de Green, entre los que destacan los de comparación de probabilidades. Con este nuevo instrumento se obtuvieron datos de una muestra de 130 alumnos de los cursos 5º y 6º de E.G.B. y 1º y 2º de E.S.O., que se analizan con profundidad en el Capítulo 3. En particular estudiamos las estrategias y niveles en los ítems de comparación de probabilidades, utilizando los descritos por Noelting (1980a y b) para la comparación de fracciones. Asimismo analizamos las creencias subjetivas de los alumnos sobre la independencia, control del azar y juego equitativo, junto con su razonamiento combinatorio. Las tipologías de razonamiento de los alumnos son descritas con detalle a partir de una serie de entrevistas realizadas a dos alumnos de cada uno de los niveles escolares seleccionados. Éstas se describen en el Capítulo 4.

Como consecuencia de nuestro trabajo, creemos que es necesario rechazar la hipótesis de estructura lineal del razonamiento probabilístico de los niños y que las etapas descritas en la teoría de

Piaget no deben ser entendidas en sentido global. Por el contrario un mismo niño puede estar en diversas etapas para diferentes conceptos y tipos de problemas probabilísticos y así, el razonamiento probabilístico de los niños se describe preferentemente mediante un constructo de tipo vectorial y sistémico, entre cuyos componentes podemos citar la aleatoriedad, independencia, elementos subjetivos, razonamiento proporcional y combinatorio. Como consecuencia, se hace preciso un estudio individualizado de cada uno de estos componentes y un tratamiento didáctico específico de las dificultades de razonamiento y comprensión asociadas, lo que abre un campo de investigación muy amplio en relación con la iniciación de la enseñanza de la probabilidad. Finalizamos la tesis con los anexos y referencias, que pueden ser también de utilidad para otros investigadores interesados por la evaluación del razonamiento estocástico de los alumnos de últimos cursos de primaria o primeros cursos se secundaria.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTOS Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dedicado a describir detalladamente el problema y los objetivos concretos de nuestra investigación, cuyo interés viene suscitado por la inclusión en los nuevos diseños curriculares para la enseñanza primaria y secundaria de contenidos probabilísticos y por la manifestación de dificultades sobre el razonamiento probabilístico de los niños encontradas por otros autores (Alhgren y Garfield, 1991). El marco teórico utilizado en este trabajo, se describe resumidamente en la sección 1.2.2.

Los objetivos de la investigación se exponen en la sección 1.2.3. El primero de ellos consiste en realizar una exploración y evaluación de las *intuiciones probabilísticas primarias* en los escolares de 10 a 14 años de nuestro entorno. La expresión en cursiva es utilizada por Fischbein (1975, 1987), cuyas investigaciones, junto con las de Green (1982, 1983a y b), conforman nuestros principales antecedentes. Asimismo, cimentamos nuestro trabajo en las investigaciones de otros autores. Tras un estudio sobre el estado de la cuestión, hemos organizado estos antecedentes en tres apartados:

En la sección 1.4 analizamos, de un modo global, la problemática de la evaluación del razonamiento probabilístico, incluyendo los instrumentos y metodología empleados por los investigadores pioneros en este tema. Muy resumidamente presentamos los principales resultados que pueden ayudar a comprender el alcance de nuestro trabajo y analizamos con más detalle las investigaciones de Green (1982, 1983a y b) y Fischbein y sus colaboradores (Fischbein, 1975; Fischbein y Gazit, 1984; Fischbein y cols, 1991; Fischbein y Schnarch, 1996, 1997), de los cuales nuestro estudio es una continuación directa.

En la sección 1.5 analizamos con mayor detalle las investigaciones que se han centrado en el estudio de las estrategias intuitivas que siguen los niños al comparar dos probabilidades simples, siendo éste el punto al que hemos dedicado un énfasis especial en nuestra investigación. Puesto que la comparación de probabilidades entraña una comparación de fracciones, dedicamos un apartado a exponer una breve revisión, que no pretende ser exhaustiva, de las investigaciones sobre comparación de fracciones cuyos resultados hemos usado directamente en nuestro trabajo.

El segundo aspecto en el que se ha centrado nuestro estudio se refiere a los elementos subjetivos que los niños incorporan a la asignación de probabilidades, tales como creencias populares, experiencia personal previa con juegos de azar, etc. En la sección 1.6 efectuamos una revisión de las investigaciones realizadas en este campo. También incluimos en este capítulo, en la sección 1.3, la descripción de la metodología empleada en la fase experimental de la Tesis.

1.2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y DEL MARCO TEÓRICO

1.2.1. Marco curricular

Los recientes cambios introducidos en los curricula de Educación Primaria y Secundaria (MEC, 1989a) y b), 1991, 1992; Junta de Andalucía, 1989, 1992) manifiestan la necesidad de contemplar una enseñanza de la matemática que permita interpretar la realidad desde la incertidumbre, frente a la imagen tradicional exclusiva de la matemática como ciencia exacta, potenciada por otras propuestas curriculares. El Diseño Curricular Base para la educación primaria (MEC, 1989a), pag. 381) afirma que *"las* *matemáticas escolares deben potenciar estos dobles enfoques , y ello no sólo por la riqueza intrínseca que encierran, sino porque los que han sido relegados hasta ahora a un segundo plano tienen una especial incidencia en las aplicaciones actuales de las matemáticas".* En base a ésto se han introducido en el curriculum aspectos como la estimación, o el estudio de la aleatoriedad.

En lo que al campo de los fenómenos estocásticos se refiere, el Real Decreto 1006/1991 (BOE 26/6/91) por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria, recomienda poner a los alumnos en situaciones de exploración y descubrimiento del carácter aleatorio de algunas experiencias y la comparación de probabilidades sencillas. Los estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (NCTM, 1989) sugieren una metodología que parta de las experiencias de los alumnos, basada en la experimentación y simulación de experimentos aleatorios, el registro de los resultados obtenidos y el estudio de las propiedades de las frecuencias relativas de los sucesos asociados a los experimentos reales o simulados. Recomendaciones en el mismo sentido se encuentran en Glayman y Varga (1975), Godino y Cols. (1987), Borrás (1996) y Borrás y Morata (1989).

Entre las recomendaciones metodológicas de la Junta de Andalucía (BOJA 20/6/92) para la educación Primaria y Secundaria obligatoria, se aconseja partir de las "ideas previas" o "intuiciones" de los alumnos para la adquisición de nuevos aprendizajes. Algunos autores, como Fischbein y Gazit (1984) y Fischbein *et al.* (1991) han centrado sus trabajos en el estudio de estas ideas previas, identificando ciertas dificultades y obstáculos sobre el desarrollo de la intuición estocástica.

Serrano (1996) ha mostrado recientemente el uso que hacen los alumnos de 14 a 18 años de heurísticas incorrectas en la asignación de probabilidades, tales como la *representatividad*, con la consiguiente presencia de sesgos en los resultados obtenidos. Otro sesgo hallado entre estos alumnos es el de *equiprobabilidad* (Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre, 1992), por el cual los sujetos generalizan indebidamente la regla de Laplace, aplicándola en situaciones en las que no es pertinente. Asimismo, los estudiantes universitarios y de secundaria han manifestado dificultades con la idea de independencia de los ensayos e interpretación incorrecta de enunciados de probabilidad desde el punto de vista frecuencial, esto es, el "*outcome approach*" descrito por Konold (1989).

Pensamos que estas dificultades y otras descritas en Garfield y Ahlgren (1988) podrían estar presentes en los alumnos más jóvenes, con el consiguiente peligro de que su desconocimiento, por parte de los profesores, hiciese fracasar la enseñanza de la probabilidad propuesta en los nuevos diseños curriculares. A estas dificultades se uniría el hecho de que, por la edad de los alumnos, éstos no tuviesen un suficiente desarrollo del razonamiento proporcional, imprescindible para la comprensión de la idea de frecuencia relativa, y por tanto, para la metodología recomendada en la enseñanza.

Creemos por ello necesario estudiar con mayor profundidad algunas de estas dificultades y evaluar su incidencia en los estudiantes a los que van dirigidas las nuevas propuestas. Como indica Garfield (1995), es necesario evaluar los conocimientos de los estudiantes como base de las nuevas propuestas curriculares. Este es el propósito de nuestra investigación, de cuyos resultados esperamos obtener nuevo conocimiento sobre los significados personales que los alumnos asignan intuitivamente a la noción de probabilidad y sobre la forma en que evalúan probabilidades sencillas.

1.2.2. Resumen del marco teórico utilizado

Intuición y sus tipos

El término intuición ha sido utilizado con frecuencia en la literatura científica como un término primitivo cuyo significado se sobreentiende. Este concepto ha tenido gran relevancia en las investigaciones de Fischbein (1987), quien lo considera parte de la conducta inteligente, por lo que recomienda que, antes de introducir en el curriculum escolar una cierta materia, se realice una investigación intensa sobre los conocimientos intuitivos de los alumnos respecto al tema indicado. Puesto que consideramos nuestro trabajo una continuación directa de las investigaciones realizadas por este autor en el campo de la probabilidad, hemos usado en nuestra investigación el concepto de *intuición* en el sentido en el que él lo define y caracteriza.

Fischbein indica que el mundo de las matemáticas se refiere a objetos ideales, con operaciones y medios de verificación propios (pg. 15 o.c.), cuyo significado se determina por medio de axiomas y reglas completamente establecidos. La certeza matemática es de tipo formal, como contraposición a la credibilidad intrínseca que proporcionan los objetos materiales. Los constructos matemáticos parecen reflejar el mundo real, lo que confiere credibilidad, consistencia y coherencia a este mundo de abstracciones mentalmente producidas.

El ideal del enfoque axiomático es conseguir que este mundo de conceptos funcione autónoma y coherentemente, aunque este ideal se ha mostrado como inalcanzable. La imposibilidad es por un lado, formal -mostrada a partir de los trabajos de Gödel- y por otro lado psicológica, ya que no es posible un razonamiento matemático productivo si sólo recurrimos a los medios formales: "*Todo el sistema permanece estéril si no mantenemos un íntimo contacto con las originales y auténticas fuentes prácticas" (pg. 17).* Las cualidades formales de certidumbre, coherencia, consistencia y necesidad no poseen la misma capacidad convincente y productiva que la riqueza y credibilidad de los fenómenos reales.

La teoría de Fischbein (1975) es que los objetos mentales (conceptos, operaciones, proposiciones) deben alcanzar una consistencia intrínseca similar a los objetos reales para que el proceso de razonamiento se convierta en una actividad productiva. De ello se deduce la importancia del conocimiento intuitivo, "*una clase de conocimiento que no está basado en la evidencia empírica o en argumentos lógicos rigurosos y, que, a pesar de ello, se tiende a aceptar como cierto y evidente"* (pg. 26).

Las intuiciones se describen en Fischbein (1987) como adquisiciones cognitivas que intervienen en las acciones prácticas y en el razonamiento, por medio de sus características de inmediatez, certeza intrínseca, globalidad, capacidad extrapolatoria. perseverancia, estructurabilidad y autoevidencia. Se consideran un tipo de cognición y se diferencian de la percepción en que exceden o extrapolan los hechos dados. Una intuición es una teoría, implica una extrapolación más allá de la información accesible. A continuación describimos estas características:

- *Auto-evidencia:* Es su característica fundamental. Por ejemplo, el hecho de que en un experimento aleatorio debe ocurrir alguno de los sucesos elementales es autoevidente y no necesita explicación. Una intuición es auto-consistente, auto-justificable y auto-explicativa. Esta auto-evidencia se basa, bien en un comportamiento directamente significativo para el sujeto (su experiencia le hace afirmar que la proposición es cierta); en la captación de un invariante a lo largo de una serie de transformaciones o en una estructura dada (por ejemplo, que la probabilidad de un suceso nunca es mayor que 1); en la equilibración interna de estas transformaciones (se ajusta bien con el conocimiento anterior; no lo contradice) o bien en el carácter analítico de una proposición autoevidente.
- *Certeza intrínseca*: Las intuiciones se aceptan como ciertas por el sujeto. Aunque esta característica se relaciona con la auto-evidencia, no se reduce a ella, ya que se puede estar convencido de una proposición, no porque sea autoevidente, sino porque se ha encontrado una demostración de la misma, como es el caso del teorema de Pitágoras, que no es intuitivo.
- *Perseverancia:* Una vez establecidas, las intuiciones son muy resistentes al cambio, como lo muestra el ejemplo de la *falacia del jugador*. Por el contrario, el conocimiento obtenido de una manera formal es muy poco perseverante, como podemos ver por la tasa tan alta de olvido de muchos teoremas y propiedades matemáticas que hemos estudiado con un método puramente formal. Las intuiciones incorrectas pueden acompañarnos toda nuestra vida. Por ejemplo, aun habiendo establecido la biyección entre el conjunto de los números naturales y el de los racionales, es intuitivamente muy difícil aceptar esta equipotencia.
- *Coercitividad:* Las intuiciones ejercen una coacción sobre la forma de razonamiento del sujeto,

haciendo que otras alternativas se consideren inaceptables. Es difícil, por ejemplo, aceptar intuitivamente que después de una racha larga de caras al lanzar una moneda, la probabilidad de obtener una nueva cara sea la misma que la de obtener una cruz.

- *Categoría teórica:* Una intuición es una teoría y no una percepción o habilidad. Al aceptar una intuición, aceptamos su necesidad y generalidad. En una intuición se capta la universalidad de un principio o relación, a través de una realidad particular. Sin embargo, no es una teoría pura, sino una teoría expresada mediante una representación particular que usa un modelo, tal como un ejemplo, una analogía o un diagrama. Por ejemplo, cuando aceptamos intuitivamente que dos rectas paralelas no se cortan, lo aceptamos para dos rectas cualesquiera, aunque nos representamos ejemplos particulares de rectas que cumplen esta relación.
- *Capacidad extrapolatoria*: La intuición siempre excede los datos inmediatos, aunque esta propiedad no basta para definir las intuiciones, sino que se precisa la impresión de certeza. De otro modo se trataría de una mera conjetura. La capacidad de extrapolación se pone de evidencia en el ejemplo anterior, ya que al suponer que dos rectas paralelas no se cortan, imaginamos que éstas se prolongan hasta el infinito, lo cual excede cualquier dato experiencial. Esta capacidad extrapolatoria se manifiesta, en particular, cuando razonamos en base al principio de inducción matemática, que, según Fischbein, no se adquiere directamente de la experiencia. Por otro lado, no existe demostración analítica que apoye la inferencia recursiva. "*Cuando tratamos con el infinito, ni el razonamiento analítico ni la experiencia son capaces de proporcionar, en sí mismos, una base para la confianza absoluta"* (pg. 51). Este autor, citando a Poincaré, afirma que la potencia de este tipo de razonamiento se debe a la intuición directa, que es capaz de concebir la repetición infinita de una misma operación, una vez ha sido llevada a cabo.
- *Globalidad:* Las intuiciones tienen un carácter global, sintético y se oponen al razonamiento analítico, que es de naturaleza discursiva. La intuición es una cognición estructurada, que ofrece una visión global y unitaria de una cierta situación. La intuición del espacio en los niños es un ejemplo de este tipo de sistema estructurado. La globalidad de las intuiciones también se manifiesta en el proceso que tiende a eliminar los hechos discordantes y a organizar el resto de forma que presente un significado compacto y unitario. Este tipo de coherencia explica la estabilidad de las intuiciones.
- Finalmente, Fischbein indica el carácter *implícito* de algunas intuiciones, ya que algunas veces las personas no son conscientes de ellas. Una persona, por ejemplo, no es consciente de que hace una extrapolación más allá de la realidad, cuando admite que dos rectas paralelas no llegan a cortarse. Tampoco es consciente un niño que no acepta la conservación de la cantidad en la etapa pre-operatoria.

Fischbein (1987) establece varias clasificaciones de las intuiciones. En cuanto a su origen, este autor diferencia entre *intuiciones primarias* y *secundarias.* Las *intuiciones primarias* se forman directamente por la experiencia del sujeto, sin necesidad de instrucción explícita. Por el contrario, una *intuición secundaria* aparece como resultado de la educación, especialmente de la instrucción organizada. Esta clasificación establece una distinción relativa, pues dependerá del entorno cultural e individual, que configura las experiencias naturales del individuo. Si el entorno del niño es rico en experiencias aleatorias, habrá más oportunidades de desarrollar intuiciones primarias (adecuadas o inadecuadas) relacionadas con este campo.

En cuanto al papel que juegan las intuiciones, considerando la relación entre intuiciones y soluciones a situaciones problemáticas, este autor diferencia entre *intuiciones afirmatorias, conjeturales, anticipatorias y conclusivas.* Las *intuiciones afirmatorias* son representaciones o interpretaciones de hechos aceptados como ciertos, autoevidentes y autoconsistentes. En ellas, el elemento solución está implícito. De hecho, cualquier intuición conlleva un sentimiento de afirmación, de convicción y certeza, pero en ciertos casos, la intuición, en sí, no es más que esta afirmación autoevidente. Por ejemplo, el hecho de que dos puntos determinan una línea recta. Las intuiciones afirmatorias se dividen en semánticas, relacionales e inferenciales. Las *intuiciones semánticas* se refieren al significado de los conceptos, como los significados intuitivos de recta como camino más corto entre dos puntos o como un rayo de luz. Una intuición afirmatoria expresada como un estamento es una *intuición relacional*. El ejemplo de que por dos puntos pasa una sola recta es un ejemplo de *intuición relacional*. Cuando realizamos una inferencia lógica, (inductiva o deductiva), acompañada de un sentimiento de certeza, de autoevidencia, se trata de una *intuición inferencial*. Un ejemplo de ellas es la propiedad transitiva, cuando concluimos que si A es mayor que B, y B es mayor que C, entonces A es mayor que C.

Existe otra clasificación de las intuiciones afirmatorias en *comunes e individuales*, según se trate, respectivamente, de intuiciones desarrolladas de forma natural en una persona y en todos los miembros de una cierta cultura -como la intuición de que todo suceso tiene una causa- o se trate de una representación personal relacionada con la vida o actividad de una persona en particular, en cuyo caso hablamos de una convicción personal autoevidente y autoconsistente, como podría ser una superstición, por ejemplo.

Las *intuiciones conjeturales* son suposiciones asociadas con un sentimiento de certidumbre: por ejemplo, la capacidad de diagnóstico en un médico sería un ejemplo de intuición conjetural. Las *intuiciones anticipatorias* se relacionan con la capacidad de resolver problemas y anticipan su solución antes de haberla comprobado de forma analítica. Se pone de manifiesto cuando uno elige un determinado método para resolver un problema y no otro, o cuando uno está convencido de que un problema tiene solución antes de haberla encontrado. Aunque no hay una línea divisoria clara, una intuición anticipatoria es siempre una solución preliminar a un problema, mientras que una intuición afirmatoria representa una actitud cognitiva estable con respecto a una situación común, más general. Ambas están estrechamente relacionadas. *Si queremos predecir la estrategia de resolución de un problema dado, por parte de una persona, sus suposiciones y sus formas de verificación, no es suficiente saber cuál es su conocimiento formal en el campo respectivo y los datos del problema. Hay que tener alguna información acerca de las "líneas de fuerza" de sus componentes intuitivas afirmatorias.* (Fischbein, 1987, pag. 64). Las *intuiciones conclusivas* dan una visión completa y global de las ideas básicas en la solución previamente hallada de un problema. Más allá del esfuerzo de búsqueda analítico que sigue al "flash" intuitivo anticipatorio inicial, la solución aparece como intuitivamente cercana, directa e intrínsecamente aceptable.

Finalmente señalamos que Fischbein (1989) enfatiza el papel que los modelos intuitivos tienen en el razonamiento matemático y en su desarrollo, así como en el aprendizaje y la resolución de problemas: *"Muchas dificultades de los estudiantes en ciencias y matemáticas son debidas a la influencia de modelos tácitos intuitivos, que actúan en forma incontrolada en el proceso de razonamiento"* (Fischbein, 1989, pg. 9).

Significado institucional y personal de los objetos matemáticos

Esta tesis se inscribe en la línea de investigación sobre "Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática" del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y por ello, pretende, como fin secundario, contribuir a ejemplificar el análisis teórico sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su significado, que es uno de los temas que se están investigando dentro de esta línea de investigación.

Pensamos que las nociones de significado institucional y personal de los objetos matemáticos desarrolladas por Godino y Batanero (1994; 1996; en prensa) -a las que atribuyen un carácter sistémico y relativo- va a permitirnos interpretar de manera coherente algunos aspectos desarrollados en nuestra investigación. Consideramos que algunas manifestaciones de los sujetos ante situaciones aleatorias no reunen las características exigidas por Fischbein a las intuiciones. Por ello, los constructos "objeto personal" y "significado personal de un objeto" pueden ser pertinentes, al abarcar la globalidad de las respuestas de los sujetos. Asimismo, nuestro interés por indagar el efecto de factores de tipo socio-cultural en el razonamiento probabilístico puede ser planteado de manera más comprensible desde la perspectiva antropológica implícita en el modelo desarrollado por los autores citados.

A partir de las ideas de *problema* y *campo de problemas*, estos autores definen los conceptos de *práctica*, *objeto* (personal e institucional) y *significado* (personal e institucional), con el fin de tener en cuenta la génesis personal e institucional del conocimiento matemático. Esta teoría está apoyada en los trabajos de Chevallard (1989, 1992) sobre *práctica, objeto y relación al objeto* y en las teorías pragmáticas del significado (Wittgenstein, 1953).

Como hemos indicado, el concepto de problema se toma como punto de partida en esta teoría. Generalmente los problemas no aparecen aislados, sino englobados en campos de problemas para los cuales puede ser válida la misma solución o soluciones parecidas. En particular, en esta investigación nos interesamos por el campo de problemas del que surge la noción de probabilidad, como el ejemplo siguiente, que ha sido uno de los ítems propuestos a los alumnos en nuestra investigación:

Ítem 1. En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál elegirías para hacer la extracción?

En este enunciado, nos encontramos ante una situación de decisión (elegir una urna) en ambiente de incertidumbre (se trata de elegir entre dos experimentos aleatorios). No podemos saber con seguridad si obtendremos o no el premio en un ensayo particular con ninguna de las cajas. Sin embargo, la experiencia nos dice que, a la larga, se obtiene con mayor frecuencia el resultado para el cual es mayor el cociente entre el número de casos favorables y posibles en el experimento. Aún cuando un niño no posea el dominio de las fracciones, en la situación propuesta puede obtener fácilmente la solución normativamente correcta, pues el número de casos desfavorables es el mismo en las dos urnas y en la caja A es mayor el número de casos favorables. El niño que elige la caja A siguiendo este razonamiento, muestra una intuición primaria del concepto que conocemos con el nombre de "probabilidad", según *el significado laplaciano* de la misma.

Otros problemas semejantes al presentado en el ítem 1 se obtendrían cambiando las variables de tarea de este ítem, en particular el número de bolas blancas y negras en las cajas, lo que, ocasionalmente, obligaría al niño a realizar un cálculo con fracciones. Si en vez de urnas con bolas, cambiásemos el contexto, usando ruletas con áreas desiguales, la regla de Laplace ya no sería útil y sería precisa una intuición primaria de la probabilidad de acuerdo con otros significados de la misma. Por ejemplo, *probabilidad de tipo frecuencial o probabilidad de tipo geométrica*. Vemos en los ejemplos que, en diferentes circunstancias se asigna al término probabilidad un *significado* diferenciado y que el campo de problemas probabilísticos es muy amplio. En nuestro trabajo, lo restringiremos a subconjuntos de problemas que se describirán con más detalle en los siguientes apartados, referidos a la descripción de los cuestionarios de evaluación.

Godino y Batanero (1994) llaman *práctica* a toda actuación o manifestación realizada para resolver problemas matemáticos. Una práctica es *significativa* (o tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

Consideramos de interés esta definición para nuestra investigación, uno de cuyos objetivos será describir las prácticas de los alumnos en la resolución de las situaciones problemáticas propuestas. Así, para decidir entre las dos urnas en el ítem 1, algunos alumnos compararon los casos posibles lo que sería una práctica P1. Otra práctica diferente P2 sería elegir la urna A porque es mayor la diferencia entre bolas negras y blancas. Otra, P3 sería elegir la urna que dé mayor cociente entre el número de bolas negras y blancas.

En general, el estudio didáctico se interesa por los invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas, no por las muestras particulares de las mismas, es decir trata de caracterizar las *prácticas prototípicas*. Como hemos visto en el ejemplo, generalmente existen más de una práctica diferente en relación a un campo de problemas, por lo que hablamos del *sistema de prácticas* asociadas a un campo de problemas.

Debido al carácter subjetivo con que se dota esta definición, se diferencia entre *prácticas personales* y *prácticas institucionales* asociadas a un mismo campo de problemas. Las primeras pueden variar de un sujeto a otro y las segundas son compartidas socialmente en una misma institución.

Una *institución* está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Una institución interesada por resolver problemas de probabilidad es la institución matemática, pero también existen otras instituciones como las escolares o profesionales que podrían estar interesadas en un mismo campo de problemas, los cuales utilizan prácticas diferentes para resolverlos. Incluso en el terreno de los juegos de azar, un jugador podría plantearse un problema similar al enunciado en el ítem 1.

La diferenciación entre prácticas institucionales y personales es interesante desde el punto de vista didáctico, porque permite recoger en un único marco tanto los procedimientos y soluciones a los problemas que la institución considera correctos como los que considera incorrectos, pero que para los alumnos constituirían buenas soluciones al problema planteado. La práctica P1 y P3, del ejemplo citado son correctas desde el punto de vista de la institución matemática, mientras que la práctica P2 no es considerada adecuada.

En el ítem 1 esperamos que el alumno use una intuición de la probabilidad que coincida con el significado laplaciano de la misma. Sin embargo, el alumno podría razonar subjetivamente y asignar mayor probabilidad a Pilar en el problema siguiente, lo que no sería adecuado, desde un punto de vista matemático:

Ítem 2. Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión?

A partir de la actividad de resolución de un campo de problemas y del sistema de prácticas asociadas a un campo de problemas, se produce en la institución la emergencia progresiva de los conceptos (en nuestro ejemplo el de probabilidad). La emergencia del objeto es progresiva a lo largo de la historia: sucesivamente el objeto es nombrado, generalizado o modificado o bien se emplea para resolver otros campos de problemas. El sistema de prácticas institucionales asociado al objeto se define como *significado institucional del objeto*.

Similarmente, el aprendizaje del sujeto se produce mediante la emergencia progresiva del *objeto personal* a partir del sistema de prácticas personales que manifiesta la persona para resolver el campo de problemas. Este sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas constituye el *significado personal del objeto.*

En consecuencia, de un mismo campo de problemas C que en una institución ha dado lugar a un objeto O_I con significado $S(O_I)$, en una persona puede dar lugar a un objeto O_p con significado personal $S(O_p)$. La intersección de estos dos sistemas de prácticas es lo que desde el punto de vista de la institución se consideran manifestaciones correctas, esto es, lo que la persona "conoce" o "comprende" del objeto O_I desde el punto de vista de I. Con los constructos genéricos de *objetos* y *significados* (personales e institucionales) los autores persiguen básicamente dos objetivos:

I. Distinguir las entidades emergentes (objetos) del sistema de prácticas de donde provienen; este sistema de prácticas es nombrado como "significado del objeto" correspondiente.
II. Distinguir las entidades psicológicas (personales) de las entidades epistemológicas (institucionales), que tienen un carácter colectivo o sociocultural.

Estas diferenciaciones nos parecen esenciales para evitar un enfoque exclusivamente psicológico al estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en las instituciones escolares. La diferenciación entre el objeto (emergente inobservable de un sistema de prácticas) y el significado del mismo (sistema observable de prácticas), que hacen los autores, supone también el reconocimiento de la problemática de la evaluación de los conocimientos de los alumnos. Estos conocimientos tendrían un carácter inobservable, y su naturaleza se infiere de las prácticas explicitadas durante la resolución de los problemas propuestos. Estas prácticas serían los indicadores empíricos utilizables en la evaluación de dicho conocimiento.

1.2.3. Objetivos de la investigación e interés de los mismos

El propósito general de nuestro trabajo consiste en estudiar, con mayor profundidad, algunas de las dificultades relacionadas con el razonamiento probabilístico, descritas por diferentes autores, y evaluar su incidencia en los estudiantes a los que van dirigidas las nuevas propuestas curriculares, para obtener nuevo conocimiento sobre los significados personales que los alumnos asignan intuitivamente a la noción de probabilidad, y sobre la forma en que evalúan probabilidades sencillas. Para ello nos planteamos los siguientes objetivos:

Objetivo 1: El primer objetivo de la Tesis ha sido realizar una exploración y evaluación de las intuiciones probabilísticas primarias en los escolares de 10 a 14 años. Se trata de tener una información de cuáles son estas intuiciones primarias correctas e incorrectas sobre un amplio conjunto de conceptos probabilísticos elementales. Este estudio se lleva a cabo mediante el cuestionario de Green (1982) que tiene una amplia validez de contenido y una fiabilidad probada en investigaciones realizadas en diversos países. La información recogida permitirá tener una visión global del razonamiento probabilístico de estos alumnos, así como evaluar su nivel de razonamiento probabilístico, que también puede obtenerse mediante el citado instrumento. Creemos también de interés proporcionar a los profesores información sobre las intuiciones primarias de nuestros alumnos en el campo de la probabilidad, así como de los significados personales que manifiestan.

Objetivo 2: Un segundo objetivo de nuestra tesis es analizar la estructura componencial del razonamiento probabilístico de los alumnos de la muestra. Según nuestros supuestos teóricos, el significado de los objetos matemáticos tiene un carácter sistémico y componencial, que viene dado por multitud de "elementos de significado", cuya adquisición por el alumno es gradual. Mediante un estudio de tipo multivariante pretendemos analizar si la estructura de las respuestas de los alumnos obedece a unos pocos factores o, por el contrario, es de tipo complejo.

Objetivo 3: Una vez finalizado el primer estudio de evaluación, nuestro interés se centra en profundizar sobre las estrategias intuitivas seguidas por alumnos que no han recibido enseñanza sobre probabilidad, ante problemas de comparación de probabilidades simples e identificar variables de tarea que las afecten, así como la posible influencia de factores subjetivos de origen socio-cultural. Como se indicó en la introducción, los problemas de comparación de probabilidades simples son una de las tareas más elementales que puede proponerse a los niños al iniciar la enseñanza de la probabilidad. Este es el motivo por el que hemos elegido este tipo de tarea para realizar un estudio más profundo en una segunda muestra de alumnos.

Objetivo 4: Los tres primeros objetivos fueron planteados desde el comienzo de la investigación, siguiendo nuestro marco teórico. Posteriormente, una vez revisados los antecedentes sobre el razonamiento probabilístico de los niños, pudimos constatar la importancia que en las distintas investigaciones se daba al razonamiento proporcional en la resolución de problemas de comparación de probabilidades simples y en la construcción del significado clásico de probabilidad. En consecuencia, nos planteamos como objetivo adicional comparar los niveles de dificultad de problemas de comparación de probabilidades simples respecto a sus análogos de comparación de fracciones, según la categoría de niveles definidos por Noelting, que se detalla en la sección 1.5.3.

Finalmente, nos hemos marcado otros dos **objetivos secundarios**. Por una parte, era necesario *realizar un estado de la cuestión de las investigaciones previas sobre el razonamiento probabilístico intuitivo en los niños de 10 a 14 años*, centrándose en particular en el estudio de las estrategias que usan al comparar dos probabilidades simples, en el efecto que sobre ellas pueden tener sus creencias de tipo subjetivo y el conocimiento intuitivo que se manifiesta mediante las mismas. Puesto que los alumnos no han recibido enseñanza formal de los conceptos, entendemos que estas intuiciones son intuiciones primarias anticipatorias. Las estrategias empleadas describen tipologías de prácticas, cuyo conjunto define el significado que, para los alumnos de estas edades tiene el concepto de probabilidad, parcialmente formado, a pesar de no haber recibido enseñanza sobre el tema.

Por otra parte, y como base para conseguir el objetivo 3, consideramos de utilidad *realizar un estudio comparativo de dos instrumentos de evaluación de la intuición probabilística sobre una misma muestra de alumnos de 10 a 14 años*. El fin perseguido es analizar la validez predictiva del instrumento de Green, cuya validez de contenido en el campo de las intuiciones probabilísticas es admitida con generalidad. Asimismo, se pretende analizar la posible correlación del nivel de intuición probabilística en el test de Green con las puntuaciones obtenidas en otro test que incluye elementos subjetivos. De este modo podremos estudiar si el mayor nivel de razonamiento probabilístico de tipo normativo contribuye o no a eliminar los sesgos de tipo subjetivo. El instrumento elegido para esta comparación es el que elaboraron Fischbein y Gazit (1984), por considerar que contempla elementos subjetivos en la comparación de probabilidades.

1.3. ENFOQUE METODOLÓGICO

1.3.1. Características generales de la metodología empleada

Nuestra investigación es, fundamentalmente, un estudio de evaluación de las intuiciones primarias de los alumnos de 10 a 14 años sobre la probabilidad. Desde una perspectiva constructivista, pensamos que es necesario tener información sobre los esquemas que poseen los estudiantes antes del proceso de instrucción específico sobre cualquier tópico, para poder evaluar posteriormente la adquisición de conocimientos observando los cambios producidos en dichos esquemas (Romberg, 1993, p.35). Este análisis requiere, por tanto, la consideración de variables de diverso tipo y múltiples fuentes de datos. En esta sección describimos la metodología empleada.

Tipo de metodología

Para llevar a cabo nuestro trabajo hacemos uso de cuestionarios que son administrados a dos muestras de alumnos, así como de entrevistas clínicas que nos permitan profundizar en el razonamiento probabilístico de los alumnos. De este modo, combinamos elementos cuantitativos y cualitativos, por lo que nos encontramos en un punto intermedio entre ambos paradigmas de investigación (Goezt y Lecompte, 1988; Shulman, 1989). Las variables que intervienen tienen un carácter cualitativo (estrategias, intuiciones de los alumnos) y el enfoque de la investigación es interpretativo (Denzin y Lincoln, 1994). Nuestro interés se centra, principalmente, en los componentes cualitativos del significado personal del concepto de probabilidad para los alumnos de la muestra y sus intuiciones al respecto, aunque, indirectamente, se usen porcentajes de respuestas correctas o valores de coeficientes de correlación para apoyar nuestras afirmaciones.

Estamos en contra de la dicotomía investigación cualitativa-métodos estadísticos, sino que, por el contrario, creemos que los métodos estadísticos y los estudios por medio de cuestionarios y muestras de tamaño mediano pueden complementar valiosamente los datos obtenidos mediante entrevistas o estudios de caso. Mientras que éstos últimos nos pueden dar una idea de la riqueza y variabilidad del significado de la probabilidad para los alumnos, los métodos estadísticos apuntan a las tendencias generales en las muestras que han formado parte de la investigación, así como en las poblaciones de las que estas muestras son representativas.

Las hipótesis de la investigación se han ido generando a lo largo del estudio. Inicialmente, no se contaba con hipótesis formalmente establecidas, sino que el interés se centraba en la evaluación del razonamiento probabilístico de los niños. Sin embargo, partíamos de una expectativa general en que las respuestas obtenidas nos indicarían una complejidad en este razonamiento. Las hipótesis se fueron refinando a lo largo de la investigación, como se describe en la sección 1.3.3, y el contraste de estas hipótesis se realiza de modo informal, exploratorio, a pesar de usar métodos estadísticos confirmatorios. Como indica Cabriá (1994), en una filosofía de análisis inicial de datos (IDA), pueden combinarse ambos tipos de métodos estadísticos y lo importante es la filosofía de uso, más que la técnica empleada.

Siguiendo la clasificación que hace Bisquerra (1989) de tipos de investigación en Educación, consideraríamos nuestro trabajo como investigación fundamental y básica, ya que pretendemos aportar nuevo conocimiento sobre las intuiciones de los alumnos y el significado de la probabilidad para los mismos. Esta preocupación teórica no impide que, en última instancia, y al margen de los límites de este trabajo, nuestro fin sea la mejora de la enseñanza de la probabilidad; preocupación de tipo práctico que ha estado presente a lo largo de nuestra actividad investigadora, como se pone de manifiesto en nuestra propuesta curricular para esta materia (Godino y cols., 1987).

Sin embargo, creemos que no podemos renunciar al fin principal de la investigación didáctica, que es proporcionar nuevo conocimiento teórico sobre el campo de la enseñanza. La investigación se ha orientado a la obtención de conclusiones y no a la toma de decisiones, y nuestro objetivo es predictivo. Podemos clasificarla también como descriptiva, transversal en su temporalización y correlacional en su enfoque. Respecto a la manipulación de las variables es un estudio cuasiexperimental, ya que las muestras han sido tomadas intencionalmente. Nos situamos también en una perspectiva estructuralista (Herman, 1990), puesto que nos interesa no sólo la descripción de las intuiciones y elementos del significado personal de la probabilidad para los alumnos, sino la estructura de dicho sistema.

Fases de la Investigación

La parte experimental de la Tesis ha estado dividida en dos fases, que describimos resumidamente. La primera fase, enfocada a conseguir los dos primeros objetivos, ha consistido en un estudio comparativo de dos instrumentos de evaluación sobre una muestra de 320 alumnos de 10 a 14 años de la ciudad de Jaén. La recogida de datos, llevada a cabo durante el curso 1987-88, se realizó mediante la aplicación de dos cuestionarios escritos tomados de las investigaciones de Green (1982) y Fischbein y Gazit (1984), respectivamente. Dichos cuestionarios son analizados detalladamente en las secciones 2.2 y 2.3. Este trabajo, aunque suspendido temporalmente por motivos personales, permitió realizar un análisis comparativo de los datos obtenidos en nuestra muestra con los de Green en Inglaterra y los de Fischbein en Israel. Algunos de estos resultados fueron publicados en Cañizares y cols. (1989).

Durante el curso 1992-93, y como consecuencia de los contactos llevados a cabo con los profesores Green (con motivo de la acción hispano británica HB-249) y Fischbein (profesor en el programa de doctorado), se llegó a la conclusión del interés en retomar la investigación y reanalizar sus resultados usando métodos multivariantes, que no habían sido empleados por ninguno de los investigadores citados. Este estudio nos llevó a la identificación de diferentes factores en la construcción del significado de la probabilidad por parte de los alumnos de la muestra. Decidimos, pues, completar nuestra investigación centrándonos sobre dos componentes concretos, tomando datos de una nueva muestra de alumnos y elaborando un nuevo cuestionario.

Esta segunda fase del estudio ha sido llevada a cabo durante 1995 y 1996, a partir de un nuevo cuestionario confeccionado utilizando ítems de los cuestionarios de Green (1982) y Fischbein y Gazit (1984), complementados con dos ítems de elaboración propia. La nueva muestra estuvo formada por un total de 143 alumnos de los cursos 5º y 6º de Educación primaria y 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria de un colegio privado de la cuidad de Granada. De esta muestra se seleccionaron ocho estudiantes para realizar un estudio de casos (Yin, 1994).

1.3.2. Población y muestras

Aunque la población objetivo es la de alumnos de edades comprendidas entre 10 y 14 años, ésta no es más que un ideal al que nos hubiera gustado extender nuestras conclusiones. Por las posibilidades limitadas de llevar a cabo nuestro trabajo, hemos tenido que tomar muestras intencionales, restringiendo, así, la población, y siendo conscientes de las limitaciones que ello supone. Según Azorín y Sánchez Crespo (1986), el muestreo intencional puede estar indicado en los estudios exploratorios, para reducir costes, para obtener un mayor control del proceso y cuando la característica estudiada tenga una homogeneidad suficiente para poder obtener conclusiones fiables con una muestra intencional, (Ghiglione y Matalon, 1989).

En este trabajo se han utilizado dos muestras, ambas tomadas de forma intencional, de alumnos de edades comprendidas entre 10 y 14 años. La primera de ellas consta de 320 alumnos y alumnas pertenecientes a tres colegios públicos de Jaén y la segunda, de 143 alumnos y alumnas de un colegio privado de Granada. En ambos casos, los alumnos no habían recibido instrucción reglada sobre probabilidad. Posteriormente, tomamos una submuestra de 8 alumnos en la segunda fase del estudio para llevar a cabo estrevistas clínicas. En el primer estudio hemos aproximado los tamaños de muestras de diferentes edades, y clase social, aunque el número de niños era algo superior al de niñas. En la segunda muestra sólo se han tomado datos de un mismo centro escolar, pues esta característica no resultó discriminativa en los resultados de la primera fase del estudio. La distribución de los alumnos por curso escolar viene contemplada en la tabla 1.3.1.

Tabla 1.3.1. Distribución de los alumnos de las muestras por curso

	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO (7º)	2º ESO (8º)	TOTAL
1ª Muestra	69	91	87	73	320
2ª Muestra	36	37	38	32	143
Submuestra	2	2	2	2	8

1.3.3. Variables e hipótesis

a) Variables respuesta o dependientes

Siguiendo la terminología de Fox (1981), consideramos variables dependientes aquellas que se evalúan en la investigación. Estas variables son denominadas por Moore (1995) variables respuesta. Son los indicadores empíricos de los cuales podemos inferir los significados que los alumnos asignan a conceptos probabilísticos. Hemos utilizado variables dependientes de tipo cuantitativo y cualitativo. Las variables cualitativas son las siguientes, tanto en la primera fase como en la segunda:

- Opciones elegidas por los alumnos de entre las alternativas propuestas en cada uno de los ítems, en los cuestionarios.
- Argumentos de los alumnos que expresan creencias de tipo subjetivo, en cada uno de los ítems propuestos, tanto en los cuestionarios como en las entrevistas finales.
- Estrategias seguidas en la comparación de probabilidades.

Las variables cuantitativas son las siguientes:

- En la primera fase:
    - Puntuaciones en el total de la prueba de Green (1982).
    - Puntuaciones parciales en la prueba de Green(combinatoria, verbal y probabilística)
    - Nivel probabilístico.
    - Puntuación en el total de la prueba de Fischbein y Gazit (1984).

- En la segunda fase, el número de problemas de comparación de probabilidades correctamente resueltos.

b) Variables explicativas

En nuestra investigación intentamos establecer relaciones entre las variables respuesta de nuestro estudio, en función de otras variables didácticas que pueden influir en las anteriores. Preferimos designar a estas variables con el calificativo de "explicativas", que en la terminología de Moore (1995) es más adecuado que el de independiente, ya que no hemos tenido un control de tipo experimental puro.

En la primera y segunda fases hemos considerado como variables explicativas el *curso escolar* y el *nivel de rendimiento matemático*, dado por una calificación proporcionada por el profesor de los niños, basada en sus rendimientos en matemáticas durante el presente curso escolar. Otras variables explicativas consideradas es la opción correcta o incorrecta para el análisis de los argumentos en los ítems. En la segunda fase hemos considerado también:

- Nivel de dificultad del problema según la clasificación de Noelting (1980a y b)
- Elementos de tipo subjetivo:
    a) Distractores incluídos en los ítems 7 y 8, de comparación de probabilidades: la edad e inteligencia del niño (ítem 7) y el número de casos favorables (ítem 8)
    b) Elementos sugeridos por los mismos alumnos durante la entrevista: disposición física de las bolas o sectores de las ruletas, preferencia del alumno por un resultado, etc.
- Contexto en los ítems de comparación de probabilidades para los alumnos del estudio de casos.

c) Variables extrañas controladas

Además de las variables explicativas que hemos considerado, son muchas las posibles variables que pudieran influir en las respuestas de los alumnos. El control que hemos ejercido sobre ellas es el siguiente:

- Se ha descrito la composición del grupo respeto a sexo y clase social, para que otros investigadores puedan juzgar la comparabilidad de sus estudios con el que ahora presentamos.
- Respecto a las tareas propuestas, se han mantenido fijas o bien se han variado sistemáticamente las siguientes variables, que aparecen descritas con detalle en las secciones 2.3 y 2.4: El conocimiento y sesgos evaluados en cada ítem, el contexto, el tipo de respuesta pedida y el tipo de espacio muestral

Hipótesis

Una vez descritas nuestras principales variables, conviene presentar resumidamente las hipótesis o expectativas sobre los posibles resultados que han ido guiando la investigación en sus diferentes fases.

Primera fase:

En la fase inicial del trabajo no teníamos unas hipótesis claramente formuladas, aunque partíamos de la idea general de que el razonamiento probabilístico es un constructo demasiado complejo para ser descrito por una escala de tipo lineal, como fue la intención de Green (1982), quien entendió en este sentido las teorías de desarrollo en etapas de Piaget e Inhelder (1951). Esta primera "hipótesis" (entendida como expectativa sobre el resultado de nuestra investigación) se fue delimitando poco a poco, al estudiar con detalle las investigaciones del citado autor, en particular su tesis doctoral en la que describe el procedimiento seguido para construir su escala de nivel probabilístico. Nos pareció significativo el hecho de que Green tuviera que desechar un gran número de ítems de su instrumento de evaluación para conseguir que las respuestas se ajustaran al patrón esperado en el escalograma de Guttman. Los ítems que permanecieron en la escala eran muy homogéneos y estaban fuertemente apoyados en la concepción laplaciana de probabilidad y en el razonamiento combinatorio y proporcional. Posteriormente hemos analizado algunos estudios críticos sobre el test de Green y sus resultados (Izard, 1994; Truran, 1994c) que nos confirmaron más en nuestra primera hipótesis, que puede enunciarse en el modo siguiente:

Hipótesis 1: La estructura de las respuestas de una muestra de suficiente tamaño de alumnos, de edades comprendidas entre 10 y 14 años, al cuestionario de Green (1982) es de tipo componencial, puesto que el razonamiento probabilístico de estos niños no puede ser medido por una escala lineal.

Esta hipótesis se estudió a partir del análisis multivariante de los resultados del test de Green en la primera muestra de alumnos. En particular, del análisis factorial y del número y magnitud relativa de los factores, así como de los ítems que puntúan en cada uno de ellos.

Una vez admitida esta hipótesis, la consecuencia inmediata es que el test de Green no tiene validez predictiva general para los resultados de otros instrumentos de evaluación del razonamiento probabilístico que contengan factores no incluidos en el test de Green. En particular, y puesto que Green no contempla elementos de tipo subjetivo, el test de Green y el nivel de razonamiento probabilístico que proporciona no sirven para predecir el éxito de los niños cuando las tareas probabilísticas chocan con sus creencias intuitivas de carácter subjetivo. Esto nos llevó a formular la segunda hipótesis:

Hipótesis 2: Esperamos encontrar una falta de correlación entre los resultados obtenidos sobre una misma muestra de alumnos al test de Green y a otro cuestionario que incorpore elementos de tipo subjetivo. En particular, esperamos obtener una baja correlación entre los resultados de los cuestionarios de Green (1982) y Fischbein y Gazit (1984), porque este último incorpora la evaluación de las creencias previas de los niños sobre el control de lo aleatorio.

Esta hipótesis se ha estudiado mediante las correlaciones de las puntuaciones totales y parciales en la misma muestra de niños a ambos instrumentos y mediante el análisis factorial separado y conjunto de las respuestas a los dos instrumentos.

Como resultado de nuestro estudio, identificamos dos factores diferenciados en el test de Fischbein y Gazit, que corresponden, en nuestra interpretación, a los elementos subjetivos y objetivos que los niños emplean en la asignación y comparación de probabilidades. El primero de estos factores recoge el razonamiento combinatorio y proporcional y la consideración del principio de indiferencia en los espacios muestrales finitos.

El segundo incluye la creencia en la posibilidad de control de lo aleatorio, la concepción causal de lo aleatorio, así como el concepto de juego equitativo y la falta de conceptualización de la independencia.

Estos resultados se apoyaron en el hecho de que este segundo factor permaneció prácticamente invariante en el análisis factorial conjunto de los dos instrumentos de evaluación y que los ítems que lo componen no correlacionaron con el test de Green.

Segunda fase:

La segunda parte del estudio fue dedicada a la caracterización más completa de estos dos factores identificados en el test de Fischbein, que fue completado con algunos ítems del test de Green y otros de elaboración propia, para incluir los diferentes niveles de razonamiento proporcional contemplados por Noelting (1980 a) y b). Las hipótesis que, sobre este segundo estudio nos hicimos son las siguientes:

Hipótesis 3: La dificultad que los alumnos de 10 a 14 años encuentran en los problemas de comparación de probabilidades es superior a la obtenida en la investigación de Noelting (1980a y b) en problemas análogos de razonamiento proporcional, según su edad.

Esta hipótesis fue motivada por nuestros resultados sobre el carácter componencial del razonamiento probabilístico de los niños en la primera fase del estudio, por lo que éste no puede reducirse al razonamiento proporcional. Por otro lado, una diferencia importante entre un problema de comparación de fracciones y un problema de comparación de probabilidades es que, mientras el primero se refiere a un fenómeno determinista, el segundo se refiere a un fenómeno aleatorio. Las intuiciones de los niños sobre la aleatoriedad influirán, por tanto, en el problema de comparación de probabilidades. En particular, es presumible que los alumnos se vean afectados por sus creencias subjetivas sobre el control de lo aleatorio, lo que nos lleva a una nueva hipótesis:

Hipótesis 4: La dificultad de los problemas de comparación de probabilidades y la estrategia de resolución que usan los alumnos de la muestra se ven afectadas por la inclusión de distractores subjetivos.

Por último, con nuestro estudio de entrevistas, quisimos profundizar en el razonamiento de los niños, mostrando casos prototípicos de independencia entre los dos tipos de razonamiento: proporcional y probabilístico. El objetivo era mostrar que el razonamiento proporcional, por sí sólo, no supone la superación de los segos inducidos por los elementos subjetivos. Por otra parte, pretendíamos determinar si los alumnos modificaban sus estrategias de decisión en los problemas de comparación de probabilidades en función de que dichos problemas se plantearan en un contexto discreto -como la elección entre urnas con diferente composición- o en uno continuo -como la decisión entre dos ruletas-. Esta cuestión se basa en las afirmaciones de Pérez Echeverría (1990) y de Singer y Resnick (1992) acerca de que el contexto discreto favorece las comparaciones parte-parte, mientras que el contexto continuo favorece las comparaciones de tipo parte-todo. Nuestras hipótesis finales, quedan, en consecuencia, explicitadas en la forma siguiente:

Hipótesis 5: Esperamos mostrar ejemplos de niños con suficiente razonamiento proporcional, que siguen afectados en su comparación y asignación de probabilidades por creencias de tipo subjetivo.

Hipótesis 6: Algunos niños modifican sus estrategias en la comparación de probabilidades, en función del contexto, discreto o continuo, en que se presenten las situaciones.

1.3.4. Técnicas de recogida y análisis de datos

Instrumentos de recogida de datos

En las dos fases de la investigación se emplearon cuestionarios, que son convenientes cuando se quiere realizar una evaluación en una muestra relativamente elevada (Sachs, 1983). La técnica de recogida de datos se puede calificar como objetiva pues se ha aplicado de manera uniforme al total de la muestra (Scott, 1988; Thorndike, 1989). Los dos primeros cuestionarios estaban previamente construidos. En las secciones 2.2 y 2.3 se incluye un análisis detallado de ambos, que se adjuntan completos en los anexos 1 y 2. El tercero, utilizado en la segunda fase de la investigación, se basó en ítems tomados de los anteriores más dos ítems construidos por nosotros mismos. Su elaboración se expone en la sección 3.2 y se incluye una copia del cuestionario completo en el anexo 4. El tipo de pregunta, en los tres cuestionarios, es variado, incluyendo ítems de opciones múltiples; preguntas de verdadero o falso, ambas completadas con una opción de respuesta abierta y tareas a realizar por el alumno.

Puesto que la finalidad es obtener datos a nivel profundo de los significados de los alumnos, como método de recogida de datos, se engloba en la medida. En ella planteamos a los sujetos unas tareas a nivel consciente para inferir indirectamente cual es su conocimiento o destreza (Audrey, 1989; Dane, 1990).

En la última fase del estudio hemos empleado una entrevista semiestructurada (Fontana y Fey, 1994) para recoger datos sobre las intuiciones de los alumnos participantes y sus estrategias en la resolución de las situaciones problemáticas propuestas. Como indica Gutiérrez (1991), en ocasiones se requiere un seguimiento continuo, completo y detallado de los estudiantes durante su actividad, siendo en este caso insuficiente un cuestionario para la toma de datos. De acuerdo con lo expuesto en Sierra (1985), consideramos en esta entrevista tres elementos: a) la situación experimental en la que tratábamos de evaluar las intuiciones de los alumnos sobre la probabilidad; b) el instrumento de observación, que fueron los cuestionarios y el guión de entrevistas, ayudándonos con la grabación de audio y c) el modo en que se realiza, que fue la interacción personal.

Se trataba de una entrevista semiestructurada, pues, aunque se disponía de un guión de entrevistas, éste se estandarizó parcialmente, pudiendo someterse a pequeñas modificaciones en función de las respuestas que daban los alumnos, con el fin de aclarar en lo posible sus razonamientos. La persistencia en ahondar en los detalles de un razonamiento o abandonarlo quedaba a decisión de la investigadora, en función de sacar un mayor rendimiento del tiempo de la entrevista y de una mayor colaboración por parte del alumno entrevistado.

Cada entrevista, grabada en audio y transcrita posteriormente, tuvo una duración inferior a treinta minutos, y algo menos en el caso de los niños más jóvenes (5º y 6º de Primaria). Se realizó individualmente a cada uno de los alumnos participantes y los guiones de entrevista fueron cuidadosamente planeados de acuerdo con los objetivos perseguidos, teniéndose en cuenta las recomendaciones de Novak y Gowin (1988). En particular, la investigadora estaba ampliamente familiarizada con el tema escogido, se procuró escuchar al alumno, tener paciencia, lograr un ambiente relajado y emplear el mismo lenguaje que el estudiante. El proceso de realización de las entrevistas se expone, de forma detallada, en la sección 4.3 y la transcripción completa de todas ellas se incluye en el anexo 5.

Técnicas de análisis de datos

A lo largo de la investigación hemos empleado diversas técnicas de análisis de datos. De la administración de los cuestionarios se han obtenido dos tipos de datos. Por un lado, la opción elegida en cada ítem. Por otro, el argumento en que se apoya la respuesta. Para éstos últimos, de tipo cualitativo, se ha usado previamente el análisis de contenido (Weber, 1986; Bardin, 1986; Fernández y Rico, 1984), que proporcionó una serie de categorías de respuestas en las variables consideradas. Las categorías se han obtenido mediante un proceso cíclico de comparación de respuestas similares y de agrupación o división de categorías cuando se ha considerado conveniente, según se recomienda en Miles y Huberman (1984), Huberman y Miles (1994).

Como indica Gil (1994), los datos aislados no son significativos, por lo que, una vez codificados todos los datos, se elaboraron tablas de frecuencias para las diferentes variables. Estas tablas se han cruzado con el grupo de alumnos, por lo que se presentan como tablas de contingencia, a las que se ha aplicado la prueba Chi cuadrado. Asimismo, hemos comparado nuestros resultados de la primera parte de la investigación con los obtenidos por Green (1982, 1983a y b) y Fischbein y Gazit (1984). A cada uno de los dos cuestionarios, por separado y conjuntamente, se ha aplicado el análisis factorial para analizar la estructura componencial o factorial de las respuestas.

Por otra parte, se analizaron los patrones de respuestas de los alumnos en los ítems de comparación de probabilidades del tercer cuestionario, para estudiar con mayor profundidad la estructura de las respuestas y su relación con las estrategias usadas. Completamos el estudio con el análisis implicativo entre las respuestas a los diferentes problemas en esta parte de la prueba. La técnica de análisis implicativo ha sido puesta a punto recientemente por el equipo de R. Gras y sus colaboradores (Gras, 1995). Mientras que las técnicas de análisis "cluster", análisis factorial y análisis de correspondencias se basan en las nociones de similaridad y distancia, que son simétricas, la implicación entre variables es una relación asimétrica. En los estudios didácticos nos interesa con frecuencia considerar este tipo de relaciones, por ejemplo, cuando queremos ver si la resolución de un tipo dado de problema por un alumno permite predecir su éxito en otro diferente. Esta problemática se presenta cuando consideramos que el éxito en diversos tipos de ítems son indicativos de haber alcanzado ciertos "niveles" o "etapas" de conocimiento.

Esta aplicación del método recuerda a la técnica del escalograma (por ejemplo, el escalograma de Guttman). Sin embargo, el análisis implicativo extiende dicha técnica, puesto que permite trabajar también con variables cualitativas y puede producir como resultado una escala arborescente. No supone una ordenación lineal de los "niveles" de dificultad, como las técnicas de escalograma clásico. A partir de la noción de cuasi-implicación, medida por una intensidad, y la de grafo de implicación (Gras y Larher, 1993; Gras, 1995), este método permite representar, en el seno de una familia de variables, el orden (preorden) parcial que lo estructura.

Las cuestiones de validez y generalizabilidad

Las fuentes de error en la investigación se derivan de los procesos de muestreo implícitos y pueden tener un carácter aleatorio o sistemático. La validez está relacionada con la falta de sesgos sistemáticos, mientras que la fiabilidad se refiere al control de los errores aleatorios, que son, hasta cierto punto inevitables, pero que podemos reducir aumentando el tamaño de la muestra (Messick, 1991; Kirk y Miller, 1986).

Respecto a la validez, Cook y Campbell (1979) diferencian cuatro tipos: interna, externa, estadística y de constructo. Cada una de ellas debe ser juzgada en la medida en que la investigación controla los diferentes tipos de sesgos implicados y no es nunca una cuestión de existencia o no existencia, sino de grado. En esta investigación la validez estadística se ha controlado mediante un uso adecuado de los procedimientos estadísticos empleados, que han sido escogidos entre técnicas aplicables a variables estadísticas cualitativas. Los requisitos de aplicabilidad de las pruebas chi-cuadrado, en cuanto al tamaño de las frecuencias esperadas, han sido tenidos en cuenta, reagrupando categorías semejantes cuando ha sido necesario. Por otro lado, las técnicas estadísticas han sido aplicadas con una filosofía de análisis inicial de datos (Cabriá, 1994), puesto que no hemos pretendido interpretar los resultados de los contrastes de hipótesis de un modo formal.

El grado de validez externa viene dado por el tamaño de muestra empleado y su representatividad con respecto a otros alumnos similares (Carmines y Zeller, 1979). Puesto que no hacemos contrastes formales de hipótesis respecto a las variables explicativas, las cuestiones de validez interna no son pertinentes en esta investigación. El contenido para el cual los instrumentos usados pueden considerarse válidos viene determinado por el análisis realizado en las secciones 2.2, 2.3 y 3.2. Puesto que consideramos que las variables objeto de nuestro estudio tienen un carácter multidimensional, hemos preferido el coeficiente theta de Carmines, frente al cálculo de un índice clásico de fiabilidad. El cálculo de los índices de fiabilidad obtenidos se explica en las secciones 2.8 y 3.3. Se obtuvo un valor T=0.8242 para los cuestionarios usados en la primera fase y T=0.8065 para el cuestionario empleado en la segunda.

1.4. LA EVALUACIÓN DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN NIÑOS Y ADOLESCENTES

Dedicamos esta sección a exponer una síntesis de las investigaciones sobre la evaluación del razonamiento probabilístico en los niños y adolescentes en las que se apoya directamente nuestro trabajo, partiendo de un estudio previo realizado en Godino y cols. (1987). En primer lugar presentamos un resumen muy breve de las investigaciones clásicas sobre razonamiento probabilístico de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975). Aunque realizamos un estudio detallado de las investigaciones de Green (1982) y Fischbein y Gazit (1984), cuyos instrumentos han sido usados en la primera parte de nuestro trabajo, nos restringiremos a las investigaciones directamente relacionadas con el mismo, es decir con la comparación de probabilidades y el efecto de las creencias subjetivas en la asignación de probabilidades a los sucesos.

1.4.1. Estudios clásicos sobre el razonamiento probabilístico

Los textos más significativos sobre el desarrollo de la cognición probabilística son los clásicos de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975), entre los cuales existen importantes diferencias. Piaget e Inhelder (1951) postulan que el desarrollo cognitivo del niño tiene lugar en tres etapas: preoperacional (4-7 años), operaciones concretas (7-11 años) y operaciones formales (desde los 12 años). El orden de ocurrencia de las etapas no varía, pero la edad en que se alcanza cada una puede variar considerablemente de un niño a otro o en un mismo niño, respecto a diferentes contenidos. Las transiciones entre etapas tienen lugar a través de los procesos de asimilación y acomodación.

Un concepto central de esta teoría es la idea de operación. Las operaciones lógicas y formales constituyen sistemas de acciones interrelacionadas de forma rigurosa y siempre reversible, siendo este aspecto de reversibilidad lo que hace posible la deducción. En el estadio preoperacional no existen las operaciones (reversibles). En el de las operaciones concretas son posibles las operaciones sobre lo actual presente u observable. En el estadio de las operaciones formales, la accesibilidad a las operaciones sobre lo posible o potencial permite el pensamiento hipotético-deductivo. El azar se descubre gradualmente y es por referencia constante a la estructura de las operaciones por lo que finalmente se comprende y se llega a un sistema de probabilidades.

Mientras que Piaget e Inhelder tienden en sus investigaciones a definir el nivel de desarrollo en que se encuentra el niño, Fischbein se preocupa de analizar el efecto de la instrucción en el proceso de aprendizaje. Como hemos indicado en la descripción del marco teórico, Fischbein concede, además, una gran importancia a la intuición como parte integrante de la conducta inteligente. Este autor señala que hay intuiciones o cogniciones que son correctas -como la idea de que el camino más corto que une dos puntos es la línea recta- pero no siempre nuestras creencias intuitivas expresan verdades confirmadas objetivamente. Esto se debe a dos razones:

1) Nuestra experiencia está, necesariamente, limitada por nuestras propias condiciones de vida.
2) Tenemos una tendencia natural hacia las interpretaciones causales, con lo que tendemos a interpretar los sucesos distinguiendo siempre entre causa y efecto, y tendemos a creer absolutamente en las relaciones inequívocas entre causa-efecto: "la misma causa producirá el mismo efecto". Esto supone una simplificación excesiva de la realidad.

Además, una norma importante para contribuir a la coherencia de nuestra organización cognitiva consiste en la directa disponibilidad de los datos necesarios para resolver el problema. Por ello tendemos a integrar en el curso de nuestras operaciones mentales las informaciones que están fácilmente disponibles y manipulables, e ignoramos aquellas que requieren un esfuerzo de investigación más sofisticado. Por otra parte, los aspectos y condiciones anteriores no pueden trabajar independientemente de lo que Piaget llama capacidades operacionales (lógica y analítica) del individuo.

Siguiendo a Fischbein (1975), resumimos, a continuación, las principales diferencias entre las teorías de Piaget e Inhelder y Fischbein sobre las intuiciones probabilísticas de los niños, analizando las siguientes facetas para cada estadio:

- La intuición del azar;
- La intuición de la frecuencia relativa;
- La estimación de probabilidades;
- Operaciones combinatorias;
- Efecto de la instrucción sobre cada una de estas facetas.

La intuición del azar

Piaget e Inhelder (1951) vieron la comprensión del azar por parte del niño como complementaria de la relación causa-efecto. Para ellos, sin esta comprensión de la causación no hay un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios. Según estos autores, el azar es debido a la interferencia de una serie de causas independientes y la "no presencia" de todas las interferencias posibles, salvo en el caso en que hubiera un gran número de repeticiones del experimento. Cada caso aislado es indeterminado o imprevisible, pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Esta es la vía por la que aparece la idea de probabilidad, como razón entre las posibilidades de un caso y el conjunto de posibilidades. Por tanto, la idea de azar, para Piaget e Inhelder, lo mismo que la de probabilidad, no puede ser totalmente comprendida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de las operaciones formales (a partir de 12-14 años).

Así, Piaget e Inhelder concluyen de sus experimentos que no hay una intuición del azar innata en el niño de preescolar, como no existía tampoco en el hombre primitivo, que atribuía los sucesos aleatorios a causas ocultas o a la "voluntad de los dioses". Un experimento piagetiano clásico utiliza una bandeja con dos compartimentos. En los dos compartimentos de ésta se colocan ocho bolas blancas y ocho rojas, respectivamente. Al bascular la bandeja se produce la mezcla progresiva de las dos clases de bolas.

En la primera etapa del desarrollo del concepto de azar (preoperacional), los niños afirman que las bolas volverán nuevamente a su lugar original, o bien que el conjunto completo de blancas acabará en el lugar ocupado originalmente por las rojas, y viceversa. Piaget e Inhelder interpretan esta reacción en el sentido de que el niño, antes de los 7 años, no comprende la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria y esto le impide una apreciación del azar. La irreversibilidad de una mezcla aleatoria sólo puede ser comprendida cuando se es consciente de que cada etapa de la mezcla es solo una entre muchas que podrían obtenerse con los mismos elementos. De esta forma, la idea de azar implica, para Piaget e Inhelder, la existencia de mecanismos combinatorios que el niño no posee antes de las operaciones formales. Puesto que, en el período preoperacional, el niño no posee aún la reversibilidad operatoria, no tiene ningún punto de referencia lógico para interpretar algunas cosas como irreversibles, y además no posee la capacidad combinatoria, por lo que, según Piaget e Inhelder, no puede comprender la aleatoriedad, ya que no puede diferenciar entre acontecimientos reversibles y los fortuitos, originados por mezclas de causas irreversibles. En consecuencia, hasta la etapa de las operaciones concretas en la que hay cierta apreciación de los factores que caracterizan los fenómenos causados, el niño no puede adquirir la idea de aleatoriedad.

Sin embargo, la opinión de Piaget es rechazada por Fischbein para quien la **intuición primaria** del azar, esto es, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista sin instrucción previa, está presente en la conducta diaria de cada niño, incluso antes de la edad de 7 años. El azar es equivalente a impredecibilidad y cuando el número de posibilidades, y consiguientemente el número de combinaciones posibles, es pequeño, el niño de preescolar razona correctamente y a veces, como se ha puesto de manifiesto en algunas investigaciones (Yost y otros, 1962; Davies, 1965; Goldberg, 1966; Falk y otros, 1980), más correctamente que el niño que ha alcanzado la etapa de las operaciones formales.

A través de la adquisición de esquemas operacionales espacio-temporales y lógico-matemáticos, el niño adquiere la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, incluso al nivel conceptual. Es consciente de que, por ejemplo, al lanzar 15 monedas, es muy difícil obtener 15 cruces. Claramente, este proceso no se completa durante este período, puesto que el pensamiento está todavía muy ligado al nivel concreto. No obstante, la representación del azar, que no es sino una intuición primaria en el niño de preescolar, se convierte en una estructura conceptual distinta y organizada después de la edad de los 7 años.

El niño comienza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles, y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. Pero, bien porque comprende la interferencia de las causas, sin reconocer su independencia, bien porque comprende la independencia y no la interferencia, no llega a construir la idea de azar.

Según Piaget e Inhelder, el adolescente agrupa las relaciones no determinadas de fenómenos aleatorios según esquemas operacionales. Una vez que se presenta una situación aleatoria, por medio del uso de estos esquemas se hace inteligible, y la síntesis entre el azar y lo operacional conduce al adolescente al concepto de probabilidad.

Fischbein sostiene que la síntesis entre el azar y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales. En experimentos donde se requiere al sujeto reconocer probabilidades iguales en diferentes condiciones experimentales, es el adolescente quien evita lo impredecible, y busca dependencias causales que reduzcan lo incierto, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias. La estructura operacional del pensamiento formal por sí sola no puede hacer inteligible al azar, incluso aunque pueda proporcionar los esquemas que son necesarios para esto, o sea, capacidad combinatoria, proporcionalidad, e implicación. La explicación para esta deficiencia es que las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas unívocas, según las cuales los sucesos aleatorios caen fuera de los límites de lo racional y científico.

La intuición de la frecuencia relativa

Tanto Fischbein como otros investigadores han llevado a cabo experimentos de aprendizaje probabilístico, en los cuales se trata de estudiar las predicciones de los sujetos ante situaciones en que un suceso se repite con una determinada frecuencia relativa. Un ejemplo de esta clase de experiencias consiste en presentar al alumno dos luces de color diferente (pueden ser rojo y verde) que se irán encendiendo intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia, por ejemplo, el 70% y el 30%, respectivamente. El alumno debe predecir cuál de las dos luces se encenderá la próxima vez. Los resultados obtenidos en este tipo de experimentos apoyan la conclusión de que el niño de preescolar adapta sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan como estímulo, aunque sus respuestas no llegan a coincidir totalmente con la frecuencia de los mismos. Este emparejamiento entre la conducta y las frecuencias puede ser entendido, según Fischbein, como una intuición primaria anticipatoria, aunque en opinión de otros autores, lo que él denomina intuiciones probabilísticas en la primera infancia no son más que intuiciones basadas en juicios heurísticos (Pérez Echeverría, 1990).

La mayoría de los investigadores han encontrado que la intuición de la frecuencia relativa de sucesos, puesta de manifiesto a través de experimentos de aprendizaje probabilístico, mejora con la edad. Si la intuición se ve como el resultado cognitivamente fijado de experiencias acumuladas, parece razonable que la intuición de la frecuencia relativa se desarrolle de un modo natural como resultado de las experiencias del niño con situaciones que implican sucesos aleatorios, en los cuales las respuestas deben expresar una estimación correcta de las frecuencias relativas de los fenómenos.

Las investigaciones que se han realizado con diferentes niveles de edad han demostrado que el adolescente ha progresado en comparación a los niños más pequeños en lo que se refiere a la intuición de la frecuencia relativa, particularmente en casos donde las predicciones tienen algún resultado práctico. La estrategia óptima ante decisiones en condiciones aleatorias muestra los efectos favorables del desarrollo de la inteligencia sobre las predicciones en ciertas condiciones experimentales.

La estimación de posibilidades y la noción de probabilidad

Aunque este punto será analizado con mayor detalle en la sección 1.5, comentaremos aquí brevemente los principales resultados. Para Piaget, el niño de preescolar es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios, basándose en que el niño de esta edad no posee los recursos necesarios: la habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible; el concepto de proporción y los procedimientos combinatorios por los cuales es posible realizar el inventario de todos los resultados de una situación.

Sin embargo, para Fischbein, estas carencias no impiden al niño hacer juicios probabilísticos, aunque éstos se muestren directamente influidos por sus percepciones. No está de acuerdo con las críticas de Hoeman y Ross (1975, 1982) respecto a que las tareas que resuelven los preescolares no sean más que una simple estimación de magnitudes (areas o conjuntos de bolas). Para Fischbein las comparaciones perceptivas o la estimación de magnitudes absolutas son el único método que los niños preoperacionales tienen para calibrar las probabilidades. El hecho de que las sepan utilizar para realizar un juicio de probabilidad demuestra que tienen una intuición de ese concepto.

Los niños de 9-10 años pueden resolver problemas que impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso A en dos experimentos diferentes sólo en situaciones donde, bien el número de casos favorables o el número de casos no favorables a A son iguales en ambos experimentos (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias).

En problemas donde las posibilidades son referidas a proporciones de elementos discretos (bolas en un recipiente), las respuesta de los niños de 9-10 años no son mejores que las que se obtendría por una respuesta al azar, y no son significativamente mejores que las respuestas de los niños de preescolar, excepto en el caso citado. En problemas donde las posibilidades tienen que ser determinadas a partir de una configuración geométrica (canales bifurcados por donde unas bolas pueden circular de un modo aleatorio) el porcentaje de respuestas correctas decrece, incluso, con la edad. En los casos equiprobables, encuentran con sorpresa un resultado peor en los niños de 10-12 años que en los niños de preescolar. Estos últimos buscan explicaciones de tipo mecánico y principios físicos para asignar probabilidades desiguales a algunos de los canales. Además este tipo de respuesta aumenta con la edad.

El logro de los adolescentes estimando posibilidades a favor y en contra de un resultado es superior al de los niños pequeños. Cuando el material experimental consiste en un recipiente con bolas, los niños de 12 años dan respuestas correctas desde el principio, incluso en casos en que tienen que comparar razones con términos desiguales. Tal descubrimiento es previsto por la teoría de Piaget. Lo que Fischbein añade a ésto es el hecho de que incluso niños de 9-10 años pueden responder correctamente a tales situaciones, si tienen la instrucción adecuada.

Operaciones combinatorias

Piaget e Inhelder han probado que el niño de preescolar sólo puede hacer algunas combinaciones, permutaciones y variaciones de una manera empírica, y no intenta encontrar un método de realizar un inventario exhaustivo. Durante el período de las operaciones concretas, los niños buscan modos de realizar inventarios de todas las permutaciones, variaciones y combinaciones posibles en un conjunto dado con un número pequeño de elementos, y llegan a procedimientos rudimentarios de cálculo mediante ensayo y error.

Los experimentos de Fischbein han demostrado que, al final de este periodo (10-11 años), los niños pueden, con la ayuda de instrucción, asimilar los procedimientos enumerativos usados en la construcción de diagramas en árbol. Por otra parte, Scardamalia (1977) encontró que los niños del período de operaciones concretas eran capaces de resolver problemas combinatorios, siempre que éstos no excedieran su capacidad de procesamiento de la información, mostrando así que las operaciones formales no son un prerrequisito para la utilización de la combinatoria.

Piaget e Inhelder afirman que, durante la etapa de las operaciones formales, el niño adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar inventarios de todas las permutaciones posibles, variaciones y combinaciones de un conjunto dado de elementos. La investigación de Fischbein ha demostrado, sin embargo, que esto es sólo una potencialidad para la mayoría de los sujetos, que rara vez utilizan estrategias combinatorias al trabajar en problemas de cuantificación de la probabilidad. Por tanto, aunque presumiblemente estos alumnos dispongan de la competencia para resolver problemas combinatorios, no la utilizan en la resolución de tareas probabilísticas, en contra de las predicciones de Piaget e Inhelder. Bajo su punto de vista, sería más preciso afirmar que estos alumnos son capaces de asimilar procedimientos combinatorios con la ayuda de la instrucción, y que esto es también verdad para los niños de 10 años.

El efecto de la instrucción

Usando un procedimiento de instrucción elemental, Fischbein y sus colaboradores han intentado mejorar las respuestas de los niños de preescolar a cuestiones que implican la comparación de posibilidades en situaciones donde las razones no tenían términos iguales (Fischbein et al. 1970a). Este intento no tuvo éxito y los autores apuntaron la posibilidad de que, a esta edad, los niños no sean capaces de asimilar un esquema que implique una comparación doble. Sin embargo, las respuestas de los niños de 9-10 años a problemas que no pueden ser reducidos a comparaciones binarias pueden mejorar significativamente con la instrucción. Fischbein ha demostrado que, por medio del uso de procedimientos figurativos, pueden ser construidos, al nivel de las operaciones concretas, esquemas considerados por Piaget e Inhelder como accesibles sólo al nivel de las operaciones formales. La ausencia de proporcionalidad no es un obstáculo para aprender el concepto de probabilidad. Para Fischbein, el niño es capaz de asimilar este esquema, antes, incluso, de la edad de 10 años, con la ayuda de instrucción elemental.

Fischbein y sus colaboradores (1970a y b) diseñaron una serie de lecciones experimentales para niños de 12-14 años. Dichas lecciones trataron los siguientes conceptos y procedimientos: suceso, espacio muestral, suceso elemental y compuesto, probabilidad como una medida del azar, frecuencia relativa, y análisis combinatorio.

Los resultados de la instrucción revelaron un mayor interés y receptividad de los adolescentes en lo que se refiere a las ideas de probabilidad y estadística. Estos sujetos son capaces de comprender y aplicar correctamente los conceptos enseñados. Para este autor, los modelos generativos (por ejemplo, diagramas en árbol, en el caso de las operaciones combinatorias) son los mejores dispositivos de enseñanza para la construcción de intuiciones secundarias. En un trabajo posterior, que comentaremos con detalle en el siguiente apartado, Fischbein y Gazit (1984) vuelven a estudiar el efecto de un programa de instrucción de doce lecciones de probabilidad sobre las intuiciones y concepciones de niños de 10 a 13 años, encontrando una mejora en las concepciones, pero obteniendo resultados mezclados en la mejora de las intuiciones probabilísticas al comparar los grupos experimental y de control, ya que en algunos casos se infiere un efecto negativo de la instrucción sobre las intuiciones. Los autores explican ésto como artefactos debidos al propio programa de enseñanza, y concluyen que una enseñanza explícita de las probabilidades puede mejorar las ideas intuitivas de los alumnos sobre el tema, aunque manifiestan la gran dificultad de reemplazar una intuición primaria inadecuada por una secundaria.

1.4.2. Evaluación de intuiciones probabilísticas por Fischbein y Gazit

Para el presente trabajo, es de especial relevancia la citada investigación de Fischbein y Gazit (1984), interesados en la influencia que la enseñanza de la probabilidad puede tener indirectamente en los juicios probabilísticos intuitivos. El estudio tuvo por objeto evaluar el efecto de un curso de Probabilidad, dirigido a alumnos de 10 a 13 años, en algunos errores intuitivos probabilísticos típicos.

Para los autores, sólo es posible desarrollar nuevas aptitudes intuitivas si el alumno se involucra personalmente en una actividad práctica que le proporcione la experiencia necesaria. Así, el programa de enseñanza, en conjunto, presentaba a los niños situaciones que les ofrecían la oportunidad de resolver actividades calculando probabilidades y prediciendo resultados en situaciones de incertidumbre. Se experimentaba con dados, monedas y extracciones de bolas en urnas para observar, recopilar y resumir diferentes conjuntos de resultados aleatorios, en lugar de calcular probabilidades u observar frecuencias relativas de forma teórica.

Se diseñaron 12 lecciones con esta metodología, que incluían el concepto de suceso seguro, posible e imposible; sucesos en un experimento aleatorio; posibilidades; probabilidad y frecuencia relativa, y la relación entre ellos. Se trabajó el recuento de resultados y el cálculo de probabilidades en sucesos simples y compuestos. El programa de enseñanza fue impartido a un total de 285 alumnos, utilizándose grupos paralelos de control (en total 305 alumnos en las clases de control).

Los instrumentos de evaluación fueron dos cuestionarios. El primero sólo fue administrado en las clases experimentales, y estaba diseñado para evaluar hasta qué punto los alumnos sometidos al programa de enseñanza, habían asimilado los conceptos enseñados, y eran capaces de usarlos. El segundo cuestionario no requería conocimientos especiales sobre probabilidad, y les fue administrado a todos los alumnos (tanto a los de las clases experimentales como a los de las clases de control). Estaba diseñado para valorar el efecto indirecto de la instrucción sobre los errores intuitivos de los niños.

Este segundo cuestionario, que reproducimos en el anexo 2 y analizamos en la sección 2.3, no requiere haber recibido instrucción alguna en probabilidad, por lo que evalúa las concepciones intuituvas de los estudiantes previas y posteriores a cualquier programa de enseñanza. Consta de 8 ítems, de los cuales cuatro evalúan las estrategias de razonamiento erróneas utilizadas por los alumnos en problemas de elección de urnas, y si emplean o no el razonamiento proporcional. El resto de ítems tratan las intuiciones que los alumnos tienen sobre el suceso seguro y falacias relacionadas con la "suerte" y la heurística de representatividad.

Entre las conclusiones obtenidas, los autores ponen de manifiesto el fracaso de ambos cuestionarios para los alumnos de 5º curso (10 - 11 años), para los que, aunque pudieron dar ejemplos de sucesos seguros, posibles e imposibles, parece que la mayoría de las nociones fueron demasiado difíciles. Sin embargo, afirman que, a partir de 6º curso, podría llevarse a cabo una enseñanza sistemática sobre probabilidad, sin excesiva dificultad (alrededor del 60%-70% de los alumnos de este nivel fueron capaces de comprender y usar correctamente la mayoría de los conceptos programados), y desde luego, con toda seguridad a partir de 7º (80%-90% de éxito). Los autores aseguran que tal programa tuvo un efecto beneficioso en los prejuicios y errores de los niños con respecto a secuencias de sucesos en situaciones de incertidumbre.

Por otra parte, las lecciones no mejoraron el razonamiento proporcional, encontrando, incluso, un efecto negativo de la instrucción. Los autores opinan al respecto que el pensamiento probabilístico y el razonamiento proporcional están basados en dos esquemas mentales distintos, aunque puedan compartir el mismo origen, a un nivel intuitivo muy básico, en la intuición de las frecuencias relativas (Fischbein, 1975). Por eso, un progreso en una dirección no implica una mejora en la otra. Aunque el cálculo probabilístico puede requerir el cálculo y comparación de razones, la probabilidad, como actitud mental específica, no implica, necesariamente, una comprensión formal de los conceptos proporcionales. Esta dificultad podría salvarse, según los autores, diseñando ejercicios especiales, en los que los alumnos puedan enfrentarse con cálculos no proporcionales y sus respectivas implicaciones en estimaciones probabilísticas. En cualquier caso, Fischbein aboga indiscutiblemente por una introducción sistemática de las nociones probabilísticas desde los primeros años de escuela, y lo expresa en los siguientes términos: *"En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede ser reducida, de forma rentable, a una interpretación unívocamente determinista de los sucesos. Una cultura científica eficaz exige una educación del pensamiento estadístico y probabilístico... Para ello, es necesario educar, desde la primera infancia, la compleja base intuitiva relevante para el pensamiento probabilístico; de esta manera se puede conseguir un balance genuino y constructivo entre lo posible y lo determinado, en el funcionamiento de la inteligencia"* (Fischbein, 1975, pag.131)

1.4.3. El estudio de evaluación de Green

Green llevó a cabo su principal trabajo, *The Chance and Probability Concepts Project,* subvencionado por The Social Science Research Council (England), durante un período de tres años (1978-1981). Su principal objetivo fue investigar qué conceptos o intuiciones aleatorias están presentes en la mente de los niños de edad comprendida entre 11 y 16 años (1 a 5 años de la Escuela Secundaria).

Para llevar a cabo este proyecto fue necesario diseñar un test especial de conceptos probabilísticos para administrarlo a una muestra de alumnos de diferentes condados de Inglaterra. El test constó de 26 ítems, divididos en subitems, de los que se obtenía una puntuación total de 50 puntos. Los subitems fueron clasificados en tres categorías, lo que permitió asignar a cada alumno, además de la puntuación total del test (comprendida entre 0 y 50), una puntuación verbal (entre 0 y 15), una puntuación en combinatoria (entre 0 y 6) y una puntuación probabilística (entre 0 y 29).

También le fue administrado a cada alumno un test de razonamiento general (AH2, proporcionado por la National Foundation for Educational Research), y le fue asignada por su profesor de matemáticas una puntuación (entre 0 y 10) que reflejara su aptitud en matemáticas. Además se consideraron las respuestas correspondientes a las cuestiones sobre probabilidad de los exámenes oficiales CSE y GCE nivel 0, con particular referencia a las diferencias en cuanto a sexo. Además, un sector de los alumnos participantes fue sometido más tarde a una entrevista personal, preguntándoles acerca de las respuestas que ellos daban por escrito al test.

La muestra definitiva quedó constituida por 2930 alumnos, de un total de 44 colegios distribuidos en cinco condados de centro-este de Inglaterra. Fue diseñada por estratos, para reflejar la proporción de los diferentes niveles intelectuales en la población escolar. Basándose en los informes sobre la distribución del grado AH2 para Inglaterra y Escocia, se consideraron cinco niveles de población. En cada curso escolar, el número de alumnos incluidos en la muestra correspondía exactamente a estas proporciones.

Como se ha mencionado anteriormente, la estructura de este instrumento consta de tres partes, a las cuales su autor concedió una puntuación independiente, que luego fueron sumadas para obtener la puntuación total en la prueba. Estas categorías fueron las siguientes:

- *Puntuación combinatoria:* El motivo para incluir este apartado son las teorías de Piaget, según las cuales el razonamiento combinatorio requiere de las estructuras operatorias del pensamiento formal, por lo que no se desarrollaría hasta superar esta última etapa del desarrollo evolutivo.
- *Puntuación verbal: T*iene por objeto estudiar la relación existente entre el uso del lenguaje específico sobre conceptos probabilísticos y la puesta en práctica de dichos conceptos en situaciones de incertidumbre.
- *Puntuación probabilística: T*rata de estudiar las respuestas de los alumnos a situaciones de toma de decisiones, tales como elección de urnas o ruletas con distinta composición. Aunque no se exige en ningún momento la asignación de probabilidades a los sucesos, la mayoría de estos ítems están enfocados de forma que se requiera una estimación previa y la utilización del razonamiento proporcional.

*El Nivel de Conceptos Probabilísticos***:**

Con el fin de determinar las estrategias empleadas por niños y niñas de distintas edades, así como la utilización o no del razonamiento proporcional en la elección de urnas o ruletas, Green asigna a cada alumno un nivel de conceptos, agrupando para ello algunas cuestiones del test en subgrupos que representan diferentes niveles. Para encontrarse en un nivel determinado, es preciso haber superado todos los inferiores, así como la puntuación mínima para acceder al nivel dado. Los subgrupos y las puntuaciones mínimas para acceder a ellos fueron optimizados por medio del escalograma de Guttman. El resultado fue una escala que comprendía tres niveles (además del nivel 0, que indica fracaso absoluto)

Para estudiar la relación entre estos niveles y las etapas piagetianas, Green tiene en cuenta el trabajo de Piaget e Inhelder (1951) y las respuestas dadas por los sujetos a los ítems de comparación de probabilidades, por lo que se podría afirmar una equivalencia entre los niveles de conceptos probabilísticos de Green y las etapas del desarrollo de la idea de azar que propone Piaget.

Aunque los resultados de la investigación de Green serán analizados con detalle en el capítulo 2 y comparados con los obtenidos en el presente trabajo, sí exponemos aquí, de forma general, algunas de sus conclusiones; como la superioridad de los varones sobre las hembras en las respuestas a los ítems probabilísticos, tanto en el examen GCE nivel 0, como en el test de conceptos probabilísticos, y por consiguiente, el logro de un mayor nivel. El grado asignado por el AH2 es el factor dominante en la puntuación del test, y mantiene una alta correlación (0.72) con la puntuación sobre aptitud en matemáticas, otorgada por el profesor. En cuanto al concepto de razón, aparece como crucial para la comprensión de la probabilidad. Además, la mayoría de los estudiantes del último curso no consiguen el nivel de operaciones formales (etapa III de Piaget) y presumiblemente, abandonan la escuela en el nivel de operaciones concretas (etapa II). En cuanto al uso del lenguaje, los estudiantes muestran un flojo dominio del lenguaje común de la probabilidad.

A la vista de sus descubrimientos, Green afirma que sólo a partir de un extenso programa basado en actividades de clase se podrían eliminar los errores de pensamiento que muestran, tanto los alumnos estudiados, como los adultos, en este campo. Es necesaria una actividad práctica desde corta edad a partir de la cual construir experiencias adecuadas para el alumno. Las ideas sobre aprendizaje por descubrimiento dirigido de Green y sus resultados experimentales inspiraron, en gran parte, el excelente material del Project on Statistical Education (Holmes y cols. 1990).

1.5. LOS PROBLEMAS DE COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES: VARIABLES DE TAREA Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

1.5.1. Las investigaciones de Piaget e Inhelder

Como hemos indicado, Piaget postula que el desarrollo cognitivo del niño tiene lugar en etapas cuyo orden de ocurrencia no cambia, aunque la edad en que se alcanza una etapa puede variar considerablemente de un niño a otro o de un contenido a otro. En este apartado se describen estas etapas para el caso de la cuantificación de probabilidades.

Para estudiar este punto, Piaget e Inhelder (1951) presentaron a los niños dos colecciones de fichas blancas, con o sin cruz en su reverso. A los alumnos se les daba a conocer la composición de cada una de las colecciones, que era diferente. Por ejemplo (1,2) y (1,3), donde el primer número del par indica el número de fichas con una cruz en su parte posterior (casos favorables) y el segundo número el número de fichas en blanco (casos desfavorables). La tarea consistía en decidir en cual de las dos colecciones sería más fácil obtener una cruz al tomar una de las fichas, que previamente habían sido mezcladas y colocadas con la cara blanca hacia arriba. Los tipos de composiciones consideradas por Piaget e Inhelder en sus experimentos fueron las siguientes:

1. Doble imposibilidad: cuando ninguna de las dos colecciones (de 2 o 3 elementos) tiene cruces, como por ejemplo, tomar las colecciones (0,3) y (0,2).
2. Doble certeza: todas las fichas tienen cruces, como al comparar (3,0) y (2,0).
3. Certeza-imposibilidad, que sería el caso de (0,3) y (2,0).
4. Posibilidad-certeza; por ejemplo (1,2) y (2,0).
5. Posibilidad-imposibilidad, como en los conjuntos (0,3) y (1,3).
6. Composiciones idénticas en las dos urnas, tales como (1,2) y (1,2).
7. Proporcionalidad de las composiciones, como (1,2) y (2,4).
8. Desigualdad de casos favorables e igualdad de posibles, como (1,3) y (2,2).
9. Igualdad de casos favorables y desigualdad de posibles. Por ejemplo, (1,2) y (1,3).
10. Desigualdad, tanto de casos favorables como de posibles, como (1,2) y (2,3).

Los resultados de Piaget e Inhelder indican que, en el primer estadio de desarrollo del concepto de probabilidad, hay una ausencia de comparación lógico-aritmética que impide a los niños resolver el problema. En el segundo estadio se consigue hacer comparaciones con una sola variable. En el tercero se da una solución general y rápida. Falto de un cálculo de fracciones, el sujeto determina los dobles cocientes por un sistema de correspondencias, cuando las proporciones o desproporciones no son inmediatamente visibles. Comentaremos las características de estos niveles con mayor detalle.

En el primer estadio pueden considerarse dos niveles. En el nivel IA el niño no está en posesión de las operaciones lógicas elementales (inclusión de la parte en un todo, susceptible de conservación) ni de las operaciones aritméticas. Presenta asimismo una dificultad en usar la disyunción. Aparte de los casos de imposibilidad (1, 3 y 5) no se observan respuestas correctas sistemáticas. La cuestión 4 (posibilidad-certeza) pone en evidencia otro factor propio de este nivel. Al preguntarle al niño, por ejemplo, si es más fácil obtener una cruz entre un conjunto (3,0) o en un conjunto (1,2), dirá que es más fácil en el segundo caso, puesto que sólo hay una ficha con cruz. Los autores creen que este razonamiento indica la falta de una intuición probabilística en los niños de este nivel. Igual razonamiento se presenta en el tipo 8.

En el caso del tipo 9 los niños consideran la igualdad de posibilidades, mientras que suelen preferir la colección más pequeña en el caso 7. En resumen, el niño no considera los casos posibles y sólo tiene en cuenta los casos favorables en sentido absoluto. Con frecuencia elige su respuesta de forma arbitraria. La noción de probabilidad no es accesible en esta etapa, puesto que se precisa incluir la parte en el todo, los casos favorables en el conjunto de casos posibles, compuestos disyuntivamente.

En el nivel IB se resuelven algunas de las cuestiones que dependen de una sola variable. Las soluciones no se basan aún en un razonamiento operatorio, sino en apreciaciones intuitivas. Cuando los datos son sencillos, el niño comprende el problema gracias a esquemas perceptivos que no es capaz de generalizar a casos más complejos. El niño no es capaz de incluir los casos favorables en el conjunto de casos posibles, ni de instituir una comparación cuantitativa entre la parte y el todo o entre la parte y la parte complementaria (casos desfavorables). Sin embargo, va adquiriendo la intuición de que el número de casos favorables se relaciona con la probabilidad de obtener uno de ellos. El sujeto razona en base al término constante en las dos colecciones (por ejemplo, los casos desfavorables) y no considera la variable, lo que le conduce a errores sistemáticos. Un hecho que caracteriza este periodo es que, en general, es más difícil un problema con un sólo conjunto (¿es más difícil obtener rojo o negro en este conjunto?) que un problema de comparación de probabilidades en dos conjuntos (¿en cuál de estas urnas hay mayor probabilidad de obtener rojo?). Piaget e Inhelder explican este hecho afirmando que en el segundo caso es más fácil diferenciar la parte y el todo, aunque los dos problemas sean formalmente equivalentes.

En el segundo estadio tenemos otros dos niveles o subestadios. El nivel IIA se caracteriza por el éxito en los problemas que implican la comparación de una sola variable y el fracaso sistemático en los casos de composición proporcional. Desde que se adquieren las primeras operaciones lógico-aritméticas, alrededor de los 7 años, los niños no tienen dificultades en incluir los casos favorables (A) y desfavorables (A') en un todo, concebido como el conjunto de los casos posibles (B) y susceptible de disyunción. Las argumentaciones de los niños tienen en cuenta simultáneamente todos estos casos y sirven para resolver las cuestiones de tipo 8 y 9. Esta descomposición de la totalidad en partes correlativas según un esquema reversible de composición aditiva lleva inmediatamente a descubrir la disyunción (un B puede ser A o A') y las posibilidades múltiples (se puede ganar o perder). Los problemas de una variable pueden resolverse mediante comparaciones aditivas, mientras que las cuestiones de proporcionalidad suponen un doble cociente, y por tanto las ideas de fracción y proporción, que el niño de esta etapa no ha adquirido.

El nivel IIB se caracteriza por una solución empírica progresiva de las cuestiones de proporcionalidad. Se comprende la dificultad inicial de este tipo de problemas, ya que, cuando varían simultáneamente los casos favorables y posibles, el niño trata, sin éxito, de generalizar las estrategias que le habían sido productivas en los casos más simples, efectuando comparaciones aditivas entre los casos favorables y desfavorables.

En el estadio III, por fin, el conjunto de problemas da lugar a una solución general y rápida. Si no se tiene un cálculo de fracciones, los dobles cocientes se determinan por un sistema de correspondencias. Así, por un conjunto de relaciones multiplicativas, se alcanza la inclusión de las partes en el todo, fuente de disyunciones, y la cuantificación de las probabilidades, engendradas gracias a este mecanismo disyuntivo. Las nociones probabilísticas fundamentales no se construyen hasta este nivel, ya que las operaciones formales son, psicológicamente, operaciones de segundo orden, es decir operaciones construidas sobre operaciones y precisan un poder hipotético deductivo mayor que las operaciones concretas.

1.5.2. Réplicas de las investigaciones de Piaget

La investigación de Piaget e Inhelder inspiró una serie de estudios posteriores encaminados a analizar si existen algunas ideas rudimentarias de probabilidad en los niños pequeños. Estas investigaciones pueden considerarse réplicas de los trabajos de Piaget e Inhelder, en las que se varían algunas condiciones de los experimentos. A continuación comentamos aquellas que han tenido mayor repercusión.

Yost, Siegel y Andrews (1962) se interesaron por la existencia de razonamiento probabilístico en los niños de edad preescolar, cambiando ligeramente el método experimental de Piaget, al que imputaron las siguientes críticas:

- El método de Piaget se basó en las repuestas verbales, que los niños pequeños podrían tener dificultad en dar, a pesar de contar con ideas probabilísticas.
- El hecho de que los niños tuviesen que recordar la composición de los conjuntos podría influir en sus respuestas por falta de memoria, más que por ausencia de razonamiento probabilístico.
- Los datos no tuvieron un análisis estadístico apropiado y la muestra fue pequeña.

Yost y sus colaboradores usaron dos urnas de plástico conteniendo fichas de dos colores diferentes en diferentes proporciones. Preguntaron a los sujetos cual de las dos urnas (cuya composición podían ver en todo momento) daba mayor probabilidad de obtener una bola de determinado color. De este modo, puesto que en las dos urnas hay bolas de los dos colores, se controla el efecto de la preferencia sobre uno de ellos. Sus resultados indican que, al contrario de lo que creía Piaget, a partir de los 4 años se aprecia en los niños una estimación intuitiva de las posibilidades, aunque no un concepto completo de probabilidad. También se encontró correlación entre las ideas de probabilidad y el nivel de desarrollo del niño.

Goldberg (1966) continúa esta línea de investigación, usando una técnica similar a la de Yost y sus colaboradores. Encontró que los niños cometían un mayor número de errores cuando el número de casos favorables era el mismo y el número de casos desfavorables era diferente, que en el caso contrario. Este resultado es importante puesto que apoya la tesis de que los niños no se basan en las proporciones para elegir la urna correcta sino en la comparación de los valores absolutos. El número de errores también era mayor cuando las probabilidades se asemejan al valor 50% que parece más difícil de discriminación para los niños pequeños.

Davies (1965) extiende los estudios de Yost y sus colaboradores a niños de 3 a 9 años. Sus experimentos ponen de manifiesto la existencia de una intuición probabilística y estimación de posibilidades en casos sencillos, incluso antes de que el niño sea capaz de dar una explicación verbal a sus elecciones. Utilizando situaciones en las que el niño recibía una recompensa por la extracción de una bola de determinado color, se observó la preferencia sistemática por las urnas en que la proporción del color deseado era mayor. Asimismo se confirmó la hipótesis de que el concepto de probabilidad se adquiere progresivamente, pues el porcentaje de respuestas correctas se incrementó con la edad. Sus experimentos establecieron el hecho de que el niño usa, predominantemente, la información directamente percibida para estimar las posibilidades. Si hay conflicto entre esta información y la que se obtiene al calcular las frecuencias de ocurrencias, el niño se basará en la información perceptual. Ello hizo pensar a algunos investigadores si las respuestas aparentemente probabilísticas de los niños se reducirían simplemente a evaluaciones comparativas del tamaño del conjunto de casos favorables.

Hoeman y Ross (1975) trataron de estudiar la hipótesis de que el niño de preescolar no es capaz de hacer juicios probabilísticos y sus respuestas parecen ser probabilísticas sólo por el contexto del experimento en que se hacen, tratándose, en realidad, de simples comparaciones perceptuales. Según estos autores, el niño estaría eligiendo sistemáticamente la urna con mayor número de casos favorables, con lo que estaría comparando magnitudes absolutas y no probabilidades. Para probar esta hipótesis trataron de diseñar experimentos probabilísticos que diferenciasen los juicios probabilísticos de las comparaciones perceptuales. Usando ruletas con áreas coloreadas de dos colores y diversos tamaños, tomaron una muestra de niños de 4 a 10 años y la dividieron en dos grupos. Al primer grupo de niños se le preguntó sobre cuál de dos ruletas dadas daría mayor posibilidad de obtener un determinado color (estimación probabilística) y al segundo sobre cual de las dos ruletas tenia mayor cantidad del color dado (estimación de magnitudes). No se observaron diferencias entre los dos grupos, de lo que los autores deducen que no era necesario una comparación de proporciones ni una estimación de probabilidades para resolverlas, bastando con la estimación absoluta de magnitudes.

En un segundo experimento con un sólo disco y en el que se preguntaba en qué color creía que se parararía la aguja, para la tarea probabilística; y de qué color hay más, para la tarea de comparación de magnitudes, los autores observaron mayor número de errores en la tarea de tipo probabilístico que en la de comparación de magnitudes. Por ello concluyen que entre la edad de 4 y 8 años los juicios probabilísticos eran muy pobres. El niño antes de la edad de operaciones concretas no tiene un pensamiento probabilístico, aunque éste mejora con la edad. Otros experimentos con dos urnas y bolas de colores dieron como resultado que este tipo de tarea sirve para diferenciar los razonamientos de tipo probabilístico y proporcional, si se pregunta a los niños cual de las dos urnas da mayor posibilidad de obtener un determinado color. También mostraron que es preferible la tarea que emplea dos urnas que la que utiliza una sola urna (preguntando cual color tiene más posibilidades), puesto que da menor número de respuestas erróneas. Ello es debido a que cuando se usan dos conjuntos de fichas, el alumno se limita a elegir de qué conjunto prefiere hacer la extracción para obtener el resultado ganador. En las tareas de una sola urna, es el resultado en sí, lo que debe ser predicho. Además, la combinación de elementos en una unidad intuitiva impide al niño pensar simultáneamente en el todo y las partes de los dos subconjuntos incluidos.

Mención aparte merecen los trabajos de Fischbein durante este periodo, ya que usó algunos instrumentos diferentes a los de Piaget y su propio marco teórico sobre las intuiciones. Además, este autor se preocupa por el efecto de la instrucción sobre las intuiciones probabilísticas de los niños. Fischbein, Pampu y Minzat (1967) utilizan preguntas con representaciones gráficas de canales por los cuales se deja caer una bola, semejantes a los que hemos utilizado como parte del test de Green en la primera muestra experimental. En las preguntas que corresponden a los casos equiprobables, encuentran con sorpresa un resultado peor en los niños de 10-12 años que en los niños de preescolar. Estos últimos buscan explicaciones de tipo mecánico y principios físicos para asignar probabilidades desiguales a algunos de los canales. Además, este tipo de respuesta aumenta con la edad.

Los autores creen que el proceso de enseñanza en las escuelas orienta al niño a una interpretación determinista de los fenómenos, en el sentido de buscar una explicación unívoca hacia los hechos cotidianos. El niño es enseñando a buscar relaciones de tipo causal. Aunque los conceptos de azar y necesidad se definen de forma complementaria y equilibrada, en el desarrollo intelectual del niño esta definición y equilibrio mutuo son eludidos por la instrucción, que sistemáticamente cultiva sólo uno de estos aspectos.

Fischbein, Pampu y Minzat (1970) emplearon dos urnas de plástico con bolas negras y blancas, preguntando al niño cual de ellas daba mayor posibilidad de obtener un color dado. Usaron un total de 18 preguntas divididas en 3 categorías. En el primer tipo, $C_{1,}$ el número de bolas blancas y negras de una de las cajas era igual o bien eran iguales el número de bolas de un color dado en las dos cajas. La categoría C_2 no tenía restricciones respecto al número de bolas blancas y negras en las dos cajas. La categoría C_3 consistía en números proporcionales de bolas blancas y negras en las dos cajas. Utilizaron grupos de niños sin instrucción y con una instrucción breve, aunque sistemática, sobre la forma de resolver los problemas.

En el caso de los alumnos sin instrucción encontraron aproximadamente la misma proporción de éxito entre los niños de preescolar y los de 9-10 años para los problemas de tipo C1, aunque a partir de 12-13 años los niños eran capaces de resolver, sin ninguna instrucción, problemas de las tres categorías. La instrucción no mostró mejora para los niños pequeños, pero si una importante mejora a partir de 9-10 años, lo que confirma la opinión de los autores sobre la conveniencia de una enseñanza de la probabilidad a partir de estas edades. Como vemos, este trabajo es también precursor de los que comentaremos en las dos secciones siguientes.

1.5.3. Estudios sobre variables de tarea en los problemas de comparación de fracciones y estrategias en los diferentes niveles de desarrollo.

Puesto que un problema de comparación de la probabilidad de un mismo suceso en dos espacios muestrales diferentes entraña consigo la comparación de dos fracciones, hemos creído necesario incluir en este apartado un breve resumen de algunas investigaciones sobre razonamiento proporcional que han sido tomadas como base en nuestra investigación. No haremos aquí un estado de la cuestión completo, por no ser el estudio de las fracciones el objetivo principal de nuestro trabajo. Para un resumen de la investigación sobre razonamiento proporcional remitimos al lector a los estudios de Tourniare y Pulos (1985), Behr y cols (1992), Pitkethly y Hunting (1996) .

El concepto de proporción ha sido estudiado extensamente, a partir del trabajo de Piaget en el campo de la probabilidad (Piaget e Inhelder, 1951). Estos estudios han confirmado que el concepto se adquiere bien entrada la adolescencia (Fischbein, Pampu y Minzat, 1970a; Karplus y Peterson, 1970; Karplus y Karplus, 1972; Karplus, Karplus y Wollman, 1974).

En una revisión de Tourniaire y Pulos (1985) se indica que la dificultad de los problemas de fracciones depende de las variables de tarea y del formato en que se presenten. Un tipo de tarea clásico es el de *comparación*, donde los niños tienen que hallar el cuarto término de una proporción, conocidos los otros tres. Karplus y sus colaboradores usan este tipo de tareas y se interesan también por el estudio de las estrategias de los niños en los problemas de proporcionalidad. En su estudio usaron un problema en que, dados tres términos de una proporción, deben hallar el cuarto (Mr. Short y Mr. Tall). Entre las estrategias usadas encuentran las siguientes: a) estimación del valor pedido al azar o mediante factores externos, sin utilizar los datos; b) cálculo intuitivo, usando los datos en forma ilógica o al azar; c) estrategias aditivas; d) hacer un cambio de escala no relacionado con los datos; e) suma y cambio de escala y f) estrategia proporcional.

Estos autores dividen los problemas verbales sobre fracciones en problemas de razones y problemas de mezclas. En los primeros se comparan proporciones entre objetos diferentes, como kilómetros por hora y se usan dos unidades de medida, mientras que en los problemas de mezcla se usa una sola unidad de medida. Según Karplus, Pulos y Stage (1983a y b), estos últimos resultan más difíciles, por tener que visualizar un continuo.

Noelting (1980a y b), a partir de un problema de comparación de dos mezclas (agua y zumo de naranja) realiza un estudio que extiende las categorías de problemas de comparación de fracciones consideradas por Piaget e Inhelder (1951) en su trabajo de comparación de probabilidades. En base a su análisis, Noelting diferencia diversos niveles en estos problemas y en las estrategias que le son asociadas. Estos niveles se corresponderían con las etapas de desarrollo de Piaget tal como reproducimos, resumidamente, en la tabla 1.5.1. Representamos con (a,b) y (c,d) los dos tipos de elementos implicados en las fracciones a comparar; por ejemplo, bolas rojas y azules (o casos favorables, casos desfavorables), al comparar probabilidades. Distinguiremos entre estrategias *"entre",* cuando se comparan términos de una fracción con otra y estrategias *"intro",* cuando se comparan términos dentro de una fracción, para establecer una razón y luego esta razón se compara con otra razón en la fracción restante.

Las características que Noelting atribuye a cada etapa del desarrollo de la noción de fracción son las siguientes:

- El estadio 0 (simbólico) está formado por problemas que se pueden resolver sólo identificando los elementos.
- En el estadio IA (Intuitivo inferior) hay una comparación del orden de magnitud del primer término de las dos razones, es decir, se detecta una relación del tipo $a<c$ y no se toman en consideración los segundos términos. El estadio IB (intuitivo medio) está marcado por la comparación del orden de magnitud de los segundos términos de las razones. En esta etapa el segundo término se integra como recíproco del primero y se comparan las razones que tienen el primer término igual y el segundo diferente. El estadio IC (intuitivo superior) se destaca por una consideración de las relaciones internas. En esta etapa se construye la razón como un todo. Además, se establecen las relaciones entre los dos pares de relaciones internas consideradas, que se ven como complementarias. Es decir, la composición de las relaciones no se hace a través de la transitividad, sino de la complementación.
- El estadio IIA (operacional concreto inferior) integra la relación interna entre los términos de la fracción que da el valor de una razón con la relación que la amplía o reduce. Aparece la

diferenciación entre el valor de la fracción y su amplificación a partir de una operación multiplicativa aplicada a ambos términos de la razón. Esta es una operación lógica que da lugar a la clase de equivalencia de la fracción. Se diferencian los conceptos de razón y cantidad.

Tabla 1.5.1. Niveles de problemas de comparación de fracciones y estrategias asociadas (Noelting, 1980)

Etapa	Nombre	Edad	Ejemplo ítem (a,b) vs (c,d)	Características	Estrategia"entre"	Estrategia"intro"
0	Simbólica	2;0	(1,0) vs (0,1)	Identificación de elementos		
IA	Intuitiva inferior	3;6	(1,4) vs (4,1)	Comparación del primer término	c>a (c,d)>(a,b)	
IB	Intuitiva media	6;4	(1,5) vs (1,2)	Primer término igual; comparación del segundo término	a=c, b>d, (c,d)>(a,b)	
IC	Intuitiva superior	7;0	(5,2) vs (3,4)	Relación inversa entre los términos de ambos pares	a>c, b<d, (a,b)>(c,d)	a>b, c<d, (a,b)>(c,d)
IIA	Operacional concreta inferior	8;1	(1,1) vs (2,2)	Clase de equivalencia de la razón (1,1)	a=b, c=d, m/n(a,b)=(c,d), (a,b)=(c,d)	a/b=c/d=1/1, (a,b)=(c,d)
IIB	Operacional concreta superior	10;5	(4,2) vs (2,1)	Clase de equivalencia de cualquier razón	m/n(a,b)=(c,d), entonces (a,b)=(c,d)	a/b=c/d, (a,b)=(c,d)
IIIA	Operacional formal inferior	12;2	(2,1) vs (4,3)	Razones con dos términos correspondientes múltiplos: hay tres tipos según los términos que guarden proporción	ma=c, m(a,b)=(ma,mb) Si ma=c, mb<d, entonces (a,b)>(c,d)	a/b=m, c/d=1+1/d<m, entonces (a,b)>(c,d)
			(4,2) vs (5,3)		(a,b)/b=(a/b,1), m.1=d; ma/b>c, m(a/b,1)>(c,d) entonces (a,b)>(c,d)	a/b=m, c/d=1+e/d<m entonces (a,b)>(c,d)
			(3,2) vs (4,3)		(a,b)=(b,b)+(e,0) (c,d)=(d,d)+(e,0) (b+b)<(d+d) e/(b+b)>e/(d+d), entonces (a,b)>(c,d)	a/b=1+1/b, c/d=1+1/d d>b, 1/d<1/b, 1+1/b>1+1/d, entonces (a,b)>(c,d)
IIIB	Operacional formal superior	15;10	(3,5) vs (5,8)	Cualquier razón	a+b=g, c+d=h hg=gh, h(a,g)=(ha,hg) g(c,h)=(gc,gh) (gc,gh)<(ha,hg), entonces, (a,b)>(c,d)	100a/b=x%, 100c/d=y% x%>y%, entonce, (a,b)>(c,d)

- En el estadio IIB (operacional concreto superior) se diferencian los dos términos de la razón dentro de esta clase de equivalencia.
- En el estadio IIIA (operacional formal inferior), la estrategia que se aplica para comparar dos razones es una combinación de una multiplicación conjuntiva de sus términos y una adición disyuntiva. La combinación de estas operaciones es posible porque los denominadores son múltiplos. La multiplicidad puede también hallarse en otros términos de las fracciones, por tanto, la resolución de los problemas en esta fase es una combinación de conectivos lógicos hechos a

través de la complementación. Por último, en el estadio IIIB (operacional formal superior) se forma un sistema combinatorio en el que las transformaciones aritméticas y lógicas se diferencian e integran, permitiendo la comparación de cualquier tipo de fracción.

Numerosos autores han estudiado el concepto de fracción posteriormente y, en particular, la comparación de fracciones (Vergnaud, 1983; Karplus, Pulos y Stage, 1983a y b). En estos trabajos se han encontrado dos tipos básicos de estrategias correctas: multiplicativas y no multiplicativas. En las estrategias multiplicativas los términos de una razón se relacionan multiplicativamente y esta relación se extiende a la segunda razón. En la mayoría de los casos la relación se establece entre el numerador y denominador de la misma fracción (estrategia "intro") o entre numeradores y denominadores de las dos fracciones (estrategias "entre"). Rara vez se emplea la estrategia de productos cruzados. Las estrategias correctas no multiplicativas consisten en establecer una relación dentro de una fracción y extenderla a la segunda mediante operaciones aditivas (Hart, 1981).

Las estrategias erróneas pueden ser consecuencia de ignorar parte de los datos del problema (por ejemplo, usar sólo los numeradores). También son muy frecuentes las estrategias erróneas basadas en operaciones aditivas. También se ha apreciado que un mismo sujeto puede usar diferentes estrategias y tratar a veces de resolver un problema más complejo con una estrategia elemental.

1.5.4. Investigaciones recientes sobre comparación de probabilidades

Los resultados de Piaget e Inhelder (1951) y de los trabajos de Noelting y los otros autores citados en la sección 1.5.3 han servido de base a posteriores investigaciones sobre la comparación de probabilidades. A continuación exponemos un resumen de estos trabajos, que provienen de dos grupos de investigadores diferentes. El primero de ellos, en el campo de la psicología, se ha enmarcado preferentemente en la teoría del procesamiento de la información. Otro grupo de investigadores, ligados a la Educación Matemática, han estudiado principalmente el efecto de la instrucción, o se han interesado por los requisitos para iniciar la enseñanza de la probabildad.

Investigaciones apoyadas en el procesamiento de la información

Para los neopiagetianos el concepto de probabilidad y la capacidad de comparación sólo emergen tras un desarrollo operacional que dé sentido a las nociones de causa y azar y está relacionado también con el razonamiento combinatorio y proporcional. Sin embargo, estas teorías son contradichas por numerosas investigaciones que han puesto de manifiesto la existencia de cierta noción de azar incluso en niños de preescolar. Además, el hecho de que los sujetos adolescentes y adultos no utilicen estrategias de proporcionalidad para resolver problemas probabilísticos cotidianos sugiere que, aún teniendo disponibles estrategias formales para resolver un problema, no las utilizamos, al menos en los problemas de la vida diaria.

Una alternativa a la teoría evolutiva de Piaget ha sido la teoría del procesamiento de la información. Este enfoque postula que las estructuras intelectuales son un conjunto de estructuras ejecutivas (Simon, 1962) y que cada estrategia requiere una determinada cantidad de espacio en el almacén de memoria a corto plazo. La capacidad de este almacén varía en función de la edad del sujeto debido a factores madurativos. Así podría explicarse el hecho de que Hoeman y Ross (1975) y Fischbein y Gazit (1984) mostraran que adolescentes en el período de las operaciones formales rara vez utilizaran estrategias combinatorias al trabajar en problemas de cuantificación de la probabilidad, cuando, presumiblemente, estos sujetos poseían la competencia de resolver problemas combinatorios, en contra de las predicciones de Piaget e Inhelder (1951).

Entre las investigaciones sobre probabilidad que se sitúan en este enfoque, citaremos las de Carretero, Pérez Echeverría y Pozo (1985) y Pérez Echeverría, Carretero y Pozo (1986), quienes comparan en su estudio los rendimientos de los sujetos en tareas de proporción, probabilidad y correlación. En estos trabajos establecen cuatro niveles de dificultad en la resolución de problemas, tanto proporcionales, como probabilísticos. La muestra de sujetos que utilizaron estaba formada por alumnos de 1º de BUP, 3º de BUP y 1º de Universidad. Los alumnos tenían que resolver una relación de tareas sobre cuantificación de proporciones, probabilidades y correlaciones. La tarea de proporción era una adaptación de la prueba de Noelting (1980 a y b) sobre mezclas de cantidades de zumo de naranja con agua mineral.

Las tareas de probabilidad eran una adaptación de las diseñadas por Piaget e Inhelder (1951) para estudiar la comparación de probabilidades. Se presentaba a los sujetos dos grupos de fichas, cada uno de un color. En ellos había una serie de fichas marcadas por una cara con un círculo blanco y otra serie de fichas sin marcar. Los sujetos tenían que decidir en qué grupo era más fácil obtener una ficha marcada, si se extraía a ciegas. Los cuatro niveles de dificultad que contemplan Carretero y sus colaboradores son los siguientes:

- Nivel 1: Formado por todos aquellos problemas que se podían resolver con una simple comparación de cantidades absolutas (cuando hay igualdad de casos favorables o desfavorables, es decir, el número de casos favorables o desfavorables coinciden en ambas urnas). Se pueden diferenciar tres tipos: a) Cuando los casos favorables y desfavorables son iguales, los sujetos pueden hacer corresponder uno a uno los elementos de ambos términos; b) casos favorables iguales o c) casos desfavorables iguales. En estos casos los sujetos pueden establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos favorables o desfavorables.
- Nivel 2: Cuando existe proporcionalidad entre los casos favorables de ambas urnas y desfavorables de ambas urnas o entre casos favorables y desfavorables de cada urna. (Las urnas son equivalentes). Los problemas correspondientes a este nivel se pueden responder estableciendo una medida de correspondencia entre dos miembros de las fracciones y luego comparar los otros dos miembros usando la misma medida. Hay dos tipos: en el primero la relación de proporcionalidad es visible internamente, porque los números de casos favorables y posibles son múltiplos (como (2,6) y (3,9)); en el segundo caso, hay además una relación entre-urna, porque también son múltiplos los casos favorables y desfavorables de las dos urnas entre sí (como (1,3) y (2,6)).
- Nivel 3: Cuando existe proporcionalidad sólo entre los casos favorables de ambas urnas o sólo entre los desfavorables de ambas urnas o entre casos favorables y desfavorables de una sola urna. (Las urnas no son equivalentes, como en (7,8) y (3,4)). Al establecer una medida de correspondencia entre dos miembros del par o de las fracciones y luego comparar los otros dos miembros usando la misma medida se obtiene un criterio aproximado, aunque no la respuesta exacta. Hay tres tipos: Relación de proporcionalidad entre los casos desfavorables de las urnas ((7,8) y (3,4)); relación entre los casos favorables de las urnas ((4,7) y (2,5)) y relación dentro de una urna ((3,5) y (2,4)).

Nivel 4: Cuándo no existe relación alguna de proporcionalidad entre los cuatro miembros. Este tipo de problema sólo se podía resolver mediante un cálculo estricto de proporciones. Hay dos tipos: Se repite un número ((7,5) y (5,3)) o no se repite ((8,5) y (7,4)).

ambién se obtuvieron cuatro tipos de estrategias utilizadas por los sujetos de la muestra:

A) La más simple de todas es la comparación de magnitudes absolutas, típica, según Piaget e Inhelder, de los niños preoperacionales. Resuelven con éxito las tareas del nivel 1.
B) Comparación aditiva entre fracciones. Se establecen correctamente las razones entre los elementos,

pero se busca la solución comparando los miembros de estas fracciones por medio de sumas y restas. Es la estrategia prototípica de la etapa de operaciones concretas. Estas estrategias pueden resolver con éxito los problemas del nivel 1.

C) La estrategia de correspondencia o construcción propia. Consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra fracción. Esta regla proporciona respuestas correctas en el nivel 2, y aproximadas en el nivel 3.

D) Comparación multiplicativa entre los miembros de cada fracción: típica, según Piaget e Inhelder (1951) de los sujetos que han adquirido las operaciones formales.

ntre las conclusiones al trabajo, los autores obtienen que, en general, los problemas presentados en un contexto proporcional eran más fáciles que los presentados en un contexto probabilístico. Es muy posible que el dominio del cálculo de proporciones sea un prerrequisito para dominar el cómputo de probabilidades, pero no parece ser el único prerrequisito. Una diferencia importante entre las dos tareas estriba en que el resultado de un problema presentado en un contexto proporcional está indicando un acontecimiento seguro, mientras que el resultado de un problema presentado en un contexto probabilístico indica un grado de incertidumbre.

Singer y Resnick (1992) examinan las representaciones que los niños usan en sus razonamientos sobre razones y probabilidades antes de dominar totalmente el razonamiento proporcional. as proporciones, expresadas como relaciones entre razones, tienen tres cantidades básicas asociadas: La cantidad total y dos partes, y puede representarse con dos esquemas diferentes: el esquema parte-todo y el esquema parte-parte. Para estos autores, el contexto en que se presentan los problemas tiene una importancia decisiva para la elección de uno u otro esquema por parte de los sujetos.

Entre las situaciones que consideran destacamos dos tipos, que se encuentran en los problemas de comparación de probabilidades: En las situaciones que denominan *For Every* aparecen dos cantidades semejantes (del mismo espacio de medida) que se incluyen en un conjunto común, y que se ponen en correspondencia una con otra. Estas situaciones movilizan un esquema de razonamiento del tipo parte-parte (ej: razonar acerca del número de chicos respecto al de chicas en una clase). Las situaciones *Out Of* invocan un razonamiento del tipo parte-todo, como cuando se relaciona el conjunto de niños con gafas respecto al conjunto total de niños de la clase.

Respecto a los contextos más utilizados en la literatura, podríamos ajustarlos a estas categorías. Así, los problemas de mezclas de zumo con agua (Noelting, 1980a y b; Karplus, Pulos y Stage, 1983a y b) son situaciones *For Every*, e invitan a razonar con el esquema parte-parte. Los problemas de "llenado de recipientes" (Bruner y Kenny, 1966; Siegler y Vago, 1978) son problemas *Out Of*, y generan relaciones parte-todo. En ellos se presentan dos contenedores de distintas dimensiones, cada uno parcialmente lleno, y se pregunta cuál está más lleno. Los problemas probabilísticos en contexto de ruletas se incluirían en esta categoría, como lo demuestra el estudio de Maury (1984), que será comentado más adelante.

Por último, los problemas que utilizan bolas de dos colores diferentes(Chapman, 1975; Siegler, 1980), aunque casi siempre son presentados como problemas *For Every*, también pueden presentarse como problemas *Out Of*. Según estos autores, la presencia de un dibujo con las urnas y las bolas, favorecería el contexto *For Every*, ya que aparecería gráficamente el conjunto partido en dos (bolas del color favorable y bolas del color desfavorable). Nosotros pensamos que el contexto de los experimentos de Piaget e Inhelder (1951), en que aparecen fichas, todas iguales, donde algunas poseen una cruz en el anverso y otras no, pertenecería al contexto *Out Of*, favoreciendo, por tanto, un razonamiento parte-todo.

Singer y Resnick (1992) realizan un estudio sobre comparación de probabilidades con una muestra de 15 niños de 6º, 7º y 8º grado que respondieron a un cuestionario de 15 problemas, todos ellos en contextos de bolas, presentados sin dibujo alguno, y en los que se variaban dos tipos de variables:

- *El tipo de información*: Completa (las tres cantidades involucradas, bolas rojas, bolas negras y total de bolas), Parcial-Todo (el total y una de las partes) y Parcial-Parte (bolas rojas y bolas negras).
- *Los tipos de cantidades*: Variaba según las relaciones de igualdad o desigualdad entre las cantidades

involucradas en el problema, y había cinco tipos.

- Igual-Todo: Las cantidades totales de ambas urnas eran iguales, pero no las cantidades de bolas rojas y negras.
- Igual-Rojo: Sólo el número de bolas rojas era igual en ambas urnas.
- Igual-Negro: Sólo el número de bolas negras era igual en ambas urnas.
- Desigual-Rojo: Todas las cantidades eran distintas en las dos urnas, con la condición de que la que tenía más rojas (color favorable), también tenía más negras y, naturalmente, más bolas. En esta modalidad, la urna correcta es la que tiene más bolas rojas.
- Desigual-Negro: Igual que el caso anterior, pero la urna correcta es la que tiene menor número de bolas negras.

Sus resultados indican que los problemas del tipo Igual resultaron significativamente más fáciles que los del tipo Desigual, como los autores habían previsto. Se identificaron cinco tipos de estrategias para justificar las respuestas: 1) número de bolas rojas; 2) número de bolas negras; 3) número total de bolas; 4) substracción y 5) compensación (Elegir la urna que contenga más rojas y menos negras. Sólo válido para los problemas Igual-Todo). Los sujetos fueron clasificados según su nivel de razonamiento relacional, es decir, si sólo utilizaban sistemáticamente una variable, o tenían en cuenta más de una:

- Sujetos no relacionales: Elegían sistemáticamente la urna que tenía más bolas rojas, ignorando las demás cantidades.
- Sujetos semi-relacionales: Eligen en cada problema en base a un color, pero cambiando de color según el que le proporcione más información. Así, aunque razonen en base a una cantidad, lo hacen sabiendo que ambas cantidades son importantes, y sin ignorar ningún dato.
- Sujetos relacionales: Razonaban con estrategias de substracción.

Los sujetos no relacionales no generaban ningún dato ausente. Los sujetos semirelacionales, generalmente, generaban la parte ausente, pero muy raramente generaban el total ausente, lo que nos lleva a la conclusión de que razonan con relación a las partes, empleando una estrategia basada en la representación parte-parte, aunque no necesariamente relacionan las dos partes entre sí. Los sujetos relacionales generaban, tanto las partes como los totales, pero generaban las partes con una frecuencia doble de la que generaban totales, lo que indica que, al igual que los anteriores, también razonaban relacionando las partes, pero, a diferencia de aquellos, éstos sí que están relacionando cada parte con la otra, aunque sea con una relación de diferencia, en vez de la multiplicativa necesaria para un verdadero razonamiento proporcional. Los autores terminan su estudio relacionando su análisis con la clasificación de niveles en las reglas de Siegler (1980):

Los niños de regla 1 prestan atención exclusivamente al número de bolas favorables en ambas urnas, eligiendo la urna que contenga más. Los niños de regla 2 también basan su elección en el número de casos favorables, pero cuando éste es igual, eligen la urna con menor número de bolas del color desfavorable. Los niños de regla 3 basan su elección en el número de bolas favorables o desfavorables, solucionándolo correctamente siempre que alguna de estas cantidades sea igual en ambas urnas. Si no es así, no resolverán la tarea. Finalmente, los niños de regla 4 usaban estrategias proporcionales para solucionar la tarea.

Investigaciones en el campo de la Educación Matemática

Falk, Falk y Levin (1980) realizan una investigación con niños de 4 a 11 años, sobre comparación de probabilidades en contexto de bolas en urnas, ruletas y peonzas. Clasificaron las tareas de acuerdo al contexto y al tipo de fracciones presentadas en la comparación, según el siguiente esquema: a) El número de casos favorables es menor, mayor o igual en el conjunto de mayor probabilidad; b) El número de casos favorables es menor, mayor o igual en el conjunto de menor probabilidad; c) Los dos conjuntos son equiprobables y el número de casos favorables es menor, mayor o igual en el primer conjunto presentado.

Ello da un total de 9 clases de problemas. Además dividieron los problemas en tres tipos, según las proporciones analizadas se refiriesen a los siguientes casos: a) una proporción es mayor y otra menor que 1/2; b) una proporción es 1/2 y la otra diferente; c) las dos proporciones son o mayores o menores que 1/2. Sus resultados muestran que, a partir de los 6 años, los niños manifiestan un razonamiento de tipo probabilístico y el error dominante en los niños pequeños fue elegir el conjunto con mayor número de casos favorables. Los contextos resultaron equivalentes para el propósito de medir la capacidad de los niños para evaluar probabilidades.

Analizando el patrón de respuestas del mismo estudiante en los diferentes problemas, encuentran muy pocos casos de comportamiento sistemático respecto a un principio incorrecto dado. Los niños parecen no encontrarse en un "estadio puro" de desarrollo. Tampoco parecen seguir siempre la misma estrategia. También se encontraron niños que seguían prejuicios irrelevantes en la resolución del problema. Los autores sugieren que la probabilidad se compone de dos subconceptos: azar y proporción. Se debe tener consciencia de la naturaleza incierta de la situación para aplicar los cálculos de proporciones. La capacidad de calcular proporciones, por si sola, no implica necesariamente la comprensión de la probabilidad, ya que se precisa tener en cuenta la imposibilidad de controlar o predecir los resultados.

Maury (1984) investigó las estrategias utilizadas por alumnos de 15-16 años en problemas relativos a la cuantificación de probabilidades, con especial atención a la influencia de dos variables: el contexto y el vocabulario, tanto en las respuestas, como en las argumentaciones esgrimidas por los sujetos. Basándose en las investigaciones de Piaget e Inhelder, la autora establece tres tipos de tareas:

A) Tareas de comparación de una sola variable: El número de casos favorables es el mismo en ambos sacos, y difiere sólo el número de casos posibles. Esta situación, según Piaget e Inhelder es resuelta en la etapa de operaciones concretas.
B) Proporcionalidad: La razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles es la misma en ambos sacos. Estas tareas se resuelven, según Piaget, al final de la etapa de operaciones concretas.
C) Comparación de dos variables: Hay un número diferente de casos favorables y posibles en ambos sacos (sin que haya proporcionalidad o igualdad de casos desfavorables). Para Piaget estas situaciones son las más difíciles, y no son resueltas más que en la etapa de operaciones formales. Exigen poner en relación el número de casos favorables y posibles para cada uno de los sacos, y después una nueva operación sobre estas dos primeras operaciones.

Bajo la hipótesis de que el contexto o dominio de referencia puede movilizar en los alumnos concepciones diferentes en la cuantificación de probabilidades, se diseñan estas tres situaciones en dos tipos de contexto:

I) Sacos conteniendo bolas de dos colores (azules y rojas)
II) Ruletas divididas en sectores iguales, coloreados en rojo y azul.

Los criterios para la elección de estos dos contextos son, por una parte, el hecho de que, mientras que el primero es un contexto discreto, el segundo es continuo, y con una "estructura secuencial", es decir, donde la distribución de los sectores coloreados puede resultar significativa para el alumno. En el caso de las bolas, sin embargo, la disposición de éstas en los sacos no influye. Por otra parte, es muy importante considerar que en la ruleta, por su delimitación física, los sectores aparecen como partes de un todo (la ruleta), mientras que en el caso de las bolas no existe esta consideración del "todo". Por ello, se espera que en este caso el alumno se sienta más tentado a establecer relaciones del tipo parte-parte, mientras que en la ruleta estas relaciones serían del tipo parte-todo. Estas dos clases de situaciones estarían en la línea de las denominadas por Singer y Resnick (1992) situaciones *For every* y *Out of*, respectivamente, y que han sido comentadas un poco más arriba. Las respuestas obtenidas fueron clasificadas en tres categorías:

a. Respuestas correctas con argumento pertinente.

b. Respuestas incorrectas con argumento no pertinente.
c. Respuestas mixtas donde se encuentra, a la vez, un argumento pertinente y uno no pertinente.

En cuanto a los argumentos esgrimidos por los alumnos, la clasificación obtenida es la siguiente:
a. Argumentos pertinentes: Área (Sólo para el caso de los contextos de ruletas) casos favorables/casos posibles (regla de Laplace); casos favorables/casos desfavorables.
b. Argumentos no pertinentes: 1) Distribución (Sólo para el caso de ruletas): implica argumentos que hacen referencia a la distribución de los sectores coloreados con el color pedido. En algunos casos se considera más favorable la distribución de sectores juntos, y en otros separados. 2) Diferencia: Para cada saco, se considera la diferencia entre casos favorables y desfavorables o al revés, y luego se comparan las diferencias encontradas, para tomar una decisión. (Para Piaget este es un procedimiento típico del final de la etapa de operaciones concretas). 3) Casos favorables: El alumno sólo compara los números de casos favorables de los dos sacos, sin tener en cuenta los desfavorables o los posibles. Según Piaget, ésta es la estrategia utilizada por los niños más pequeños, en la etapa de operaciones concretas. En el argumento 2) el alumno tiene en cuenta todos los datos que intervienen en el problema, aunque los analiza de forma inadecuada. En este argumento sólo se tiene en cuenta una parte de los datos aportados, ignorando los demás.

La modalidad bolas permite, más que las ruletas, poner en evidencia la disponibilidad de varias concepciones espontáneas de probabilidad en el mismo sujeto. Aunque la variable contexto no influye significativamente sobre los resultados, sí lo hace, claramente, sobre los argumentos. La variable vocabulario interviene en los resultados (son mejores los resultados al cuestionario con vocabulario corriente que al de vocabulario técnico), sin embargo, no interviene en los argumentos.

Con respecto a los argumentos pertinentes, en general, el segundo y el tercero son igualmente utilizados en ambos contextos, pero mientras que el segundo argumento (regla de Laplace) es más utilizado en los contextos de ruletas, el tercero (cf/cd) es utilizado muy mayoritariamente en los contextos de bolas. La autora explica este resultado como una consecuencia de que la concepción del "todo" que lleva implícita la ruleta (por otra parte, modelo clásico para la representación de fracciones), favorece el establecimiento de relaciones parte-todo (o regla de Laplace), mientras que en los contextos de bolas esta consideración del "todo" (que sería el número de casos posibles) no viene impuesta, y por lo tanto, favorece el establecimiento de relaciones parte-parte, es decir, casos favorables/casos desfavorables.

En cuanto a los argumentos no pertinentes, el contexto tiene aquí también un fuerte impacto, pues el argumento no pertinente más utilizado en contextos con ruletas es el de distribución de sectores (1), no apareciendo en ningún caso el argumento 2) de diferencia que, sin embargo, es el más utilizado para las respuestas incorrectas y mixtas en contextos de bolas.

Esta fuerte influencia del contexto en los argumentos de los alumnos pone de manifiesto que problemas equivalentes desde el punto de vista probabilístico, no lo son forzosamente en el plano cognitivo. Los alumnos disponen, pues, de varios modelos espontáneos cuya movilización depende, entre otros factores, del contexto. Por esta razón Maury conjetura que el proponer a los alumnos problemas presentados en uno y otro contexto, podría favorecer la explicitación de conflictos cognitivos y su superación, o la evolución de modelos erróneos o incompletos.

Green (1983 a y b) utiliza diversas tareas de comparación de probabilidades en su test de intuiciones probabilísticas, analizado con detalle en las secciones 1.4.3 y 2.2. En el análisis de los argumentos que utilizan los niños para razonar su elección, este investigador encuestra las siguientes estrategias:

En contextos de comparación de urnas: a) escoger la bolsa con mayor número total de bolas; b) escoger la bolsa con mayor número de casos favorables; c) Escoger la bolsa con mayor diferencia entre casos favorables y desfavorables; d) Escoger la bolsa con mayor proporción entre casos favorables y desfavorables.

En contexto de ruletas encuentra los siguientes tipos de estrategias: a) Uso del concepto de área; b) Comparación numérica; c) Comparación de razones; d) Posición o velocidad de la aguja; e) Idea de continuidad; f) Idea de separación. Otro punto importante ya discutido es que Green emplea los problemas de comparación de probabilidades en urnas, así como las estrategias de los niños ante dichos problemas como parte de su escala para determinar el nivel de razonamiento probabilístico de los alumnos.

Jones y cols. (1996) describen una evaluación de un experimento de enseñanza basado en las investigaciones previas sobre el razonamiento probabilístico de los niños. El marco teórico usado parte de cuatro ideas claves: espacio muestral, probabilidad de un suceso, comparación de probabilidades y probabilidad condicional. Para cada uno de ellos establece, a su vez, cuatro niveles de pensamiento:

- El nivel 1 se asocia con el pensamiento subjetivo. La asignación de probabilidades se basa en juicios subjetivos. La comparación de probabilidades es subjetiva y no se diferencia entre situaciones equitativas y no equitativas.
- El nivel 2 o transicional entre subjetivo y cuantitativo ingenuo se caracteriza porque la asignación de probabilidades puede usar argumentos cuantitativos o subjetivos. La comparación cuantitativa puede ser incorrecta y limitada, aunque comienzan a diferenciarse las situaciones equitativas y no equitativas.
- El nivel 3 o cuantitativo informal, usa, informalmente, números para calcular probabilidades; distingue los sucesos "cierto", "posible" e imposible", justificando informalmente su decisión. Hace comparaciones de probabilidad basadas en juicios cuantitativos. Las justifica cuantitativamente, aunque con limitaciones. Distingue las situaciones equitativas y no equitativas mediante razonamientos numéricos.
- El nivel 4 o numérico predice el suceso más probable en experimentos simples. Asigna probabilidades a sucesos. Compara probabilidades y asigna probabilidades numéricas iguales a sucesos equiprobables.

Truran (1994b) discute la suposición que han manifestado algunos autores de que al pedir a los niños que comparen diferentes proporciones de bolas de colores en dos urnas no se hace realmente un test de comprensión probabilística. Sus entrevistas clínicas a 32 niños de 8 a 15 años sugieren que los niños son conscientes de la naturaleza probabilística de tales situaciones y, en el caso de los sucesos cierto o imposible, en los que no se precisa el razonamiento proporcional, los niños se mueven espontáneamente hacia el uso de un lenguaje formal. Sugiere también el interés de investigar sobre las estrategias de los niños en este tipo de tarea, encontrando los siguientes tipos, que amplían notablemente las descritas en investigaciones clásicas:

1. No da razón para la elección.
2. Simple descripción del contenido de las urnas, sin decidirse por una.
3. "Intuición". Respuesta correcta sin saber justificarla.
4. Diferente estrategia en cada caja.
5. Sesgo hacia el número menor en cada pareja.
6. Estrategias que implican la comparación "más" sin cuantificación, es decir, comparación cualitativa.
7. Comparar a y c, si b y d son iguales.
8. Comparar a y c si b y d son diferentes.
9. Comparar b y d si a y c son iguales.
10. Comparar b y d si a y c son iguales.
11. Descomposición de c en a y c-a, para comparar con mayor facilidad b y d-b.
12. Dar una comparación aproximada.
13. Comparar la razón de posibilidades con 1:1
14. Comparar (a-b) y (c-d).
15. Comparar (c-a) y (d-b).
16. Comparar con proporciones sencillas conocidas.
17. Comparar a/b, c/d.

18.Comparar a/c, b/d.
19.Comparar las probabilidades de las dos urnas.

En un estudio sobre la estabilidad de algunas de las estrategias descritas al comparar probabilidades, Gimenez (1992) concluye que la dificultad de los problemas de comparación de probabilidades no sólo se relaciona con las fracciones implicadas. Los distractores verbales, aspectos perceptuales y contextos, así como las heurísticas de disponibilidad y representatividad, pueden afectar el resultado. Sugiere también que los alumnos, aún con 13 ó 14 años, pudieran no tener suficiente conocimiento intuitivo para resolver estos problemas, incluso con el dominio de las fracciones, y recomienda ampliar las investigaciones en este campo.

Como vemos, la comparación de probabilidades ha merecido un interés notable, ya sea desde el campo de la Psicología, como desde el campo de la Educación Matemática. Estas investigaciones han sido tenidas en cuenta en la parte experimental de nuestra tesis, tanto en la selección de los ítems del último cuestionario, como en la interpretación de las estrategias seguidas por los alumnos.

1.6. ELEMENTOS SUBJETIVOS EN LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

Otro punto de interés en el presente trabajo es el estudio de los factores subjetivos que influyen en la asignación y comparación de probabilidades. Estos factores han sido investigados principalmente desde el punto de vista psicológico, en el contexto de la toma de decisiones por sujetos adultos. Diaconis y Freedman (1981) discuten la idea de ilusión cognitiva en relación a los errores provocados por esta influencia de factores subjetivos, como formas de razonamiento que admitiríamos como inválidas si reflexionásemos sobre las mismas y que sin embargo no desaparecen por esta reflexión y a veces, ni siquiera por medio de la enseñanza. Suelen volver con fuerza en situaciones similares. Cita entre estas ilusiones la "falacia del jugador", de la que difícilmente nos podremos sustraer si en una situación de juego se ha producido una larga racha de resultados idénticos.

Por otro lado, Scozzafava (1996) indica que es difícil evitar el punto de vista subjetivo incluso dentro de la misma teoría de la probabilidad. En efecto, para aplicar una concepción objetiva clásica, es preciso una decisión de tipo subjetivo acerca de si es posible aplicar el principio de indiferencia en una situación dada. Lo mismo ocurre con la probabilidad frecuencial, en la que hemos de decidir el número de experimentos para considerar que hemos obtenido una estimación suficientemente buena de la probabilidad teórica, e incluso hemos de decidir subjetivamente si el experimento en cuestión se ajusta al cálculo de probabilidades, y por tanto, si su frecuencia tiene un límite en el sentido de dicha teoría. No es de extrañar, en consecuencia, que en nuestros estudios de evaluación los alumnos se vean sometidos a este tipo de decisiones subjetivas y que ciertos factores influyan sobre las mismas. Estos factores son analizados en esta sección y clasificados en diferentes categorías.

El primer grupo de estudios que comentamos se refiere a los sesgos en el razonamiento de tipo causal. Puesto que el azar se concibe en algunos sujetos como complementario de las relaciones de causa y efecto, los sesgos en el razonamiento de tipo causal pueden llevar en ocasiones a suponer la existencia de mecanismos que permitan el control de lo aleatorio. Algunas de estas concepciones se transmiten o son apoyadas por creencias arraigadas de tipo cultural que conviven con la enseñanza que el niño recibe en la escuela.

Por otro lado, ciertos procesos psicológicos nos llevan inconscientemente a simplificar los problemas aleatorios, especialmente cuando los encontramos fuera del contexto escolar. Estos procesos, analizados desde el punto de vista de la teoría del procesamiento de la información, se han denominado "heurísticas" y se refieren a las reglas de conducta -a veces inconscientes- que nos hacen prescindir de parte de la información relevante y conducen con frecuencia a sesgos en el razonamiento y la resolución de problemas.

Finalmente, puesto que en un problema probabilístico intervienen con frecuencia las ideas estocásticas fundamentales, los errores en la resolución del problema pueden venir motivados por creencias erróneas respecto a las mismas. Destacamos en especial el concepto de independencia, relacionado con muchos de los sesgos descritos sobre el razonamiento estocástico. En lo que sigue haremos un breve resumen de estos factores, especialmente de la investigación realizada sobre ellos con niños y adolescentes.

1.6.1. Pensamiento causal, teorías previas y creencias socioculturales

Razonamiento causal

Desde nuestro punto de vista, la asignación no normativa de probabilidades está relacionada con el pensamiento causal. Pozo (1987) define este tipo de razonamiento como el conjunto de limitaciones formales a las que están sujetas todas las relaciones causales que establecemos los seres humanos. Dicho autor recoge cuatro principios generales admitidos sobre el razonamiento causal, que son los siguientes: *constancia* (por el que a la misma causa se supone que sigue siempre el mismo efecto), *asimetría* (las causas y los efectos no son intercambiables), *condicionalidad* (la relación causal no afirma nada sobre los hechos, sino sobre las condiciones para que se produzcan esos hechos) y *transmisión generativa* (la causa genera el efecto, y no sólo lo precede en el tiempo). Existe, además, un metaprincipio, admitido por algunos sujetos, que afirma el determinismo causal, por el que todo hecho es causado. Este metaprincipio aplicaría los cuatro principios anteriores con generalidad y no sólo a las situaciones deterministas, y puede ser la causa por la que una gran parte de alumnos tratan de establecer explicaciones causales cuando se enfrentan con situaciones aleatorias o situaciones que para ellos resultan inexplicables. Los alumnos se esfuerzan entonces por buscar una causa para el suceso, bien aludiendo a algún tipo de "trampa" o a la existencia de alguna explicación que ellos desconocen.

Pozo describe, asimismo, dos teorías psicológicas comprensivas sobre el razonamiento causal. La primera de estas teorías es debida a Piaget, quien considera que el desarrollo del razonamiento causal requiere previamente el operacional, pero no se agota con él. Este tipo de pensamiento se desarrolla con las operaciones formales, paralelamente al de la proporcionalidad, la probabilidad y la correlación. La causalidad, como toda operación, supone, a la vez, transformación y conservación. Transformación, porque la causa produce algo, ya que el efecto es nuevo con respecto a la situación anterior. Pero también hay conservación de lo que se transmite entre la causa y el efecto y esta transformación la captamos por vía inferencial.

Según Piaget y García (1973) la captación de las relaciones causales es fruto de la interacción del sujeto con el objeto y se rige por los procesos de asimilación y acomodación. Lo específico del pensamiento causal es que la operación se atribuye a los objetos. La segunda teoría descrita por Pozo se debe a Kelley (1973), que toma de Piaget la idea de esquema. La persona adulta tiene un repertorio de ideas sobre la operación e interacción de factores causales. Cuando el sujeto carece de información precisa sobre la situación causal recurre a esas concepciones o esquemas causales. Estos esquemas reflejan las nociones básicas de la realidad que tiene el sujeto.

Aunque, tal y como afirma Pozo, no podamos afirmar la validez del determinismo causal, sí hay que considerar la tendencia de toda persona a reducir la incertidumbre de los sucesos, remitiéndolos a formas de determinación más controlables. Es posible que esto suceda con los sucesos de azar, dando lugar a explicaciones más o menos mágicas de los fenómenos, que en algunos casos se atienen a creencias religiosas, culturales o supersticiones.

Teorías previas

Como indica Pérez Echeverría (1990) la mayor parte de los trabajos actuales sobre razonamiento conceden una gran importancia al contenido de los problemas y su relación con las teorías previas del sujeto que los resuelve. Nisbett y Ross (1980) afirman que el razonamiento humano es muy diferente cuando las tareas se resuelven en laboratorio que cuando este mismo tipo de razonamiento se aplica en situaciones de la vida cotidiana, como pueden ser algunos tipos de problemas probabilísticos con contextos próximos a los niños.

Solemos atribuir un efecto determinado a ciertas causas y mantenemos una serie de creencias sobre la forma en que se relacionan ciertos acontecimientos. Este tipo de creencias tiene una influencia muy notable en la emisión de juicios de correlación y llega a anular la fuerza de la evidencia de los datos (Jennings, Amabile y Ross, 1982). La forma en que los sujetos perciben la correlación está muy influida por las teorías y expectativas previas, fenómeno que ha sido denominado por Chapman y Chapman (1969) "correlación ilusoria". Una descripción más detallada puede verse en Estepa (1994).

Creencias socio-culturales

Algunas investigaciones en torno a esta cuestión ponen de manifiesto la influencia de ciertos factores culturales fuertemente arraigados en el pensamiento probabilístico de los sujetos. Amir y Williams (1994) se interesaron por el efecto de los factores culturales sobre las heurísticas, sesgos e intuiciones en el campo de la probabilidad y la influencia de creencias o actitudes fatalistas sobre la inclinación de los niños a considerar un suceso como aleatorio. Con ayuda de entrevistas, exploraron el efecto de estas creencias y convicciones en 38 alumnos de 11-12 años de dos escuelas de Manchester, con diferente procedencia racial, cultural y religiosa. Analizaron también el lenguaje probabilístico de los niños, sus creencias en relación a su religión y la función de Dios en el mundo y el efecto de dichas creencias sobre sus atribuciones de probabilidades a sucesos. También investigaron su percepción de la aleatoriedad de ciertos generadores aleatorios. Por ejemplo, ciertos niños piensan que el resultado de lanzar un dado depende de la forma en que se lance, de la experiencia previa o piensan que unas personas son más afortunadas que otras.

Estos autores concluyen que las creencias, en particular las creencias religiosas sobre el control divino de los acontecimientos, y las supersticiones tales como "pasar debajo de una escalera", "romper el espejo", existencia de números afortunados o desafortunados, etc. son el elemento cultural que más influye en el razonamiento probabilístico. Asimismo los niños se dejaban influir por sus experiencias pasadas. Por ejemplo, si los niños habían tenido que esperar para obtener un cinco al lanzar un dado en el juego del parchís, pensaban que este número no tenía la misma probabilidad que el resto, lo que los autores achacan a la heurística de la disponibilidad. Encontraron estereotipos de alumnos con una fuerte influencia de sus creencias religiosas, en particular de la predestinación, sobre su concepción de aleatoriedad. Para estos niños nada sucedería por azar, sino porque Dios lo dispone. Otros niños manifestaban una fuerte tendencia a la causalidad y al determinismo, buscando elaboradas explicaciones para la ocurrencia de sucesos aleatorios. También había un niño para el que el azar se encuentra dominado por las supersticiones, y otro niño para el que aleatoriedad era sinónimo de equiprobabilidad. Estos autores descubren que dichos sujetos emplean a menudo un razonamiento mixto en sus juicios probabilísticos, utilizando ideas racionales junto con creencias irracionales en la asignación de probabilidades.

Teigen (1983a) también ha mostrado que cuando se pide a los estudiantes que hagan una predicción del resultado de un experimento aleatorio en el que todos los sucesos son equiprobables, tienden a elegir los valores centrales, evitando los valores extremos. En una serie de experimentos observó el efecto de distintos factores sobre estas predicciones, tales como el rango de valores numéricos o el agrupamiento de los datos. En Teigen (1983b) se indica que, a pesar de que en el modelo normativo debería predecirse el resultado más probable, los sujetos no adoptan este tipo de predicción si este suceso es un valor extremo en el rango de valores. También se muestra el efecto de la forma de presentación de los datos (agrupados o no) sobre esta predicción. En general, los sujetos pueden seguir una regla perfectamente lógica y consistente, incluso aunque les lleve a predicciones incorrectas.

Cuando se pide a los sujetos asignar probabilidades a un conjunto de sucesos, la suma de las probabilidades asignadas rara vez es igual a la unidad, salvo en el caso de dos alternativas (Teigen, 1983c). La probabilidad total aumenta con el número de resultados, lo que indica la falta del concepto de distribución. Teigen (1983d) discute las relaciones entre las percepciones de la probabilidad, posibilidad, suerte y confianza en la ocurrencia de un suceso. En una serie de experimentos con estudiantes universitarios comparó estas creencias pidiendo a los sujetos que ordenaran un conjunto de sucesos aleatorios respecto a estas tres dimensiones. Encontró una fuerte relación entre la confianza y las posibilidades atribuidas al suceso, pero no con la probabilidad asignada en forma subjetiva. Los juicios sobre la buena o mala suerte resultaron aún menos relacionados con estas probabilidades. Su conclusión es que la probabilidad subjetiva juega un papel secundario en la evaluación de la confianza en la ocurrencia de un suceso o en la de suerte, y en consecuencia es una medida poco adecuada de la incertidumbre subjetiva. Un último experimento muestra que la concepción estadística y subjetiva de incertidumbre tienen connotaciones parcialmente opuestas.

1.6.2. Heurísticas y sesgos en el razonamiento estocástico

Las investigaciones más importantes en relación al razonamiento probabilístico en el campo de la psicología se refieren al uso de heurísticas en el razonamiento probabilístico. Distintos autores -como Bar-Hillel (1983), Hope y Kelly (1983), Kahneman, Slovic y Tversky (1982)- han descrito errores sistemáticos de tipo psicológico en la toma de decisiones por parte de los individuos ante situaciones de tipo probabilístico. La enseñanza por si sólo no es suficiente para superarlos e incluso la existencia en el alumno de estos sesgos puede dificultar la asimilación de los conceptos formales.

Pérez Echeverría (1990) indica que los trabajos recientes sobre las tomas de decisiones se han basado en las teorías cognitivas y del procesamiento de la información. La utilización de heurísticas es característica de este modelo y se describen éstas como *"mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos con la complejidad de estímulos ambientales"* (pág. 51). Es decir, son principios generales que reducen tareas complejas a simples juicios. En el análisis del razonamiento probabilístico, un juicio de este tipo (heurística) sería un procedimiento que nos llevaría de forma inmediata a la solución del problema. Se diferencian de los algoritmos en que son generalmente automáticas y se aplican de forma no reflexiva sin considerar su adecuación al juicio a realizar, contrariamente al algoritmo que propone criterios concretos para su uso. Realizaremos un breve resumen del estudio más extenso sobre este punto contenido en Pérez Echeverría (1990) y Serrano (1996).

La heurística de la representatividad

La heurística de *representatividad* (Kahneman *et al.*, 1982; Benzt, 1982; Benzt y Borovcnik, 1982a) consiste en calcular la probabilidad de un suceso en base a la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene. Mediante esta heurística, se resuelven juicios probabilísticos reduciéndolos a situaciones más simples. La representatividad se suele usar para predecir sucesos, ya que, normalmente, los acontecimientos más probables son más representativos que los menos probables (Kahneman *et al.* 1982). Pero su uso inapropiado da lugar a diferentes sesgos en los juicios probabilísticos. Estos sesgos no son debidos a la no comprensión de las normas probabilisticas o estadísticas, sino a la facilidad que tiene el uso de la representatividad por su bajo coste de razonamiento frente al uso de cálculos normativos (Tversky y Kahneman, 1982). Los principales sesgos asociados son los siguientes:

a. *Insensibilidad al tamaño de la muestra:* Según indican Tversky y Kahneman (1982) se hace una extensión indebida de la ley de los grandes números, creyendo en la existencia de una "Ley de los pequeños números", por la que pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden. Este error se ha encontrado incluso en científicos con formación estadística y puede tener importantes consecuencias de cara a la investigación experimental, ya que los científicos que creen en la "ley de los pequeños números" sobreestiman la potencia de sus métodos estadísticos, estiman a la baja la amplitud de sus intervalos de confianza y tienen unas expectativas injustificadas en los resultados de experimentos realizados con pequeñas muestras.

b. *Concepciones erróneas de las secuencias aleatorias:* En un proceso aleatorio, se espera que unos pocos ensayos representen fielmente el proceso aleatorio. Por ello, secuencias relativamente ordenadas no parecen aleatorias y se esperan frecuente alternancias de resultados. Un evidente ejemplo se da entre los jugadores de la Lotería, que prefieren no comprar un número con todas sus cifras iguales, un error que también ha sido descrito en investigaciones con escolares (Fischbein y Gazit 1984). En este sentido, un sesgo típico es la llamada falacia del jugador. Estas concepciones son investigadas con detalle en la tesis de Serrano (1996).

El sesgo de equiprobabilidad

En los experimentos de Lecoutre (1985, 1992), Lecoutre y Durand (1988), Lecoutre y Cordier (1990), se describe la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio. Como ejemplo, usan un problema en el que se pregunta si al lanzar dos dados hay la misma probabilidad de obtener un 5 y un 6 que la de obtener dos veces un 5.

A pesar de variar el contexto y el formato de la pregunta, los resultados siempre coinciden y demuestran la estabilidad de la creencia en que los dos resultados son equiprobables. Lecoutre y sus colaboradores defienden que ello no es debido a la falta de razonamiento combinatorio, sino a que los modelos combinatorios no se asocian fácilmente con las situaciones en que interviene "el azar". Los alumnos a los que se les pasó la prueba consideran que el resultado del experimento "depende del azar" y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables.

El "outcome approach"

Konold (1991) indica que el carácter dual del término "probabilidad" -como grado de creencia y como límite de las frecuencias relativas de una sucesión de ensayos- puede explicar algunas dificultades en el razonamiento probabilístico. Por el "outcome approach" o "enfoque en el resultado aislado" los estudiantes hacen una interpretación errónea de las preguntas sobre probabilidad, creyendo que el fin principal de las situaciones de incertidumbre no es llegar a la probabilidad de ocurrencia, sino predecir con éxito el resultado de un ensayo simple (Konold, 1989).

Por ello, una pregunta en la que se pide explícitamente la probabilidad de un suceso se interpreta como tener que predecir si el suceso en cuestión ocurrirá o no en el siguiente experimento. Al interpretar una predicción meteorológica en la que se dan unas probabilidades de lluvia de un 70%, muchos sujetos indican que lloverá el día en cuestión. Si el día señalado no llueve, pensarán que el meteorólogo se equivocó en sus predicciones. Las probabilidades, para este tipo de sujetos, se evalúan comparándolas con los valores 0%, 50% y 100%. Si una probabilidad se acerca a los extremos 0% o 100%, el suceso se considerará como imposible o seguro, respectivamente. Sólo si se acerca al 50% se considerará verdaderamente aleatorio.

Evolución de las heurísticas con la edad

Desde el punto de vista didáctico, una pregunta de interés es si estas heurísticas se forman en la infancia o son consecuencia de una pobre instrucción en probabilidad. Fischbein y Schnarch (1996, 1997) estudian esta evolución con estudiantes de 10, 12, 14, 16 años y universitarios. La investigación trata de probar la hipótesis de que el impacto de los imperativos lógicos sobre las intuiciones debe mejorar con la edad. Se administró a los alumnos un cuestionario formado por 7 problemas, cada uno de ellos propuesto para investigar un conocido error probabilístico. Los errores estudiados fueron los siguientes: *Representatividad, los efectos de recencia positiva y negativa* (Cohen, 1957; Fischbein, 1975; Fischbein, Nello y Marino, 1991). *Sucesos simples y compuestos* (Lecoutre y Durand, 1988; Fischbein y col., 1991), l*a falacia de la conjunción (* Tversky y Kahneman, 1982; Shaughnessy, 1992); *la influencia del tamaño de la muestra* (Kahneman y Tversky, 1982), *disponibilidad* (Kahneman y Tversky, 1982) y *la falacia del eje temporal* (Falk, 1986a; Shaughnessy, 1992).

La hipótesis inicial de que, después de la emergencia del razonamiento formal (alrededor de los 12 años) las intuiciones tenderían a estabilizarse y hacerse resistentes a la edad y a la influencia de la instrucción, no pareció confirmarse, ya que sólo un problema de los siete mostraba frecuencias estables a través de la edad (el 70% de los sujetos de todas las edades piensan que la pareja 6-6 es igual de probable que la 5-6 al lanzar dos dados).

En los otros seis problemas se obtuvieron frecuencias variables a lo largo de la edad: En dos de ellos, se observó que las frecuencias de respuestas correctas se incrementaba con la edad, es decir, los errores típicos estudiados disminuían con la edad. Estos son la heurística de la representatividad y el efecto de recencia negativa. La falacia de la conjunción fue relativamente estable para los tres primeros cursos, pero bajaba bastante en los dos últimos. Los otros tres problemas presentaban un incremento con la edad de las estrategias erróneas, con lo que se puede decir que estos errores se hacen más fuertes con la edad, a excepción de los estudiantes de universidad.

En la interpretación de estos resultados, que apuntan hacia la consideración de tres tipos de errores: los que disminuyen con la edad, los que permanecen estables y los que se hacen más fuertes con la edad, los autores concluyen que en cada intuición considerada hay arraigado un cierto esquema intelectual que influye en la conclusión. Este esquema actúa tácitamente, pero, cuando se requiere una justificación, el esquema puede hacerse explícito por el sujeto. Estos son esquemas intelectuales (principios generales) que, con la edad, se hacen cada vez más claros para el sujeto, mejor integrados en su actividad intelectual y en consecuencia, más influyentes en sus decisiones teóricas. Son directa y fuertemente aceptados, llegando a ser parte de las intuiciones respectivas, contribuyendo desde dentro a las decisiones cognitivas.

1.6.3. Percepción de la independencia de experimentos y de sus posibilidades de control

Otro de los principales factores que influyen en la asignación subjetiva de probabilidades es la consideración de sucesos o experimentos como dependientes o independientes. Según Heitele (1975), la independencia es uno de los conceptos más controvertidos del cálculo de probabilidades, ya que no siempre queda perfectamente establecido cuándo dos sucesos se pueden considerar independientes. Esto queda, como los términos primitivos de cualquier teoría axiomática, a merced de la intuición o del sentido común del sujeto. Para este autor es una idea fundamental considerar independientes los experimentos aleatorios que no tienen conexión física. Sin embargo esto no resuelve el problema de las situaciones en donde las probabilidades de los elementos del espacio producto cartesiano se definen de modo que no todos los elementos son equiprobables.

Esto explica la dificultad de aplicación de la idea de independencia en los contextos prácticos, porque la decisión de considerar si realmente dos experimentos son independientes uno de otro es, hasta cierto punto, subjetiva. También muestra la discrepancia entre los modelos teóricos y su puesta en práctica (Harten y Steinbring, 1983). La idea de independencia expresada en la regla del producto es fácil de comprender, pero incluso científicos instruidos en estadística tienen dificultad en reconocer si la independencia es aplicable o no en una situación práctica.

Por otra parte, la definición que usualmente se da de sucesos independientes, como afirma Truran y Truran (1997), aparte de cometer abusos de lenguaje que la vuelven más oscura, si cabe, no resulta nada intuitiva o es circular. Finalmente indicamos que también para Freudenthal (1973) la independencia es un concepto fundamental e indefinido, como lo son los puntos y rectas en geometría y considera que una comprensión completa de la independencia no puede obtenerse en la escuela.

Respecto al control de lo aleatorio, Langer (1982) indica que, mientras que en las situaciones de habilidad el éxito es controlable, la suerte es un suceso fortuito y por tanto incontrolable. Pero a veces no se reconoce esta distinción, y los sujetos se comportan como si pudieran controlar los fenómenos aleatorios. Esta creencia se ha descrito en relación con los jugadores, quienes actúan, a veces, como si ejercieran un control del resultado de lanzar los dados, por ejemplo, teniendo cuidado al lanzarlo, haciéndolo con suavidad o fuerza, según quieran obtener un determinado número. Creen que la concentración les ayudará. También se observa en las apuestas, cuando se apuesta por la persona que parece tener un mayor control del juego, o el hecho de que se corra un mayor riesgo en las apuestas hechas antes de lanzar el dado, que una vez lanzado. Este comportamiento sería racional si se creyese que es un juego de habilidad.

En situaciones de habilidad, las personas adoptan comportamientos tendentes a maximizar las probabilidades de ganancia. Otra característica de estas situacciones es la existencia de competición. Los factores que pueden causar la *ilusión de control* o expectativa de una probabilidad de éxito personal inapropiadamente mayor que la probabilidad objetiva son la elección, la familiaridad con la respuesta, la implicación activa o pasiva y la competición. Los experimentos de Langer muestran que la presencia de estos factores en juegos como la lotería hacen nacer la ilusión de control, que se mantiene a pesar de las contingencias observadas.

1.6.4. Intuiciones erróneas sobre las ideas estocásticas fundamentales

Finalmente describimos resumidamente errores relativos a otras ideas estocásticas fundamentales que pueden influir en la asignación de probabilidades por parte de los niños (Heitele, 1975; Ojeda, 1994a).

Diferenciación entre lo posible y lo seguro

Un primer aspecto que queremos tratar es la dificultad que entraña, para alumnos jóvenes, la idea de suceso seguro. Algunos investigadores (Fischbein y cols., 1991) han encontrado, trabajando con niños de 9 a 14 años, que la noción de suceso seguro entraña más dificultad que la de suceso probable, resultando aún más difícil cuando se trata de un suceso compuesto. Fischbein y Schnarch (1996, 1997) usan preguntas referidas al lanzamiento de un dado y a la extracción de una bola en una tómbola, preguntando a los alumnos si ciertos sucesos eran seguros, probables o imposibles. Aunque la mayoría de los alumnos identificaban correctamente todos los tipos de sucesos, lo sorprendente fue ver que el que arrojaba los resultados más bajos era el suceso seguro, en contra de lo que se pudiera suponer a priori.

Incluso resulta más difícil a los alumnos identificar el suceso seguro en “sacar un número menor que 7”, que en “sacar un número mayor que 0”. La explicación que dan los autores es que los sujetos asocian el suceso seguro con el concepto de unicidad. El suceso seguro es para ellos algo único, no múltiple, mientras que la idea de una multiplicidad de resultados se asocia más bien a la idea de “posible”. Por esta razón, la idea de “mayor que 0” aparece al niño como una totalidad, que es una forma de unidad, mientras que “menor que 7” sugiere un cómputo de todos los casos que abarca, es decir, tiene un sentido de multiplicidad.

También encuentran que muchos niños identifican “raro” con imposible, y en otros casos, imposible se identifica con “incierto”, algo que no se puede saber. Como ya se ha dicho, algunos niños tienden a confundir seguro con posible, pero a veces también ocurre al revés, confunden posible con seguro, o muy frecuente con seguro. En ocasiones, los alumnos se dejan guiar por sus propias creencias y experiencias subjetivas, considerando que un suceso es imposible, por ejemplo, porque a él nunca le ocurre.

Sin embargo, otros trabajos (Truran, K., 1994 y Truran, J., 1994a) muestran, contradiciendo las aseveraciones de Fischbein y sus colaboradores, que los alumnos, entre 8 y 15 años, desarrollan un lenguaje bastante maduro, incluyendo explicaciones convincentes para el suceso seguro y el imposible, antes de poder trabajar con sucesos posibles. En cualquier caso, pensamos que serían necesarios nuevos estudios para esclarecer en lo posible la cuestión.

Errores sobre la probabilidad condicional

Diversos autores como Falk (1986a y b), Bar-Hillel (1983), Borovcnik (1988), Ojeda (1994b, 1996) han estudiado las dificultades de los alumnos con la probabilidad condicional. Además del error señalado por Steinbring (1986) respecto a la falta de apreciación de la independencia de ensayos sucesivos, les resulta difícil comprender que la probabilidad de un suceso pueda condicionarse por otro que ocurra después que él. Estos sujetos encontrarían sin sentido una pregunta sobre la probabilidad de que la madre de una persona de ojos azules tenga ojos azules. Falk sugiere que esto puede ser debido a una confusión entre condicionamiento y causalidad.

También se confunden, con frecuencia, las probabilidades P(B/A) y P(A/B), error que es denominado por Diaconis y Freedman (1981) la "*falacia de la condicional transpuesta*" y que se asemeja al error que ocurre al confundir "a implica b" con "b implica a". En particular, se ha mostrado la incidencia de este error en la interpretación dada por los estudiantes universitarios al nivel de significación en un contraste de hipótesis (Falk, 1986b), (Vallecillos, 1992, 1994), interpretando "la probabilidad de rechazar una hipótesis nula cierta" como "la probabilidad de que sea cierta una hipótesis nula rechazada".

Sucesos compuestos

Fischbein, Nello y Marino (1991) estudian el papel que tiene para los alumnos el orden en que se generan los diversos resultados que conforman un mismo suceso compuesto. En primer lugar utilizando una pregunta directa, referida a un caso concreto ("al lanzar dos dados, ¿qué es más probable, obtener 5 en uno y 6 en otro, o 6 en ambos?"), y en segundo lugar con una cuestión planteada en una forma más general ("al lanzar dos dados, ¿qué es más probable, obtener el mismo número en los dos, o diferentes números?"),.

Con respecto a la primera pregunta, muy pocos sujetos responden correctamente que las probabilidades son distintas, y el número de respuestas correctas, no sólo decrece con la edad, sino también con la instrucción. La primera explicación de los autores a esto es que no existía una intuición natural para evaluar la probabilidad de un suceso compuesto, pero, como se verá a la luz de las respuestas a la segunda cuestión, las cosas son mucho más complejas. Para explicar los resultados, de acuerdo con Lecoutre y Durand (1988), los autores concluyen que lo que resulta intuitivamente deficiente es el tipo especial de suceso compuesto en el que hay que considerar los diferentes órdenes posibles del conjunto de resultados elementales (5-6 y 6-5) para definir la magnitud del espacio muestral. Los alumnos no consideran estos resultados por separado.

Las justificaciones de los alumnos para defender la idea de que los dos sucesos son igualmente probables apuntan, principalmente, hacia dos caminos: por un lado, la idea de que el azar "iguala" las posibilidades. (Los dos tienen las mismas posibilidades, porque al ser sucesos debidos al azar, puede ocurrir igualmente cualquiera de los dos). Por otra parte, se considera la pareja 5-6 como la unión de los sucesos 5 ó 6 (puesto que 5 y 6 son sucesos equiprobables, cualquier combinación binaria de ellos, como 5-6 ó 6-6 será equiprobable).

En cuanto a la segunda pregunta, formulada de una forma más general, hay que destacar que, en este caso, el número de repuestas correctas aumenta considerablemente, tanto en cada nivel de edad, como a través de la edad (aunque no con la instrucción). La explicación esgrimida por los autores es que muchos sujetos poseen la capacidad intuitiva de evaluar globalmente la magnitud del espacio muestral y su estructura, pero para provocar esta capacidad, la pregunta deberá estar hecha de una forma general, pues si no es así, basarán sus respuestas en otras interpretaciones (la intuición primaria del azar o la combinación aditiva de dos sucesos independientes).

En el análisis de los argumentos se ve que algunos alumnos responden dejándose guiar por sus experiencias previas; otros aportan respuestas con evaluaciones aditivas cuantitativas (es más probable obtener números diferentes, porque de 6 posibilidades, 5 son diferentes). En otros argumentos aparecen evaluaciones multiplicativas (es más probable obtener números diferentes, porque para obtener números iguales tengo 6 posibilidades, mientras que para obtener dos números diferentes tengo 30).

Además de las mencionadas, se diseñaron otras cuestiones para estudiar los sucesos compuestos, que involucraban la suma de las puntuaciones obtenidas al lanzar dos dados, pensando que la magnitud de la suma considerada podía jugar un papel importante en la estrategia de comparación de las probabilidades. Los autores concluyen que la mayoría de los sujetos parecen poseer una idea intuitiva de la relación entre la probabilidad y el tamaño del correspondiente espacio muestral, achacando el alto porcentaje de respuestas no adecuadas a una falta de conocimiento técnico que les permita construir este espacio muestral. Lo que no parece haber es una comprensión intuitiva natural del hecho de que, al construir el espacio muestral, se deba considerar también el orden de los resultados elementales que constituyen los sucesos. Muy pocos sujetos parecen tener esta comprensión intuitiva.

Estructura matemática en diferentes contextos

Fischbein, Nello y Marino (1991), en el trabajo decrito proponen las cuestiones sobre sucesos compuestos con la misma estructura matemática, pero en dos contextos diferentes, y variando, además, la estructura práctica del experimento. Así, se pedía la comparación entre la posibilidad de obtener tres cincos en el lanzamiento de tres dados simultáneamente, con la de obtener tres 5 en el lanzamiento de un dado tres veces consecutivas; y la comparación entre las posibilidades de tres caras en el lanzamiento de tres monedas simultáneamente o de una moneda tres veces consecutivas .

Los resultados, en este caso, indican que las respuestas correctas aumentan con la edad, y también con el proceso de instrucción. Pero sorprende observar que los alumnos que responden que la probabilidad no es la misma, en todas las edades, consideran mejor el lanzamiento de dados o monedas de forma consecutiva, pues el proceso les parece así más controlable. Por tanto, la estructura matemática subyacente no ha sido separada de su manifestación concreta, de la situación práctica, para considerarla en su generalidad abstracta. Una implicación didáctica que los autores obtienen de este resultado es la necesidad de que, en un curso de enseñanza de probabilidad, para poder llegar a los conceptos matemáticos formales es necesario presentar las situaciones bajo diferentes contextos prácticos para que los alumnos sean capaces de captar en todos ellos la misma estructura matemática.

En la misma línea, K. Truran (1994) y J. Truran (1994a) estudian la comprensión que tienen los niños sobre los generadores aleatorios, afirmando que algunos alumnos, incluso a la edad de 13 años, consideran que generadores aleatorios con la misma estructura probabilística, pero con diferente soporte físico tienen un comportamiento probabilístico diferente. Por ejemplo, no consideran equivalentes una urna con dos bolas rojas y una negra y una ruleta con 1/3 del área negra y el resto roja.

CAPITULO 2

INTUICIONES PROBABILÍSTICAS EN ALUMNOS DE 10 A 14 AÑOS: COMPARACIÓN DE DOS INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos la primera fase del estudio empírico, que consiste en una comparación experimental de dos intrumentos de evaluación del razonamiento probabilístico intuitivo de los escolares entre 10 y 14 años. El estudio parte de nuestras hipótesis teóricas sobre la complejidad del significado de los conceptos matemáticos, que no pueden ser reducidos a su definición, sino que tienen una estrecha relación con las situaciones en que se emplean y con las representaciones que le son asociadas (Godino y Batanero, 1994; 1996; en prensa), y que apuntan a una estructura multifactorial de este razonamiento probabilístico. Por este motivo pensamos que este tipo de razonamiento no puede ser medido mediante una escala de tipo lineal (estadios o niveles de desarrollo), al menos de una forma global. Por el contrario, esperamos encontrar diversos factores independientes en el razonamiento probabilístico.

Aunque la teoría de desarrollo en etapas de Piaget ha sido interpretada con frecuencia en forma restrictiva, tanto Piaget e Inhelder (1951) como Fischbein (1975) indican como componentes básicos del razonamiento probabilístico la capacidad combinatoria y el razonamiento proporcional, que no pueden reducirse una a la otra. Green (1982; 1983a y b) estuvo interesado en establecer niveles de razonamiento probabilístico y la edad media de acceso a los mismos, construyendo para ello un cuestionario de una amplia validez de contenido, tomando datos de una gran muestra de alumnos elegidos en forma representativa y aplicando la técnica del escalograma de Guttman. Sin embargo, muchos de los ítems empleados en su test hubieron de ser desechados para llegar a definir una escala que finalmente quedó constituída por ítems demasiado homogéneos, perdiendo parte de la validez de contenido del test completo. Este hecho, así como los análisis del trabajo de Green realizados por otros investigadores, como Izard (1994), Truran (1994 d) y Godino y cols (1994), confirma la existencia de otros componentes, además de los citados, en el instrumento de Green.

En una hipótesis de linealidad del razonamiento probabilístico, deberíamos esperar una correlación entre los resultados de diferentes instrumentos de evaluación de este razonamiento; en particular, entre las puntuaciones del test de Fischbein y Gazit (1984) y el empleado por Green (1982), máxime cuando la amplitud de contenidos de este último le conceden una gran validez predictiva. Por otro lado, Fischbein y Gazit (1984), así como Amir y Williams (1994) y Teigen (1983b y d) muestran la existencia de factores culturales que afectan a las repuestas intuitivas de los alumnos, lo que sugiere que sería posible encontrar una falta de correlación entre dos instrumentos de evaluación del razonamiento probabilístico, si solo uno de ellos contempla este tipo de factores.

En definitiva, el problema que planteamos en este capítulo es el estudio de la correlación entre los instrumentos usados por Green y Fischbein y Gazit, o la explicación de la falta de ajuste entre ambos. En las secciones que siguen comenzamos analizando la estructura de ambos instrumentos y mostramos los resultados de nuestro estudio comparativo.

2.2. ANÁLISIS CONCEPTUAL DEL CUESTIONARIO TOMADO DE LAS INVESTIGACIONES DE GREEN

El primero de los dos instrumentos empleados ha sido tomado de las investigaciones de Green (Green, 1982, 1983a y b), ya descritas en al capítulo 1. Se presenta en el Anexo 1 y consta de 26 ítems por los cuales puede obtenerse un máximo de 50 puntos. Esta puntuación es descompuesta por Green en tres componentes diferenciados:

a) *Puntuación verbal*: Expresa la capacidad de comprensión del niño del lenguaje de probabilidad y se obtiene a partir de los ítems 7, 13, 14, 15 y 16, por los que puede conseguirse un total de 15 puntos.
b) *Puntuación combinatoria*: Evalúa la capacidad de razonamiento combinatorio a partir de los ítems 9, 10 y 26 por los cuales puede obtenerse hasta un total de 6 puntos.
c) *Puntuación probabilística:* Conformada a partir del resto de los ítems, esta parte del cuestionario otorga hasta 26 puntos y puede dividirse a su vez en dos tipos de ítems: Los ítems 11, 12 y 20 evalúan las intuiciones de los sujetos sobre la aleatoriedad. Más precisamente, el ítem 20 evalúa la intuición de los alumnos sobre las secuencias de resultados aleatorios obtenidas mediante un modelo de proceso de Bernoulli, (Serrano y cols, 1991). Los items 11 y 12 evalúan las intuiciones de los alumnos sobre los procesos de Poisson en el plano y la convergencia estocástica. Estos tres ítems no han sido tenidos en cuenta por Green para la determinación del nivel probabilístico, puesto que sus puntuaciones no correlacionan con las obtenidas en el resto de la prueba. Los demás ítems plantean problemas de comparación de probabilidades de tipo diverso.

Puesto que estamos interesados por la problemática de comparación de probabilidades, a continuación analizamos cada uno de los ítems del test de Green referidos a este punto. Sobre cada uno de ellos se analiza el contenido matemático, contexto y otros aspectos que pueden influir en las respuestas de los alumnos. Las variables que vamos a considerar son las siguientes:

- *Conocimiento evaluado*: Conceptos o procedimientos que precisa el alumno para resolver el problema, ya que el cuestionario evalúa una gama muy amplia de contenidos: comparación y asignación de probabilidades simples y compuestas; probabilidad condicional; esperanza; juego equitativo, muestreo, etc.
- *Contexto*: Juega un papel importante en las situaciones probabilísticas. Un contexto de juego de azar moviliza más fácilmente en el alumno la idea de experimento aleatorio que un contexto físico. Por otro lado, ciertas investigaciones han mostrado que los alumnos no siempre consideran equivalentes dos generadores aleatorios isomorfos desde un punto de vista probabilístico (Truran, 1994a y b; Fischbein y cols, 1991)) o que no usan las mismas estrategias en dos problemas equivalentes al variar el contexto (Maury, 1984).
- *Representación gráfica:* En algunos casos, la presencia de una representación gráfica puede tener influencia en las respuestas de los alumnos.
- *Tipo de respuesta:* La respuesta pedida al alumno puede ser de elección múltiple o abierta. En algunos casos pueden presentarse ambos tipos.
- *Espacio muestral*: Número de espacios muestrales considerados; número de elementos en cada uno y si es posible o no admitir el principio de indiferencia para la asignación de probabilidades a los sucesos.
- *Posible sesgo:* Algunos ítems están diseñados para estudiar la incidencia de determinados segos descritos en la literatura. En ocasiones se incluyen distractores específicos en la redacción del ítem con este fin.

Items de comparación de probabilidades

Item 1: Una ficha redonda es roja por una cara y verde por la otra. Se sostiene con la cara roja hacia arriba y se lanza al aire. Da vueltas en el aire y después cae al suelo. ¿Qué cara tiene más posibilidades de salir? ¿O, piensas que no hay ninguna diferencia entre las dos?. Señala la respuesta correcta:

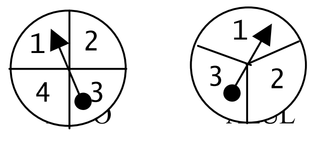
(A) La cara roja tiene más posibilidades ___
(B) La cara verde tiene más posibilidades ___
(C) No hay ninguna diferencia ___
(D) No lo sé ___

Conocimiento evaluado: Se trata de comparar las probabilidades de los sucesos en un experimento simple con dos sucesos elementales y la aplicación por el alumno del principio de indiferencia.
Contexto: Fichas de dos colores (monedas). Sólo un experimento consistente en el lanzamiento de la moneda.
Representación gráfica: No hay
Tipo de respuesta: Elección múltiple
Espacio muestral: E ={C, X}, caso de sucesos simples equiprobables por razón de simetría física
Posible sesgo: Búsqueda de relaciones causales. La elección de los distractores A ó B puede suponer la influencia de una situación inicial en la predicción del resultado del experimento o la preferencia subjetiva por uno de los dos colores, que ha sido sugerida por algunos autores como Davies (1965) o Golberg (1966).

Item 2: Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:
(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña ___
(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___
(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña ___
(D) No lo sé ___

Conocimiento evaluado: Se pide comparar las probabilidades de los sucesos elementales en un experimento aleatorio simple con dos resultados no equiprobables y la discriminación, por parte del alumno, entre sucesos equiprobables y no equiprobables.
Contexto: Situación de muestreo usando papeles con nombre de niño/niña (13 niños/16 niñas), realizando una extracción al azar.
Representación gráfica: No hay.
Tipo de respuesta: Elección múltiple.
Espacio muestral: E ={niño, niña}. Se precisa comparar dos sucesos simples que no son equiprobables por razón de la composición de la urna.
Posible sesgo: Generalización incorrecta de la regla de Laplace, mostrando el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988). Para contestar correctamente no es preciso el razonamiento proporcional, basta con comparar cantidades absolutas. La respuesta errónea también podría indicar que el alumno considera un espacio muestral diferente, cuyos elementos serían cada uno de los alumnos de la clase (29 sucesos elementales equiprobables) y que interpreta la pregunta como obtener la probabilidad que tiene cada uno de los niños y niñas de la clase.

Item 3: La figura muestra dos discos (ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número. ¿Con qué disco es más facil obtener un 3? Señala la respuesta correcta:
(A) Es más fácil obtener 3 en el disco rojo ___
(B) Es más fácil obtener 3 en el disco azul ___
(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3 ___
(D) No lo se ___



¿Por qué eliges esa respuesta?..

Conocimiento evaluado: Se pide comparar las probabilidad de un mismo suceso en dos experimentos aleatorios diferentes. Cada uno de los experimentos consta de un número finito de sucesos equiprobables, aunque el número de sucesos no coincide en los dos experimentos.

Contexto: Ruletas seccionadas con agujas giratorias, divididas en distinto número de sectores de igual área. Es un contexto contínuo en el que la probabilidad de los sucesos se determina mediante la relación del área de la parte al área total. Sin embargo, también puede aplicarse la regla de Laplace porque las áreas en que están divididas cada una de las ruletas son iguales.
Representación gráfica: Se representan gráficamente las dos ruletas.
Tipo de respuesta: Elección múltiple con justificación de la respuesta.
Espacio muestral: Dos espacios muestrales: E ={1, 2, 3, 4} y E'={1, 2, 3}. Dos funciones de probabilidad: P_1: E $\rightarrow$ [0,1] y P_2:E' $\rightarrow$ [0,1]. Sucesos equiprobables por razón de simetría física: igual área ocupada por cada sector. El alumno ha de elegir el espacio probabilístico más conveniente para obtener el suceso dado.
Posible sesgo (estrategia): El problema no se puede resolver correctamente sólo comparando cantidades absolutas, por lo que puede servir para detectar si el alumno hace este tipo de comparación. Al ser un contexto contínuo (en dos dimensiones) hay que comparar las proporciones de áreas ocupadas por cada color o bien aplicar la proporcionalidad.al número de sectores favorables y posibles de cada ruleta.

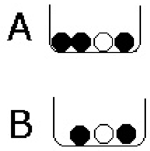
Item 4: Cuando se lanza un dado ¿que número o números son más difíles de obtener? ¿ O son todos iguales?
RESPUESTA ....

Conocimiento evaluado: El ítem evalúa la aplicación, por parte de los alumnos, del principio de indiferencia en un único espacio muestral con seis resultados posibles.
Contexto: Lanzamiento de un dado. Es un contexto discreto, pero no evoca la relación parte-todo como en el caso de la ruleta.
Representación gráfica: No hay.
Tipo de respuesta: Libre.
Espacio muestral: Es finito, E ={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Los sucesos simples son equiprobables por razón de simetría física.
Posible sesgo (estrategia): Puede observarse si el alumno relaciona "simetría física" con equiprobabilidad de ocurrencia (teoría clásica). No es necesario el razonamiento proporcional. Se pueden detectar creencias previas sobre la suerte o sobre la mayor probabilidad de uno de los resultados.

Item 5:.Una moneda se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. Señala la frase que consideres correcta:
(A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA ___
(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ ___
(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___
(D) No lo sé ___

Conocimiento evaluado: Evalúa la percepción de la independencia de ensayos repetidos en las mismas condiciones.
Contexto: Lanzamiento de monedas. Se indica que se han efectúado varios lanzamientos y el resultado obtenido en ellos
Representación gráfica: No hay.
Tipo de respuesta: Elección múltiple
Espacio muestral: Es finito, E ={C, X}. Consta de dos sucesos simples equiprobables por razón de simetría física.
Posible sesgo (estrategia): Se exponen los resultados de los cinco lanzamientos anteriores para ver si influye en la comparación. Es posible detectar efectos de recencia negativa o positiva, sesgos que han sido descritos en las investigaciones a partir del trabajo de Piaget e Inhelder (1951) y que posteriormente han sido atribuidos a la heurística de la representatividad por Kahnemman, Slovic y Tversky (1982).

Item 6(a): En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo)



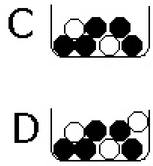
Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cual elegirías para hacer la extracción? Señala la respuesta correcta:

(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ___
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ___
(C) Las dos cajas dan la misma posibilidad ___
(D) No lo sé ___

¿Por qué? ....

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos no equiprobables. Situación de igualdad de casos desfavorables y desigualdad de casos posibles (nivel IA en la clasificación de Noelting, 1980a y b).
Contexto: Elección entre urnas con bolas negras y blancas (3n/1b; 2n/1b). Probabilidad de extraer negra (contexto discreto)
Representación gráfica: Las urnas con su composición
Tipo de respuesta: Elección múltiple con explicación de la respuesta.
Espacio muestral: Un sólo espacio muestral finito E={n, b} y dos funciones de probabilidad $P_1:E \rightarrow [0,1]$ y $P_2:E \rightarrow [0,1]$ Sucesos simples no equiprobables en ambos casos, por razón de composición de las urnas
Posible sesgo (estrategia): El niño puede hacer la elección utilizando el razonamiento proporcional o sólo comparando el número de casos favorables.

Item 6(b): Otras dos cajas tienen en su interior algunas fichas negras y algunas fichas blancas.
Caja C: 5 negras y 2 blancas
Caja D: 5 negras y 3 blancas



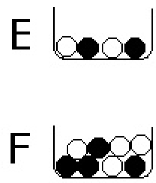
¿Qué caja (la C o la D) da más posibilidades de sacar una ficha negra? ¿O, por el contrario, dan las dos la misma posibilidad?

(A) Caja C ___
(B) Caja D ___
(C) La misma posibilidad ___
(D) No lo sé ___

¿Por qué? ....

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos no equiprobables. Situación de igualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles (nivel IB en la tipología de Noelting, 1980a y b).
Contexto: Elección entre dos urnas con bolas negras y blancas (5n/2b; 5n/3b). Probabilidad de obtener negra. (contexto discreto)
Representación gráfica: Las dos urnas con su composición
Tipo de respuesta: Elección múltiple con explicación de la respuesta.
Espacio muestral: Un espacio muestral E={n, b} y dos funciones de probabilidad $P_1:E\rightarrow[0,1]$ y $P_2:E \rightarrow [0,1]$. Los dos sucesos simples no son equiprobables en ningún caso por razón de composición de las urnas.
Posible sesgo (estrategia): Puede obtenerse la respuesta correcta por la simple comparación de casos desfavorables, sin utilizar el razonamiento proporcional.

Item 6(c): Otras dos cajas distintas tienen tambien fichas negras y blancas:
Caja E: 2 negras y 2 blancas
Caja F: 4 negras y 4 blancas



¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?

(A) Caja E ___
(B) Caja F ___
(C) La misma posibilidad ___
(D) No lo sé ___

¿Por qué? ....

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos equiprobables. Clase de equivalencia de la unidad (nivel IIA de Noelting, 1980a y b).
Contexto: Elección entre dos urnas con bolas negras y blancas (2n/2b; 4n/4b). Urnas proporcionales (razón = 2). Probabilidad de obtener negra. (Contexto discreto).
Representación gráfica: Las dos urnas con su composición.
Tipo de respuesta: Elección múltiple con explicación de la respuesta.
Espacio muestral: E={n, b}. Los dos sucesos simples son equiprobables en ambos casos, por razón de composición de las urnas.
Posible sesgo (estrategia): El alumno puede hacer la elección utilizando el razonamiento proporcional o comparando cantidades absolutas de casos favorables (en este caso la respuesta no sería correcta).

Item 6(d): Otras dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas:

Caja G: 12 negras y 4 blancas
Caja H: 20 negras y 10 blancas

¿Qué caja da mejor posibilidad de sacar una ficha negra?

(A) La misma posibilidad ___
(B) Caja G ___
(C) Caja H ___
(D) No lo sé ___

¿Por qué? ....

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos no equiprobables. Situación en que el número de casos favorables es múltiplo del de desfavorables, en ambas urnas, pero éstas no son equivalentes. (Nivel IIIA de Noelting, 1980a y b)
Contexto: Elección entre dos urnas con bolas negras y blancas (12n/4b; 20n/10b). En este caso las urnas no son proporcionales. Probabilidad de obtener negra. (Contexto discreto).
Representación gráfica: No hay
Tipo de respuesta: Elección múltiple con explicación de la respuesta.
Espacio muestral: Un solo espacio muestral E ={n, b} y dos funciones de probabilidad $P_1:E \rightarrow [0,1\}$ y $P_2:E \rightarrow [0,1]$. Los dos sucesos simples no son equiprobables en ningún caso, por razón de composición de las urnas.
Posible sesgo (estrategia): Para contestar correctamente es preciso utilizar el razonamiento proporcional y la comparación de fracciones o establecer una correspondencia entre los términos. Algunos niños pueden comparar cantidades absolutas de bolas negras o blancas entre ambas urnas, o bien restar las cantidades dentro de una misma urna. La cuestión está diseñada para detectar estas estrategias.

Pueden obtenerse respuestas correctas, tanto con el uso de le regla de Laplace (comparación parte-todo), como por la comparación entre las partes.

Item 6(e): Otras dos cajas distintas de las anteriores tienen fichas negras y blancas.

Caja J: 3 negras y 1 blanca
Caja K: 6 negras y 2 blancas

¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?

(A) La misma posibilidad ___

(B) Caja J ___
(C) Caja K ___
(D) No lo sé ___
¿Por qué? ....

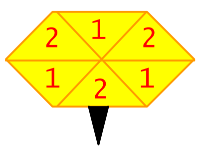
Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos no equiprobables.Situación en que los términos de las dos urnas determinan la misma clase de equivalencia, pero con una razón entre las partes distinta de 1. (Nivel IIB de Noelting 1980a y b)
Contexto: Elección entre dos urnas con bolas negras y blancas (3n/1b; 6n/2b). Las urnas son proporcionales en su composición (razón 2). Probabilidad de obtener negra. (Contexto discreto).
Representación gráfica: No hay
Tipo de respuesta: Elección múltiple con explicación de la respuesta.
Espacio muestral: E={n, b}. Los dos sucesos simples no son equiprobables en ningún caso, por razón de composición de las urnas.
Posible sesgo (estrategia): Algunos alumnos compararán cantidades absolutas de bolas negras o blancas o restarán los contenidos de cada urna. Para responder correctamente es preciso utilizar el razonamiento proporcional o, al menos, establecer una correspondencia entre los elementos que conforman las urnas. Aunque este item pueda parecer más fácil que el anterior, los resultados de Green (1982) muestran que no es así.

Item 8: En un experimento se lanzan al aire 12 monedas juntas y caen sobre la mesa. Si el experimento se repite muchas veces, ¿cuales de los siguientes resultados ocurren más a menudo?
(A) 2 caras y 10 cruces ___
(B) 5 caras y 7 cruces ___
(C) 6 caras y 6 cruces ___
(D) 7 caras y 5 cruces ___
(E) Todas tienen la misma posibilidad ___

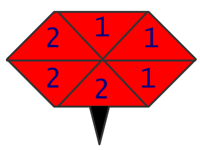
Conocimiento evaluado: Se trata de un experimento compuesto. En él se pide comparar diferentes probabilidades binomiales, esto es, de sucesos compuestos en el espacio probabilístico producto. Cada uno de los experimentos simples tiene 2 posibilidades, luego el número total de posibilidades es 2^{12}. Aunque no se espera que los alumnos den una solución formal al problema, sí pueden haber construído, por medio de su experiencia, una intuición sobre el número esperado de éxitos en una distribución binomial.
Contexto: Lanzamiento simultáneo de 12 monedas.
Representación gráfica: No hay
Tipo de respuesta: Elección múltiple
Espacio muestral: Si consideramos el número de caras, E={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, donde los sucesos simples no son equiprobables. Si consideramos los resultados en el experimento compuesto, el espacio muestral del experimento simple sería E={C, X}, y el del experimento compuesto sería E^{12}.
Posible sesgo (estrategia): Los alumnos podrían aplicar incorrectamente la regla de Laplace, suponiendo todos los resultados equiprobables, posiblemente por falta de razonamiento combinatorio. También podría detectarse el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988)

Item 17: Dos trompos de seis lados están marcados con unos y doses, como se indica en el diagrama:

AMARILLO



ROJO



¿Qué trompo te da mejor oportunidad de obtener un 2 cuando se lanza? ¿ O, dan la misma posibilidad?

(A) El amarillo es mejor para obtener un 2 ___
(B) El rojo es mejor para obtener un 2 ___
(C) Ambos trompos dan la misma posibilidad ___
(D) No lo sé ___

¿Por qué? ....

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos equiprobables.
Contexto: Trompos hexagonales cuyas caras son equiprobables por razón de simetría física. Probabilisticamente es análogo al contexto de urnas con identica composición. Se pide la probabilidad de obtener un 2, y se introduce un distractor, ya que en un trompo los números alternan, mientras que en el otro se presentan consecutivos.
Representación gráfica: Se representan gráficamente los dos trompos con sus sectores
Tipo de respuesta: Elección múltiple con explicación de la respuesta.
Espacio muestral: E={1, 2}. Dos sucesos simples equiprobables en ambos casos, por razón de simetría física.
Posible sesgo (estrategia): Se espera una resolución basada en el recuento de sectores, aunque algunos alumnos podrían razonar en base al área ocupada o utilizar la proporcionalidad. Se observará si influye la distribución de los números en los sectores (juntos o separados).

Item 18: En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera, resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De que color es más probable que sea?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad ___
(B) El azul tiene mayor probabilidad ___
(C) El verde tiene mayor probabilidad ___
(D) Todos los colores tienen la misma probabilidad ___
(E) No lo sé ___

Conocimiento evaluado: Extracción sin reemplazamiento. Se trata de la determinación del caso "más probable" en un ensayo que depende de los anteriores, es decir, en una probabilidad condicional.
Contexto: Una sola urna con bolas de tres colores (4r/4a/2v). Contexto discreto.
Representación gráfica: No hay
Tipo de respuesta: Elección múltiple.
Espacio muestral: E ={r, a, v}. Tres sucesos simples no equiprobables por razón de composición de la urna.
Posible sesgo (estrategia): La primera extacción, al ser sin reemplazamiento, modifica la composición de la urna y por tanto, las probabilidades de los sucesos simple implicados. Para responder correctamente no es preciso el razonamiento proporcional, basta con comparar cantidades absolutas, pero hay que tener en cuenta los cambios producidos en la composición de la urna tras las sucesivas extracciones.

Item 19(a): Dos discos, uno naranja y otro marrón, están marcados con números.

MARRON NARANJA

Cada disco tiene una aguja que gira. Si se quiere obtener un 1, ¿Es uno de los discos mejor que el otro, o ambos dan la misma posibilidad?

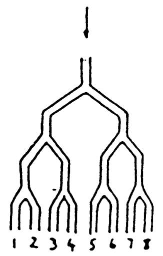
(A) El marrón es mejor para sacar un 1 ___
(B) El naranja es mejor para sacar un 1 ___
(C) Ambos discos dan la misma posibilidad ___
(D) No se puede decir ___

Item 19(b): ¿Por qué has elegido esta respuesta? ....

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con solo dos sucesos no equiprobables.
Contexto: Elección entre dos ruletas seccionadas, con sectores de distintas áreas. Se pide comparar las probabilidades de obtener un 1. Para resolver el problema hay que establecer la relación entre la probabilidad y el área de la ruleta. Contexto contínuo.
Representación gráfica: Las ruletas con sus sectores marcados con los números 1 y 2.
Tipo de respuesta: Elección múltiple con explicación de la respuesta.
Espacio muestral: Formado por dos sucesos simples E={1, 2}, y dos funciones de probabilidad $P_1:E \rightarrow [0,1]$ y $P_2:E \rightarrow [0,1]$. Los dos sucesos simples no son equiprobables en ninguno de los casos por razón de diferentes áreas asignadas a cada uno de los sucesos.
Posible sesgo (estrategia): El recuento de sectores conduce a error. No es posible cuantificar la probabilidad, mediante la regla de Laplace, sólo con la comparación de áreas marcadas. Para responder correctamente no es preciso el razonamiento proporcional, basta con comparar las áreas marcadas con un 1.

Item 21(a): Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:
Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.

(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___
(B) Por 1 y 8 pasarán más bolas ___
(C) Por 3, 4, 5 y 6 pasarán más bolas ___
(D) Por 1, 3, 5 y 7 pasarán más bolas ___
(E) Ninguna de éstas ___

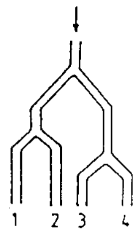


Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades en experimentos compuestos.
Contexto: Canales que se van bifurcando, por los que se dejan caer bolas. Es un contexto discreto, con un planteamiento frecuencial. Los distintos casos son equiprobables.
Representación gráfica: El dibujo del canal.
Tipo de respuesta: Elección múltiple.
Espacio muestral: E={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Ocho sucesos simples equiprobables por razón de simetría física.
Posible sesgo (estrategia): Se pueden detectar creencias previas acerca de asignarle mayor probabilidad al cambio de dirección de la bola en los cruces o a la continuidad en la dirección inicial (de nuevo tendríamos el fenómeno de recencia descrito en el ítem 5).

Debemos tener en cuenta, además, que no se pregunta por la probabilidad, sino que por qué canal pasarán más bolas, lo que hace hincapié en el carácter empírico y frecuencial del experimento, pero la predicción hay que hacerla sólo basándose en el dibujo, por lo que, lo que más influirá en la consideración de equiprobabilidad será la simetría física de éste.

Item 21(b): Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:

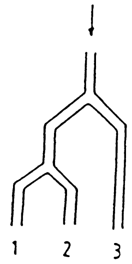
(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___
(B) Por 1 y 2 pasarán más ___
(C) Por 3 y 4 pasarán más ___
(D) Por 1 y 4 pasarán más ___



(E) Ninguna de éstas ___

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades en experimentos compuestos.
Contexto: Canales bifurcados por donde se dejan caer bolas. Es un contexto discreto, con un planteamiento frecuencial, donde los distintos sucesos en el experimento compuesto son equiprobables.
Representación gráfica: El dibujo del canal.
Tipo de respuesta: Elección múltiple.
Espacio muestral: Se compone de cuatro sucesos simples equiprobables por razón de frecuencia y simetría física: E={1, 2, 3, 4}. Se obtiene por composición de dos experimentos simples.
Posible sesgo (estrategia): La aparente falta de simetría del dibujo puede provocar en algunos alumnos una respuesta de no equiprobabilidad. Es necesario considerar el experimento como compuesto de otros dos simples (uno por cada bifurcación del canal) para ser conscientes de que cada uno de éstos sí guarda simetría física que garantice la equiprobabilidad de los dos caminos posibles, lo que concluiría en la equiprobabilidad de cada uno de los sucesos simples del experimento compuesto.

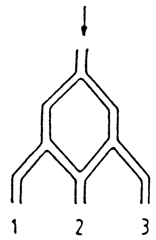
Item 21(c): Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:



(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___
(B) Por 2 pasarán más bolas ___
(C) Por 3 pasarán más bolas ___
(D) Por 1 y 2 pasarán muchas bolas y por 3 pocas ___
(E) Ninguna de éstas ___

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades en experimentos compuestos.
Contexto: Canales bifurcados por donde se dejan caer bolas. Contexto discreto y con carácter frecuencial. En este caso los sucesos no son equiprobables.
Representación gráfica: El dibujo del canal.
Tipo de respuesta: Elección múltiple.
Espacio muestral: E ={1, 2, 3}, y la función de probabilidad $P:E \rightarrow [0,1]$, con $P(1)=P(2)=1/4$ y $P(3)=1/2$, por lo que los sucesos simples no son equiprobables por razón de simetría física y frecuencia.
Posible sesgo (estrategia): La respuesta A puede constituir un distractor para alumnos que generalicen indebidamente la regla de Laplace.

Item 21 (d): Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:

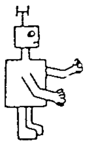


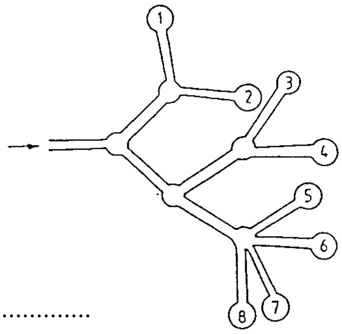
(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___
(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___
(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___
(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___
(E) Ninguna de éstas ___

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades de sucesos simples y compuestos en experimentos compuestos. Aplicación de la regla de la suma de probabilidades.
Contexto: Canales bifurcados por donde se dejan caer bolas. Contexto discreto con carácter frecuencial.
Representación gráfica: El dibujo del canal.
Tipo de respuesta: Elección múltiple.
Espacio muestral: Tres sucesos simples no equiprobables: E={1, 2, 3} y la función de probabilidad $P:E \rightarrow [0,1]$, con $P(1)=P(3)=1/4$ y $P(2)=1/2$.
Posible sesgo (estrategia): La simetría geométrica del dibujo puede provocar en algunos alumnos una respuesta de equiprobabilidad. Para calcular la probabilidad del suceso compuesto, los alumnos deben aplicar la regla de la suma.

Aparecen la palabras "mitad" y "doble", por lo que, aunque no tiene que haber cálculo de probabilidades, sí se espera intuición de proporción.

Item 22: Un robot es colocado ante un laberinto que empieza a explorar. En cada cruce el robot tiene tantas probabilidades de irse por un camino como por otro (pero nunca vuelve por el camino que vino). Hay 8 trampas al final de los 8 caminos (ver el dibujo). ¿En qué trampa ó trampas tiene el robot más probabilidades de acabar?, ¿o todas las trampas son igualmente probables?





RESPUESTA ....

Conocimiento evaluado: Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos (diagrama de árbol).
Contexto: Caminos bifurcados. El dibujo hace alusión a los diagramas de árbol. Contexto discreto. No hay carácter frecuencial.
Representación gráfica: El dibujo del robot y el laberinto de caminos.
Tipo de respuesta: Libre.
Espacio muestral: Consta de ocho sucesos no equiprobables por razón de enunciado: E={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. La probabilidad de cada suceso del espacio muestral se halla como producto de otras (cada suceso está formado por intersección de otros más simples)
Posible sesgo (estrategia): Para dar una respuesta correcta hace falta un cálculo de las probabilidades, y considerar cada suceso como compuesto de otros. Es posible que algunos alumnos defiendan la opción de equiprobabilidad, generalizando indebidamente la regla de Laplace, mientras que otros darán una respuesta intuitiva, sin saber justificar por qué. En este caso, a diferencia de los contextos de canales, no hay repetición del experimento.

Item 23: El profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas. Algunas caen con la punta para arriba,  y otras caen hacia abajo  .
El resultado fue:ARRIBA=68 ; ABAJO=32. Después el profesor pidió a una niña que repitiera el experimento.
De la lista siguiente elige el resultado que tu crees que obtendrá la niña:
(A) ARRIBA = 36, ABAJO = 64 ___
(B) ARRIBA = 63, ABAJO = 37 ___
(C) ARRIBA = 51, ABAJO = 49 ___
(D) ARRIBA = 84, ABAJO = 16 ___
(E) Todos los resultados tienen la misma probabilidad ___

Conocimiento evaluado: Se pide comparar probabilidades binomiales, esto es, de sucesos compuestos, en el experimento. Se dispone de una estimación de probabilidad a priori de tipo frecuencial. No se puede aplicar el principio de indiferencia a la situación dada.
Contexto: Lanzamiento de 100 chinchetas. Se trata de un experimento compuesto.
Representación gráfica: Solo para explicar las posibles posiciones de la chincheta al caer.
Tipo de respuesta: Elección múltiple.
Espacio muestral: Dos sucesos simples no equiprobables por razón de falta de simetría e información a priori.
Posible sesgo (estrategia): Por la falta de simetría de la chincheta, no se puede asignar la probabilidad a cada suceso de antemano, por lo que se proporciona una información de 100 lanzamientos para que el alumno haga una predicción experimental, es decir, basándose en la frecuencia con que han ocurrido anteriormente los sucesos. Es posible detectar que algunos alumnos consideran los sucesos como equiprobables, a falta de alguna información explícita en otro sentido, ignorando el resultado del lanzamiento previo. Esta insensibilidad hacia las probabilidades a priori de los resultados está considerada

por Kahneman, Slovic y Tversky (1982) como una de las causas de la heurística de la representatividad, ya mencionada en el ítem 5.

Item 24: ¿Cual de los siguientes resultados es más probable?

(1) Obtener 7 ó más varones de los 10 primeros bebés nacidos en un nuevo hospital.

(2) Obtener 70 ó más niños de los 100 primeros bebés nacidos en un nuevo hospital.

(A) Son igualmente probables ___
(B) 7 ó más de 10 es más probable ___
(C) 70 ó más de 100 es más probable ___
(D) No se puede decir ___

Conocimiento evaluado: Se trata de comparar el efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad del muestreo.
Contexto: Nacimientos de varones y hembras en un contexto frecuencial. Es un ítem típico usado en las investigaciones de Kahneman y cols. (1982) sobre la heurística de la representatividad.
Representación gráfica: No hay.
Tipo de respuesta: Elección múltiple.
Espacio muestral: E={Varón, Hembra}. Dos sucesos simples equiprobables por razón frecuencial. Se pide elegir entre la probabilidad de más de 7 varones en una muestra de 10 nacimientos, y la probabilidad de más de 70 varones en una muestra de 100.
Posible sesgo (estrategia): Los alumnos, con frecuencia, no reparan en que las muestras pequeñas pueden presentar mayor variabilidad con respecto a la población que las grandes, aplicando la heurística de la representatividad al respoder que son igual de probables.

La población es tan amplia, que hay que trabajar sobre muestras (Como si fueran sucesivas extracciones con reemplazamiento en el espacio muestral E). Hay que calibrar la probabilidad de que ocurra un suceso (compuesto) en una muestra pequeña o grande. (Implícitamente se considera la propiedad de estabilidad de las frecuencias)

Item 25: Una bolsa contiene en su interior algunas bolas blancas y algunas bolas negras. Un niño extrae una bola, anota su color y la vuelve a introducir. A continuación remueve las bolas para que se mezclen bien. El chico repite esta operación 4 veces y siempre obtiene una bola negra. A continuación extrae una quinta bola. ¿De qué color piensas que será con más probabilidad? Señala la frase que consideres correcta:

(A) La negra es más probable de nuevo ___
(B) La negra y la blanca son igualmente probables ___
(C) La blanca es más probable esta vez ___

Contenido evaluado: Hay que inferir la composición de la bolsa a partir de los datos de una muestra. Estimación frecencial de la probabilidad.
Contexto: Bolsa con bolas blancas y negras, cuya composición es desconocida. Se pide la probabilidad de extraer bola negra en un contexto frecuencial.
Representación gráfica: No hay.
Tipo de respuesta: Elección múltiple.
Espacio muestral: E={n, b}. Dos sucesos simples no equiprobables por razón frecuencial.
Posible sesgo (estrategia): Se pretende saber si el hecho de que el número de bolas blancas y negras es desconocido influye en las respuestas de los sujetos. Si el alumno utiliza la información frecuencial proporcionada, debe dar más peso a la obtención de bola negra (probabilidad. frecuencial o experimental). Los que responden "blanca" ignoran la información proporcionada y olvidan que no conocen la composición de la bolsa. Algunos suponen, sin motivo, igualdad en las cantidades de bolas, o manifiestan el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988) y contestan "la misma probabilidad". No hay cálculo de probabilidades, pero sí comparación.

La escala de nivel probabilístico

Como hemos indicado, además de poder obtener puntuaciones combinatorias, verbales y probabilísticas a partir del test de Green, este autor usó parte de los ítems para situar a los niños en un nivel de razonamiento probabilístico, de acuerdo con las teorías de Piaget. La escala para establecer el nivel probabilístico ha sido elaborada como se muestra en la tabla 2.2.1.

Vemos que en esta escala las preguntas son bastante homogéneas, respecto a las incluídas en el total de la prueba. En cuanto al contexto empleado, incluye bolas (ítems 6 y 18), muestreo (ítem 3), ruletas (ítems 3 y 19), dados (ítems 4 y 9) y monedas (ítem 5). Aunque estos contextos son bastante variados, no se ha incluído ninguna pregunta en contexto de canales y salvo dos ítems, solo se usan contextos discretos.

Tabla 2.2.1. Criterios de definición del nivel probabilístico de Green

Nivel	Items en el nivel	Criterio para superar
0	--------	Fracaso en el nivel 1
1	3, 4, 5, 26a	Responder correctamente a 2 de los 4 ítems
2	2, 6b(resp.), 6b(razonamiento), 6c(resp.), 6c(razonamiento), 6d(resp.), 9, 10, 18, 19(resp.), 19(razonamiento)	Responder correctamente a 7 de los 11 ítems
3	6d(razonamiento), 6e(resp.)	Responder correctamente a los 3 ítems

Los contenidos cubiertos incluyen comparación de probabilidades de sucesos simples en experimentos simples, caso de equiprobabilidad y no equiprobabilidad; probabilidad geométrica, independencia, esperanza matemática, razonamiento combinatorio, razonamiento proporcional y probabilidad condicional.

Los sesgos evaluados se refieren al sesgo de equiprobabilidad (ítems 2, 3, 18, 19), aplicación correcta del principio de indiferencia (ítem 4, 19), representatividad (ítem 5), estrategias de razonamiento proporcional (ítems 6), combinatorio (10 y 26).

Se han dejado fuera de la escala los ítems siguientes, que cubren un amplio espectro de ideas estocásticas fundamentales, contextos y posibles sesgos de razonamiento:

Item 1 (evaluación de creencia en factores causales);
Items 7, 12, 13, 14, 15, 16(comprensión verbal);
Item 8 (probabilidades binomiales);
Items 11, 12, 29 (convergencia estocástica; percepción de la aleatoriedad);
Item 17 (comparación de probabilidades; efecto de la disposición física en conexto de trompos);
Items 21, 22 (5 apartados) (experimentos compuestos en contexto de canales; probabilidad del suceso simple y compuesto en experimentos compuestos; regla de la suma; distractores subjetivos;
Item 23 (probabilidad frecuencial en contexto de ruletas; no puede aplicarse la regla de Laplace);
Item 24 (variabilidad del muestreo; heurística de la representatividad);
Item 25 (muestreo; estimación).

En adición a estas limitaciones, Truran (1994d) realiza un análisis de este instrumento, indicando que las situaciones contempladas en la escala se refieren siempre a espacios muestrales finitos y con un pequeño número de elementos. Excepto el ítem 9, los sucesos elementales son equiprobables; y el alumno conoce la estructura del espacio muestral de antemano. La mayor parte de las preguntas se refieren a la comparación de probabilidades simples y sólo una sobre el concepto de juego equitativo. No hay en la escala situaciones de predicción de resultados o generación de resultados aleatorios.

Asimismo, Izard (1994) realizó un análisis de los datos de Green usando la técnica del escalograma de Guttman y encontró que la regla que Green usó para determinar el nivel probabilístico merece un estudio más detallado, puesto que la escala construída no se ajustaba al patrón supuesto por Guttman.

Todos estos análisis apoyan nuestra hipótesis de que el razonamiento estocástico de los niños es difícil de describir mediante una escala de tipo lineal. En la sección siguiente analizaremos otro cuestionario de evaluación de la intuición probabilística, indicando algunos elementos nuevos que no han sido incluídos en la escala para la determinación del nivel probabilístico, ni en el cuestionario de Green.

2.3. ANÁLISIS CONCEPTUAL DEL CUESTIONARIO TOMADO DE LAS INVESTIGACIONES DE FISCHBEIN Y GAZIT

El segundo cuestionario empleado en nuestra investigación ha sido tomado de Fischbein y Gazit (1984) y se presenta en el Anexo 2. Procediendo de forma análoga a como lo hemos hecho con el instrumento de Green, analizamos a continuación este instrumento, que consta de ocho ítems.

Item 1: En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas debe uno sacar para estar seguros de que se obtendrá una bola de cada color?

*Conocimiento evaluado***:** En este ítem se evalúa la comprensión del concepto de suceso seguro por parte del alumno, ya que Fischbein considera esta noción más difícil que la de suceso probable. Al mismo tiempo se analiza la capacidad combinatoria del alumno, quien debe enumerar las diferentes posibilidades que se le presentan al extraer sucesivamente las bolas de la urna.
Contexto: Extracción de bolas en urnas. Contexto discreto. Puede considerarse como una sucesión de extracciones sin reemplazamiento, por lo que los sucesivos experimentos serían dependientes y harían cambiar la composición de la urna.
*Representación gráfica***:** No hay
Tipo de respuesta: Respuesta abierta.
Espacio muestral: Consta de 3 sucesos elementales no equiprobables por razón de la composición de la urna: E={r, v, b}.En los sucesivos experimentos la composición de la urna se modifica, por lo que cambian las probabilidades de los sucesos elementales.
Posible sesgo (estrategia): El alumno puede comprender mal la pregunta e interpretar que se pide el mínimo número de bolas para que sea <u>posible</u> obtener una de cada color; confundiendo las nociones de posible y seguro (esto llevaría a la respuesta “tres bolas”). Por otra parte, se pone a prueba el razonamiento combinatorio del alumno, que puede no ser capaz de enumerar todas las posibilidades.

Item 2: José procura entrar a clase cada día poniendo primero el pie derecho. Cree que esto aumenta su suerte de obtener buena nota. ¿Cuál es tu opinión?

Conocimiento evaluado: Concepciones de los niños sobre la aleatoriedad y las posibilidades de control de los fenómenos aleatorios.
Contexto: Situaciones de la vida diaria en las que el niño está personalmente involucrado.
Representación gráfica: No hay
Tipo de respuesta: Respuesta abierta.
Espacio muestral: En este enunciado se hace alusión a una gama muy amplia de experimentos aleatorios, cuyos resultados se clasifican en favorables o no favorables al alumno. Generalmente los sucesos no son equiprobables y no se conoce su probabilidad a priori, ni se tiene información de tipo frecuencial. Claramente es un contexto apropiado al empleo de probabilidades de tipo subjetivo.
Posible sesgo: Este ítem intenta evaluar si el alumno tiene creencias sobre factores causales improcedentes que pudieran influir sobre los sucesos aleatorios. En este caso, se introduce una superstición arraigada en algunos ambientes culturales, como es entrar con el pie izquierdo, que podría, supuestamente, ocasionar una “mala suerte”.

Item 3: Lola rellenó en cierta ocasión un impreso de lotería con los siguientes números: 1, 7, 13, 21, 22, 36; y ganó. Como consecuencia, piensa que debe jugar siempre al mismo grupo de números,porque de este modo ganará. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

Conocimiento evaluado: Se evalúa la comprensión de la idea de independencia por parte de los niños, tanto en los resultados del experimento compuesto (los números de la serie dada son independientes entre sí), como en la repetición de dicho experimento (propiedad de pérdida de memoria). Se evalúa también la existencia de sesgos asociados a la heurística de la representatividad.
Contexto: Juego de lotería que tiene una gran tradición social y por tanto resulta familiar al alumno.
Representación gráfica: No hay.
Tipo de respuesta: Abierta.
Espacio muestral: Se trata de un experimento compuesto. Cada uno de los experimentos simples da como resultado un número comprendido entre 1 y 49. El espacio muestral es finito, pero con un gran número de resultados: $C_{49,6}$=13983816.
Posible sesgo: Se puede pensar en la existencia de "números afortunados", es decir, no admitir la equiprobabilidad o el principio de indiferencia. Por otro lado, puesto que la combinación presentada es ordenada, un razonamiento basado en la heurística de la representatividad podría llevar a la conclusión de que esta combinación particular es menos probable que otra no ordenada. Finalmente, la recencia negativa, cimentada también en la heurística de representatividad, induciría a creer que, puesto que dicha combinación ha ganado una vez, sus posibilidades de ganar disminuyen en la próxima jugada.

Item 4: Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana?

Conocimiento evaluado: Se trata de un ítem de comparación de dos probabilidades de sucesos elementales en experimentos compuestos. Se introducen factores de tipo subjetivo.
Contexto: Números en la lotería.
Representación gráfica: No hay.
Tipo de respuesta: Respuesta abierta.
Espacio muestral: Finito, pero muy numeroso, ya que consta de 10^6 casos. Sucesos simples equiprobables (razón frecuencial y simetría física.
Posible sesgo (estrategia): El alumno debe reconocer la equiprobabilidad de los sucesos. Puede manifestarse de nuevo la heurística de la representatividad, por la cual no se admite como aleatorio las secuencias de resultados ordenados.

Item 5: Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "la lotería es un juego basado en la suerte. A veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces, y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima". ¿Cuál es tu opinión sobre la explicación de Pedro?

Conocimiento evaluado: Comprensión, por parte de los alumnos, de la idea de independencia y percepción de la propiedad de pérdida de memoria. También se evalúa la diferenciación entre muestreo con y sin reemplazamiento.
Contexto: Lotería.
Representación gráfica: No hay
Tipo de respuesta: Abierta.
Espacio muestral: Sólo se hace mención implícita. El espacio muestral (resultados en la lotería) es finito, con sucesos equiprobables y con gran número de elementos.

Posible sesgo: Este ítem evalúa la creencia en la posibilidad de control sobre los mecanismos aleatorios. La recencia negativa induciría a creer que, puesto que Pedro no ha ganado, sus posibilidades de ganar aumentan en la próxima jugada.

Item 6: Pablo tiene 100 bolas blancas y 50 negras en una caja. Miguel tiene en su caja 200 bolas blancas y 100 negras. Sin mirar, cada uno toma una bola de su propia caja. Compara sus posibilidades de extraer una bola negra. Marca con una X la respuesta correcta:

a) Pablo tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra
b) Miguel tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra
c) Sus posibilidades de extraer una bola negra son iguales
d) Es imposible dar una respuesta con los datos del problema

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos no equiprobables. Situación en que la composición de las urnas es proporcional (la misma clase de equivalencia). Nivel IIB de Noelting, (1980a y b)
Contexto: Comparación de urnas con bolas blancas y negras, cuyos contenidos son proporcionales, de razón 2 (100b/50n, 200b/100n). Se pide comparar las probabilidades de obtener bola negra. (contexto discreto)
Representación gráfica: No hay
Tipo de respuesta: Elección múltiple.
Espacio muestral: Dos experimentos aleatorios con el mismo espacio muestral E={b,n} y la misma función de probabilidad. Los sucesos elementales no son equiprobables por razón de la composición de las urnas, pero éstas son equivalentes por tener composiciones proporcionales.
Posible sesgo: La comparación absoluta de casos favorables conduciría a error, por lo que es preciso utilizar el razonamiento proporcional o, al menos, el establecimiento de una correspondencia entre los elementos que componen las urnas.

Item 7: Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos no equiprobables. Situación en que la composición de las urnas es proporcional (la misma clase de equivalencia). Nivel IIB de Noelting, (1980a y b)
Contexto: Elección entre dos urnas con bolas blancas y negras cuyos contenidos son proporcionales, de razón=3/4 (40b/20n, 30b/15n). Se pide comparar las probabilidades de extraer blanca.(Contexto discreto).
Representación gráfica: No hay.
Tipo de respuesta: Respuesta abierta
Espacio muestral: Un espacio muestral, E={b, n}, con dos sucesos no equiprobables por razón de composición de las urnas. Una misma función de probabilidad (P(b)=2/3, P(n)=1/3), por lo que las urnas son equivalentes.
Posible sesgo (estrategia): Caso análogo al anterior, en que para hacer la comparación es necesario el razonamiento proporcional o la correspondencia entre los elementos, aunque ahora cambia la razón de proporcionalidad entre las urnas de un nº entero a un racional. El distractor de la edad de la niñas puede influir en el establecimiento de falsas relaciones causales por parte de los alumnos.

Item 8: Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca, ninguno gana y la partida tiene que continuar. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con dos sucesos no equiprobables. Situación en que la composición de las urnas es proporcional (la misma clase de equivalencia). Nivel IIB de Noelting, (1980a y b)
Contexto: Elección entre urnas con bolas blancas y negras, cuyos contenidos son proporcionales, de razón 3 (10b/20n, 30b/60n). Probabilidad de extraer bola blanca. (contexto discreto). Se contempla la noción de juego equitativo.
Representación gráfica: No hay.
Tipo de respuesta: Respuesta abierta.
Espacio muestral: Un espacio muestral, E={b, n} con dos sucesos simples no equiprobables por razón de composición de las urnas, y la misma función de probabilidad (P(b)=2/3, P(n)=1/3), por lo que las urnas son equivalentes.
Posible sesgo (estrategia): Se hace explícita la posibilidad de comparar cantidades absolutas de bolas blancas, para conocer la reacción del alumno ante este distractor. Se busca que el alumno emplee explícitamente el razonamiento proporcional o la correspondencia.

En síntesis, en el test de Fischbein y Gazit se considera que para otorgar capacidad de razonamiento probabilístico, a nivel primario, es decir, a un sujeto sin instrucción específica en Probabilidad, este debe mostrar capacidad para:

(1) Identificar el suceso seguro, distinguiéndolo del inseguro, aleatorio o probabílístico (ítem F1).
(2) Aceptar el principio de indiferencia o equiprobabilidad de sucesos por razones de simetría, o ausencia de razones suficientes en contra (ítems F3, F4, F5, F6, F7, F8).
(3) Identificar experimentos independientes, a pesar de factores culturales (creencias o sesgos de razonamiento) que establecen relaciones de causa-efecto sin fundamento (ítems F2, F3, F4, y F5).
(4) Utilizar el razonamiento proporcional para comparar probabilidades de sucesos, ya sea razonando en un esquema parte-parte o en un esquema parte-todo (ítems F6, F7 y F8). En estos tres ítems sobre bolas contenidas en urnas, la composición de éstas es proporcional de razones 2, 3/4 y 3, respectivamente. En todos los casos el número de bolas negras es el doble que el de blancas.
(5) Apreciar un juego como equitativo (ítem F8).
(6) Apreciar las características de la convergencia en probabilidad (estabilidad de las frecuencias; ley del azar o de los grandes números) (ítems sobre loterías, F3, F4 y F6; también el ítem F8 se plantea una secuencia de experimentos aleatorios, por lo que requiere la apreciación de la estabilidad de las frecuencias a largo plazo)
(7) Combinatoria; enumeración y recuento de posibilidades. En los ítems referidos a la presencia de bolas en cajas se requiere que el sujeto sea capaz de contar el número de resultados posibles y a favor del suceso que interesa. También puede razonar relacionando casos favorables con casos desfavorables, o estableciendo una correspondencia que ponga de manifiesto la proporcionalidad entre los elementos.

Los contextos usados por Fischbein y Gazit son loterías (ítems F3, F4, y F5), extracción de bolas (ítems F1, F6, F7 y F8), sucesos "naturalistas" (ítem F2.).Los sesgos que Fischbein y Gazit han tenido en cuenta en los enunciados de los ítems de su test, y que el alumno debe superar mediante el uso intuitivo de las herramientas matemáticas mencionadas, son los siguientes:

- sesgo de representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982)
- falacia del jugador ("recencia" negativa).
- factores causales improcedentes en situaciones puramente aleatorias (entrar con el pié derecho, uso de la inteligencia)

Por último, el estudio realizado de los dos intrumentos, de Green y Fischbein y Gazit, nos sugiere que existe cierta relación entre ambos, encontrando algunos puntos en común. Esto nos hace pensar que hayaremos cierta correlación entre las respuestas a determinados ítems de los dos cuestionarios. Por otro lado, el test de Fischbein y Gazit introduce elementos de tipo subjetivo no considerados en el de Green, que pudieran influir en la asignación y comparación de probabilidades por parte de los alumnos. En las secciones que siguen presentamos los resultados obtenidos de la aplicación de cada uno de los cuestionarios En la sección 2.7 hacemos un estudio experimental comparado de ambos instrumentos, tratando de establecer los puntos de conexión entre ambos. Finalmente, en la sección 2.8 analizamos la estructura del razonamiento probabilístico puesto de manifiesto por los alumnos al responder a los dos instrumentos considerados.

2.4. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

La muestra que participó en la primera parte del estudio experimental estuvo formada por un total de 320 niños y niñas, de edades comprendidas entre 10 y 14 años, que cursaban sus estudios en tres colegios públicos de la ciudad de Jaén: El colegio Ruiz Jiménez, y los colegios de prácticas nº 1 y nº 2. Dos de los centros eran mixtos y el tercero masculino, lo que hizo que la proporción de niños fuera algo superior a la de niñas. Uno de estos centros tenía un especial contacto con nuestro Departamento, ya que profesores del mismo participaban en experiencias de renovación curricular en colaboración con algunos de nuestros profesores. Anotamos aquí este hecho, que puede contribuir, en parte, a los buenos resultados observados en nuestra muestra, para ayudar a la valoración de los mismos por parte del lector.

La distribución de los alumnos por cursos fue la siguiente (ver tabla 1.3.1): 69 alumnos de 5º curso de E.G.B., 91 alumnos de 6º curso de E.G.B., 87 alumnos de 7º curso de E.G.B. y 73 alumnos de 8º curso de E.G.B, siendo el 64.5% de los alumnos varones y el 35.5 % mujeres.

Para establecer el nivel de rendimiento matemático, en principio, se solicitó a los profesores que asignaran una puntuación a cada alumno que reflejase la aptitud de éste en matemáticas, pero, al encontrarnos con que dicha asignación carecía de la suficiente objetividad, a sugerencia de los propios profesores, esta puntuación se sustituyó por la nota media en matemáticas que el alumno llevaba hasta la presente evaluación, expresada en un intervalo (0-10). Se obtuvo una puntuación media de 6.12, con desviación típica de 2.17. La puntuación osciló entre 1 punto (2 alumnos) y 10 puntos (40 alumnos); con un ligero sesgo hacia puntuaciones por encima del valor medio teórico (5), ya que sólo el 41.9 % de los niños fue puntuado con 5 o menos puntos por su profesor. Los alumnos puntuados con menos de 4 se consideraron de bajo rendimiento. Aquellos cuya puntuación oscilaba entre 4 y 7 se les asignó el rendimiento medio, y por encima de esta nota, un rendimiento alto. La edad de los niños, expresada en meses osciló entre 128 y 197 meses, con una media de 157.45 y una desviación típica de 13.62.

Del total de alumnos, 251 (los alumnos de 6º a 8º) cumplimentaron los dos cuestionarios. Los 69 alumnos de 5º de E.G.B. tan sólo cumplimentaron el cuestionario de Fischbein y Gazit, puesto que el cuestionario de Green no era adecuado a la edad de estos alumnos.

La recogida de datos se llevó a cabo durante el curso 1987-88 y la participación de los centros fue voluntaria. Los niños respondieron a los cuestionarios como una actividad más a desarrollar en la clase de Matemáticas. La investigadora se desplazó personalmente a los centros participantes y, con la ayuda del profesor, llevó a cabo la recogida de datos. Al comenzar la actividad se les explicó a los niños la finalidad del cuestionario y se les pidió su participación, lo que hicieron de buen grado y con interés. Agradecemos a estos niños, centros y a los profesores la colaboración prestada, sin la cual esta investigación no podría haberse llevado a cabo.

2.5. RESULTADOS OBTENIDOS CON EL CUESTIONARIO DE GREEN

Analizamos a continuación, de un modo global, los resultados obtenidos del test de Green en el total de la muestra, que, en este caso, como ya se ha mencionado, constaba de 251 alumnos y alumnas de edades comprendidas entre 11 y 14 años. Desglosamos los resultados según los diversos componentes de esta prueba, descritos en la sección 2.2. Debido a la longitud del test sólo dividimos las respuestas en correctas e incorrectas, estudiando tan sólo los casos en que las respuestas incorrectas han tenido alguna significación respecto al objetivo de nuestra investigación. Los resultados detallados de la aplicación del cuestionario se presentan en el anexo 3.

2.5.1. Razonamiento combinatorio

Se evalúa a partir de tres ítems (9, 10 y 26), aunque el último se divide en cuatro apartados. En la tabla 2.5.1. incluimos el porcentaje de respuestas correctas correspondiente a cada uno de los ítems que configuran la puntuación combinatoria en los niños de nuestra muestra y en la muestra usada por Green (1982) en su investigación.

Tabla 2.5.1. Resultados en el Test de Green: Puntuación combinatoria (porcentaje de respuestas correctas por curso)

	6º		7º		8º	
Item	Esp.	U. K.	Esp.	U. K	Esp.	U. K.
9	45.1	46	62.1	51	46.6	62
10	44.0	42	70.1	51	65.8	64
26ab	58.2	64	71.6	68	74.0	81
26c	6.6	5	16.1	9	15.1	15
26d	0.0	1	2.3	2	1.4	2

Observamos, en general, la dificultad de las tareas combinatorias para los niños, en especial las 26c y 26d (permutaciones de 4 y 5 elementos) en las cuales los alumnos deben aplicar un procedimiento recursivo, procedimiento que no es espontáneo en estas edades, como se pone de manifiesto en los resultados de ambas muestras. Sin embargo se aprecia unas intuiciones correctas sobre combinatoria, ya que los alumnos han resuelto con mayor facilidad los otros ítems, aunque generalmente usando ensayo y error y no procedimientos sitemáticos de enumeración. Se observa una ligera mejora del razonamiento combinatorio de los alumnos de 7º y 8º respecto a los de 6º en los primeros ítems, pero no en los que requieren razonamiento recursivo.

En el ítem 9 se pregunta por la cantidad que debe recibir un jugador para que un juego de dados resulte equitativo, si este jugador sólo gana cuando sale el número 1. En 6º curso, el porcentaje de respuestas correctas es similar en nuestra muestra y la tomada por Green, observándose en el grupo de 8º un resultado mucho más bajo, y en el de 7º algo más alto que el de Green. La respuesta "1", consistente en igualar el valor esperado al que recibe el jugador contrario por cualquier otro número, fue utilizada por el 17% del total de alumnos, aunque más de la mitad contestan correctamente, lo que muestra unas intuiciones correctas sobre la idea de juego equitativo.

En el ítem 10 más de la mitad de los sujetos responden correctamente, aunque se observa un alto porcentaje de alumnos que no completan la tabla. En 7º curso las respuestas son significativamente mejores que las de Green, y, como en casos anteriores, las respuestas mejoran de 6º a 7º, pero descienden de 7º a 8º.

En el Item 26 tampoco existen diferencias significativas entre los porcentajes de respuestas correctas de ambos grupos, aunque los obtenidos en 7º en nuestra muestra son ligeramente superiores a los de Green en algunos subitems.

2.5.2. Razonamiento probabilístico

En este apartado, hemos encontrado que nuestros porcentajes de respuestas correctas son, en la mayor parte de los casos, superiores a los obtenidos por Green (ver tabla 2.5.2). Puesto que nuestra muestra es pequeña, en comparación con la de este autor, no podemos deducir una diferencia en la distribución general en la población de niños españoles. Sin embargo, el gran arraigo que los juegos en los que intervienen generadores aleatorios, como el parchís, oca, cartas, etc, tienen entre nuestros escolares, puede explicar, en parte, las intuiciones correctas sobre probabilidad que parecen apuntarse en estos altos porcentajes de éxito.

Tabla 2.5.2. Resultados en el Test de Green: Puntuación Probabilística (porcentajes de respuestas correctas por curso)

	6º		7º		8º	
Item	Esp.	U. K.	Esp.	U. K.	Esp.	U. K.
1	68.1	45	87.4	55	80.8	66
2	63.7	38	75.9	43	68.5	61
3a	79.1	71	77.0	76	75.3	87
3b	73.7	58	77.0	69	86.7	78
4	75.8	67	77.0	69	76.7	79
5	78.0	67	87.4	73	83.6	78
6a	87.9	88	92.0	87	87.7	88
6ar	0.0		4.6		9.6	
6b	74.7	55	78.2	60	79.5	71
6br	0.0		3.4		5.5	
6c	76.9	43	81.6	51	84.9	64
6cr	48.4		66.7		64.4	
6d	59.3	38	60.9	50	61.6	62
6dr	19.8		31.0		38.4	
6e	31.9	20	46.0	21	46.5	35
6er	15.4		33.3		39.7	
8	4.4	11	4.6	22	0.0	16
11	22.0	26	17.2	26	11.0	24
12	33.0	31	29.0	30	31.5	29
17	51.6	49	59.8	49	69.9	53
17r	31.9	36	42.4	37	41.8	39
18	47.3	40	65.5	45	65.8	61
19a	46.2	43	55.2	49	54.8	61
19b	41.8	41	59.8	51	52.1	62
20a	28.6	38	29.9	34	27.4	30
20b	14.3	21	18.3	21	17.8	23
21a	46.2	48	59.8	52	54.8	57
21b	36.3	34	50.6	37	45.2	44
21c	59.3	61	71.3	69	71.2	68
21d	38.5	36	39.1	37	34.2	41
22	4.4	5	7.2	4	6.8	7
23	15.4	15	14.9	16	15.1	15
24	11.0	7	5.7	9	2.7	7
25	15.4	13	13.8	13	11.0	13

Ya hemos indicado las características específicas de uno de los colegios participantes respecto a la innovación metodológica e implicación del profesorado en las mismas, que también puede explicar parte de estos resultados, aunque las diferencias de puntuaciones entre colegios no fueron estadísticamente significativas. Por otra parte, no hemos de olvidar que el tamaño de nuestra muestra era notablemente inferior al utilizado por Green. En todo caso, este es un tema que merece una investigación más detallada. En lo que sigue indicamos las principales diferencias respecto a los resultados de Green, aunque con las precauciones señaladas. Comparando los resultados del ítem 1 (resultado de un experimento aleatorio, caso equiprobable) con los de Green, podemos observar que se obtiene una actuación significativamente mejor en los niños de nuestra muestra, a lo largo de todos los cursos. Notamos asimismo una mejoría con la edad al pasar de 6º a 7º, y de 6º a 8º, pero sucede lo contrario en el paso de 7º a 8º. No ocurre así en el trabajo de Green, en que el porcentaje de respuestas correctas aumenta siempre con la edad. La preferencia sobre un color determinado ha sido, en nuestro caso, un distractor menos importante que en el de Green.

En el Item 2 (resultado de un experimento aleatorio simple, caso no equiprobable) se observa una mejor actuación de los niños españoles en los cursos de 6º y 7º, mientras que en 8º, aunque también hay diferencia, ésta no es significativa. Se puede ver también que más de la mitad de los sujetos en todos los cursos señalan la respuesta correcta, mientras que Green obtiene que, en los dos primeros cursos, la mayoría de sus alumnos responden mediante el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1985; Lecoutre y Durand, 1988), que aquí aparece sólo en el 25% de los alumnos.

En el Item 3 (comparación de probabilidades, caso de dos espacios de sucesos equiprobables, contexto de ruletas) una gran mayoría de los sujetos responde correctamente. Tanto en 6º como en 7º, los resultados obtenidos son muy similares a los ingleses, aunque en 8º curso el porcentaje de respuestas correctas es significativamente menor. Es destacable el hecho de que, a diferencia de Green, el porcentaje de respuestas correctas disminuye ligeramente con la edad.

Hemos considerado correctos los argumentos basados en áreas, recuento de sectores o comparación de razones. En 7º y 8º más de la mitad de los alumnos argumentan su respuesta con el concepto de área, indicando que "*la porción de 3 en el disco azul es más grande*". Estos alumnos raramente utilizan el concepto de razón, y cuando lo hacen lo expresan diciendo que *"en el disco azul el 3 ocupa la tercera parte, y en el rojo la cuarta parte"*.

En el item 4 (preferencias por un resultado en un experimento aleatorio simple; contexto de dados), no hay esta vez diferencias significativas con las de Green. Se vuelve a observar el descenso al pasar de 7º a 8º. La respuesta "6" es para los niños ingleses un fuerte distractor, aunque disminuye con la edad. No ocurre así con los de nuestra muestra, donde esta respuesta la dan muchos menos sujetos, pero aumenta con la edad; al igual que la respuesta "5". Esto podría estar basado en la influencia de juegos de azar en que se premian algunos resultados como el 5 ó el 6.

En el item 5 **(**recencia positiva-negativa, independencia), salvo en 8º, los demás sujetos de la muestra responden significativamente mejor que los ingleses. Mencionemos aquí el alto porcentaje de respuestas correctas, ya que el 82.9 % del total de la muestra responde adecuadamente. Un hecho a destacar en esta cuestión podría ser que, entre los alumnos que no responden correctamente, en 6º y 8º responden más frecuentemente la opción a) (recencia positiva) que la b) (recencia negativa), mientras que en 7º ocurre al revés. Esto podría tener su explicación en un efecto indeseado del programa de instrucción sobre estadística que se imparte en 7º curso, basándose en el cual, el alumno manifiesta una tendencia a "equilibrar" las frecuencias.

Los resultados del ítem 6a (comparación de urnas, (3,1) vs (2,1), nivel IA) son muy similares en ambas muestras, observándose un porcentaje muy alto de respuestas correctas, con un ligero incremento en 7º curso. Green analiza conjuntamente todos los ítems de razonamiento o explicación de la respuesta correspondientes a las cuestiones 6a-6e, encontrando, en general, un gran porcentaje de argumentos apoyados en la comparación absoluta de un mismo elemento entre ambas bolsas (bien sólo se comparan los casos favorables, o bien sólo los desfavorables). Este argumento disminuye con la edad; mientras que el que se basa en el razonamiento proporcional es utilizado por pocos alumnos, y sólo los mayores (7% en 6º; 13% en 7º y 24% en 8º). En la tabla 2.5.2. no aparecen datos sobre los porcentajes de argumentos correctos en los items 6a a 6e para la muestra de Green, puesto que este autor analiza los argumentos de forma conjunta en todos estos items, y no disponemos de los datos separadamente.

En este ítem, nosotros encontramos que la mayoría de los alumnos comparan colores iguales de las dos bolsas. En el caso del ítem 6a se comparan cantidades absolutas de bolas negras, argumentando *"porque en la caja A hay las mismas blancas que en B, y más negras",* o bien *"porque en la caja A hay más negras".* Rara vez utilizan el concepto de razón, y cuando lo hacen lo expresan diciend*o "porque en la caja A hay tres contra una, y en la B hay dos contra una",* lo que podría interpretarse también como una correspondencia. Se observa que este tipo de razonamiento lo utilizan, sobre todo, los alumnos mayores, y es el que aparece reflejado en la tabla 2.5.2, aunque somos conscientes que no es el único argumento que conduce a una solución correcta, y que, de hecho, habrá alumnos que no lo utilicen por disponer de otro más asequible e igual de efectivo para este ítem en particular, como es el caso mencionado de comparar exclusivamente los casos favorables. Para una consulta exhaustiva sobre los argumentos utilizados, ver el anexo 3.

En el ítem 6b (Comparación de urnas, (5,2) vs (5,3), nivel IB) observamos un alto porcentaje de la respuesta correcta, que, al igual que en los resultados de Green, aumenta con la edad, aunque en nuestra muestra los porcentajes son significativamente mayores en todos los cursos. Es destacable el alto número de alumnos que responden la opción c) (igualdad de posibilidades), debido a que existe el mismo número de bolas negras en las dos bolsas.

Al analizar los argumentos para este ítem ocurre algo parecido al caso anterior. Apenas se utiliza el razonamiento proporcional, y cuando lo hacen, son, sobre todo, los alumnos mayores. De todas maneras, como afirma Green, es posible que este tipo de razonamiento aparezca en forma de comparar cantidades absolutas, o colores iguales de las dos bolsas, por falta de habilidad por parte de los alumnos para expresarse.

En el ítem 6c (Comparación de urnas, (2,2) vs (4,4), nivel IIA) destacamos el alto porcentaje de respuestas correctas obtenidas (más de las 3/4 partes), observando que aumenta con la edad. El mayor distractor lo constituye la opción b) (preferible la caja (4,4)), aunque en nuestra muestra, el número de alumnos que responden esta opción es menor que el de Green.

En el análisis del razonamiento empleado por los alumnos podemos observar un aumento del porcentaje de argumentos basados en el razonamiento proporcional, bajo la forma: "*En la bolsa F hay justo el doble de blancas y de negras que en la E"*, aunque podría, más bien, tratarse del establecimiento de una correspondencia entre los elementos de ambas urnas. (En nuestro caso no diferenciaremos estos dos tipos, ya que Green no lo hace). Los que comparan cantidades absolutas suelen ser los que han elegido las opciones a) (preferible la caja (2,2)) ó b) (preferible la caja (4,4)), ya que argumentan*: "La bolsa E, porque hay menos blancas*" o, sobre todo, *"La bolsa F, porque hay más negras".*

En el ítem 6d (Comparación de urnas, (12,4) vs (20,10), nivel IIIA) más de la mitad de los alumnos de la muestra responden correctamente a la tarea, aumentando esta porcentaje con la edad. Excepto en 8º, nuestros alumnos contestan significativamente mejor que los de Green. El porcentaje de respuestas apoyadas en el razonamiento proporcional es, de nuevo, superior al de las cuestiones a y b. Posiblemente ello sea debido a que aquí no es válida la estrategia de comparar colores entre las bolsas, ya que ambas cantidades -la de bolas blancas y la de bolas negras- son distintas. El argumento que suelen utilizar es: *"Porque en la caja H el número de bolas negras es el doble que el de blancas, mientras que en la caja G hay más del doble*". Algunos alumnos especifican, incluso, que en la caja G hay el triple de bolas negras que de blancas.

En el ítem 6e (Comparación de urnas, (3,1) vs (6,2), nivel IIB) los sujetos de nuestra muestra responden significativamente mejor que los de Green, aumentando el porcentaje de respuestas correctas con la edad. La opción c) (preferible la caja (6,2)) sigue siendo el mayor distractor, posiblemente por tener más bolas negras. pero este efecto, disminuye con la edad. En cuanto al argumento, más de la tercera parte de los alumnos de 7º y 8º utilizan en este ítem el razonamiento proporcional, utilizando expresiones *como "En las dos cajas hay el triple de negras que de blancas*" o *"En la caja K hay el doble de blancas y de negras que en la J".*

Los porcentajes de respuestas correctas en el ítem 8 (probabilidades binomiales) en nuestra muestra son muy inferiores a los de Green, destacando, incluso, que en el curso de 8º ningún alumno respondió correctamente. El mayor distractor, tanto en nuestro caso como en el de Green, lo constituye la opción de equiprobabilidad, dándose la circunstancia de que en nuestra muestra la eligen más del 85 % del total de los sujetos.

A la vista de los resultados del ítem 11 (concepción sobre las distribuciones aleatorias de puntos en el plano y la convergencia), los alumnos de Green responden sensiblemente mejor que los de nuestra muestra, sobre todo en 7º y 8º, en que se observa una significativa diferencia. Entre nuestros alumnos, sólo un 17 % del total responden correctamente; lo que contrasta con los resultados que da Green, en que la cuarta parte del alumnado elige la respuesta correcta. Otro dato a destacar es que, en ambos grupos, el porcentaje de respuestas correctas disminuye con la edad.

En el Item 12 (concepción sobre las distribuciones aleatorias de puntos en el plano y la convergencia) hemos de mencionar que, por error tipográfico, una de las opciones difería de las de Green, lo que hizo de ella un distractor con menos fuerza. (puede que sea debido a ésto el que las respuestas son ahora más similares a las de Green que en el ítem anterior, que es muy parecido). Seguimos observando un descenso del porcentaje de respuestas correctas de 6º a 7º, y de 6º a 8º. Este progresivo distanciamiento de la concepción teórica de aleatoriedad con respecto a un acontecimiento real podría ser debido, en parte, a un efecto indeseado de la instrucción.

En el ítem 17 (comparación de probabilidades en contexto de ruletas y efecto de la disposición física) se observa claramente un incremento, con la edad, de las respuestas correctas. Nuestros porcentajes son ligeramente superiores a los de Green, aumentando la diferencia en 8º. Más de la mitad de los alumnos responde correctamente a esta cuestión.

En cuanto al tipo de argumento más utilizado, tanto por nuestros sujetos como por los de Green, es el de recuento de secciones *("En el rojo y en el amarillo hay igual número de doses").* Sin embargo, cabe destacar que nuestros alumnos, contrariamente a los ingleses, emplean más el razonamiento proporcional que el concepto de área, aunque en ocasiones las respuestas llevan implícitos ambos razonamientos. *("Tanto en el rojo como en el amarillo, la mitad son doses".* Esa mitad podría referirse a la mitad del número de secciones, ó a la mitad de la superficie ocupada). En la tabla 2.5.2 aparecen como correctos los tres argumentos mencionados.

Los resultados en el ítem 18 (probabilidad condicional, extracción sin reemplazamiento) son muy parecidos a los de Green, aunque en 7º son superiores. Más de la mitad de los alumnos responden correctamente. Cabe destacar que la opción d) (equiprobabilidad) es un distractor menor para nuestros sujetos.

El porcentaje de respuestas correctas en el ítem 19 (comparación de probabilidades en contexto de ruletas, caso de espacios de sucesos no equiprobables) es similar en ambos grupos. Más del 50 % de los sujetos responde correctamente y dan un argumento correcto a esta cuestión utilizando el concepto de área, siendo los resultados muy similares. El aumento de la respuesta correcta con la edad es bastante apreciable en los alumnos de Green, y más leve en los de nuestra muestra. Otro razonamiento empleado por muchos alumnos ha sido el "recuento de secciones", disminuyendo los porcentajes con la edad. Algo similar obtuvimos en el Item 3b), aunque entonces las secciones eran todas iguales, y el recuento era un razonamiento correcto. A la vista de estos resultados podríamos aventurarnos a afirmar que los alumnos que entonces razonaron así no estaban teniendo en cuenta esa equiprobabilidad de las secciones.

En el Item 20 (concepciones sobre las secuencias aleatorias) los resultados obtenidos son similares a los de Green, aunque la abstención ha sido mayor en nuestra muestra. Hay un alto número de sujetos (42.6 %) que optan, incorrectamente, por la opción "Luisa" y, como ocurría en los ítems 11 y 12, que también estudiaban la conexión del modelo matemático con el mundo real, el número de respuestas correctas disminuye con la edad. Por otra parte. nos hemos encontrado con una gran variedad de argumentos para justificar la respuesta a este ítem. Se han considerado válidos los argumentos basados en la regularidad o falta de regularidad del modelo y los que tienen en cuenta las longitudes de las rachas, cuando venían asociados a la respuesta correcta. Los resultados que obtenemos, aunque ligeramente inferiores, son similares a los ingleses; con un menor número de respuestas correctas, y un alto porcentaje de sujetos que no contestan.

En los cuatro apartados del Item 21 (probabilidades compuestas en contexto de canales) los resultados son, en general, muy parecidos entre las dos muestras. Podemos decir que no existen diferencias significativas. Los porcentajes del total de respuestas correctas que hemos obtenido son, respectivamente, de 53.4, 43.8, 66.9 y 37.5 . Otro dato observado es que vuelve a repetirse la forma de aumentar las respuestas correctas: Aumenta de 6º a 7º, y de 6º a 8º (salvo en el ítem 21d), pero disminuye de 7º a 8º.

En el ítem 22 (probabilidades compuestas en contexto de canales), el número de respuestas correctas es muy bajo (8.4 % en total), aunque los porcentajes son muy parecidos a los obtenidos por Green, salvo en 7º, que es significativamente superior. La mayoría de los alumnos optan por contestar, erróneamente, que todas las trampas son igualmente probables.

En el ítem 23 (probabilidades binomiales) volvemos a obtener resultados muy similares a los de Green. Sólo el 15 % de los sujetos contestan correctamente, mientras que el 64.1 % del total eligen erróneamente la opción E (equiprobabilidad), aumentando con la edad el número de alumnos que se deciden por dicha opción. Esta fuerte incidencia del sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1985; Lecoutre y Durand, 1988) también la obtiene Green.

En el ítem 24 (variabilidad en el muestreo), el número de respuestas correctas es muy bajo. En 8º es significativamente inferior al de la muestra inglesa para dicho curso, y cabe destacar que, a diferencia de Green, obtenemos un descenso del número de respuestas correctas con la edad, lo que se explica por la importancia del sesgo de insensibilidad hacia el tamaño de la muestra, descrito por Tversky y Kahneman, (1982), provocado por la heurística de representatividad

En el ítem 25 (estimación frecuencial de la probabilidad). de nuevo nos encontramos con unos resultados muy similares entre los dos grupos, y volvemos a encontrar el efecto anterior: El porcentaje de respuestas correctas es muy bajo, y disminuye ligeramente con la edad.

2.5.3. Comprensión del lenguaje probabilístico

Otro de los componentes del razonamiento probabilístico evaluado en el test de Green es la comprensión y el uso que hacen los niños del lenguaje de probabilidad. Puesto que en la vida ordinaria usamos con frecuencia palabras como "seguro", "probable", etc., es posible que los niños les otorguen un significado personal no acorde con el significado institucional en el campo probabilístico. En el cuestionario aparecen cinco ítems dedicados a la evaluación del lenguaje probabilístico, cuyos resultados aparecen en la tabla 2.5.3.

En general, los resultados obtenidos en este apartado son bastante buenos, arrojando un porcentaje de respuestas correctas superior al 50% en todas las cuestiones salvo en tres. Las preguntas que han ofrecido una mayor dificultad para los alumnos de nuestra muestra corresponden a los ítems 7a2 (" no ocurre muy a menudo") y 16e ("tiene igual probabilidad de ocurrir que de no ocurrir").

Tabla 2.5.3. Resultados en el Test de Green: Puntuación verbal (porcentaje de respuestas correctas por curso)

	6º		7º		8º	
Item	Esp.	U. K.	Esp.	U. K.	Esp.	U. K.
7a1	46.2	49	55.2	44	65.8	57
7a2	16.5	50	12.6	60	19.2	63
7a3	75.8	71	77.0	73	82.3	80
7a4	73.6	55	78.2	57	83.6	66
7Bb	81.3	84	83.9	84	78.1	89
7b2	68.1	73	75.9	76	72.6	80
7b3	42.9	18	52.9	25	57.5	34
7b4	60.4	65	66.7	69	58.9	78
7b5	49.5	23	58.6	27	56.2	37
13	61.5	29	65.5	40	61.6	40
14	47.3	37	52.9	43	46.6	42
15	51.6	41	60.9	55	46.6	62
16a	36.3	35	44.8	34	45.2	26
16b	56.0	68	75.9	73	82.2	81
16c	79.1	62	66.7	69	80.8	72
16d	86.8	75	92.0	82	93.2	87
16e	13.2	75	8.0	79	6.0	86
16f	91.2	91	95.4	92	97.3	95

En el item 7a1 se evalúa la comprensión por parte del niño del término *muy probable*. Se observa que más de la mitad de los alumnos de la muestra responden correctamente a este Item, aumentando el porcentaje con la edad, y con resultados similares a los obtenidos por Green.

En el item 7a2 se estudia el significado otorgado a la palabra *improbable*. En este Item los alumnos de nuestra muestra responden mucho peor que los de Green. Este obtiene más de la mitad de respuestas correctas, mientras que nuestros resultados son significativamente inferiores, aumentando bastante (79%) el porcentaje de sujetos que eligen la opción 1 (Confusión de suceso improbable con suceso imposible).

El ítem 7a3 se refiere al término *probable*. No existen diferencias significativas entre el porcentaje de alumnos de nuestra muestra que responden correctamente a este Item, y los resultados que obtiene Green.

En el ítem 7a4, que se refiere al significado de *poco probable,* los alumnos de nuestra muestra responden significativamente mejor los ingleses, observándose, en ambas muestras, una mejoría con la edad. Debemos destacar el hecho de que en este ítem la opción 1 (no puede ocurrir) no tiene la fuerza que en el ítem 7a2, lo que nos sugiere que la confusión que los alumnos manifiestan entre la noción de suceso imposible y poco probable puede deberse, en parte, al papel que juega el lenguaje de uso común en la construcción del significado personal de estas nociones.

En los ítems 7b1, 2 y 4 (*imposible, posible, poca posibilidad)* el porcentaje de respuestas correctas es siempre superior en el trabajo de Green, aunque la diferencia sólo se puede considerar significativa en el caso de 8º, en los ítems 1 y 4. Sin embargo, en los ítems 3 y 5 (*igual posibilidad, muy* probable), que, de las cinco cuestiones englobadas en el ítem 7, aparecen como las más difíciles, todos los cursos de nuestra muestra responden significativamente mejor que los de Green y, al contrario que obtiene él, más de la mitad de los alumnos dan una respuesta correcta.

En honor a la verdad, hemos de reseñar la gran dificultad que presentó la corrección de los ítems 13 (*muy probable*) 14 (*improbable*) y 15 (*sucede al azar*), debido, en ocasiones, al derroche de imaginación de los alumnos. Los porcentajes de respuestas correctas, en los dos primeros, son significativamente superiores a los de Green. En el ítem 15 no hay grandes diferencias entre el porcentaje de respuestas correctas de nuestra muestra y el de los niños ingleses, obteniendose, en ambas muestras, que existe mayor dificultad en la distinción entre *"probable*" e *"imposible*", que entre "*muy probable*" y "*seguro*", lo que corrobora los resultados de los ítems 7a1 y 7a2. Cabe destacar el alto porcentaje de respuestas clasificadas como “ambigüas” debido, en parte, a dificultades de expresión, o a una confusión entre experimento y suceso aleatorio, presentándose respuestas del tipo *“Las cartas es algo que sucede al azar”.*

2.5.4. Puntuaciones parciales y globales

Una vez analizadas las respuestas individuales en los ítems, hemos hallado la puntuación obtenida por los niños en los diferentes apartados del test de Green (puntuación combinatoria, verbal y probabilística), que nos indican el rendimiento de los alumnos en cada uno de estos componentes. Asimismo hemos obtenido la puntuación total en la prueba y el nivel de razonamiento probabilístico, usando los criterios que Green define para situar al niño en uno de los niveles 0 a 3, según los estadios de desarrollo descritos en Piaget e Inhelder (1951).

En la Tabla 2.5.4 presentamos los resultados de las puntuaciones globales en cada uno de los componentes del Test de Green en los diferentes cursos escolares, así como en la muestra completa, junto con sus errores de muestreo. Hemos aplicado a cada uno de estos componentes un análisis de varianza de una vía, considerando el curso escolar como factor para estudiar las posibles diferencias significativas de estos componentes con la mayor maduración de los alumnos. Presentamos en esta tabla los valores F, así como sus niveles de significación. Aunque también hemos analizado la variable sexo, en general no existen grandes diferencias respecto a ella en la puntuación media de nuestra encuesta, por lo que no hemos incluido las tablas correspondientes.

Observamos como, en todos los casos, las diferencias obtenidas de las puntuaciones en los diversos cursos son estadísticamente significativas, e incluso muy significativas, excepto en el caso de la puntuación verbal. Sin embargo, hay una nota destacable en nuestra tabla cuando estudiamos la puntuación media respecto a la edad: Al pasar de 6º a 7º la puntuación media aumenta con la edad, mientras que en el paso de 7º a 8º podemos observar un descenso en ambos sexos. (Contrariamente a los resultados de Green, que observa un aumento de la puntuación con la edad, a lo largo de todos los cursos. (Ver tabla 2.5.5).

Tabla 2.5.4. Resultados del análisis de varianza de los distintos componentes del Test de Green según la edad de los alumnos, en la muestra española

Puntuaciones medias (y error de muestreo)					
	6º Curso	7º Curso	8º Curso	Total	F(Valor p)
Verbal	8.33 (.33)	9.31 (.30)	9.44 (.31)	8.99 (.18)	3.865 (.0223)
Combinatoria	2.12 (.15)	2.93 (.16)	2.8 (.17)	2.6 (.09)	7.703 (.0006)
Probabilística	13.16 (.34)	14.92 (.40)	14.51 (.44)	14.16 (.23)	5.834 (.0033)
Total	23.62 (.60)	27.2 (.71)	26.8 (.73)	25.8 (.39)	8.622 (.0002)
Nivel Probabilístico	1.4 (.08)	1.84 (.09)	1.81 (.1)	1.66 (.05)	7.99 (.0004)

Este fenómeno podría ser un efecto del propio curriculum escolar, que incluía, en 7º, un tema sobre estadística, mientras que en 8º los programas vuelven a ignorar este campo. (Hay que tener en cuenta que en la fecha en que se aplicaron los cuestionarios -principios del mes de Junio-, los alumnos de 7º habían visto este tema recientemente).

En la Tabla 2.5.5 presentamos también los resultados de Green en estas mismas. puntuaciones, a efectos comparativos. Podemos observar que, tanto en 6º como en 7º de E.G.B., nuestros escolares obtienen una puntuación significativamente más alta, mientras que en 8º, aunque la puntuación sigue siendo mayor, la diferencia ya no es significativa. También destacamos que estas diferencias no son homogéneas en los diferentes componentes, ya que la puntuación combinatoria es similar o inferior a la obtenida por Green.

Tabla 2.5.5. Puntuaciones en los distintos componentes obtenidos por Green, según la edad de los alumnos

Puntuaciones medias			
Puntuación	1º Curso	2º Curso	3º Curso
Verbal	7.1	8	8.85
Combinatoria	2.2	2.45	3.1
Probabilística	10.35	11.3	13.2
Total	19.7	21.8	25
Nivel Probabilístico	1.14	1.33	1.7

2.5.5. Conclusiones

En esta sección hemos realizado un estudio comparado de la dificultad que los alumnos de nuestra muestra han manifestado al responder a los distintos ítems del test de Green, respecto a la obtenida por dicho autor, analizando también la diferencia entre los diversos cursos escolares. Las conclusiones generales que podemos obtener de esta sección son las siguientes:

En general, los niños manifiestan intuiciones correctas respecto a las ideas estocásticas fundamentales, lo que se ha puesto de manifiesto por los altos porcentajes de respuestas correctas en bastante ítems. Se aprecia, no obstante, una gran variabilidad en la dificultad de los ítems. Mientras que algunos han sido resueltos por más del 70% de los alumnos, otros sólo han resultado asequibles tan solo a una minoría. Como ejemplo de ítems difíciles citamos el ítem 8, 11, 20a y b, 23, 24, 25, 26c y d y entre los más sencillos destacamos el 1, 2, 3a, 3b, 4, 5, 6a, 6b y 6c.

Aunque los porcentajes de respuestas correctas superan, en general, a los de Green, la dificultad relativa de los ítems se conserva en ambas muestras.

Los alumnos manifiestan una gran dificultad en el uso del razonamiento combinatorio, que en este caso se mantiene a niveles semejantes a la muestra de Green. Esto confirma también la dificultad encontrada en otras investigaciones sobre razonamiento combinatorio, como Fischbein y Gazit (1988), Navarro-Pelayo (1994) y Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997).

Los alumnos comprenden y aplican adecuadamente el lenguaje probablístico, salvo raras excepciones. El concepto de suceso imposible ha resultado más difícil en nuestra muestra que en la de Green, mientras que no parece existir tal dificultad con la idea de probable.

Mientras que los alumnos consiguen una proporción aceptable de éxito en los problemas de comparación de probabilidades entre dos urnas (6a a 6e), las estrategias y razonamientos utilizados no siempre son adecuadas, y en muy pocas ocasiones se utiliza el razonamiento proporcional, como se aprecia en el bajo éxito de las estrategias (6ar a 6er). Asimismo se observa un mayor número de estrategias basadas en el razonamiento proporcional en los problemas de nivel avanzado. Esto es debido, sin duda, a que no pueden resolverse con éxito utilizando una estrategia de nivel inferior. Esto nos hace pensar que, para muchos alumnos, la posesión del razonamiento proporcional no implica el uso de una estrategia basada en él. Ésta va a depender, en muchos casos, de la demanda y dificultad de la tarea. Estos resultados han suscitado nuestro interés por estudiar con más detalle las estrategias de los alumnos en este tipo de problema en una nueva muestra de alumnos, eligiendo los tipos de problema adecuadamente y haciendo uso de la técnica de entrevistas clínicas para caracterizar mejor los razonamientos de los alumnos.

2.6. RESULTADOS OBTENIDOS CON EL CUESTIONARIO DE FISCHBEIN Y GAZIT

En este apartado exponemos y comentamos los resultados obtenidos al aplicar el cuestionario de Fischbein y Gazit (1984) a la muestra de niños de Jaén. En este caso, el instrumento fué administrado a los 320 niños de edades entre 10 y 14 años. Una vez obtenidos los datos, al tratarse de respuestas abiertas, éstas hubieron de ser categorizadas. Debido a que este cuestionario es más breve, y puesto que en la segunda parte de la investigación usamos estos ítems para construir un nuevo instrumento, presentaremos los resultados detallados por ítem, comparándolos con los que obtienen sus autores en Israel, para luego tratar de obtener algunas conclusiones generales que nos permitirán definir nuestras líneas de actuación. El cuestionario completo, tal como se presentó a los alumnos, se adjunta en el anexo 2.

En cada tabla aparecen los resultados desglosados por curso (5º, 6º, 7º y 8º) y tipo de respuesta. Para cada curso aparecen tres columnas. La primera de ellas corresponde a los resultados obtenidos en Jaén (Esp.), y las otras dos a los obtenidos en Israel, tanto en el grupo experimental, que había recibido instrucción previa (E), como en el de control (C). Este último grupo será el que más nos va a interesar para nuestra comparación, ya que los alumnos españoles tampoco habían recibido instrucción en probabilidad en el momento de la aplicación del test, aunque sí hemos de decir que en 7º se impartió un tema de iniciación a la estadística descriptiva. También hemos de mencionar que, aunque Fischbein y Gazit no aplicaron su cuestionario en ninguna clase de 8º, nosotros si que lo hicimos. Por eso la columna correspondiente a este curso solo contiene los datos españoles. La respuesta correcta se ha señalado en cada caso con un asterisco.

En el ítem 1 (suceso seguro; capacidad combinatoria) obtenemos, al igual que Fischbein y Gazit, que el porcentaje de alumnos que responden "8" aumenta con la edad (ver tabla 2.6.1), aunque, mientras que en 5º responden mejor los alumnos españoles, los resultados de Israel experimentan un mayor incremento en 7º. Esto podría explicarse por la dispersión de respuestas que ha supuesto la manifestación, en nuestro caso, de una nueva categoría de respuesta que Fischbein y Gazit no contemplan, y sin embargo a nosotros se nos presenta como la respuesta mayoritaria: es la estrategia de extraer todas las bolas de la caja. No podemos considerar esta respuesta como incorrecta, tal como se plantea la cuestión, aunque sí manifiesta una estrategia diferente que pudiera ser el resultado de economizar esfuerzos de cálculo, o de asociar el suceso seguro con la totalidad de experimentos posibles. En cualquier caso, los alumnos que emplean esta estrategia, fundamentalmente en 5º, no ponen en juego la capacidad combinatoria, aunque sí manifiestan una correcta intuición de la noción de suceso seguro. Otro grupo importante de alumnos, relacionando el suceso seguro con el espacio muestral, responden incorrectamente "tres bolas". Tanto éstos, como el resto de los alumnos que responden incorrectamente, parecen mostrar cierta confusión entre las nociones de *seguro* y *probable.*

Tabla 2.6.1. Resultados comparados en el ítem 1 de Fischbein y Gazit (porcentajes)

RESPUESTAS	5º			6º			7º			8º
	Esp.	Israel		Esp.	Israel		Esp.	Israel		Esp.
		C	E		C	E		C	E	
Correctas										
8	13.0	2.0	14.1	24.2	21.8	31.5	24.1	45.5	53.8	26.0
9	40.6			23.1			26.4			30.1
Incorrectas										
3	10.1	26.5	23.9	4.4	23.8	23.2	16.1	18.2	11.5	9.6
6	14.5	22.4	12.7	22.0	13.9	11.3	19.5	25.5	19.2	17.8
2 ó 1	1.4	34.7	32.1	4.4	7.9	9.6	1.1	5.4	5.8	1.4
7	1.4	0.0	1.4	1.1	1.5	3.6	4.6	1.8	5.8	4.1
4 ó 5	10.1			14.3			5.7			9.6
Total incorrectas	37.5	83.6	70.4	46.2	47.1	47.7	47.0	50.9	43.3	42.5
No contesta	8.7	14.4	11.5	6.6	31.1	20.8	2.3	3.6	2.9	1.4

En el ítem 2 (creencias previas socioculturales; control de la aleatoriedad), la mayoría de los alumnos, en todos los cursos, responden correctamente, pudiéndose observar una mejoría con la edad, aunque en el paso de 6º a 7º encontramos un leve descenso (ver tabla 2.6.2). Fischbein también señala este efecto, pero en sus resultados se produce en el paso de 5º a 6º, y es mucho más acusado. En general podríamos pensar que los alumnos, en su mayoría, superan la influencia de esta superstición, aunque resultaría interesante descubrir por qué aún queda casi un 15% de media que todavía persiste en esta idea.

Tabla 2.6.2. Resultados comparados en el ítem 2 de Fischbein y Gazit (porcentajes)

RESPUESTAS	5º			6º			7º			8º
	Esp.	Israel		Esp.	Israel		Esp.	Israel		Esp.
		C	E		C	E		C	E	
No (*)	73.9	81.4	60.0	84.6	72.3	89.9	81.6	83.0	97.3	89.0
Si	20.3	11.8	9.0	13.2	22.8	3.6	16.1	13.8	1.9	9.6
No contesta	5.8	6.8	31.0	2.2	4.9	6.5	2.3	3.2	0.8	1.4

El ítem 3 (independencia de ensayos, heurística de representatividad) fué diseñado con la idea de evaluar la influencia de la popular creencia en un número afortunado o número con suerte, pero los resultados muestran un cierto peso en la creencia contraria (ver tabla 2.6.3), es decir, en que una vez que una combinación de números ha resultado ganadora, sus posibilidades de salir premiada de nuevo se reducen o incluso se anulan. Esta es la llamada falacia del jugador o efecto de recencia negativa.

Aunque la mayoría de los alumnos opinan, correctamente, que no influye el haber ganado una vez para futuros resultados, nos ha desconcertado el descubrir que, mientras para Fischbein y Gazit las respuestas correctas aumentan con la edad, en nuestro caso ocurre absolutamente lo contrario, a excepción de un pequeño aumento en 8º, siendo los niños menores los que mejor responden. En principio, una posible explicación es que este tipo de falacias se vean potenciadas por el sistema de instrucción, aunque, al no haberse obtenido un efecto parecido en Israel, ni en el grupo experimental ni en el de control, esta hipótesis parece descartada.

Tabla 2.6.3. Resultados comparados en el ítem 3 de Fischbein y Gazit (porcentajes)

RESPUESTAS	5º			6º			7º			8º
	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.
No (*)	73.9	12.2	21.1	51.6	40.6	52.4	49.4	52.7	53.9	53.4
Si	5.8	4.1	0.0	6.6	6.9	2.4	9.2	7.3	0.0	6.8
El mismo nº no puede ganar más	7.2	63.3	47.9	15.4	46.0	29.2	12.6	29.1	21.2	9.6
Ese nº tiene ahora menos posibilidad	8.7			24.2			24.1			27.4
No contesta	4.3	20.4	31.0	2.2	6.5	16.0	4.6	10.9	24.9	2.7

Otra posible explicación es la influencia de factores socio-culturales relacionados con las loterías y los juegos de azar intrínsecos a la sociedad española, cuya tradición del juego de la lotería es muy antigua (data del siglo XVIII) y está muy extendida. Esta influencia se incrementa con la edad y de ahí el aumento de respuestas erróneas que asignan una probabilidad menor a la secuencia ganadora, estableciendo así una falsa dependencia de sucesos. En cualquier caso, pensamos que sería necesario un estudio más profundo sobre este tema, que pudiera aclarar estas diferencias encontradas en las respuestas.

En el ítem 4 (comparación de probabilidades; heurística de representatividad; contexto de loterías), los resultados obtenidos vuelven a ser algo controvertidos, ya que en la muestra de niños de Israel se encuentra que las respuestas correctas disminuyen claramente con la edad en el grupo de control, mientras aumentan ligeramente en el experimental. Fischbein y Gazit atribuyen ésto a dos posibles causas. Por un lado, puede deberse al efecto de la instrucción que mencionábamos en el ítem anterior, por el cual el desarrollo de la inteligencia con la edad, sin instrucción específica, incrementa la tendencia a establecer relaciones causales aparentemente lógicas entre sucesos, incluso aunque tales relaciones no tengan soporte objetivo (Fischbein 1975).

Tabla 2.6.4. Resultados comparados en el ítem 4 de Fischbein y Gazit (porcentajes)

RESPUESTAS	*5º*			*6º*			*7º*			*8º*
	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.
No hay relación (*)	26.1	38.8	21.2	37.4	24.2	27.4	39.1	12.8	32.7	50.7
Juana (mejor n<u>os</u> aleatorios)	52.2	34.7	28.2	36.3	52.5	44.0	40.2	41.8	42.3	34.2
Olivia (mejor n<u>os</u> en orden)	10.1			3.3			2.3			0.0
La lotería es un juego de azar (ambiguo)	8.7	10.2	5.6	19.8	10.4	16.1	14.9	40.0	25.0	15.1
No contesta	2.9	16.3	45.0	3.3	12.9	12.5	3.4	5.4	0.0	0.0

Por otra parte, según Fischbein y Gazit, en la respuesta ambigua de que la lotería es un juego de azar, tienen cabida más de una explicación, algunas de las cuales pudieran considerarse correctas. Nuestros datos, sin embargo, muestran un efecto contrario, semejante al del grupo experimental de Fischbein y Gazit: las respuestas correctas aumentan con la edad, aunque en todos los cursos, salvo en 8º, se mantienen inferiores al 50%. El distractor que tiene más fuerza, tanto para los niños y niñas españoles como para los israelíes es el que elige la combinación de números no consecutivos como más probable, mostrando sin duda la heurística de representatividad (Kaneman y cols., 1982). Las respuestas que manifiestan esta estrategia decrecen con la edad, salvo un pequeño aumento en el paso de 6º a 7º.

Podríamos decir que el peso de esta estrategia, basada en la heurística de representatividad, es muy fuerte (hay más alumnos que manifiestan este obstáculo intuitivo que los que responden correctamente) y estamos de acuerdo con Fischbein y Gazit en que la única forma de superarla sería con un adecuado programa de instrucción.

En el ítem 5 (independencia de ensayos; contextos de loterías) los procentajes de respuestas correctas aumentan con la edad, con un leve descenso entre 7º y 8º (ver tabla 2.6.5), pero de nuevo debemos destacar que es mucho mayor el porcentaje de los alumnos que se decantan por la opinión de que tras una racha de jugadas perdidas la probabilidad de ganar aumenta, estableciendo de nuevo falsas relaciones de dependencia (vuelve a aparecer el efecto de recencia negativa). Este tipo de respuesta no es tan alta en Israel, aumentando en cambio las respuestas ambiguas del tipo de que *la lotería es un juego arriesgado*. A la vista de los resultados obtenidos por Fischbein y Gazit en ambos grupos, volvemos a afianzarnos en la idea de que un buen programa de enseñanza, basado en la experimentación práctica y la simulación puede ayudar con éxito a superar este tipo de intuiciones erróneas.

Tabla 2.6.5. Resultados comparados en el ítem 5 de Fischbein y Gazit (porcentajes)

RESPUESTAS	*5º*			*6º*			*7º*			*8º*
	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.
No (*)	21.7	18.4	18.3	27.8	33.7	44.6	41.4	49.0	73.1	37.0
Si	46.4	22.4	12.7	55.6	21.3	10.7	44.8	14.5	5.8	46.6
"La lotería es arriesgada"	11.6	28.5	18.3	14.4	23.2	23.8	4.6	14.5	9.6	13.7
Indecisos	17.4	12.2	9.9	0.0	16.8	14.9	6.9	18.2	7.7	1.4
No contesta	2.9	18.5	40.8	2.2	5.0	6.0	2.3	3.8	3.8	1.4

En el ítem 6 (comparación de probabilidades simples, nivel IIB de Noelting), excepto en 5º, más de la mitad de los alumnos de cada curso responden correctamente, reconociendo la proporcionalidad en la composición de las cajas y por tanto la igualdad de probabilidades. Además, el porcentaje de respuestas correctas aumenta con la edad (ver tabla 2.6.6). Sin embargo hay que destacar la fuerte tendencia a elegir la caja con más número de bolas favorables, respuesta elegida por más de la cuarta parte de los alumnos en todos los cursos, salvo en 8º.

Tabla 2.6.6. Resultados comparados en el ítem 6 de Fischbein y Gazit (porcentajes)

RESPUESTAS	*5º*			*6º*			*7º*			*8º*
	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.
Las posib. son iguales (*)	39.1	22.4	21.1	54.9	51.5	42.9	59.3	85.5	80.8	68.1
200/100 tiene más posibilidades	36.2	20.4	32.4	26.4	20.3	36.9	27.9	9.1	15.4	18.1
100/50 tiene más posibilidades	10.1	6.1	8.5	7.7	4.0	6.5	11.6	0.0	1.9	9.7
No se puede saber	10.1	12.9	11.3	11.0	21.8	6.5	1.2	3.6	0.0	4.2
No contesta	4.3	8.2	26.3	0.0	2.4	7.2	0.0	1.8	1.9	0.0

En el ítem 7 (comparación de probabilidades simples, nivel IIB de Noelting; falsas relaciones causales), el distractor incluído en el enunciado acerca de la edad de las niñas no parece haber tenido apenas efecto en las respuestas de los sujetos, ya que una amplia mayoría, en todos los cursos, responde correctamente. Muchas de las respuestas consideradas correctas (la edad de las niñas no influye) no demuestran que el alumno haya establecido la proporcionalidad de las cajas, sino simplemente la desestimación del factor edad como posible "controlador" de un proceso aleatorio (ver tabla 2.6.7).

Vuelve a aparecer la tendencia errónea de considerar más probable la caja con más cantidad absoluta de bolas favorables, aunque esta vez con menos fuerza, porque en el ítem no se pedía estimar sobre qué caja ofrecía más probabilidades de ganar, sino sólo si la edad de las niñas era un factor decisivo. Sin embargo esta clase de respuesta no aparece en los resultados de Fischbein y Gazit.

Tabla 2.6.7. Resultados comparados en el ítem 7 de Fischbein y Gazit (porcentajes)

RESPUESTAS	*5º*			*6º*			*7º*			*8º*
	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.
No (*)	68.1	63.2	49.4	78.0	84.2	67.8	73.6	87.3	82.6	91.8
Si	7.2	10.2	14.1	3.3	9.9	22.6	3.4	3.6	9.6	0.0
Gana Pilar por tener más blancas	15.9			15.4			17.2			4.1
Gana Rosa	2.9			2.2			4.6			4.1
No contesta	5.8	26.6	6.5	1.1	5.9	9.6	1.1	9.1	7.8	0.0

En el ítem 8 (comparación de probabilidades simple, caso IIB de Noelting; juego equitativo) se hace mención explícita a la comparación de cantidades absolutas de bolas favorables. Aunque al no hablarse de reemplazamiento las posibiliades de ambas cajas podrían ir cambiando, interpretaremos este ítem tal como lo hacen Fischbein y Gazit, dejando pendiente el mejorar su redacción, y considerando como respuesta correcta la que otorga igual probabilidad a ambas cajas. Las puntuaciónes que aparece entre paréntesis en la tabla 2.6.8, referidas a la consideración explícita del concepto de razón, se encuentran incluidas en la fila anterior de respuestas correctas.

Como puede verse, el porcentaje de respuestas correctas aumenta con la edad, salvo el paso de 6º a 7º. Lo mismo ocurre con la justificación explícita utilizando el concepto de razón, que comienza siendo de la cuarta parte de los que responden correctamente, en 5º, y termina siendo de la mitad en 8º. De nuevo aparece con fuerza la estrategia de comparar solo las cantidades absolutas de bolas favorables que, de nuevo, es utilizada por más de la cuarta parte de los alumnos españoles, en todos los cursos.

Tabla 2.6.8. Resultados comparados en el ítem 8 de Fischbein y Gazit (porcentajes)

RESPUESTAS	*5º*			*6º*			*7º*			*8º*
	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.	Israel C	Israel E	Esp.
La misma probabilidad (*)	46.3	28.6	21.1	63.8	50.4	53.0	57.4	72.7	69.2	64.4
Id. utiliz. Concepto de razón (*)	(10.1)	(10.2)	(11.3)	(23.1)	(26.7)	(38.7)	(33.3)	(61.8)	(65.4)	(32.9)
30/60 tiene más posibilidad.	36.2	40.8	35.2	25.3	35.1	35.7	28.7	12.7	17.3	32.9
10/20 tiene más posibilidad.	10.1			8.8			9.2			2.7
No contesta	7.2	30.6	43.7	2.2	14.5	11.3	4.6	14.6	13.5	0.0

Conclusiones

La aplicación del cuestionario parece poner de manifiesto que los alumnos descartan, en general, la influencia de ciertas supersticiones (como la de que levantarse con el pie derecho trae buena suerte) o hechos casuales (como la edad del jugador o su inteligencia) sobre una situación aleatoria. No ocurre así con ciertas creencias subjetivas muy arraigadas, concepciones intuitivas que en muchos casos son favorecidas por el proceso de instrucción, y en otros casos forman parte del bagaje socio-cultural que da la tradición de un pueblo en que un alto porcentaje de ciudadanos hace uso frecuente de distintos tipos de juegos de azar. Estas creencias pueden constituirse en obstáculos cognitivos que impidan llegar a manejar correctamente conceptos tales como el de independencia de sucesos. Creemos, de acuerdo con Fischbein (1975), que la única manera de corregir estas estrategias erróneas es por medio de un adecuado programa de enseñanza que proporcione a los alumnos muchas posibilidades de experimentación y simulación de experimentos aleatorios, y los enfrente con la necesidad de cambiar sus propias concepciones.

Por otra parte, en los ítems referidos a toma de decisión entre dos urnas o cajas compuestas de cantidades proporcionales de bolas blancas y negras (Nivel IIB de Noelting, 1980a y b), en que es necesario utilizar el razonamiento proporcional para resolverlos con éxito, hemos encontrado que son resueltos correctamente por aproximadamente la mitad de los alumnos, aunque son muy pocos los que emplean, explicitamente, el razonamiento proporcional. Se ha podido observar una tendencia (al menos la cuarta parte de los estudiantes) a elegir la urna comparando exclusivamente las cantidades absolutas de bolas correspondientes al caso favorable. Pensamos que sería necesario un estudio más completo referido a este factor de toma de decisiones, que contemple, no solo los casos de composición proporcional de las urnas, sino también otros, y que permita estudiar el abanico de estrategias utilizadas por los alumnos para comparar las posibilidades de las urnas consideradas.

2.7. COMPARACIÓN DE LOS DOS INSTRUMENTOS

El segundo objetivo de nuestro trabajo fue analizar la estructura componencial del razonamiento probabilístico de los alumnos de nuestra muestra, lo que también llevó a la necesidad de comparar el grado de coincidencia de los dos instrumentos utilizados, en cuanto a la evaluación del razonamiento probabilístico de los alumnos. En el instrumento elaborado por Green (1982) se evalúa no sólo una intuición probabilística general, medida mediante la puntuación total en la prueba, sino también unos componentes combinatorios, verbales y probabilísticos, por lo que le concedemos una gran validez. Esta validez se ha puesto de manifiesto en el análisis del contenido de este instrumento que nos ha mostrado una amplitud de conceptos probabilísticos abarcados.

Asimismo, se asigna a los alumnos un nivel de razonamiento probabilístico, que está basado en las teorías de Piaget e Inhelder (1951) sobre desarrollo del concepto de probabilidad, desde la infancia a la adolescencia, teoría que ha sido interpretada a veces en sentido restrictivo. Sin embargo, nuestro modelo teórico considera los conocimientos matemáticos como un sistema complejo, por lo que creemos que no es posible un progreso de tipo lineal del razonamiento probabilístico en su globalidad. Este sería para nosotros un constructo compuesto de diferentes componentes cuyo desarrollo se produciría independientemente, aunque el incremento en la comprensión de unos conceptos influiría en la de otros relacionados.

Esta hipótesis puede ser puesta a prueba mediante el análisis de los resultados de estos dos instrumentos de evaluación sobre los mismos alumnos. En un supuesto de linealidad para el razonamiento probabilístico es de esperar, en consecuencia, una validez predictiva grande de las puntuaciones obtenidas mediante el test de Green sobre los resultados obtenidos en otra prueba sobre razonamiento probabilístico. En una hipótesis de complejidad sistémica cabe esperar una falta de correlación entre las puntuaciones a los dos instrumentos, por cuanto el análisis realizado del test de Fischbein y Gazit ha revelado ítems que contemplan el peso de creencias arraigadas y factores culturales, escasamente representados en el test de Green. El instrumento de Fischbein y Gazit considera, además contextos naturalistas y de loterías (no contemplados por Green) .

Con objeto de estudiar la verosimilitud de cada una de estas hipótesis, se presentan en la tabla 2.7.1 las correlaciones entre la puntuación total en el test de Fischbein y las puntuaciones totales y parciales en el test de Green. Aunque todas estas correlaciones han resultado estadísticamente significativas, observamos el tamaño moderado e incluso bajo de los coeficientes de correlación obtenidos. Ello implicaría que una puntuación total o parcial en el test de Green no tendría un valor predictivo alto sobre las respuestas esperadas en el test de Fischbein y Gazit. Puesto que el cuadrado del coeficiente de correlación nos indica la proporción de varianza de la variable dependiente explicada por la variable independiente, el coeficiente de correlación obtenido entre las dos puntuaciones ($r = 0.4393$) indica que sólo el 19.29% de la varianza de la puntuación en el test de Fischbein y Gazit sería explicada por la puntuación obtenida en el test de Green, y viceversa. Consideramos que este porcentaje es muy escaso, dado que ambos instrumentos han sido construidos con el propósito de evaluar la intuición probabilística de los alumnos de edades similares a los de nuestra muestra y sin instrucción en probabilidad.

Tabla 2.7.1. Correlaciones de las puntuaciones en el test de Fischbein y Gazit con las puntuaciones totales y parciales en el test de Green

Test de Fischbein	Test de Green				
y Gazit	NP	Prob	Comb	Verbal	Total
P. total	.3579	.3485	.3009	.3761	.4393
F1	.1848	.2262	.1733	.1641	.2441
F2	.1498	.0733	.0616	.1384	.1189
F3	.1349	.0600	.0365	.0442	.0628
F4	.1075	.0547	.0484	.0739	.0760
F5	.2554	.2681	.1786	.1751	.2741
F6	.1787	.1947	.2914	.3150	.3222
F7	.1033	.0924	.1518	.2283	.1917
F8	.1946	.2935	.1493	.2283	.3058

Observamos que los ítems F1, F5, F6 y F8 correlacionan (aunque con un valor pequeño) con el nivel probabilístico, la puntuación probabilística y la combinatoria. En el ítem F1 se aborda la identificación del suceso seguro en un contexto de extracción de bolas, donde es preciso la búsqueda de un plan sistemático de formación de configuraciones combinatorias.

El ítem F5 requiere reconocer la independencia y equiprobabilidad de sucesos en el contexto de loterías. También pueden aparecer asociados la falacia del jugador o la "recencia" negativa. El ítem F6 precisa el reconocimiento de la equiprobabilidad mediante comparación de probabilidades basadas en la comparación de razones. Hay que aplicar el razonamiento proporcional en un contexto de extracción de bolas. Finalmente, en el ítem F8 es necesario el reconocimiento de la equiprobabilidad mediante razonamiento proporcional, en un contexto de extracción repetida de bolas. También interviene el concepto de esperanza matemática.

Por otro lado, el ítem F7 correlaciona débilmente con la puntuación combinatoria y verbal. Se trata del reconocimiento del carácter imprevisible del azar. Para responder correctamente a este ítem, el alumno debe rechazar el prejuicio cultural por el que hay un efecto favorable de la inteligencia en un juego puramente aleatorio. Además, es necesario el reconocimiento de la equiprobabilidad mediante razonamiento proporcional en un contexto de extracción de bolas.

El ítem F2: sugiere el efecto de las creencias populares deterministas en situaciones aleatorias, estableciendo relaciones de causa-efecto improcedentes. Por tanto requiere la .discriminación de situaciones aleatorias y causales. Es interesante ver que este ítem sólo correlaciona (muy débilmente) con la puntuación verbal y el nivel probabilístico del test de Green.

Los ítems F3 y F4 no correlacionan significativamente con ninguna de estas puntuaciones, ni con el total de la prueba. En el ítem F3 hay que reconocer la independencia de una sucesión de experimentos aleatorios y la equiprobabilidad de sucesos en el contexto de loterías. Mide el grado de arraigo en el sujeto de la creencia popular, sin fundamento probabilístico, consistente en la conveniencia de jugar a un mismo número en las loterías. También pueden manifestarse en las respuestas de los alumnos los efecto de *recencia positiva o negativa*.

En el ítem F4 se trata de reconocer la independencia y equiprobabilidad de sucesos en el contexto de loterías; por tanto del empleo del *sesgo de representatividad.* (El sujeto con razonamiento probabilístico debe desprenderse de creencias culturales infundadas, basándose en la identificación de sucesos independientes y equiprobables). Interpretamos esta falta de correlación como indicativo de que este cuestionario valora un componente de la intuición probabilística no incluido en el test de Green o de la presencia de una variable de tarea específica.

En consecuencia, deducimos que en el test de Fischbein y Gazit existen componentes específicos del razonamiento probabilístico no incluidos en el test de Green. Por otro lado, la mayor amplitud del test de Green hace también que en éste se incluyan componentes nuevos respecto a los evaluados por el de Fischbein y Gazit.

2.8. ESTRUCTURA DEL RAZONAMIENTO PROBABILISTICO

Una vez confirmada nuestra expectativa sobre la falta de correlación de las puntuaciones entre ambos instrumentos, que se basaba en el estudio teórico de los mismos realizado en las secciones 2.2 y 2.3, el siguiente paso ha sido analizar los factores subyacentes en las respuestas a los cuestionarios.

Nuestro propósito es mostrar la existencia de uno o varios factores específicos del test de Fischbein y Gazit, es decir, que no hayan sido contemplados en el instrumento de Green, y que no coincidan con las puntuaciones parciales (combinatoria, verbal y probabilística) obtenidas por este autor. Asimismo, mostraremos que del instrumento de Green puede obtenerse una categorización más fina de los ítems, apuntando a componentes diferenciados en el razonamiento probabilístico de los alumnos, muchos de los cuales tampoco se encuentran presentes en el instrumento de Fischbein y Gazit. Ello explicaría la falta de correlación entre los dos instrumentos.

El método seguido ha sido el siguiente: se ha realizado un análisis de la estructura separada de cada cuestionario, finalizando con un análisis conjunto. En este último se estudia la estabilidad de los factores obtenidos en los dos análisis parciales. Con objeto de poner de manifiesto la estructura de estos componentes en cada uno de los análisis y su carácter multifactorial, se llevó a cabo un análisis factorial utilizando el paquete estadístico BMDP. El método de extracción de factores fue el del factor principal, tomándose como comunalidad el cuadrado del coeficiente de correlación múltiple del factor con las variables analizadas. Posteriormente se llevó a cabo una rotación ortogonal mediante el método varimax.

Adicionalmente, el análisis nos proporciona datos sobre la fiabilidad de los instrumentos en nuestra muestra, mediante el coeficiente *theta* de Carmines proporcionado por el programa BMDP, y que es válido como índice de fiabilidad en el caso de constructos no unidimensionales, como son los analizados en esta investigación.

El análisis se ha realizado sobre la muestra de 251 alumnos que completaron los dos instrumentos, lo que da un total de 31 casos por variable en el análisis del test de Fischbein, superior a lo aconsejado, que es 10 casos por variable, cuando se desea realizar un análisis factorial con fin confirmatorio (Cuadras, 1991). En nuestro caso, el tamaño de la muestra queda ligeramente por debajo de esta proporción para el análisis conjunto de los dos instrumentos (6.5 casos por variable) y para el análisis del test de Green (8.4 casos por variable), aunque en este último caso se aproxima bastante al requerido.

Por esta razón, al analizar conjuntamente los dos instrumentos, así como al analizar el test de Green, no se han considerado los ítems que proporcionan la puntuación verbal, ya que el mismo Green los considera como un factor separado en su instrumento. Se suprimieron, asimismo, los razonamientos a las distintas preguntas, lo que disminuyó en 9 el número total de variables. Comparados los resultados del análisis factorial incluyendo y sin incluir las preguntas de razonamiento se observó poco cambio en la estructura de los factores obtenidos, que, aunque en algún caso variaban de orden, contenía básicamente las mismas variables. Asimismo se observó una disminución en la fiabilidad del instrumento (que pasaba de 0.8073 a 0.7117). Por estas razones y porque nos pareció importante puntuar no sólo las respuestas de los alumnos, sino los argumentos, se decidió incluir en el análisis estas 9 variables adicionales. A continuación presentamos los resultados de estos análisis, cuyos resultados fueron publicados en Godino y cols (1994).

2.8.1. Análisis factorial de los resultados del test de Fischbein y Gazit

En primer lugar procedemos al estudio de la estructura de las respuestas de los alumnos de nuestra muestra en el test de Fischbein y Gazit (1984). En la tabla 2.8.1 se presentan los resultados (matriz factorial rotada) mostrándose dos factores diferenciados. con autovalores mayor que la unidad. Tanto en éste como en los posteriores análisis se han suprimido de la tabla las correlaciones entre factores y variables inferiores en valor absoluto a .25 debido a que aportan poca contribución a los factores.

Tabla 2.8.1. Análisis factorial del test de Fischbein

	FACTOR 1	FACTOR 2
F6	0.745	0.000
F8	0.738	0.000
F7	0.698	0.000
F2	0.000	0.678
F3	0.000	0.580
F4	0.000	0.532
F5	0.318	0.475
F1	0.316	0.000

Primer factor: Razonamiento probabilístico objetivo

En el primero de los factores (40.14% de la varianza total) contribuyen esencialmente los ítems F6, F7 y F8, referidos todos ellos a comparación de probabilidades en situación de extracción de bolas en urnas (caso proporcional). Tiene también una contribución moderada el ítem F1, referido a capacidad combinatoria y el F5, relacionado con la idea de independencia y recencia negativa. Los ítems F1, F5, F6 y F8 correlacionaban con el nivel probabilístico, la puntuación probabilística y la combinatoria en el test de Green. El ítem F7, aunque no correlacionaba con estas puntuaciones, sí lo hacía con el total de la prueba.

De este modo, este primer factor estaría representado en el test de Green y podríamos describirlo como el razonamiento probabilístico objetivo o normativo, en el cual la asignación de probabilidades se efectúa mediante razonamiento combinatorio y proporcional y en el que es muy importante la idea de independencia.

Segundo factor: Razonamiento probabilístico subjetivo

El segundo factor incluye los ítems F2, F3, F4 y F5. Todos ellos presentan situaciones en las cuales aparecen factores no aleatorios, sesgos o creencias arraigadas, que presumiblemente pueden afectar el resultado de un experimento aleatorio. Por tanto, el alumno ha de discriminar las situaciones aleatorias y puede estar influenciado por sus creencias previas, con un mecanismo similar al que Chapman y Chapman (1969) describen para el caso de la correlación, al que denominan correlación "ilusoria". Este mecanismo consiste en no tener en cuenta los datos, y guiarse por las creencias previas para efectuar decisiones o juicios probabilísticos.

Las preguntas F2, F3 y F4, que no tienen representación en el primer factor, tampoco correlacionaban con la puntuación probabilística o combinatoria en el test de Green y la F2 sólo correlacionaba con la puntuación verbal; teniendo baja correlación con el nivel probabilístico y el total de la prueba. Consideramos, en consecuencia, que este factor apunta a los elementos subjetivos tenidos en cuenta por los niños en la asignación de probabilidades y que ha sido representado escasamente en el test de Green.

Sin embargo, las investigaciones psicológicas han puesto de manifiesto la fuerte influencia del conocimiento y creencias subjetivas en la asignación de probabilidades, lo que se explica por la dualidad que, históricamente, ha tenido la idea de probabilidad, como grado de creencia (probabilidad subjetiva) y como verosimilitud objetiva (Hacking, 1975). Por ello, creemos que la inclusión de este tipo de preguntas contribuiría a aumentar la validez del test de Green, pues incorpora una variable de tarea que afecta a las respuestas del sujeto, como nuestro estudio experimental ha confirmado.

2.8.2. Análisis factorial de los resultados del test de Green

La tabla 2.8.2 muestra los factores obtenidos en la aplicación del análisis factorial al conjunto de los ítems del test de Green, excluidas las cuestiones correspondientes a la categoría "verbal". Al igual que en el caso anterior, para mejor visualización, hemos suprimido las correlaciones inferiores a 0.25.

De estos resultados, vemos que aparecen 15 factores diferenciados con autovalor mayor que la unidad y que ninguno de ellos tiene una contribución especialmente grande a la varianza total (el primer factor explica el 12.02% de la varianza y el segundo el 7.72% de la misma). En consecuencia, deducimos el carácter multidimensional de las respuestas al test y por tanto, del razonamiento empleado para responder al mismo. Ello confirma el interés de investigar con más detalle algunos de los factores implícitos en el razonamiento probabilístico, que será el objeto de la segunda parte de la investigación.

Otro punto de interés es que alguno de los factores están marcados por pocos ítems, como el factor 2 y que algunos ítems, como el G6er tienen puntuaciones moderadas en varios factores. Entre los factores que hemos podido interpretar, destacamos los siguientes:

Factor 1: (Ítems G21a, G21b) Se trata del *cálculo de una probabilidad compuesta en experimentos independientes; caso de equiprobabilidad de los sucesos*. Por tanto, requiere del alumno una asignación objetiva de probabilidades iguales a los sucesos elementales del experimento simple. Además requiere una capacidad combinatoria para reconocer los diversos sucesos elementales del experimento compuesto y aplicar a ellos el principio de indiferencia. Correlaciona débilmente con G1, que tambien se refiere a la equiprobabilidad de sucesos, y con G26d, referido a permutaciones. En ambos casos es preciso la capacidad combinatoria.

Factor 2: (Ítems G19a, G19b). Es un ítem muy específico que requiere la *comparación de áreas no equiprobables* para la asignación de probabilidades en contexto de ruletas. Por tanto, se requiere un razonamiento proporcional geométrico. El alumno no precisa razonamiento proporcional numérico. Correlaciona debilmente con el G6a, en el que el problema puede resolverse mediante la comparación de cantidades absolutas y por tanto tampoco requiere razonamiento proporcional.

Factor 3: (Ítems G6d, G6dr, G6er, G18). Todos estos items requieren el empleo del *razonamiento proporcional para comparar probabilidades simples* en contexto de urnas. Es necesario, por tanto, el empleo de fracciones en contexto numérico discreto.

Factor 4: (Ítems G3a, G3b*). Probabilidades geométricas, donde es posible aplicar la regla de Laplace*. Se trata de comparar probabilidades en contexto de ruletas divididas en áreas de igual tamaño. El alumno puede emplear dos tipos de estrategia: la comparación de áreas, mediante un razonamiento geométrico o la comparación de casos favorables y posibles, mediante un razonamiento numérico. Correlaciona débilmente con G1.

Factor 5: (Ítems G6dr, G6e, G6er*). Comparación de probabilidades simples; caso proporcional;* no se proporciona representación gráfica de la situación. Es importante hacer notar cómo el ítem G6e no ha correlacionado con los que constituyen el factor 3. Esta es una de las actividades más difíciles dentro de la comparación de probabilidades. Correlaciona débilmente con la G22 y G1 y negativamente con G6a y G24.

Factor 6: (Ítems G20a, G20b*). Percepción de la aleatoriedad de una secuencia*. Esta es una tarea muy diferente a la mayoría de las que componen el test, como puede verse en la tesis de Serrano (1996) y en Batanero y Serrano (1995, 1997). Intervienen en ella las intuiciones que el alumno tenga sobre el comportamiento de las secuencias aleatorias y no es preciso asignar probabilidades.

Factor 7: (Ítems G22, G25, G24). *Experimentos compuestos y muestreo.* Correlaciona negativamente con G4, G5 y G1. (comparación de probabilidades simples de sucesos equiprobables; independencia).

Tabla 2.8.2. Resultado del análisis factorial del test de Green

Ítem	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
G21a	.786														
G21b	.781														
G19a		.894													
G19b		.89													
G6d			.759												
G6dr			.664		.302										
G3a				.874											
G3b				.86											
G6e					.87										
G6er			.407		.652										
G20a						.876									
G20b						.873									
G6br	.264									.729					
G8	-.29							.458	-.35						
G22					.28		.352					.26		.393	
G18			.432					.452							
G6a		.308			-.28			.27							
G26d	.274													.46	
G1	.394			.253	.257		-.35								
G24					-.31		.444				-.33				
G25							.709								
G4							-.66								
G2								.664							
G6b								.653	.351						
G6c									.801						
G6cr									.743						
G6ar										.845					
G17r											.836				
G17											.835				
G26c												.725			
G26ab												.691			
G9												.26			-.50
G10										-.31		.411			-.39
G5							-.43								-.27
G11													.793		
G12													.792		
G21d														.673	
G21c														.62	
G23															.719

Factor 8: (Ítems G2, G6b, G8, G18). *Comparación de probabilidades simples de sucesos no equiprobables.* Correlaciona moderadamente con G6a, en que el alumno puede resolver un problema simplemente comparando los casos favorables. En este caso el alumno debe ver que no es posible aplicar el principio de indiferencia e identificar adecuadamente los casos favorables al suceso.

Factor 9: (Ítems G6c, G6cr). *Razonamiento proporcional para comparar probabilidades de sucesos. Caso proporcional. Representación gráfica*. Correlaciona débilmente con G6b, posiblemente porque en ambos problemas los alumnos podrían resolverlos aplicando una estrategia de correspondencia. Correlaciona negativamente, débilmente, con G8, sobre probabilidades binomiales. En el ítem G8 los alumnos han aplicado con frecuencia la heurística de la equiprobabilidad. Posiblemente, parte de estos alumnos han dado la respuesta correcta al ítem G6c, aplicando esta misma heurística.

Factor 10: (Ítems G6ar, G6br). Razonamiento que dan los alumnos para apoyar la *comparación de probabilidades simples, caso no equiprobable*, usando estrategias de una sola variable. Para resolver estos problemas sólo se precisa identificar adecuadamente el número de casos favorables y desfavorables en las dos urnas. Correlaciona negativamente, débilmente, con G10 (problema combinatorio de enumeración, en el que influye el orden de los elementos). En los problemas G6a y G6b el orden de los elementos no influye en la solución.

Factor 11: (Ítems G17, G17r*). Comparación de probabilidades, en caso equiprobable*, *donde la distribución espacial de los casos puede aparecer como un factor que influye en su probabilidad.* Correlaciona negativamente con G24 (heurística de representatividad; muestreo).

Factor 12: (Ítems G26c, G26ab). *Permutaciones.* Correlaciona débilmente con G9, G10 (ítems de razonamiento combinatorio) y G22. En G10 intervienen las variaciones con repetición; en G22 hay que interpretar un diagrama en árbol. Este factor podría interpretarse como razonamiento combinatorio.

Factor 13: (Ítems G11, G12) . *Distribución plana de Poisson*. Es también un ítem en el que intervienen las concepciones que el alumno tenga de la aleatoriedad y, en particular, de las distribuciones aleatorias de puntos en el plano (Serrano, 1996; Batanero y Serrano, 1997).

Factor 14: (Ítems G21d, G21c). *Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos, caso de experimentos dependientes*. Correlaciona débilmente con G22 (que es del mismo tipo)y G26d (permutaciones de 5 elementos; cuya solución precisa, al igual que en los anteriores, aplicar la recurrencia).

Factor 15: (Ítems G23). Caso en que sólo se puede aplicar *la probabilidad frecuencial.* Correlaciona negativamente con G9, G10 (débilmente) y G5 (débilmente). Los ítems G5 y G9 se refieren a comparación de probabilidades en caso equiprobable e independencia. El ítem G10 es de razonamiento combinatorio, el cual no se precisa para resolver el problema G23.

2.8.3. Análisis factorial conjunto

Una vez realizado el análisis separado de cada uno de los dos instrumentos, creímos conveniente realizar un análisis conjunto para estudiar la estabilidad de los factores identificados con anterioridad. Asimismo interesaba ver si los factores del test de Fischbein y Gazit estaban o no incluidos dentro de los identificados para el test de Green. La tabla 2.8.3 contiene la matriz factorial rotada y clasificada de pesos factoriales.

Al incorporar los items del test de Fischbein y Gazit, los factores identificados en el análisis del conjunto de ítems del test de Green (excluida la categoría de ítems denominados "verbales") han experimentado las siguientes transformaciones:

Factor 1: Los Factores 3 y 8 del test de Green, al que se incorporan los ítems F4 y F5 de Fischbein y Gazit se convierten ahora en el Factor 1. Se trata de la *comparación de probabilidades simples, sucesos no equiprobables o percibidos como no equiprobables; espacio muestral discreto (bolas, loterías, ...).*

Factor 2: El Factor 3 del test de Green pasa a convertirse en Factor 2 con cambios en la correlaciones débiles con otros items; *Comparación de probabilidades; contexto discreto, caso proporcional; no se proporciona ayuda gráfica.*

Factor3: El Factor 2 del test de Green pasa a ser el Factor 3 en el análisis conjunto. Se confirma la especificidad de los problemas de probabilidades geométricas; casos no equiprobables;. Interpretamos este factor como *razonamiento proporcional en contexto geométrico.*

Tabla 2.8.3. Resultados del análisis factorial conjunto

Item	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	F17	F18
G18	.64																	
G6a	.608																	
G6d	.566					.358												
G2	.555																.298	
G6e		.861																
G6er	.351	.75																
G19a			.879															
G19b			.86															
G21a				.836														
G21b				.809														
G3b					.865													
G3a					.855													
F6						.691						.297						
F8						.683												
F7						.64									-.31			-.30
F5	.253														.285			
F4	.325									.344					.259		.271	
G6b	.363							.489								.319		
G1		.297		.289	.254		.345											
G6dr	.414	.425				.377												
G26d				.326														
G4							.657											
G25							-.65									.272		
G6c								.82										
G6cr								.74										
G20a									.864									
G20b									.862									
G17r										.829								
G17										.804								
G6ar											.856							
G6br											.748							
G26ab												.664						
G26c												.611						.263
G10								.254				.566				-.276		
G9												.293			.568			
G5							.469											-.39
F2							.458								.364			
F1											.416					-.288		
G24							-.402							.294				
G12													.81					
G11													.757					
G21c														.661				
G21d														.638			.258	
F3															.714			
G22																.736		
G8																	.752	
G23																		. 795

Factor 4: El Factor 1 del test de Green se convierte en el Factor 4 del análisis conjunto, aunque

desaparece la influencia de los ítems G6b y G8; Se confirma como un factor independiente el *cálculo de la probabilidad en experimentos compuestos independientes y la comprensión del diagrama en árbol*.

Factor 5: El Factor 4 del test de Green se convierte en el Factor 5 del análisis conjunto: *Probabilidades geométricas; areas de igual tamaño que permite aplicar la regla de Laplace.*

Factor 6: Es un factor nuevo, formado, prácticamente por ítems del test de Fischbein y Gazit (F6, F7, F8, G6d, G6dr). *Comparación de probabilidades simples que precisan razonamiento proporcional* (sin representación gráfica de las cajas y mayor tamaño de muestras. Nótese que estos tres ítems del test de Fischbein y Gazit han correlacionado con uno de los ítems de proporcionalidad de Green, pero no con el otro (G6e; G6er) y que la correlación con G6d G6dr es débil. Creemos que puede ser debido a los distractores subjetivos incorporados en los ítems 7 y 8 de Fischbein y Gazit, que no están incorporados en las preguntas de comparación de probabilidades en urnas de Green.

Factor 7: El Factor 7 del test de Green que ahora incorpora los ítems F2, G5: *muestreo y su variabilidad.*

Factor 8: El Factor 9 del test de Green pasa a ser Factor 8 con cambios en las correlaciones débiles con otros ítems; *comparación de probabilidades simples; caso proporcional; no hay distractores subjetivos.*

Factor 9: El Factor 6 del test de Green pasa a convertirse en Factor 9: p*ercepción de la "aleatoriedad" de una secuencia.*

Factor 10: El Factor 11 del test de Green pasa a ser Factor 10 en el análisis conjunto; se incorpora F4 con correlación débil: *Equiprobabilidad en contexto geométrico discreto.*

Factor 11: El Factor 10 del test de Green se convierte en Factor 11 del análisis conjunto, al que se incorpora F1 con correlación más débil: *Comparación de probabilidades simples, caso no equiprobable.*

Factor 12: El Factor 12 del test de Green incorpora a F6 con correlación débil. *Razonamiento combinatorio* (permutaciones, variaciones).

Factor 13: El Factor 13 del test de Green no cambia. *Distribución de probabilidad de Poisson en el plano.*

Factor 14: El Factor 14 sigue formado, fundamentalmente, por los items G21c y G21d, aunque desaparecen los ítems con los que tenía una correlación más débil. *Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos, caso de experimentos dependientes*.

Factor 15: Es un nuevo factor, prácticamente formado por ítems de Fischbein y Gazit (F2, F3, F4, F5, G9). Creemos que este factor muestra la *influencia de las creencias infundadas sobre la estimación de probabilidades y la apreciación de la independencia*. Mantiene correlación negativa débil con F7, en el que se precisa razonamiento proporcional.

Factor 16: El ítem G22 se configura ahora como un factor específico, posiblemente por su gran dificultad, al tener los alumnos que aplicar la probabilidad en experimentos compuestos repetidos, la idea de independencia y el principio de indiferencia, e interpretar un diagrama en árbol. Correlaciona débilmente con el ítem G6b (comparación de probabilidades con igual número de casos favorables y desigual número de casos desfavorables, G4 (principio de indiferencia). Correlaciona débilmente y negativamente con F1 y G10, ambos de razonamiento combinatorio.

Factor 18: El Factor 15 del test de Green pasa a factor 18: *Probabilidad frecuencial* (lanzamiento de chinchetas); se incorpora F7 con correlación débil y negativa.

En la Tabla 2.8.4. presentamos, resumidamente, la correspondencias entre los factores hallados en el análisis del test de Green y el análisis conjunto de los dos instrumentos. Puede observarse la equivalencia de la mayor parte de los factores en ambos análisis. El estudio realizado muestra, asimismo, la complejidad del constructo "intuición probabilística primaria" y nos lleva al interés de abordar la problemática de su valoración con propósitos educativos.

Tabla 2.8.4. Esquema de las agrupaciones factoriales

Ítems de Green	Ítems de Green y Fischbein y Gazit
Factor 1	Factor 4; desaparece la influencia de G6b y G8; Probabilidad en experimentos compuestos independientes; diagrama en árbol
Factor 2	Factor 3; probabilidades geométricas; casos no equiprobables; razonamiento proporcional en contexto geométrico
Factores 3 y 8	Factor 1; se incorporan F4 y F5. Comparación de probabilidades simples, sucesos no equiprobables o percibidos como no equiprobables; espacio muestral discreto (bolas, loterías,...)
Factor 4	Factor 5; probabilidades geométricas; áreas de igual tamaño que permite aplicar la regla de Laplace.
Factor 5	Factor 2; cambios en las correlaciones débiles con otros ítems; comparación de probabilidades; contexto discreto, caso proporcional; no se proporciona ayuda gráfica
Factor 6	Factor 9; percepción de la "aleatoriedad" de una secuencia
Factor 7	Factor 7; se incluye F2, G5 (muestreo y su variabilidad)
Factor 9	Factor 8; cambios en las correlaciones débiles con otros ítems; comparación de probabilidades simples; caso proporcional; ayuda gráfica
Factor 10	Factor 11; Se incorpora F1 con correlación más débil. Comparación de probabilidades simples, caso no equiprobable
Factor 11	Factor 10; Se incorpora F4 con correlación débil. Equiprobabilidad en contexto geométrico discreto (factor específico)
Factor 12	Factor 12; se incorpora F6 con correlación débil. Razonamiento combinatorio (permutaciones, variaciones)
Factor 13	Factor 13; Distribución de probabilidad de Poisson en el plano
Factor 14	Factor 14; cálculo de probabilidades en experimentos compuestos, caso de experimentos dependientes.
Factor 15	Factor 18; probabilidad frecuencial exclusiva (lanzamiento de chinchetas); se incorpora F7 con correlación débil y negativa
	Factor 6 (F6, F7, F8, G6d); comparación de probabilidades simples que precisa razonamiento proporcional; distractores subjetivos.
	Factor 15 (F2, F3, F4, F5, G9); influencia de las creencias infundadas sobre la estimación de probabilidades y la apreciación de la independencia. Correlación negativa con F7
	Factor 16 (Item 22). Específico

Nuestro estudio experimental ha puesto de manifiesto que algunas dimensiones de estas intuiciones y las variables de tarea incluidas en el test de Fischbein y Gazit no están bien representadas en el de Green. Este es el caso de los contextos de juegos de loterías, que Green no contempla debido, posiblemente, a la ausencia de este tipo de juego en Inglaterra (en el momento en que se administró el cuestionario).

La multitud de factores incorporados en el test de Green y el escaso valor predictivo del "nivel probabilístico", y de las restantes puntuaciones de dicho test respecto al éxito en el cuestionario de Fischbein y Gazit, avalan nuestra reticencia a considerar los conocimientos probabilísticos de los sujetos como una estructura lineal, sugiriendo una revisión crítica en este sentido.

Se precisan mas investigaciones que exploren profundamente la naturaleza del razonamiento probabilístico y su estructura. Asimismo, es necesario la recopilación y análisis de bancos de ítems que constituyan una muestra representativa de los distintos "estratos" del universo de variables contextuales pertinentes, particularmente las que se refieren a la existencia de creencias o sesgos arraigados sin fundamento racional. Se debería profundizar en la evaluación de aspectos parciales y específicos del razonamiento probabilístico de los alumnos.

Coeficientes de fiabilidad obtenidos en el análisis factorial

Como hemos indicado, un resultado adicional del análisis factorial son los coeficientes de fiabilidad theta de Carmines, que extiende el coeficiente de Cronbach para el caso de un constructo no unidimensional.

Dado que, incluso en el caso del test de Fischbein y Gazit, hemos obtenido dos factores diferenciados, hemos preferido utilizar este coeficiente, que es conservador respecto al coeficiente alfa. Es decir, en todo caso lo que proporciona es una estimación a la baja de la fiabilidad.

El coeficiente obtenido en el análisis factorial conjunto de los dos instrumentos y los 251 alumnos (es decir con los alumnos que han respondido los dos cuestionarios) ha sido T=0.8242. Consideramos suficiente este coeficiente para los fines de nuestro estudio.

2.9. CONCLUSIONES SOBRE INTUICIONES PROBABILÍSTICAS PRIMARIAS Y COMPARACIÓN DE DOS INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN.

En este capítulo hemos presentado un estudio de evaluación de las intuiciones probabilísticas primarias de los niños de 10 a 14 años en nuestro entorno sociocultural, con objeto de que sean tenidas en cuenta a la hora del diseño y desarrollo de propuestas curriculares por parte de los educadores matemáticos en el campo de la probabilidad. A continuación, presentamos nuestras conclusiones, que deben ser interpretadas respecto al fin exploratorio del estudio y con la cautela que requiere el tamaño moderado de la muestra.

Nuestro estudio pone de manifiesto, en primer lugar, la existencia de un gran número de intuiciones correctas y unos resultados comparativamente mejores que los obtenidos en niños participantes en otras investigaciones. Entre las intuiciones correctas destacan la impredecibilidad de los experimentos aleatorios, comparación de probabilidades en casos sencillos, probabilidades geométricas, y probabilidad condicional. El cálculo de probabilidades en experimentos compuestos y la interpretación de diagramas en árbol ha resultado excesivamente difícil. Asimismo, los alumnos han mostrado algunos problemas con la consideración de la independencia de sucesos en ítems relacionados con loterías.

Aparecen, también, los sesgos clásicos de equiprobabilidad, representatividad, recencia positiva y negativa, así como concepciones erróneas sobre la aleatoriedad similares a las descritas por Serrano (1996). El test de Fischbein y Gazit ha mostrado la existencia de ciertas creencias, por parte de algunos alumnos, en la influencia de factores causales improcedentes en los resultados aleatorios.

Los alumnos, mayoritariamente, demostraron comprender y usar correctamente el lenguaje probabilístico, incluyendo términos como “probable”, “posible “ y “seguro”. Los términos “improbable” e imposible” son los que han resultado más difíciles a los niños.

El razonamiento combinatorio y proporcional de los alumnos se ha mostrado bastante escaso, siendo muy pocos los sujetos que resuelven el problema de permutaciones (items 26c y 26d) que requiere una capacidad recursiva. Esto deberá ser tenido en cuenta por el profesor al diseñar las actividades adecuadas al nivel de sus alumnos y en la evaluación de sus conocimientos (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1997).

Notamos una mejora con la edad en la mayor parte de las intuiciones de los alumnos. Sin embargo, encontramos que algunos sesgos, como los que se derivan del uso de la heurística de representatividad o la incapacidad para reconocer la independencia en contextos de loterías, no mejoran, o incluso empeoran ligeramente con la edad. Tampoco hemos observado mejora en el razonamiento combinatorio, lo que indica la conveniencia de incluir este tópico en los programas de enseñanza, si queremos que los alumnos puedan progresar en su trabajo con situaciones probabilísticas (Batanero y cols., 1994a y b).

El estudio componencial, realizado mediante el análisis factorial, ha mostrado la existencia de factores independientes en ambos cuestionarios y la falta de correlación entre los mismos. Los factores detectados en el test de Fischbein y Gazit continúan diferenciados cuando se analiza junto con el de Green. En consecuencia, se confirma nuestra hipótesis de complejidad del razonamiento probabilístico de los niños y la necesidad de un estudio específico de cada uno de los factores que lo configuran. Este punto lo retomamos en la segunda fase de la parte empírica de la investigación. Más concretamente, nos centraremos en el estudio de los dos factores identificados en el test de Fischbein y Gazit, construyendo para ello un nuevo cuestionario que incorpore este instrumento, así como los ítems del test de Green que más correlacionan con el mismo.

CAPITULO 3

FACTORES SUBJETIVOS Y OBJETIVOS EN LA ASIGNACION Y COMPARACION DE PROBABILIDADES SIMPLES

3.1. INTRODUCCIÓN

Los resultados del capítulo 2 nos señalan la estructura componencial o multifactorial del razonamiento probabilístico de los alumnos de la muestra. Esta hipótesis se apoya en los resultados de los diversos análisis factoriales que hemos realizado. El análisis factorial del instrumento de Fischbein y Gazit muestra dos factores claramente diferenciados, a pesar de estar constituido por un pequeño número de ítems. Por otro lado, el análisis factorial del test de Green revela una multitud de factores que hace rechazar la hipótesis de linealidad de los niveles de razonamiento probabilístico. La estructura factorial del test desvela diferentes elementos conceptuales y variables de tarea que influyen en las respuestas de los alumnos. Ello explicaría también el hecho de que muchas de las preguntas del test de Green hubieran de ser rechazadas para la construcción, mediante el escalograma de Guttman, del nivel de razonamiento probabilístico.

Hemos hallado también una falta de correlación entre las puntuaciones totales de los dos instrumentos analizados, así como entre las puntuaciones en los ítems de Fischbein y Gazit y las puntuaciones totales y parciales al test de Green. Sin embargo, hemos mostrado también que el test de Green tiene una gran validez de contenido como instrumento de evaluación del razonamiento probabilístico, por cubrir un gran número de conceptos y niveles de dificultad. En consecuencia, nuestra hipótesis es que el test de Fischbein y Gazit contempla variables no incluidas en las cuestiones del instrumento de Green.

Finalmente, al incorporar el test de Fischbein y Gazit, el análisis factorial conjunto nos muestra que los dos factores iniciales del primer análisis factorial continuan diferenciados. Así, las preguntas F_2, F_3, F_4 y F_5 pasan a constituir un factor específico, teniendo poco peso en los otros factores. Estas son precisamente las preguntas con menos correlación con las puntuaciones totales y parciales del test de Green. Por el contrario, las cuestiones F_1, F_5, F_6, F_7 y F_8, que constituían el primero de los factores del test de Fischbein y Gazit, pasan a formar parte de alguno de los factores del análisis conjunto. Es notable que en los factores donde intervienen estos ítems del cuestionario de Fischbein y Gazit aparecen prácticamente todas las preguntas $G6_a$, $G6_{aR}$, $G6_b$, $G6_{bR}$, $G6_c$, $G6_{cR}$, $G6_d$, $G6_{dR}$, $G6_e$ y $G6_{eR}$ que pueden servir para detectar el uso del razonamiento proporcional por parte de los alumnos en la comparación de probabilidades. Además, aparecen los ítems G2 (estimación de posibilidades en espacio muestral discreto), G9 (juego equitativo; este ítem conforma el factor 15 junto con F_2, F_3, F_4 y F_5) y G18 (muestreo con reemplazamiento), donde tanto en G2 como en G18 se precisa capacidad combinatoria. Pensamos que ello apoya nuestra interpretación del primer factor de Fischbein y Gazit como capacidad combinatoria y proporcional en la comparación de probabilidades.

En este capítulo abordamos un segundo estudio experimental que tiene como objetivo clarificar la falta de correlación de algunas cuestiones del test de Fichbein y Gazit (1984) con el nivel de razonamiento proporcional de los alumnos, dado por el tipo de problemas sobre comparación de probabilidades que son capaces de resolver, siguiendo las categorías de Noelting (1980a y b). Para ello hemos administrado un nuevo cuestionario, formado por el test de Fischbein y Gazit y algunos de los ítems del test de Green, a una nueva muestra de alumnos. Posteriormente, se seleccionó una submuestra de estos alumnos para realizar un estudio por medio de entrevistas clínicas.

A continuación describimos el nuevo cuestionario y la muestra experimental. Los resultados, parte de los cuales han sido publicados en Cañizares y Batanero (1996, en prensa) y Cañizares y cols. (1996, 1997a y b), se dividen en tres apartados diferenciados:

- Las estrategias de comparación de probabilidades y su relación con el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional.
- Los elementos subjetivos que los alumnos incluyen al asignar o comparar probabilidades.
- El razonamiento combinatorio de los alumnos y su percepción de la equiprobabilidad y la esperanza matemática.

3.2. OBJETIVOS DEL ESTUDIO Y CONSTRUCCIÓN DEL NUEVO CUESTIO-NARIO

El cuestionario, que se incluye en el Anexo 4, se compuso de 16 ítems, siete de los cuales han sido tomados del cuestionario de Fichbein y Gazit (1984), siete del cuestionario de Green (1982) y dos de elaboración propia, que se han elegido con los siguientes criterios:

◊ Incluir diversos ítems de comparación de probabilidades en contexto de urnas, de modo que se encontrasen representados todos los niveles de razonamiento proporcional descritos por Noelting (1980a y b) para la comparación de fracciones. Para ello, se incluyeron dos de los tres ítems de Fischbein y Gazit sobre este tópico (F_7 y F_8, del nivel IIB), y cuatro de Green ($G6_a$ y $G6_{aR}$,de nivel IA; $G6_b$ y $G6_{bR}$ de nivel IB; $G6_c$ y $G6_{bR}$, de nivel IIA y $G6_d$ y $G6_{dR}$, de nivel IIIA). Los ítems F_6 , $G6_e$ y $G6_{eR}$ correspondían al nivel IIB, por lo que se encontraban representados y preferimos omitirlos. Por otra parte, observamos la carencia de ítems sobre el nivel IIIB, por lo que diseñamos uno. De este modo podríamos situar al alumno en uno de estos niveles en base a sus respuestas y estrategias en la comparación de fracciones en un contexto probabilístico.

◊ Incluir los restantes ítems del cuestionario de Fischbein y Gazit, puesto que pretendemos profundizar en los dos factores identificados en la primera fase del estudio experimental.

◊ Incluir también los ítems de Green que más correlacionan con los de Fischbein y Gazit, para aportar mayor información sobre los dos factores analizados.

Los objetivos específicos que nos marcamos en esta segunda fase del estudio experimental son los siguientes:

A) Analizar las estrategias que realizan los niños en la comparación de probabilidades en contexto de urnas, comparándolas con las que cabría esperar en un problema de comparación de fracciones del mismo nivel de dificultad en la categorización de Noelting (1980a y b). Ello nos permitirá estudiar el significado específico que las fracciones adquieren en un contexto probabilístico.

B) Comprobar si la dificultad de estos problemas, y las estrategias que siguen los niños para resolverlos se modifican en los ítems de Fischbein y Gazit que contienen distractores de tipo subjetivo. Es decir, analizar si los alumnos aplican en estas situaciones el principio de indiferencia o, por el contrario, asignan probabilidades siguiendo criterios subjetivos.

C) Analizar el patrón de respuestas de cada alumno en el conjunto de ítems de comparación de probabilidades, para ver si puede determinarse una jerarquía de tipo lineal en la dificultad de las tareas.

D) Identificar las creencias de tipo subjetivo que intervienen en la asignación de probabilidades por parte de los niños, mostrándose como factores de influencia en los significados personales sobre la probabilidad que manifiestan los alumnos.

E) Seleccionar una submuestra de niños que represente la diversidad de respuestas obtenidas en este cuestionario, para llevar a cabo entrevistas individuales, con objeto de describir con mayor profundidad sus tipos de razonamiento.

A continuación analizamos los ítems incluídos en el nuevo cuestionario, que será utilizado, tanto para ser cumplimentado por escrito en la muestra total, como para realizar las entrevistas a un grupo reducido de alumnos. El enfoque de esta segunda parte de la investigación es predominantemente cualitativo y exploratorio, por lo que no utilizaremos contrastes estadísticos de hipótesis, sino métodos estadísticos descriptivos y análisis de tipo cualitativo de los datos.

ITEM 1: En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y dos blancas. ¿Cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Ha sido tomado del test de Fichbein y Gazit (1984). Se incluye en el cuestionario para profundizar en el significado personal que manifiestan los alumnos sobre la noción de suceso seguro y comprobar si se manifiesta sistemáticamente la tendencia a intercambiar el espacio muestral implícito en el experimento ({r, v, b}) con el conjunto total de bolas ({r,r,r,r,v,v,v,b,b}). También se observará si el alumno muestra confusión entre los conceptos de seguro y posible. Asimismo, se evalúa si el alumno pone en juego la capacidad combinatoria para establecer mentalmente todas las posibilidades en el experimento.

En este ítem, esperamos que un alto porcentaje de alumnos respondan que es suficiente con sacar 3 bolas, o que sacando todas las bolas tendremos el problema resuelto. Creemos que a partir de las entrevistas podremos descubrir que los alumnos que emplean esta última estrategia, que Fischbein y Gazit no describen en su artículo, lo hacen porque, al trabajar a un nivel muy concreto, representándose las posibilidades de ocurrencia cuando se extraen 3 bolas, repitiendo el proceso representándose las posibilidades cuando se extraen 4 bolas, y así sucesivamente, les resulta una sucesión de cálculos tediosos y difíciles de llevar a cabo mentalmente. Así, estos alumnos no llegan a conseguir la generalización que les permita dar la respuesta referida a la mínima cantidad de bolas necesarias, simplificando en exceso la cuestión, y dando respuestas como "3 bolas" *("porque es posible que suceda sacando tan sólo 3 bolas",* lo que implica una confusión entre las ideas de "posible" y "seguro") y "9 bolas" ("*sacando todas las bolas me ahorro el trabajo de calcular, y consigo el mismo propósito*). Nos gustaría detectar si estas respuestas pueden estar causadas por una mala interpretación del enunciado, sobre todo en los niños y niñas más pequeños, o por una concepción errónea de la idea de suceso seguro, o por falta de capacidad combinatoria.

ITEM 2: José procura entrar a clase cada día poniendo primero el pié derecho. Cree que ésto aumenta su suerte de obtener buena nota. ¿Cuál es tu opinión?

ITEM 3: Marta tiene una cita con el chico que le gusta para el día 13 de este mes. Ella está muy preocupada y va a intentar cambiar la cita de día, ya que dice que siendo día 13 todo va a salir mal, porque este número trae muy mala suerte. ¿Tú que opinas?

El ítem 2 está tomado del test de Fischbein y Gazit (1984) y el 3 ha sido construído por nosotros, tomando una creencia popular muy extendida en nuestro entorno socio-cultural (como se muestra en el conocido refrán "*en trece y martes ni te cases ni te embarques").* Aunque se desconoce el origen cierto de estas supersticiones, el antropólogo del Centro Superior de Investigaciones Científicas Manuel Mandianes, según expone Charo Canal (1996) en un artículo sobre supersticiones aparecido en la revista el Pais Semanal, afirma que el origen de la popular creencia de que levantarse con el pié derecho o comenzar una actividad con dicho pié trae buena suerte, proviene de la mitología celta, que identifica el movimiento del sol con la derecha, por tanto con el día y con el bien, y la izquierda con la noche, con la oscuridad y con el mal. En cuanto a la mala influencia del número 13, su origen podría encontrarse en la narración de la Última Cena (Evangelio de San Juan, 6, 70), en la que estaban reunidos Jesús y sus 12 apóstoles. Uno de ellos era Judas Iscariote, quien más tarde le traicionó. El antropólogo Manuel Mandianes apunta otra interpretación, relacionándolo con la Triada, símbolo de la perfección absoluta, resumen de lo masculino y lo femenino. Cuando asumes una perfección que no te corresponde atraes el caos. De ahí el rechazo al número 13. En cuanto al carácter de fecha fatídica que en España tiene el martes, sobre todo si cae en trece, según el diccionario de las supersticiones de Margarita Candón y Elena

Bonet, citado por Charo Canal en su artículo, tiene su origen en la terrible derrota que sufrió, un martes, en Játiva, Jaime I el Conquistador. Además, el martes está asociado al dios de la guerra, y la guerra significa muerte. Así, según creencias populares, en martes no es aconsejable casarse, embarcarse, cambiarse de casa o cortarse el pelo y las uñas.

Con estos dos ítems tratamos de evaluar supersticiones sobre circunstancias que afectan positiva o negativamente (casos del ítem 2 y 3 respectivamente) a las situaciones aleatorias y cuya influencia en las creencias de los niños ha sido también descrita en la investigación de Amir y Williams (1994).

Nos proponemos descubrir cual es la interpretación del alumno de la palabra "suerte" en este contexto, explorar las creencias subjetivas que manifiesta el sujeto en torno a los sucesos aleatorios, y en qué las basa. y determinar la consistencia de estas creencias al aplicarlas a distintas situaciones.

De los resultados del cuestionario de Fischbein y Gazit en la primera muestra, descritos en el capítulo 2, hemos detectado que algunos alumnos manifiestan ciertas creencias subjetivas de origen sociocultural que afectan su concepción del azar, pudiendo influir positiva o negativamente en sus predicciones sobre sucesos posibles. Estas supersticiones o creencias arraigadas no tienen base objetiva, pero se manifiestan en sujetos de todas las edades. En nuestra opinión, constituyen un intento, por parte del sujeto, de introducir un elemento determinista que les permita dirigir o controlar mejor sus predicciones. Nos gustaría explorar cuales de estos tópicos o supersticiones están más extendidos y si sólo son aplicados por los sujetos en determinadas situaciones de su universo aleatorio, o se manifiestan en todas las ocasiones, incluyendo experimentos aleatorios clásicos de sucesos equiprobables.

ITEM 4: Lola rellenó en cierta ocasión un impreso de lotería con los siguientes números: 1, 7, 13, 21, 22, 36; y ganó. Como consecuencia, piensa que debe jugar siempre al mismo grupo de números, porque de este modo ganará. ¿Cuál es tu opinión sobre ésto?

ITEM 5: Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana?

ITEM 6: Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "la lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces, y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima". ¿Cuál es tu opinión sobre la explicación de Pedro?

Estas tres cuestiones han sido tomadas del test de Fichbein y Gazit (1984), y exploran la utilización de sesgos y heurísticas erróneas en los sujetos, todas ellas relacionadas con la idea de independencia, cuya aplicación, como se ha indicado, ofrece dificultades a los alumnos (Heitele, 1970; Truran y Truran, 1997). Se trata de profundizar en los argumentos que aportan los sujetos que manifiestan sesgos tendentes a la representatividad o a la disponibilidad, y establecer si existe alguna relación entre las experiencias previas de los alumnos relativas a juegos de azar y la manifestación de estos sesgos.

Los sesgos que tratan de detectar estos tres ítems están definidos y catalogados en la literatura por Kahneman, Slovic y Tversky (1982), quienes encuentran que se presentan con mucha frecuencia, incluso en personas adultas y con alto nivel cultural. Nuestro propósito es estudiar los argumentos esgrimidos por los alumnos que manifiestan estos sesgos, para determinar su origen. Ante esto, esperamos detectar, como primera posibilidad, una categoría de alumnos que demuestren una confianza no objetiva e inexplicable en la existencia de números afortunados, con más probabilidades de ganar. Además, habremos de considerar a aquellos sujetos que manifiesten una idea intuitiva de la relación, mal establecida, entre el carácter imprevisible de un experimento aleatorio y la posibilidad de obtener, en dicho experimento aleatorio, un grupo de números que no representan una secuencia aleatoria. Por último, otros alumnos podrían intentar explicar sus respuestas aplicando argumentos de tipo determinista, como conocimientos anteriores sobre la teoría de probabilidades que funcionan en otros dominios de problemas, pero en este caso están mal aplicados, por lo que se podrían constituir en obstáculos cognitivos. Así, por ejemplo, podríamos encontrarnos con alumnos que justifiquen una respuesta basada en el sesgo de recencia negativa, argumentando que la equiprobabilidad de los sucesos implica un equilibrio, a largo y a corto plazo, en la ocurrencia de tales sucesos; afirmación que podría tener su origen en la asignación de probabilidades de tipo frecuencial.

Estamos de acuerdo con Fischbein cuando afirma que este tipo de sesgos está más arraigado en los niños mayores, por lo que podría decirse que se afianzan con la edad y el proceso de enseñanza. Pensamos también que la experiencia, necesariamente limitada, de los alumnos en juegos de azar tipo loterías puede influir negativamente en el intento de superación de estos sesgos, así como la difusión en prensa de noticias puntuales relacionadas con personas y números ganadores múltiples veces en la lotería, que son un caldo de cultivo ideal para extender el sesgo de la disponibilidad.

ITEM 7: Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre ésto?

ITEM 8: Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca, ninguno gana y la partida tiene que continuar. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre ésto?

Estos dos ítems han sido tomados del test de Fischbein y Gazit y se refieren a la elección entre dos cajas, cuyas composiciones de bolas blancas y negras son proporcionales, de aquella que ofrezca una mayor probabilidad a un cierto color. Se trata del caso proporcional que corresponde al nivel de desarrollo IIB en la teoría de Piaget e Inhelder (1951) y Noelting (1980a y b). Puesto que se incorporan distractores de tipo subjetivo, estos ítems sirven también para detectar el establecimiento de falsas relaciones causales por parte de los alumnos.

El objetivo es identificar distintos tipos de estrategias utilizadas por los alumnos en problemas de elección entre dos cajas que contienen bolas de dos colores, con composición proporcional, y profundizar en las variables que influyen en la elección de un tipo de estrategia u otro. Se desea explorar la influencia de la variable edad sobre la estrategia utilizada por los alumnos.

Un estudio previo de Noelting (1980a y b) sobre utilización de estrategias de comparación de fracciones, que ha sido posteriomente usado por Pérez Echeverría (1990) en los problemas de elección de urnas por parte de alumnos entre 14 y 19 años, en situaciones parecidas, dio lugar a la clasificación de estrategias que exponemos en la tabla 3.2.1, de la página 102.

En nuestro caso, tanto en el ítem 7 como en el 8, nos situamos ante tareas de nivel de dificultad IIB, caracterizadas por la composición proporcional de las cajas y por la existencia de relaciones de proporcionalidad internas (de razón entera), bien entre los casos favorables y desfavorables de cada urna, (caso del ítem 7 y del 8), o bien entre casos favorables de ambas urnas, y entre casos desfavorables de ambas urnas (como ocurre en el ítem 8). Las estrategias esperadas a estas cuestiones son muy variadas. Desde la respuesta, que podríamos clasificar como claramente determinista, en que el sujeto responda que la niña mayor o la más inteligente tiene más probabilidades (caso del ítem 7), hasta estrategias que utilicen un razonamiento proporcional correcto, incluso aunque no se requiera la regla de Laplace.

Entre ellas encontraremos estrategias de tipo aditivo, típicas, según Piaget e Inhelder (1951) del período preoperacional, en las que el sujeto realiza su elección comparando los datos de forma aditiva (sumando o restando datos), lo que les llevaría a una respuesta falsa, y estrategias denominadas por Pérez Echeverría (1990) como de correspondencia del tipo 1 (una repuesta típica de este caso al ítem 7 sería"las dos cajas tienen la misma probabilidad, ya que en ambas hay dos bolas blancas por cada bola negra"). Aunque estas estrategias, en las que indudablemente se atisba un razonamiento proporcional básico, son válidas para este tipo de tareas, no resultarán suficientes para problemas de nivel 4 (ítem 16), en que las cajas no sean equivalentes, y la única comparación posible sea una comparación de fracciones. Pérez Echeverría (1990), siguiendo a Piaget e Inhelder (1951), considera que se está utilizando la noción de proporción sólo cuando la relación establecida es del tipo parte-todo, no considerando las correspondencias tipo 1 como razonamiento proporcional propiamente dicho.

En otras investigaciones (Maury, 1984) se ha puesto también de manifiesto la influencia del contexto en la elaboración de la estrategia de elección por parte de los alumnos, no resultando equivalentes contextos discretos, como las bolas en una caja, y contextos continuos, como una ruleta coloreada; siendo éstos últimos los que más favorecen la utilización de la regla de Laplace, por sugerir mejor la comparación parte-todo que los contextos con bolas, que invitan al sujeto a establecer relaciones de tipo parte-parte. Este es el motivo que nos ha llevado a incluir en las entrevistas clínicas varias cuestiones similares a las de elección de urnas, pero en contextos de ruletas (ver sección 4.2), con el fin de comprobar la estabilidad de los argumentos de elección de los alumnos entrevistados en los dos contextos.

Por otro lado, nos interesa establecer cómo interpreta el alumno el concepto de "juego justo", contrastando la idea del ítem 8 (equiprobabilidad de ganar ambos jugadores) con la que subyace en el ítem 9 (equiprobabilidad en la ganancia esperada por ambos jugadores).

ITEM 9: María y Esteban juegan a los dados. María gana 1 peseta si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1 Esteban gana una cierta cantidad de dinero. ¿Cuánto debe ganar Esteban cuando le sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo?

RESPUESTA _________ pts.

¿Por qué? ....

Este ítem evalúa las intuiciones que manifiestan los alumnos sobre lo que sería un juego equitativo, y ha sido tomado del cuestionario de Green (1982) por correlacionar con los ítems de Fischbein y Gazit que conformaban el factor 15 (F_2, F_3, F_4 y F_5). Con esta cuestión queremos también determinar si el alumno tiene en cuenta la equiprobabilidad de los sucesos simples o sólo el recuento total de casos y establecer si hay asignación de probabilidades o simplemente una comparación al resolver el problema.

El concepto de juego equitativo, como expusimos en los comentarios a los ítems 7 y 8, puede apoyarse sobre la idea de que los jugadores tengan la misma probabilidad de ganar, o, si uno de ellos lleva ventaja, las ganancias deberán ser inversamente proporcionales a la esperanza de ganar de cada jugador. En este ítem, el alumno puede aplicar esta segunda regla y asignar la ganancia 5 a Esteban, o hacer caso omiso del desequilibrio de probabilidades y responder que ambos jugadores deberán ganar lo mismo. Esto, pensamos, sería una generalización inadecuada del caso anterior. Si el alumno responde adecuadamente, lo que más nos interesará es averiguar si aplica la regla conscientemente, utilizando el razonamiento proporcional, y teniendo en cuenta las probabilidades de los sucesos simples y compuestos implicados, o responde por intuición, sin necesidad de este análisis. Una opción intermedia sería dar la respuesta correcta por correspondencia entre casos favorables y desfavorables ("por cada vez que gane Esteban, María ganará unas cinco veces"). Sin duda alguna, en este caso también encontramos razonamiento proporcional, aunque no en el sentido propiamente dicho como relación parte-todo (Pérez Echeverría, 1990).

ITEM 10: Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña.................................. ___
(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño.................................. ___
(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña .... ___
(D) No lo sé.. ___

Ha sido tomado de Green (ítem G2 en dicho cuestionario) por correlacionar con los ítems F_4 y F_5 de Fischbein y Gazit. Se trata de una comparación de probabilidades en el caso de sucesos no equiprobables. Trataremos de profundizar en la estrategia utilizada por el alumno al hacer la comparación y detectar el sesgo de la equiprobabilidad, descrito por Lecoutre (1992), Lecoutre y Durand (1988) y Lecoutre y Cordier (1990).

En este ítem, en que la composición de la urna es conocida, y los sucesos simples "salir nombre de niño" y "salir nombre de niña" no son, claramente, equiprobables, esperamos, sin embargo, encontrarnos con alumnos que aplican la equiprobabilidad a los sucesos, ignorando los datos del problema que nos informan en otro sentido (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) o, como indica Lecoutre (1992), por artibuir un significado al azar como un proceso en el que "lo mismo puede ocurrir una cosa que otra", siendo, pues, los sucesos equiprobables por naturaleza. Una simple comparación de magnitudes absolutas, sin necesidad de cuantificar probabilidades, ni razonar proporcionalmente, nos indicaría la respuesta correcta. Sin embargo, nos interesa establecer cuál es la estrategia elegida por el alumno.

ITEM 11: En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad ___
(B) El azul tiene mayor probabilidad ___
(C) El verde tiene mayor probabilidad ___
(D) Todos los colores tienen la misma probabilidad ___
(E) No lo sé ___

¿Por qué?...

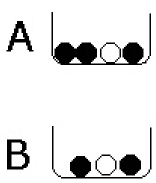
Éste es un ítem de comparación de probabilidades en el caso de extracciones sin reemplazamiento, tomado de Green (ítem G18) por correlacionar con los ítems F_4 y F_5. Se quiere determinar si el alumno diferencia entre los casos de extracción con reemplazamiento de los de extracción sin reemplazamiento y detectar el sesgo de equiprobabilidad, y su consistencia en diferentes contextos, así como identificar la estrategia de elección utilizada.

En este caso la composición de la urna también es conocida, pero, en lugar de dos sucesos simples, tendremos tres, cuyas probabilidades variarán después de cada extracción. Pretendemos comprobar si el alumno es consciente de esta variabilidad de las probabilidades, y tiene en cuenta todos los datos del problema al hacer su elección, o sólo contempla la composición de partida. De nuevo se nos puede presentar el sesgo de la equiprobabilidad, esta vez en un contexto diferente (bolas de tres colores), por lo que resulta interesante comprobar si el alumno que lo manifestó en el ítem anterior persiste en este caso.

Otra vez es suficiente comparar magnitudes absolutas para dar una respuesta adecuada, siempre que se tengan en cuenta los cambios de composición, pero nos sigue interesando identificar con claridad la estrategia utilizada.

ITEM 12: En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo)
Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál elegirías para hacer la extracción?. Señala la respuesta correcta:

(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ___
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ___
(C) Las dos cajas dan la misma posibilidad ___
(D) No lo se ___



¿Por qué? ....

Este ítem, así como los 13, 14, 15 y 16, se refiere a la elección entre urnas con diferente composición de bolas blancas y negras, y han sido tomados, a excepción del ítem 16, de Green (ítems $G6_a$ hasta $G6_d$). Todos ellos correlacionan con alguno o varios de los ítems F_1, F_6, F_7, F_8, F_5 y F_4. El ítem 16 fue diseñado para cubrir el nivel de dificultad IIIB de Noelting (1980a y b), que no aparecía representado en ninguno de los instrumentos anteriores. Se trata de identificar estrategias de elección de urnas en casos de diferente nivel de dificultad y buscar relaciones entre el nivel de dificultad de la tarea y la estrategia utilizada por el alumno. Queremos establecer la consistencia o inconsistencia de la estrategia elegida por un mismo alumno, a lo largo de los diferentes tipos de tareas y estudiar la influencia del contexto en la elección de la estrategia.

Para Piaget e Inhelder (1951), el azar y la probabilidad como estructuras de conjunto no pueden ser comprendidas hasta la aparición del pensamiento combinatorio y el esquema de proporción, es decir, el período de las operaciones formales. Estos resultados han sido rebatidos por posteriores investigaciones. Scardamalia (1977), citado por Pérez Echeverría (1990), encontró que los niños del período de las operaciones concretas son capaces de resolver problemas combinatorios, siempre que éstos no excedan su capacidad de procesamiento de la información. Los resultados con tareas proporcionales arrojan resultados similares. Tourniaire y Pulos (1985) realizaron una revisión sobre los trabajos de proporción, encontrando que la dificultad de los problemas proporcionales está en función de la forma de presentación de la tarea y del tipo de variables implicadas. Además, Carretero, Pérez Echeverría y Pozo, (1985) y Pérez Echeverría, Carretero y Pozo (1986) encuentran también que los alumnos utilizan distintos tipos de estrategias en un mismo problema de proporción, dependiendo del contexto en el que se presente y la demanda del problema.

Estos autores establecen 4 niveles de dificultad en problemas de proporción y probabilidad. Nosotros, partiendo de esta clasificación, así como de la de Noelting (1980a y b) y del estudio hecho por Green (1982), incluimos los ítems 12, 13, 14, 15 y 16, extraídos del cuestionario de Green (1982), con una modificación en las cantidades de bolas del ítem 16, con el fin de cubrir el nivel de dificultad 4, que no se alcanzaba con ninguno de los otros. Estos cinco ítems, junto con el 7 y el 8, sacados del cuestionario de Fischbein y Gazit (1984), cubren los 4 niveles de dificultad de Pérez Echeverría, Carretero y Pozo (1986), tal y como exponemos en la tabla 3.2.1, adaptación de Carretero, Pérez Echeverría y Pozo (1985). Carretero, Pérez Echeverría y Pozo (1985) contemplan tres tipos de problemas en este nivel: Relac interna entre numeradores, relación. interna entre denominadores y la que nosotros incluimos, de relación interna entre numerador y denominador de una de las fracciones Estos niveles están diseñados en función del tipo de estrategia que se requiere para su resolución.

En la clasificación de Carretero, Pérez Echevería y Pozo (1985), los problemas de nivel 1 son aquellos que se pueden resolver con una simple comparación de magnitudes absolutas (caso en que el número de bolas favorables o desfavorables es el mismo en ambas urnas), o bien el número de bolas favorables es igual al de desfavorables. Estas estrategias, según Piaget e Inhelder (1951) corresponden al período preoperacional. También se podrían utilizar estrategias aditivas (en las que se suman o restan los datos), propias del período de las operaciones concretas. Como se muestra en la tabla 3.2.1, esta categoría incluye los problemas 12, 13 y 14.

Tabla 3.2.1. Características de los ítems de comparación de probabilidades en la clasificación de Carretero y colaboradores (1985)

Nivel de dificultad	Nº ítem	Composición de urnas (f_1/d_1 vs f_2/d_2)	Criterio de dificultad	Estrategias
1	12	3/1 vs 2/1	Cuantificación magnitudes	Aditiva 1
	13	5/2 vs 5/3	Cuantificación magnitudes	Aditiva 1
	14	2/2 vs 4/4	Clase equivalencia (1/1)	Correspondencia 1
2	7	40/20vs 30/15	Equivalencia Relación interna (num y denom)	Correspondencia 2
	8	10/20vs 30/60	Equivalencia Relación interna (num y denom) y (numeradores)	Correspondencia 2
3*	15	12/4vs 20/10	Relación interna (num y denom)	Correspondencia 3
4	16	7/5 vs 5/3	No relación	Proporción

En los problemas de nivel 2 sólo intervienen pares de urnas con composición proporcional, por lo que ambas urnas resultarán equivalentes en su probabilidad de éxito. Para darse cuenta de esta relación de proporcionalidad entre los datos, se requiere al menos una estrategia de correspondencia que establezca cuántos casos favorables hay por cada desfavorable, en cada urna; o cuántos casos favorables hay en la urna B por cada uno de la urna A, y cuántos desfavorables hay en la urna B por cada desfavorable de la urna A (ítems 7 y 8).

Los problemas de nivel 3 (ítem 15) también pueden resolverse con estrategias de correspondencias, pero en este caso las urnas no son equivalentes, y por tanto la correspondencia no es perfecta, aunque nos permite decidir sin comparar fracciones. Estas estrategias de correspondencias son utilizadas, respectivamente, por niños de un nivel concreto avanzado y formal inicial (niveles IIB y IIIA de Noelting (1980a y b)). En el nivel 4 (ítem 16) no existe relación alguna de correspondencia entre los datos, y sólo se pueden solucionar con un cálculo estricto de proporciones, esto es, mediante una estrategia multiplicativa, propia, según Piaget e Inhelder (1951) del período de operaciones formales.

Por último, en la tabla 3.2.2 clasificamos los problemas de comparación de probabilidades de nuestro cuestionario según las categorías de Noelting (1980a y b). Incluímos también la edad media en que, según este autor, se alcanza cada uno de los niveles de razonamiento proporcional. Podemos observar que los problemas propuestos abarcan los niveles IA hasta IIIB y que, salvo este último, la mayor parte de los alumnos de nuestra muestra deberían ser capaces de resolver correctamente los diferentes problemas de comparación de fracciones equivalentes a los propuestos de comparación de probabilidades.

Tabla 3.2.2. Clasificación de los ítems según los niveles descritos por Noelting(1980a y b)

Item	Fracciones (f_a,d_a) vs (f_b/d_b)	Tipo (Noelting)	Otros	Edad media
12	(3,1) vs (2,1)	IA Comparación 1º término		3.6
13	(5,2) vs (5,3)	IB; Comparación 2º término		6.4
14	(2,2) vs (4,4)	IIA; Clase equivalencia unidad		8.1
7	(40,20) vs (30.15)	IIB; Cualquier clase de equivalencia	Factores subjetivos	10.5
8	(10,20) vs (30.60)	IIB; Cualquier clase de equivalencia y dos términos proporcionales	Factores subjetivos	10.5
15	(12,4) vs (20,10)	IIIA2; términos múltiplos en las fracciones		12.2
16	(7,5) vs. (5,3)	IIIB; cualquier fracción		15.10

Por otra parte, teniendo en cuenta los resultados de diferentes investigaciones sobre problemas de comparación, tanto de fracciones como de probabilidades, sobre la importante influencia del contexto en las estrategias utilizadas por los alumnos (Singer y Resnick, 1992; Maury, 1984), decidimos completar el estudio de estrategias en la fase de entrevistas clínicas, diseñando otra serie de cuestiones de dificultad similar a las del cuestionario, pero en contextos de ruletas seccionadas, con el fin de comprobar la estabilidad de las estrategias utilizadas por los alumnos entrevistados, y la posible influencia del contexto (discreto o contínuo) en sus argumentos. Estas nuevas cuestiones se exponen en la sección.

3.3. DESCRIPCION DE LA MUESTRA

La muestra que respondió a este segundo cuestionario estuvo formada por un total de 143 niños del colegio Padres Escolapios, un centro escolar privado de la ciudad de Granada, cuyos profesores y dirección contribuyeron con su disponibilidad y colaboración al buen éxito de la toma de datos. Puesto que la finalidad de esta segunda parte del estudio es exploratoria y las intuiciones que se deseaba evaluar en los niños se habían encontrado en forma generalizada en los tres colegios que participaron en la primera fase, se consideró preferible, en esta segunda, tomar alumnos de un sólo centro. Este colegio tiene un prestigio reconocido en la ciudad por la calidad de la formación que proporciona, la preparación de su profesorado, su participación en actividades de innovación y sus instalaciones escolares. En este sentido, podemos decir que los niños representan un nivel educativo alto y una clase social media-alta, respecto a otros centros escolares de su entorno geográfico.

Los cursos participantes fueron 5º de Ed. Primaria (36 alumnos), 6º de Ed. Primaria (37 alumnos), 1º de E.S.O. (38 alumnos) y 2º de E.S.O. (32 alumnos). Las edades de los niños oscilaron entre 10 años y 14 años y 9 meses. El rendimiento matemático de los alumnos fue puntuado como *bajo, medio o alto,* en base a las calificaciones obtenidas en la asignatura de Matemáticas a lo largo del curso. Un bajo rendimiento equivalía a una calificación global de "muy deficiente" o "insuficiente"; un rendimiento medio abarcaba las calificaciones de "suficiente" o "bien" y el rendimiento alto, "notable" o "sobresaliente". De los alumnos de la muestra, 43 niños tuvieron una puntuación baja, 58 una puntuación media y 43 alumnos una puntuación alta, lo que sugiere una distribución normal de estas puntuaciones con, aproximadamente un tercio de alumnos en cada uno de los tramos de puntuación. En ninguno de los cursos había tenido lugar una enseñanza formal de la probabilidad, por lo que las intuiciones probabilísticas de los alumnos son de tipo primario.

La recogida de datos se llevó a cabo dentro de las horas dedicadas a la clase de matemáticas y contando, en todo momento, con la colaboración del seminario de matemáticas del centro. La cumplimentación del cuestionario duró aproximadamente una hora en cada grupo, después de que el profesor explicara a los niños la naturaleza de la prueba y su finalidad evaluativa no sancionadora, pidiéndoles que explicasen lo mejor posible sus respuestas.

A continuación comentamos los resultados obtenidos de la aplicación de este cuestionario, para el cual obtuvimos un coeficiente de fiabilidad T=0.8065, calculado con el mismo procedimiento que en los casos anteriores. Más adelante indicaremos el criterio seguido para la selección de los niños que participaron en la entrevista, que se realizó varios días después de cumplimentar el cuestionario.

3.4. NIVELES Y ESTRATEGIAS EN LA COMPARACION DE PROBABILI-DADES

En esta sección presentamos los resultados obtenidos en los ítems de comparación de probabilidades. Hemos dividido estos resultados en tres apartados. En el primero analizamos las respuestas de los alumnos y comparamos el índice de dificultad de cada ítem con la dificultad esperada al clasificar los problemas según los niveles de razonamiento en la comparación de fracciones, utilizando los resultados de Noelting (1980a y b) y la clasificación de Pérez Echeverría (1990). Estudiamos la variabilidad de esta dificultad con la edad y rendimiento matemático de los alumnos.

Seguidamente dedicamos un apartado a analizar los argumentos empleados por los alumnos para justificar sus respuestas, enfatizando, tanto aquellos argumentos de tipo numérico, como los que contienen un componente claramente probabilístico. Usamos la clasificación de estrategias descrita por Noelting (1980a y b) y Pérez Echeverría (1990), aunque hemos observado también estrategias descritas por Truran (1994b) y uso de heurísticas.

Por último, analizamos los patrones de respuestas de cada uno de los alumnos al total de los ítems, para tratar de detectar tipologías de razonamiento proporcional y probabilístico en los alumnos de la muestra. El análisis implicativo de las respuestas nos confirma las conclusiones obtenidas mediante el estudio de los patrones, de que la escala de nivel de razonamiento proporcional descrita por Noelting para la comparación de fracciones podría no ser aplicable directamente al caso de problemas de comparación de probabilidades.

3.4.1. Analisis de respuestas a los ítems

En los items de comparación de probabilidad, esto es, los 7, 8 y 12 a 16 proponemos a los alumnos una serie de situaciones en las que deben decidir cual, entre dos urnas dadas, ofrece mayor probabilidad de obtener una ficha de un determinado color. Puesto que, en la situación dada, puede aplicarse el principio de indiferencia, y no disponemos de información de tipo frecuencial, nos encontramos ante un ejemplo en que la asignación de probabilidades debe hacerse aplicando la regla de Laplace. Es decir, la comparación de probabilidades de obtener una bola de un mismo color en las dos urnas se reduce a la comparación de la fracción entre el número de bolas del color deseado (casos favorables) y el número total de bolas de la urna (casos posibles), en cada una de las urnas. Para resolver el problema es necesario, por tanto, comparar dos fracciones. Además de ello, el niño debe movilizar una serie de intuiciones sobre los conceptos probabilísticos, como el de experimento aleatorio. Debe ser capaz de diferenciar los posibles sucesos en este experimento (espacio muestral), asociar el número de casos favorables al suceso dado, el número de casos desfavorables al suceso contrario y considerar el número total de bolas como conjunto de posibilidades. Finalmente, debe aplicar el principio de indiferencia a la situación dada.

Desde luego, esta estrategia de resolución, que podriamos considerar como normativa, no es la única que conduce a solucionar con éxito cada problema, sino que, dependiendo de la dificultad de cada ítem, éste se puede resolver empleando otras estrategias más simples. Lo que realmente nos interesa es cuántos alumnos manifiestan la estrategia multiplicativa (regla de Laplace), y hasta qué punto, un alumno que está en posesión de dicha estrategia (la única que resuelve con éxito el ítem 16), la aplica en las restantes situaciones.

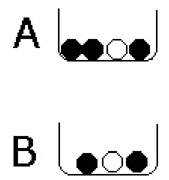
Puesto que el problema implica la comparación de fracciones, hemos representado en los distintos ítems los niveles de dificultad identificados por Noelting (1980a y b) y recogidos por Pérez Echeverría (1990), como se indicó en la sección 3.2.

Además, en los ítems 7 y 8, tomados del cuestionario de Fischbein y Gazit (1984) sin modificación, se introducen como distractores elementos subjetivos que, pensamos pueden afectar a la asignación de probabilidades por los niños. El primero de estos factores es de tipo causal (la edad o inteligencia del niño que extrae la bola puede afectar el resultado) y pretende estudiar si el alumno discrimina los factores deterministas y aleatorios en la situación dada, así como la creencia de algunos niños en la posibilidad de control de los fenómenos aleatorios.

En el ítem 8 se introduce como distractor otra idea muy extendida entre los niños y que diferencia, a nuestro juicio, un problema de comparación de probabilidades de otro de comparación de fracciones. Se trata de la creencia en que, a pesar de tener igual proporciones de casos favorables y posibles, el número absoluto de casos posibles representa una ventaja. Estos dos ítems tienen un formato de pregunta abierta.

En cuanto al resto de los items, todos tenían un enunciado similar, con respuesta de elección múltiple. Además de señalar una opción, el alumno debía explicar por qué la había escogido, con el fin de estudiar y clasificar las estrategias utilizadas en cada caso. Los enunciados son similares al del ítem que presentamos a continuación:

ITEM 12: En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo)
Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cual elegirías para hacer la extracción?. Señala la respuesta correcta:



(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ___
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ___
(C) Las dos cajas dan la misma posibilidad ___
(D) No lo se ___
¿Por qué? ....

El resto de los items tiene un enunciado muy parecido, en el que hemos variado la composición de las urnas respecto al número de fichas blancas y negras, la aparición o no de una ilustración con las urnas y las fichas dibujadas y el orden de las posibles respuestas de elección múltiple.

Respuestas a los ítems

En la tabla 3.4.1 presentamos los resultados obtenidos de la totalidad de los alumnos. El asterisco (*) aparece para señalar los casos en que todas las respuestas correpondientes a esta opción son correctas. Hemos puesto un doble asterisco (**) en el caso de que parte de las respuestas de esta opción sean correctas, dependiendo del argumento. Esto es debido a que, en el caso de la equiprobabilidad, algunos alumnos eligen esta opción, no por un razonamiento correcto, sino por el sesgo de equiprobabilidad, descrito por Lecoutre. En el resto de los casos las respuestas son incorrectas.

Tabla 3.4.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas de los alumnos a los items

Item	Mayor o igual nº de casos favorables	Menor nº de casos desfavorables	Equiprobabilidad	Ambigua o incompleta; No lo se	No contesta
12	114 *	2	35	3	1
	79.7%	1.4%	17.5%	2.1%	0.7
13	12	87 *	39	3	2
	8.4%	60.8%	27.4%	2.1%	1.4%
14	36	6	96 **	4	1
	25.2%	4.2%	67.1%	2.8%	0.7%
7	39	4	66 **	31	0
	27.9%	2.9%	47.1%	22.1%	0.0%
8	61	14	51 **	12	5
	42.7%	9.8%	35.7%	8.4%	3.5%
15	75	41 *	19	3	5
	52.4%	28.7%	13.9%	2.1%	3.5%
16	34	13 *	88	2	6
	23.8%	9.1%	61.7%	1.4%	4.2%

En la Tabla 3.4.2. presentamos los porcentajes de respuestas correctas, desglosadas por curso, omitiendo aquellas respuestas sobre la equiprobabilidad de las cajas que se deben al sesgo de equiprobabilidad. A la vista de los resultados podemos destacar la mayor dificultad que han presentado los items 15 y 16, en los que menos de la mitad de los alumnos eligen la opción correcta. Especialmente cabe destacar la dificultad del item 16, al que sólo 13 de los 143 alumnos responden adecuadamente.

Tabla 3.4.2. Porcentaje de respuestas correctas en los ítems 12 a 16 por curso

Item	5º	6º	1º	2º	Total
12	75.0	70.3	86.8	87.5	79.7
13	52.8	67.6	65.8	56.2	60.8
14	47.3	54.1	73.7	78.1	62.9
7	6.0	27.0	23.6	21.8	20.0
8	13.9	32.4	39.5	43.7	32.2
15	30.6	27.0	34.2	21.9	28.7
16	19.4	5.4	5.3	6.2	9.1

La explicación la encontramos en la falta de proporcionalidad entre las cuatro cifras presentadas, lo que obliga al sujeto a un cálculo de proporciones, es decir, a la aplicación de la regla de Laplace, en que tiene que comparar los casos favorables con los casos posibles en cada urna. Los resultados nos muestran que esta comparación no es en absoluto espontánea, ni siquiera para los alumnos mayores, que ya poseen la herramienta de las fracciones, imprescindible para establecer tal relación.

Otro ítem especialmente difícil es el ítem 15. En este caso sí existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables de cada urna, pero la proporción no es la misma, lo que hace que las urnas no sean equivalentes. Aunque los alumnos parecen ser conscientes de esta falta de equivalencia entre las dos urnas, sin embargo se decantan mayoritariamente por la que tiene una mayor cantidad absoluta de casos favorables o la diferencia entre los casos favorables y desfavorables es mayor. Sin embargo, en el ítem 16 el distractor más fuerte no es la caja con mayor número de bolas del color favorable, sino la opción de equiprobabilidad. Pensamos que esto se debe a que, en este ítem, la diferencia entre los casos favorables y desfavorables en ambas cajas es la misma. Los ítems 15 y 16 corresponden a los niveles 3 y 4, respectivamente, de los propuestos por Perez Echeverría (1990) y niveles IIIA2 y IIIB en la clasificación de Noelting.

Los items 7 y 8 corresponden a los dos tipos del nivel 3 de Pérez Echeverría (1990) y IIB de Noelting. Aquí los porcentajes de respuestas correctas no superan, en ninguno de los dos, el 35%, lo que nos indica que más de la mitad de los alumnos no llegó a establecer la proporcionalidad de las cajas o no la consideró relevante, especialmente en el ítem 8, en que el número de bolas del color favorable era inferior al de desfavorables, al contrario que en el ítem 7. Otra diferencia entre estas dos cuestiones eran los datos entre los que se establecían las proporcionalidades, que es lo que establece los dos tipos de Pérez Echeverría: Proporción entre el número de casos favorables y el de desfavorables en cada caja, caso del ítem 7, y proporción entre el número de casos favorables de ambas cajas y desfavorables de ambas cajas, como en el ítem 8. Aunque, como hemos comentado, éste último parece ofrecer algo más de dificultad, en los dos se ha manifestado como respuesta errónea más frecuente la elección como más probable de la caja con mayor número de bolas del color favorable, siendo, en el caso del ítem 8, incluso superiores a las respuestas correctas.

Hay que destacar, también, la aparición de una categoría de respuesta denominada ambigua o incompleta, bastante frecuente en el ítem 7, y que se refiere exclusivamente al factor secundario introducido en estos dos ítems, de modo que el alumno hace algún comentario sobre dicho factor, sin llegar a tomar una decisión sobre cual de las dos cajas ofrece mayor probabilidad. Además, la redacción de estos dos ítems (de respuesta abierta) favorece la ambigüedad en las respuestas. Finalmente, observando la tabla 3.4.2, destacamos la inversión del orden de dificultad, respecto al previsto en la clasificación de Noelting en estos dos ítems tomados de Fischbein y Gazit (1984), donde se introducen distractores de tipo subjetivo.

En cuanto a los items 12, 13 y 14, correspondientes a los tres tipos del nivel 1 de Pérez Echeverría y niveles IA, IB y IIA de Noelting, parecen mostrarse más fáciles, ya que más de la mitad de los sujetos optan por la respuesta correcta, aunque en el caso de los dos primeros debemos destacar el fuerte impacto que tiene la opción de equiprobabilidad, aún sabiendo que hay igualdad de casos favorables o desfavorables, mientras que en item 14 el distractor más fuerte es el de mayor número absoluto de casos favorables.

Influencia de la edad

Una vez analizadas globalmente las respuestas de los alumnos, estudiamos la influencia de la edad sobre las mismas, tanto en lo que se refiere a las respuestas correctas como a los distractores con mayor incidencia. A la vista de los resultados, podemos clasificar los ítems en dos clases:

Por una parte, como puede verse en la tabla 3.4.2, de la página106, en los ítems 12, 13 y 14, más de la mitad de los alumnos, en todos los cursos, responden correctamente, observándose, en los ítems 12 y 14 una sensible mejoría con la edad. Es en el ítem 14, (donde las urnas eran proporcionales y con igualdad de casos favorables y desfavorables) donde esta mejoría es más apreciable. A lo largo de las diferentes bandas de edad, el distractor que tuvo más fuerza es el de equiprobabilidad en el ítem 13 (los casos favorables eran iguales en ambas urnas), en que más de la cuarta parte de los alumnos, en casi todos los cursos, se decantan por esta opción. En este ítem, salvo en el paso de 5º a 6º, las respuestas correctas disminuyen ligeramente con la edad.

Por otro lado, en los ítems 7, 8, 15 y 16 el porcentaje de alumnos que responden correctamente es siempre inferior al 50%. Por otra parte, excepto en el ítem 8, la edad no parece tener efecto beneficioso alguno en el porcentaje de respuestas correctas. Aunque en el ítem 8 sí existe una leve mejoría con la edad, sin embargo en el 7, que corresponde al mismo nivel, se observa el efecto contrario. Este efecto de descenso es muy leve, y podemos afirmar que, salvo en 5º curso, en este ítem hay cierta estabilidad en las respuestas a lo largo de la edad. La frecuencia de la respuesta incorrecta más utilizada, esto es, la de elegir la caja con mayor número de bolas del color favorable, es también bastante estable en ambos ítems, manteniéndose siempre por encima de la cuarta parte. En el caso de los ítems 15 y 16, aunque también existe estabilidad entre 11 a 14 años, sin embargo, el efecto de 5º a 6º es decreciente, siendo más apreciable en el ítem 16, donde menos del 7% de los alumnos de edades comprendidas entre 12 y 14 años da la respuesta correcta. Esperamos que el análisis de los argumentos empleados pueda darnos la clave de estas diferencias encontradas en las respuestas de los alumnos de 5º. En cuanto a la frecuencia de los distractores más importantes, aumenta con la edad, manteniéndose, en todos los cursos, superior a la de respuestas correctas.

Influencia del rendimiento en matemáticas

También hemos estudiado la relación existente entre el porcentaje de éxito y el rendimiento matemático de los alumnos, catalogado por su profesor como bajo, medio o alto (ver página 104) En la tabla 3.4.3. aparece la relación entre esta variable y las respuestas proporcionadas a los distintos ítems de comparación de probabilidades.

Excepto en el ítem 16, que es el de mayor dificultad, se observa invariablemente un porcentaje más alto de respuestas correctas en los alumnos cuyo rendimiento fué calificado como alto, aunque no podemos afirmar que el porcentaje haya ido creciendo en función del rendimiento, pues en la mayoría de los ítems, los alumnos de rendimiento bajo superan en sus respuestas a los de rendimiento medio. En cualquier caso, creemos que es muy importante el análisis de los argumentos de respuesta empleados, ya que, en ocasiones, los alumnos dan una respuesta calificada como "correcta" empleando un argumento que no es pertinente, lo que interferiría en los datos sobre respuestas efectivamente correctas.

Tabla 3.4.3. Porcentaje de respuestas correctas en función del Rendimiento Matemático de los alumnos.

Item	Rendimiento Matemático			TOTAL
	BAJO	MEDIO	ALTO	
12	81.4	67.2	95.2	79.7
13	62.8	56.9	64.3	60.8
14	62.8	51.7	78.6	63.6
7	9.5	22.4	28.5	20.0
8	25.7	22.4	47.6	32.5
15	27.9	25.9	33.3	28.7
16	11.6	6.9	9.5	9.1

3.4.2. Estrategias de los alumnos en la comparación de probabilidades

Como hemos comentado, la simple consideración de las respuestas correctas nos puede llevar a conclusiones engañosas sobre el razonamiento probabilístico de los alumnos, pues pueden haber elegido una respuesta siguiendo un razonamiento correcto o incorrecto. En esta sección analizamos los argumentos proporcionados por los alumnos para justificar sus respuesta, clasificándolos según las estrategias seguidas en la comparación de las dos probabilidades. Las categorías que hemos considerado son las siguientes:

A) Comparación de una sola variable:

Hemos encontrado tres tipos de estrategias en las que el alumno sólo tiene en cuenta una variable del problema, o al menos decide la solución comparando una sola variable: o bien los casos posibles, o los favorables, o los desfavorables. Son típicas del nivel preoperacional, según Piaget e Inhelder (1951, cap. IV) y, a excepción de la primera, generan respuestas correctas a distintos tipos de tareas del nivel 1 de Pérez Echeverría (1990).

A1) Comparación absoluta del número de casos posibles:

Esta estrategia consiste en elegir la caja que contenga mayor número de bolas, propia, según Piaget e Inhelder (1951, cap. IV) del principio del período preoperacional. En ocasiones, aunque pocas, el alumno ve como más probable la caja con menos bolas, como lo demuestra la respuesta de Bruno (10;11) al ítem 8: *"Que es mejor para él (Eduardo), que tiene menos bolas y tiene más oportunidades de sacar la blanca"* (Alumno nº31)

En este caso los alumnos sólo tienen en cuenta una variable, el número de casos posibles de ambas cajas, sin considerar la relatividad de las proporciones de bolas blancas y negras. Esta estrategia, aunque puede generar una respuesta correcta al ítem 12, carece de base lógica y está originada por la imposibilidad de los alumnos de comparar el conjunto total con un subconjunto, típica de este período evolutivo. Hemos incluido en esta categoría aquellos alumnos que justificaban su elección aludiendo al hecho de que "hay más" o "tiene más fichas", aunque somos conscientes de que cabe la posibilidad de que se estén refiriendo a las fichas negras sin explicitarlo. Así, Ramón (10;5) responde al ítem 12 eligiendo la opción correcta (A), *"porque hay una ficha más que en la caja B"* (Alumno nº24).

Hemos encontrado esta estrategia en algunos alumnos, pero hemos de decir que no resultó persistente, ya que la utilizaban de forma aislada o, como en el caso de Bruno, mencionado más arriba, mezclando la estrategia maximalista con la minimalista, pues responde al ítem 12 que prefiere la caja A *"porque hay más fichas y tiene más posibilidad"*, a la vez que elige la caja E en el ítem 14 *"porque hay menos fichas"*.

A2) Comparación absoluta del número de casos favorables:

Esta estrategia consiste en elegir la caja que contenga más bolas del color favorable. Es la estrategia más simple de todas, ya que de los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos y se ignoran los demás.

Corresponde, según Piaget e Inhelder (1951) al final del nivel preoperacional, en que el alumno no posee aún la capacidad para establecer relaciones entre el todo y sus partes. Estos autores encuentran que el procedimiento que siguen los alumnos es tratar de comparar, en primer lugar, los casos posibles (estrategia A1) y, a igualdad de casos posibles, centrar entonces su atención en la comparación de los casos favorables, eligiendo la caja que tenga más.

Nosotros no estamos totalmente de acuerdo con esta afirmación, a la luz de nuestros resultados, que muestran un gran porcentaje de alumnos que usan esta estrategia en el ítem 12 sin comparar previamente los casos posibles. Pensamos que esta diferencia puede ser debida al tipo de tarea presentada, ya que en los experimentos de Piaget e Inhelder se utilizaban grupos de fichas iguales, donde algunas de ellas tenían una cruz en el reverso, lo que, a nuestro entender, puede favorecer la consideración, por parte del alumno del conjunto de fichas, todas iguales, como un todo, más que como compuesto de dos partes, tal y como se apreciaría en nuestras tareas, en que las bolas son de dos colores distintos, lo que perceptivamente anima a la consideración del conjunto partido.

Esta estrategia la hemos considerado pertinente como argumento para justificar la respuesta correcta al ítem 12, aunque su aplicación a cualquier otro ítem no sería adecuada y generaría respuestas incorrectas.

Un claro ejemplo de esta estrategia nos lo proporciona la respuesta de Pilar (10;11) al argumentar que prefiere la caja A (correcta) en el ítem 12 *"porque hay más fichas negras"*. Este mismo argumento lo utiliza para decidirse por la caja H (incorrecta) en el ítem 15 (alumno nº1).

Nos queda por expresar nuestro reparo a considerar que, como indican Piaget e Inhelder, en esta estrategia sólo se esté considerando la comparación de una sola variable. Creemos que ésto sería así en los casos en que da lugar a respuestas incorrectas, donde claramente se ignora el número de bolas desfavorables o posibles, pero en el caso en que justifica una respuesta correcta (como en el item 12), pensamos que el alumno sí está realizando una comparación de dos variables aunque no lo explicite, ya que estaría basando su elección en el número de bolas favorables, después de darse cuenta que el número de bolas desfavorables era el mismo en ambas cajas, sólo que ésto último no considera necesario decirlo. En estos casos se espera que el alumno cambie de estrategia al tener que decidir sobre los siguientes ítems. Arrojar algo de luz sobre este punto constituía uno de nuestros objetivos cuando realizamos las entrevistas individuales.

A3) Comparación absoluta del número de casos desfavorables:

Estrategia consistente en elegir la caja con menor número de bolas del color desfavorables. Para Piaget e Inhelder (1951, cap. IV), los sujetos del nivel preoperacional utilizan esta estrategia cuando, una vez intentada la anterior, existe igualdad de casos favorables, y centran su atención, entonces, sobre el número de casos desfavorables.

El único ítem en el que la justificación mediante esta estrategia daría lugar a una respuesta correcta es el ítem 13, y de nuevo ponemos en duda el hecho de que el alumno esté considerando una sóla variable, sino que puede estar utilizando una correspondencia del tipo "a igualdad de casos favorables en las dos cajas, elijo la que presente mayor número de desfavorables", sin llegar a hacer explícita toda la frase, en base a economizar esfuerzos en la comparación, ya que la tarea no "exige" una estrategia más elaborada.

En cualquier caso, nosotros hemos considerado pertinente esta estrategia para justificar la respuesta correcta al item 13, y en cualquier otro caso la hemos considerado no pertinente. Un ejemplo de ella nos lo proporciona Carlos (11;5), que elige la caja correcta (C) en el item 13 porque *"hay menos fichas blancas"*, a la vez que elige incorrectamente la caja G en el item 15, alegando que *"hay menos blancas con respecto a la (caja) H"* (Alumno nº 54).

B) Estrategias de dos variables:

En este tipo de estrategias, los alumnos buscan la solución del problema comparando, de alguna manera, todos los datos que aparecen en el enunciado. En ocasiones esta comparación la realizan mediante una operación aditiva, restando entre sí los casos favorables y desfavorables de cada caja y comparando estas diferencias o mediante una operación multiplicativa, estableciendo la comparación de probabilidades en base a la regla de Laplace. También se puede establecer la comparación mediante alguna regla de poner en correspondencia los casos favorables y desfavorables de las cajas, con el fin de establecer si existe o no algún tipo de proporcionalidad entre ellos.

Son estrategias más elaboradas que las del caso anterior, exigiendo la consideración de un mayor número de datos por parte del alumno, así como, en alguna de ellas, la utilización del razonamiento proporcional y la herramienta del cálculo y la comparación de fracciones y por tanto se corresponden con un periodo evolutivo superior.

B1) Estrategias aditivas:

Los alumnos que utilizan esta estrategia tienen en cuenta en sus argumentos los casos favorables, los desfavorables y los posibles, simultáneamente, pero gestionan los datos por medio de alguna operación aditiva para poder establecer la comparación. En general, salvo para las tareas del nivel 1, en que el número de casos favorables o desfavorables coinciden, estas estrategias no se consideran pertinentes, y las respuestas correctas que pudieran generar son debidas a coincidencias entre los datos.

Para Piaget e Inhelder, estos argumentos son característicos del período de operaciones concretas, en el que observan un fracaso sistemático en las tareas de proporciones, y sólo al final, descubren un intento por parte de los alumnos de dar solución, de forma empírica, a estos problemas.

Un ejemplo de este tipo de razonamiento lo tenemos en Antonio (12;3), que resuelve todos los ítems de comparación utilizando este tipo de estrategia. En el item 12, por ejemplo, elige la opción correcta (caja A) *"porque hay mayor diferencia entre los colores de las fichas (hay más fichas negras)".* También responde correctamente al ítem 14 utilizando la misma estrategia: las dos tienen la misma posibilidad *"porque es el mismo número de fichas, tanto de blancas como de negras".* También la utiliza en los ítems 15 y 16, pero esta vez la respuesta es incorrecta: En el ítem 15 se decide por la caja H *"porque hay una diferencia de 10 fichas entre las negras y las blancas"*, y en el ítem 16 decide que tienen la misma posibilidad *"porque es la misma diferencia entre los dos tipos de fichas"* (Alumno nº74). Otro alumno, Pablo (12;11), da el siguiente razonamiento al ítem 15: Prefiere la caja H *"porque en la caja H el número de negras aumenta en 8 y el de blancas aumenta en 6".*(Alumno nº87).

B2) Estrategia de correspondencia:

Esta estrategia, tal como la describe Pérez Echeverría (1990), consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra fracción. Esta regla proporciona respuestas correctas en el nivel 2, y aproximadas en el nivel 3. Piaget e Inhelder (1951) afirman al respecto que, a falta de un cálculo de fracciones, el sujeto determina las dobles relaciones por un sistema de correspondencias cuando las proporciones o desproporciones no aparecen como inmediatas. Esta estrategia, aunque en los casos más sencillos de cajas proporcionales aparece durante el periodo de operaciones concretas, se desarrolla en el período de operaciones formales, para ir trasformándose en una estrategia puramente multiplicativa, en que se contemplen las relaciones entre los casos favorables y los posibles.

Nosotros hemos considerado este razonamiento pertinente para resolver correctamente los ítems 7, 8 y 15. También es utilizado en los items 12, 13 y 14, pero, al ser éstos de una dificultad inferior, y poderse resolver por las estrategias ya citadas, resulta difícil saber realmente si el alumno está razonando estableciendo una correspondencia o por estrategia aditiva, como ocurre con la respuesta de Jesús (12;0) al ítem 14, donde elige la opción de equiprobabilidad, alegando *"porque las dos cajas tienen dentro las mismas fichas (La caja E dos negras y dos blancas y la caja F cuatro negras y cuatro blancas"* (Alumno nº47). El único ítem que no puede resolverse aplicando esta estrategia es el ítem 16, que corresponde al nivel 4, en el que no existe proporcionalidad alguna entre los cuatro datos del problema.

Un claro ejemplo de la utilización de esta estrategia es el que nos proporciona la respuesta de Jose María (12;2) al ítem 15, en que elige, correctamente, la caja G *"porque la caja G tiene el triple de negras y la caja H tiene el doble de negras que de blancas"* (Alumno nº52). También Elena (13;11) alega *"porque la caja H tiene el doble de negras que de blancas y la G más del doble"* (Alumno nº140). Otra respuesta de este tipo nos la da Antonio Javier (12;10) cuando responde al ítem 7: *"Yo creo que las dos tienen las mismas posibilidades porque en los dos casos hay la mitad de bolas negras"* (Alumno nº83). Hemos de tener en cuenta que, en ocasiones, sobre todo los alumnos más jóvenes, intentan utilizar esta estrategia, pero sólo de forma aproximada, lo que puede conducir a error, como ocurre con la respuesta de Rosa (10;9) al ítem 15: La misma posibilidad *"porque aunque una tenga más negras, también tiene más blancas"*. (Alumno nº 25).

B3) Estrategias multiplicativas:

Esta estrategia, desarrollada, según Piaget e Inhelder (1951) en el período de las operaciones formales, es sin duda, la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Es necesario, bien poner en relación el número de casos favorables con el número de casos posibles, es decir, la parte con el todo, o bien establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después comparar las fracciones así obtenidas. Es, pues, la aplicación de la regla de Laplace, o la comparación de las fracciones casos favorables/casos desfavorables.

Esta estrategia, al ser la más refinada, resuelve con éxito todos los ítems de comparación de probabilidades, especialmente los del nivel 4, que no son resueltos por ninguna de las estrategias anteriores.

Maury (1984) afirma que la aplicación o no de esta estrategia depende, en ocasiones, del contexto en el que se plantee la tarea de comparación, encontrando que los contextos de ruletas se prestan mucho mejor a la consideración de relaciones parte-todo, y por tanto, a la aplicación de la regla de Laplace, mientras que los contextos de urnas con bolas favorecen las relaciones parte-parte, y por tanto las estrategias aditivas y de correspondencia. Por este motivo, consideramos interesante completar esta información por medio de las entrevistas clínicas, presentando a los alumnos entrevistados algunas tareas con ruletas para estudiar cuál es la influencia de la variable contexto en las estrategias utilizadas para la toma de decisiones en estos tipos de tareas. Exponemos a continuación un ejemplo de la utilización de una estrategia multiplicativa:

Ricardo (14;2) da el siguiente razonamiento para justificar su respuesta al ítem 16: *"la caja K, por ser mayor el número de negras respecto a las blancas en la K que en la J. (K → 5/3 = 25/15 ; 21/15 = 7/5 ← J)"* (Alumno nº143). Este alumno no sólo ha identificado los datos del problema, sino que ha sido capaz de aplicar su conocimiento de las fracciones para la resolución del mismo, incluso cuando para ello debe calcular el mínimo común denominador de las fracciones para poder compararlas. También hemos encontrado este razonamiento en la respuesta de Pablo (11:10) al ítem 12, quien a pesar de su corta edad, es incluso consciente de los conceptos matemáticos que aplica: *"Mejor la caja A, porque si calculo el mínimo común múltiplo salen en la caja A 9/12 de negras y en la B 8/12 de negras"* (Alumno nº37).

C) Otros tipos:

C1) Hacer referencia a la suerte:

En esta estrategia encontramos implícito uno de los razonamientos descritos por Lecoutre (1992) como el "sesgo de la equiprobabilidad" y por Konold (1989) como "enfoque en el resultado aislado". En el primer caso los sujetos que utilizan esta estrategia tienden a suponer que todos los sucesos aleatorios son equiprobables por naturaleza. En el segundo, el hecho de que los sucesos aleatorios sean impredecibles hace que se piense que es imposible estimar una probabilidad para los mismos. Nosotros hemos encontrado esta idea reflejada en el concepto de "suerte" y de "destino" que poseen algunos alumnos. Así, Lina (11;3) responde al ítem 16 que ambas cajas tienen la misma probabilidad *"porque es el destino"*.

Aunque es de suponer que los alumnos que utilizan este tipo de estrategias la usen invariablemente sin embargo, en ciertos casos nos hemos encontrado con que parecen someterse a cierta contradicción entre su intuición de lo imprevisible o la equiprobabilidad, y su tendencia a la cuantificación de los datos presentados, sobre todo en las tareas más elementales, como lo demuestra la misma alumna de antes, Lina al responder al ítem 14 (cajas proporcionales) que prefiere la caja F *"porque tiene más fichas negras, aunque también es el destino" (*Alumno nº36).

Hemos encontrado también una variante de esta estrategia, consistente en hacer una elección cuando la diferencia entre las cantidades de fichas es considerable para el alumno, y recurrir a la equiprobabilidad cuando las cantidades se consideran suficientemente próximas, aunque no sean iguales ni proporcionales. Por ejemplo, Carolina (13;7) responde al ítem 12 señalando dos opciones, la caja A (correcta) y la opción de equiprobabilidad, alegando *"simplemente A porque hay más, pero la C también tiene razón"*, a la vez que en el ítem 14 señala la caja F *"porque hay más y hay más posibilidades"* (Alumna nº139).

Naturalmente, aunque esta estrategia puede producir respuestas correctas a los ítems con cajas proporcionales (el 7, el 8 y el 14), no la consideramos pertinente cuando hace mención explícita a la suerte o al destino, y sí cuando se limita a decir que "las dos ofrecen la misma posibilidad", sin más explicación.

C2) Otras estrategias:

En esta categoría incluimos algunas estrategias que se han presentado de una manera aislada, o por un número muy reducido de alumnos, o explicaciones que no concuerdan con la respuesta elegida, por lo que no sabemos lo que el alumno realmente ha querido decir. Mencionaremos los dos tipos más importantes que se han incluido en esta clase: Por un lado, un argumento que podríamos tomar como una variante del sesgo de equiprobabilidad, es la estrategia de tomar la decisión de equiprobabilidad alegando que "en las dos cajas hay bolas negras". Por otro lado, la estrategia de realizar la elección en función de la disposición que presentan las bolas en los dibujos. Ejemplos de estos dos tipos son los siguientes: Elena (11;5) responde al ítem 15 *"la misma posibilidad porque hay mayor cantidad de negras en las dos"*. (Alumno nº55). Laura (11;3) responde al ítem 14 que prefiere la caja F, *"porque hay dos negras en lo alto y una blanca al lado"*. (Alumno nº65). Naturalmente, las respuestas correctas asociadas a estos tipos de estrategias son puramente casuales, por lo que las hemos considerado como no pertinentes en todos los casos. También hemos incluido en esta categoría aquellos alumnos que responden simplemente con "la misma probabilidad", sistemáticamente y sin ninguna justificación a todos los ítems.

Por último hemos considerado los que no dan respuesta. En la tabla 3.4.4. presentamos la frecuencia y porcentaje de alumnos que emplea las estrategias descritas en cada uno de los ítems. El asterisco (*) indica que esa estrategia genera respuestas correctas a ese ítem. Hemos señalado con doble asterisco (**) las estrategias que, produciendo respuestas correctas, se consideran pertinentes para la resolución del ítem correspondiente.

Observamos el predominio de la comparación de casos favorables, aunque los niños adaptan sus estrategias al tipo de ítem. El número de casos desfavorables es más usado en el ítem 13, las estrategias de correspondencias en el ítem 8 y 14 y las aditivas en los ítems 15 y 16.

Una de las conclusiones que podemos obtener, a la vista de los datos, es que los alumnos, en general, no son fieles a una determinada estrategia, es decir, dependiendo de la tarea demandada, articularán un argumento u otro para lograr el éxito. Así, aunque la estrategia multiplicativa es válida para todos los ítems, y la estrategia de correspondencia responde a todos, salvo al ítem 16, sin embargo, ésta última sólo es requerida cuando no es posible aplicar con éxito una estrategia más simple, y la multiplicativa, en el mejor de los casos, sólo es utilizada por un 1.4% de los alumnos, aún estando en posesión de la herramienta del cálculo con fracciones (a partir de 6º curso).

Tabla 3.4.4. Porcentaje de alumnos que emplean las distintas estrategias en cada uno de los ítems

Estrategia	Item 12	Item 13	Item 14	Item 7	Item 8	Item 15	Item 16
Casos posibles	4.9 *	1.4	5.6	1.4	0.7	7.0	7.7
Casos favorables	51.7 **	28.7	16.8	25.7	42.7	27.3	13.3
Casos desfavorables	2.8	35.0 **	1.4	0.7	4.9	11.2 *	2.1 *
Aditivas	7.7 *	4.9 *	15.4 **	2.9	4.2	21.0	39.9
Correspondencia	13.3 **	11.2 **	36.4 **	15.0 **	26.6 **	6.3 **	1.4
Multiplicativa	1.4 **	0.7 **	0.7 **	0.0 **	0.0 **	0.7 **	1.4 **
Suerte	11.2	4.2	4.2 *	27.1 *	4.9 *	8.4	7.7
Otras	5.6	11.2	14.7	5.0 *	4.2 *	12.6	18.9
No responde o incompleta	1.4	2.8	4.9	22.1	12.1	5.6	7.7

Además, en los ítems de mayor dificultad (ítems 15 y 16), donde la correspondencia no es muy evidente o no existe, una gran cantidad de alumnos deciden abordarlos con una estrategia menos sofisticada, lo que corroboraría los resultados encontrados por Pérez Echeverría, que afirma "*Quizá, lo más sorprendente es que sujetos que habían utilizado una estrategia proporcional para resolver los problemas de nivel 2 o 3, usaban una estrategia menos elaborada al resolver los problemas de nivel más difícil*" (Pérez Echeverría, 1990, pag. 45), aunque su investigación se llevó a cabo con alumnos algo mayores (1º BUP, 3º BUP y 1º Universidad).

En cuanto a las estrategias más simples, la de comparar sólo los casos favorables es, sin duda, la más utilizada. En todos los ítems, aún no siendo pertinente, hay entre un 13% y un 51% de alumnos que la emplean. En cuanto a la estrategia aditiva, aunque en ocasiones proporcione respuestas correctas, sólo es válida para el ítem 14, en que podríamos decir que su utilización resulta prácticamente equivalente a la estrategia de correspondencia, pues en cada urna coincide el número de bolas blancas y negras, y cuando el alumno pone esto de manifiesto es muy difícil decidir si está realizando una resta entre las cantidades de bolas blancas y negras (y por tanto, una estrategia aditiva), o está estableciendo una correspondencia biyectiva entre las bolas blancas y las negras (con lo que sería una estrategia de correspondencia).

Por esta razón no podemos considerar significativo ese aumento de las estrategias aditivas en éste ítem al 15.4%. Sí tenemos que considerar significativo, sin embargo, el uso que de ellas se hace en los ítems 15 y 16, que asciende al 21.0% y al 39.9%, respectivamente, cuando en realidad, en estas dos ocasiones no son, en absoluto, estrategias pertinentes. Esto secundaría nuestra anterior afirmación de que el alumno recurre a un argumento más simple e ingenuo cuando se enfrenta a tareas de mayor dificultad.

Se observa un aumento de las estrategias denominadas "incompletas" en los ítems 7 y 8. Esto es debido a la introducción, en estos dos ítems, de factores subjetivos complementarios, como la influencia de la edad o inteligencia de las jugadores, en el ítem 7, y la idea de juego justo en el 8. Esto hace que muchos alumnos centren su respuesta exclusivamente en estos factores secundarios, obviando la composición de las cajas. Por ejemplo, Beatriz (11;8) responde así al ítem 7: *"Bueno, Pilar es más mayor que Rosa, pero eso no tiene nada que ver. Rosa puede ser más pequeña, pero puede ser más inteligente que Pilar"*. (Alumna nº33). También Laura (11;3) responde aludiendo a la edad: *"Que no tiene que ver nada que sea mayor para que saque la bola blanca, que ella también la puede sacar"*. (Alumna nº65). Sergio (10;4) responde al ítem 8 sin especificar su estrategia: *"Que da igual, porque él también puede ganar"*. (Alumno nº10).

También nos hemos encontrado con cierta dificultad al catalogar las respuestas denominadas "otras", pues entre ellas encontramos, tanto argumentos inadecuados aislados, como refuerzos a una respuesta correcta, pero que en realidad no explica la estrategia utilizada, por lo que, aunque correctos, no podíamos incluirlos bajo ninguna otra categoría. Eso es lo que ocurre con todos los argumentos "OTROS" en los ítems 7 y 8 (por ese motivo aparece el asterisco (*)), y con gran parte del resto de los ítems, en que los alumnos dan la respuesta correcta, pero no aciertan a argumentar claramente por qué. Por ejemplo, Ginés (11;3) responde al ítem 7: *"que eso no es verdad. Las dos tienen las mismas posibilidades",* y en el ítem 13, después de señalar la opción correcta explica: *"porque hay menos posibilidades de que salga negra".* (Alumno nº26). Bruno (10;11), después de elegir las opciones correctas en los ítems 15 y 16, argumenta en ambos: *"porque hay menos fichas blancas que negras"* (Alumno nº31). Sergio (10;4) elige correctamente la caja D (opción B) en el ítem 13, argumentando: *"porque me gusta esa caja".* (Alumno nº10).

Influencia de la edad

Ya hemos visto que, en general, la exigencia de la tarea condiciona el uso de una u otra estrategia para su resolución, aunque la elección comparando exclusivamente los casos favorables aparecía como estrategia predominante. Lo que nos interesa ahora es analizar si la edad de los alumnos es o no un factor determinante para el uso de cada estrategia. Los resultados obtenidos aparecen reflejados en la tabla 3.4.5.

Tabla 3.4.5. Porcentaje de alumnos que utilizan las diferentes estrategias, según curso académico.

Estrategia	Curso	Items						
		12	13	14	7	8	15	16
Casos posibles	5º	11.1	2.8	2.8	3.0	0.0	8.3	11.1
	6º	5.4	0.0	2.7	2.7	0.0	5.4	5.4
	1º	2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	2.6	2.6
	2º	0.0	3.1	0.0	0.0	3.1	12.5	12.5
Casos favorables	5º	47.2 *	30.6	13.9	18.2	52.8	22.2	11.1
	6º	48.6 *	29.7	29.7	24.3	40.5	35.1	24.3
	1º	42.1 *	13.2	7.9	31.6	34.2	15.8	2.6
	2º	71.9 *	43.8	15.6	28.1	43.7	37.5	15.6
Casos desfavorables	5º	2.8	33.3 *	5.6	0.0	5.6	8.3	5.6
	6º	5.4	40.5 *	0.0	0.0	2.7	16.2	2.7
	1º	0.0	39.5 *	0.0	2.6	7.9	15.8	0.0
	2º	3.1	24.0 *	0.0	0.0	3.1	3.1	0.0
Aditivas	5º	2.8	5.6	2.8 *	3.0	2.8	8.3	16.7
	6º	5.4	2.7	2.7 *	0.0	0.0	18.9	40.5
	1º	18.4	10.5	15.8 *	2.6	10.5	34.2	65.8
	2º	3.1	0.0	43.7 *	6.2	3.1	21.9	34.4
Correspondencia	5º	8.3 *	2.8 *	22.2 *	3.0 *	11.1 *	5.6 *	2.8
	6º	8.1 *	13.5 *	43.2 *	18.9 *	27.0 *	2.7 *	0.0
	1º	23.7 *	18.4 *	55.3 *	21.0 *	36.9 *	10.5 *	2.6
	2º	12.5 *	9.4 *	21.9 *	15.6 *	31.2 *	6.2 *	0.0
Multiplicativa	5º	2.8 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *
	6º	2.7 *	0.0 *	2.7 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	2.7 *
	1º	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *
	2º	0.0 *	3.1 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	3.1 *	3.1 *
Suerte	5º	19.4	2.8	8.3	36.4	2.8	11.1	11.1
	6º	8.1	0.0	0.0	27.0	13.5	2.7	0.0
	1º	10.5	7.9	7.9	23.7	2.6	13.2	13.2
	2º	6.2	6.2	0.0	21.9	0.0	6.2	6.2
Otras	5º	2.8	16.7	27.8	3.0	0.0	19.4	25.0
	6º	13.5	13.5	13.5	8.1	2.7	16.2	18.9
	1º	2.6	7.9	10.5	2.6	2.6	7.9	13.2
	2º	6.2	6.2	6.2	6.2	12.5	6.2	18.8
No responde o incompleta	5º	2.8	5.6	8.3	33.3	25.3	16.7	16.7
	6º	2.7	0.0	2.7	18.9	13.5	2.7	5.4
	1º	0.0	2.6	0.0	15.8	5.2	0.0	0.0
	2º	0.0	3.1	9.4	21.9	3.1	3.1	9.4

* Estrategia adecuada para responder correctamente al ítem

En los ítems de menor dificultad (12, 13 y 14) se puede observar la incidencia de las respuestas que argumentan con la comparación de casos favorables, descendiente a lo largo de los tres primeros cursos en el ítem 13, y la casi nula incidencia de las estrategias multiplicativas. En todos los ítems, el porcentaje de estrategias de correspondencia aumenta con la edad a lo largo de los tres primeros cursos, pero no se mantiene la tendencia en el último curso. Curiosamente, en el ítem 13, algo más del 18% de los alumnos de 2º argumentan su elección correcta afirmando que hay más fichas negras, cuando en realidad había las mismas, lo que, además, podía observarse en la ilustración.

En los ítems 7 y 8, que, como ya se ha mencionado, corresponden al nivel 2 de dificultad se observa una fuerte tendencia a la comparación basada en los casos favorables, siendo ésta más acentuada, en todos los cursos, en el ítem 8, aunque lo que nos llama la atención es que, mientras en el ítem 7, el uso de esta estrategia aumenta con la edad, en el ítem 8, aún siendo más fuerte en cada curso, sin embargo, decrece con la edad. Una posible explicación estaría en la diferencia entre las dos tareas, ya que en la primera el número de casos favorables es siempre superior al de desfavorables, mientras que en la segunda ocurre al revés. Por otro lado, el gran porcentaje de alumnos que, en el ítem 7, dan una respuesta incompleta (llega a la tercera parte de los alumnos de 5º curso) puede ser un factor decisivo en esta diferencia encontrada.

En cuanto a la incidencia de las estrategias adecuadas, mientras que la multiplicativa no se manifiesta en ninguno de los dos ítems, como ya se vio anteriormente, sí se observa un claro aumento con la edad del uso de la estrategia de correspondencia. Este aumento se lleva a cabo, tanto en los ítems 7 y 8, como en el ítem 14, que también tiene las cajas equiprobables (en este último con un porcentaje superior al doble de los anteriores, si consideramos las estrategias denominadas "aditivas") a través de los cursos 5º, 6º y 1º. En 2º se observa siempre un descenso. Notemos también la incidencia de la estrategia referida a la idea de suerte en el ítem 7, mientras que apenas se percibe en el 8 o el 14. Creemos que, al mencionarse en el ítem 7 la posibilidad de que una persona tenga más probabilidades por tener más edad, esto ha hecho aumentar las respuestas basadas en la idea de suerte para reforzar el hecho de la aleatoriedad del experimento.

Los ítems 15 y 16 son los que presentan una mayor dificultad. De hecho, tan sólo 10 alumnos utilizan una estrategia adecuada para resolver el ítem 15, y sólo 2 en el ítem 16. En ambos casos se observa un considerable aumento de las estrategias aditivas, que se incrementa con la edad, excepto en el último curso, lo que apoyaría la afirmación de Pérez Echeverría (1990) de que cuando la tarea es demasiado difícil, el alumno no perfecciona su estrategia, sino que utiliza una más ingenua e imperfecta (en este caso, característica del principio de las operaciones concretas, según Piaget e Inhelder, 1951). También se observa un aumento de las estrategias atípicas, denominadas como "otras". Posiblemente a estas estrategias sea debido el incremento de respuestas correctas que observábamos en 5º curso, en el análisis de respuestas, pues ningún alumno de este curso justifica su argumento con una estrategia multiplicativa, y sólo dos lo hacen con una justificación basada en la comparación de los casos desfavorables, estrategia que, aunque incorrecta, conduce a la solución del problema. Esto nos lleva a afirmar que las mejores respuestas de los alumnos de 5º al ítem 16 no van acompañadas de argumentos adecuados, por lo que serían debidas a coincidencias en las preferencias de los alumnos y otras estrategias no pertinentes.

Influencia del rendimiento matemático

Finalmente presentamos en la tabla 3.4.6. las estrategias de los alumnos clasificadas según el rendimiento matemático. Respecto a la estrategia de comparación de casos favorables, se observa un aumento en los alumnos con nivel matemático alto en el ítem 12, donde esta estrategia es adecuada y una disminución en el resto de los ítems, especialmente en los ítems 7 y 8 donde es inadecuada.

No observamos mucha diferencia en la estrategia de comparación de casos desvaforables entre los alumnos de alto y bajo rendimiento académico, aunque si en las aditivas, que han aumentado en los ítems

14, 15 y 16. Estas estrategias serían adecuadas en el ítem 14, pero no en los 15 y 16. No obstante, son más elaboradas que las estrategias de una variable.

Tabla 3.4.6. Uso de estrategias según rendimiento matemático

Estrategias	Nivel	Items						
		12	13	14	7	8	15	16
Casos posibles	Bajo	9.3	2.3	4.7	2.4	0.0	9.3	9.3
	Medio	3.4	0.0	5.2	1.8	1.7	5.2	5.2
	Alto	2.4	2.4	7.2	0.0	0.0	7.1	9.5
Casos favorables	Bajo	51.2 *	32.6	20.9	35.7	44.2	32.6	18.6
	Medio	43.1 *	36.2	19.0	21.4	50.0	34.5	15.5
	Alto	64.3 *	14.3	9.5	21.4	31.0	11.9	4.8
Casos desfavorables	Bajo	2.3	39.5 *	0.0	2.4	2.3	14.4	2.3
	Medio	5.2	27.6 *	3.4	0.0	3.4	8.6	3.4
	Alto	0.0	40.5 *	0.0	0.0	9.5	11.9	0.0
Aditivas	Bajo	7.0	4.7	14.0 *	2.4	7.0	14.1	27.9
	Medio	8.6	5.2	13.8 *	1.8	3.4	20.7	37.9
	Alto	7.1	4.8	19.0 *	4.8	2.4	28.6	54.8
Correspon-dencia	Bajo	11.6 *	2.3 *	30.2 *	9.5 *	18.7 *	2.3 *	0.0
	Medio	13.8 *	13.8 *	34.5 *	14.3 *	20.4 *	6.9 *	1.7
	Alto	14.3 *	16.6 *	45.2 *	21.4 *	40.5 *	9.5 *	2.4
Multipli-cativas	Bajo	2.3 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *
	Medio	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *
	Alto	2.4 *	2.4 *	2.4 *	0.0 *	0.0 *	2.4 *	4.8 *
Suerte	Bajo	9.3	7.0	2.3	23.8	4.7	7.0	4.7
	Medio	17.2	3.4	8.6	25.0	6.9	10.3	12.1
	Alto	4.8	2.4	0.0	33.3	2.4	7.1	4.8
Otras	Bajo	7.0	11.6	20.9	0.0	7.0	16.3	30.2
	Medio	6.9	12.1	13.8	7.1	0.0	12.1	20.7
	Alto	2.4	9.5	9.5	7.1	7.1	9.5	4.8
No responde o incompleta	Bajo	0.0	0.0	7.0	23.8	16.3	4.7	7.0
	Medio	1.7	1.7	1.7	28.6	12.0	1.7	3.4
	Alto	2.4	7.1	7.1	11.9	7.2	11.9	14.3

* Estrategia adecuada para responder correctamente al ítem

Observamos un incremento en las estrategias de correspondencias en los ítems 13, 14, 7 y 8, en todos los cuales esta estrategia sería adecuada. Puesto que las estrategias multiplicativas apenas aparecen, no hay muchas diferencias, aunque conviene destacar que, en todos los casos en que han sido usadas, ha sido por niños de nivel alto, excepto en el ítem 12. Destacamos también que no ha habido influencia del rendimiento matemático respecto al uso de las estrategias basadas en la suerte, que son de tipo subjetivo. Esto confirma el hecho de que la asignación subjetiva de probabilidades no está relacionada con el razonamiento matemático de los alumnos, tal como hipotetizábamos. Por el contrario, son menos los alumnos de nivel matemático alto que usan otras estrategias o dan respuestas incompletas.

Conclusiones

El análisis de esta parte de la prueba ha sido muy rico, puesto que pone de manifiesto, en primer lugar la dificultad generalizada que tienen, para estos alumnos, los problemas de comparación de probabilidades como los propuestos en nuestro cuestionario.

Como resultado de nuestro estudio observamos que los alumnos no aplican espontáneamente la regla de Laplace para comparar probabilidades, ni siquiera aquellos alumnos que, de acuerdo con lo estudiado en cursos anteriores, debieran tener soltura en la comparación de las fracciones presentadas en los problemas propuestos. El distractor que tiene más fuerza es asignar mayor probabilidad basándose sólo en los casos favorables.

Son muy pocos los alumnos que llegan a utilizar estrategias multiplicativas (nivel IIIB en la teoría de Piaget, aunque bastantes niños usan estrategias de correspondencias, que corresponden al nivel IIIA).

Además los alumnos no utilizan, en general, una estrategia única, sino que varían sus estrategias en función de la demanda del ítem, procediendo de las más simples, de comparación de una variable, a las más elaboradas, de comparación de dos variables. En el caso de los ítems de mayor dificultad, hay un retroceso a las estrategias más simples de comparación de casos favorables, incluso aunque hayan utilizado la correspondencia en ítems anteriores. Finalmente destacamos la inversión del orden de dificultad, respecto al previsto en la clasificación de Noelting en los dos ítems tomados de Fischbein y Gazit (1984), donde se introducen distractores de tipo subjetivo, por lo que parece que algunos alumnos asignan probabilidades basándose en principios subjetivos y no objetivos en estos ítems.

Es notable también que, aún cuando en los problemas más sencillos se aprecia una evolución favorable de las respuestas con la edad y rendimiento en matemáticas, esto no ocurre en todos los ítems. De ello deducimos que, falta de una enseñanza explícita de la probabilidad, la mayor maduración del alumno por si sola no supone una mejora del razonamiento probabilístico en estos tipos de problemas.

El análisis de las estrategias pone también de manifiesto la riqueza del razonamiento de nuestros alumnos y la existencia de muchas intuiciones correctas, incluso aunque se mezclen con otras inadecuadas. Ello es importante, pues el profesor puede aprovechar este potencial intuitivo para desarrollar a partir de él las intuiciones de probabilidad en sus alumnos.

3.4.3. Patrones de éxitos en los ítems de comparación de probabilidades

Una vez analizadas las respuestas y estrategias de comparación de probabilidades según edad y aptitud matemática, hemos realizado un análisis de los patrones de respuestas a los diferentes ítems. Esta técnica fue también usada en Serrano y cols. (1992) y permite analizar la consistencia de las respuestas de un mismo alumno ante ítems similares, así como las variables que influyen en sus cambios de estrategia. Permite también analizar si la dificultad de las tareas sigue un orden de tipo lineal y, en particular, si se ajusta al modelo supuesto en el escalograma de Guttman.

Asimismo podremos caracterizar de forma mas completa el razonamiento de los alumnos, puesto que, para cada problema de comparación de probabilidades, estudiamos también las estrategias que siguen los alumnos para resolverlo. Con ello podremos ver si un mismo alumno es consistente en la estrategia empleada. En la tabla 3.4.7. presentamos los patrones de respuestas correctas e incorrectas a los ítems de comparación de urnas (1=correcta, 0= incorrecta) de cada alumno. Se han clasificado y ordenado los alumnos en función del número total de respuestas correctas, y los problemas en orden de dificultad creciente, siguiendo la técnica del escalograma de Guttman, que también fue usado por Noelting (1980a) para determinar los tipos de problemas de comparación de fracciones correspondientes a los diversos estadios piagetianos de desarrollo del razonamiento proporcional, así como la edad media de acceso a dichos niveles.

Cada alumno está identificado mediante un número, lo que nos permitirá comentar detalles de sus respuestas cuando lo consideramos necesario. Como variables explicativas de las respuestas incluimos también las estrategias (ver la codificación en el anexo 4) usadas por los alumnos en los distintos problemas y la edad del alumno (años; meses). En la tabla 3.4.8, de la página 120, resumimos la información anterior.

Tabla 3.4.7. Patrones de respuestas en los ítems de comparación de probabilidades

ITEMS							ESTRATEGIAS							Nª del Alum.	Exitos	Edad
I 12	I 14	I 13	I 8	I 15	I 7	I 16	E 12	E 14	E 13	E 8	E 15	E 7	E 16			
1	1	1	1	1	1	1	7	7	2	12	9	13	7	37	7	11;10
1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	10	7	12	7	143	7	14;2
1	1	1	1	1	1	0	1	3	3	11	4	10	4	42	6	12;0
1	1	1	1	1	1	0	1	3	2	11	2	11	4	63	6	11;8
1	1	1	1	1	1	0	3	3	3	11	2	12	4	101	6	12;7
1	1	1	1	1	1	0	1	3	2	13	3	12	4	105	6	13;2
1	1	1	1	1	1	0	1	3	2	11	3	10	4	113	6	13;10

1	1	1	1	1	1	0	3	3	2	10	4	13	4	119	6	14;6
1	1	1	1	0	1	0	1	3	3	11	4	11	4	47	5	12;0
1	1	1	1	0	1	0	1	3	2	13	4	11	4	87	5	12;11
1	1	1	1	0	1	0	3	3	2	13	4	12	4	92	5	13;1
1	1	1	1	0	1	0	3	3	3	11	4	11	4	94	5	12;10
1	1	1	1	0	1	0	1	10	2	10	10	12	10	114	5	13;3
1	1	1	1	0	1	0	1	4	7	13	4	10	4	125	5	13;5
1	1	1	1	1	0	0	1	3	3	11	3	40	11	8	5	10;11
1	1	1	1	1	0	0	3	3	2	11	4	21	4	43	5	11;5
1	1	1	1	1	0	0	3	3	3	11	3	13	4	52	5	12;2
1	1	1	1	1	0	0	4	9	2	11	3	21	4	81	5	13;2
1	1	1	1	1	0	0	3	3	2	11	3	21	4	97	5	12;8
1	1	1	1	1	0	0	1	4	3	11	2	40	4	117	5	13;4
1	1	1	0	1	1	0	1	3	1	14	2	11	9	49	5	11;9
1	1	1	0	1	1	0	3	3	2	21	2	10	4	76	5	12;9
1	1	1	0	1	0	1	4	9	2	21	9	21	9	5	5	10;7
1	0	1	0	1	0	1	1	2	2	21	2	20	2	21	4	10;4
1	0	1	0	1	0	1	3	9	2	21	9	21	9	16	4	11;2
1	0	1	0	1	0	1	5	6	2	31	9	40	9	31	4	10;10
1	1	0	0	1	0	1	1	4	4	21	3	21	3	80	4	13;2
1	1	1	0	0	0	1	1	4	2	21	4	40	5	118	4	13;3
1	1	0	0	1	1	0	4	3	1	32	2	11	4	86	4	12;10
0	1	1	1	0	1	0	9	1	1	13	1	12	4	72	4	12;2
0	1	1	1	0	1	0	2	4	2	10	1	11	9	130	4	13;3
1	1	0	1	0	1	0	1	4	1	11	5	10	9	131	4	13;8
1	1	0	1	0	1	0	3	3	1	13	4	12	4	135	4	13;3
1	1	1	0	0	1	0	1	3	9	40	4	10	4	26	4	11;2
1	1	1	0	0	1	0	1	3	2	40	8	11	4	48	4	11;4
1	1	1	0	0	1	0	1	4	2	21	9	11	9	102	4	12;6
0	1	1	1	1	0	0	8	4	1	11	9	40	10	122	4	13;8
1	1	1	0	1	0	0	1	9	1	21	10	21	10	2	4	10;10
1	1	1	0	1	0	0	1	3	2	21	2	21	9	12	4	10;9
1	1	1	0	1	0	0	1	4	4	21	4	21	4	14	4	10;4
1	1	1	0	1	0	0	5	9	9	21	2	31	1	18	4	11;2
1	1	1	0	1	0	0	1	3	4	21	1	13	4	27	4	11;0
1	1	1	0	1	0	0	4	3	2	31	2	21	9	51	4	12;1
1	1	1	0	1	0	0	1	3	2	21	2	21	4	54	4	11;5
1	1	1	0	1	0	0	1	4	9	21	2	40	4	67	4	11;10
1	1	1	0	1	0	0	3	3	3	31	4	21	4	77	4	12;4
1	1	1	0	1	0	0	1	3	2	21	2	21	4	85	4	13;0
1	1	1	0	1	0	0	1	3	2	21	4	21	4	93	4	12;9
1	1	1	0	1	0	0	1	3	2	32	2	13	4	100	4	12;3
1	1	1	0	1	0	0	3	3	3	31	3	22	4	140	4	13;11
0	1	1	0	1	0	0	2	3	2	21	9	13	9	29	4	10;0
1	1	1	1	0	0	0	1	3	2	11	3	13	3	25	4	10;8
1	1	1	1	0	0	0	1	10	2	11	1	13	10	39	4	12;2
1	1	1	1	0	0	0	1	3	2	13	10	13	10	40	4	12;2
1	1	1	1	0	0	0	1	3	2	10	4	13	4	61	4	11;11
1	1	1	1	0	0	0	3	3	3	10	4	21	4	75	4	12;11
1	1	1	1	0	0	0	3	3	3	11	4	21	4	79	4	12;7
1	1	1	1	0	0	0	1	3	2	13	4	13	4	84	4	12;7
1	1	1	1	0	0	0	3	3	3	13	4	32	4	88	4	12;10
1	1	1	1	0	0	0	4	3	2	13	8	13	8	89	4	12;5
1	1	1	1	0	0	0	1	3	2	13	1	13	4	95	4	13;7
1	1	1	1	0	0	0	1	3	2	11	9	13	4	99	4	12;5
1	1	1	1	0	0	0	1	4	2	11	4	21	4	121	4	13;5
1	1	1	1	0	0	0	1	10	1	11	1	13	10	129	4	14;9
1	1	1	1	0	0	0	1	3	1	11	4	21	4	134	4	13;10

1	0	0	0	0	1	1	3	9	1	21	1	40	9	3	3	10;11
0	1	1	0	0	0	1	9	3	2	14	9	13	2	64	3	11;5
1	0	1	0	0	0	1	1	2	2	21	1	40	2	1	3	10;10
1	0	1	0	0	1	0	1	5	2	50	4	11	5	6	3	10;11
1	0	1	0	0	1	0	4	1	12	21	1	10	1	57	3	11;3
1	0	1	0	0	1	0	1	5	2	21	4	40	1	69	3	11;7
1	0	1	0	1	0	0	1	9	9	32	4	22	9	78	3	13;8
1	1	0	0	1	0	0	1	3	10	21	2	21	4	106	3	12;7
1	1	0	0	1	0	0	4	10	10	33	1	21	9	123	3	13;5
1	0	1	1	0	0	0	1	1	2	11	1	13	1	128	3	13;8
1	1	0	1	0	0	0	1	3	1	11	1	13	1	9	3	10;8
1	1	1	0	0	0	0	5	9	2	21	1	40	4	7	3	10;6
1	1	1	0	0	0	0	1	9	2	12	10	40	10	17	3	10;6
1	1	1	0	0	0	0	5	3	2	32	10	40	10	24	3	10;4
1	1	1	0	0	0	0	1	3	3	40	1	21	4	60	3	11;5
1	1	1	0	0	0	0	1	3	3	21	4	13	4	71	3	11;9
1	1	1	0	0	0	0	4	4	4	50	4	40	4	74	3	12;3
1	1	1	0	0	0	0	4	4	3	32	4	40	4	98	3	12;11
1	1	1	0	0	0	0	1	4	2	21	1	21	4	108	3	12;10
1	1	1	0	0	0	0	4	4	4	21	1	40	4	110	3	12;10
1	1	1	0	0	0	0	1	4	2	21	1	21	4	124	3	13;10
1	1	1	0	0	0	0	1	4	1	21	1	21	1	126	3	13;3
1	1	1	0	0	0	0	1	4	1	21	8	13	8	132	3	14;3
1	1	1	0	0	0	0	1	3	1	21	5	40	9	138	3	13;3
0	1	0	0	0	0	1	8	10	1	50	8	40	9	32	2	10;9
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	21	1	21	9	103	2	12;8
1	0	0	0	0	1	0	1	1	9	21	1	21	4	56	2	11;3
1	0	0	0	0	1	0	1	9	9	31	4	12	4	83	2	12;3
1	0	0	0	1	0	0	1	9	1	40	2	40	9	53	2	12;10
0	1	0	1	0	0	0	8	10	10	11	10	13	10	13	2	10;6
0	1	0	1	0	0	0	8	9	9	11	9	31	4	44	2	11;4
0	1	0	1	0	0	0	8	8	8	13	8	13	8	111	2	13;1
0	1	1	0	0	0	0	2	3	1	21	1	21	9	59	2	11;3
1	0	1	0	0	0	0	1	1	9	40	10	40	10	33	2	11;7
1	0	1	0	0	0	0	3	1	4	21	9	21	1	68	2	11;9
1	1	0	0	0	0	0	4	9	1	21	1	21	9	107	2	13;5
1	1	0	0	0	0	0	1	4	1	21	8	40	8	115	2	14;4
1	1	0	0	0	0	0	1	4	1	21	9	15	9	116	2	13;6
1	1	0	0	0	0	0	1	4	5	21	5	13	5	120	2	14;2
1	1	0	0	0	0	0	1	4	9	21	1	13	4	133	2	13;11
0	0	1	0	0	0	0	8	9	2	21	4	41	9	65	1	11;10
0	0	1	0	0	0	0	10	1	5	14	1	13	9	66	1	11;10
0	0	1	0	0	0	0	2	1	2	21	1	40	1	70	1	11;4
0	1	0	0	0	0	0	8	8	8	40	8	40	8	4	1	10;4
0	1	0	0	0	0	0	9	8	9	40	8	13	8	10	1	10;3
0	1	0	0	0	0	0	8	8	1	50	8	40	8	11	1	11;2
0	1	0	0	0	0	0	8	9	9	40	5	40	5	15	1	10;9
0	1	0	0	0	0	0	8	3	8	31	8	21	8	90	1	13;0
0	1	0	0	0	0	0	8	8	8	14	8	13	8	96	1	13;1
0	1	0	0	0	0	0	8	9	8	21	1	21	9	112	1	13;3
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	31	5	13	5	19	1	11;2
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	21	1	13	1	20	1	10;11
1	0	0	0	0	0	0	10	10	10	21	10	22	10	22	1	11;0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	21	1	13	1	28	1	10;5
1	0	0	0	0	0	0	5	5	5	21	9	23	9	30	1	10;5

1	0	0	0	0	0	0	3	9	1	40	9	13	4	34	1	10;6
1	0	0	0	0	0	0	1	5	1	21	5	40	5	35	1	10;8
1	0	0	0	0	0	0	5	1	1	21	1	40	1	41	1	11;4
1	0	0	0	0	0	0	9	5	2	40	5	40	5	46	1	12;0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	14	1	13	1	50	1	11;9
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	21	1	21	1	58	1	12;1
1	0	0	0	0	0	0	5	9	1	40	5	21	5	73	1	13;2
1	0	0	0	0	0	0	5	5	1	21	5	40	5	91	1	12;11
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	13	1	12	1	104	1	12;6
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	21	1	21	1	127	1	13;3
1	0	0	0	0	0	0	1	5	1	50	5	21	5	136	1	15;8
1	0	0	0	0	0	0	1	9	9	32	4	22	4	137	1	13;8
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	40	1	21	5	141	1	13;11
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	21	1	21	1	142	1	13;11
0	0	0	0	0	0	0	8	9	9	21	9	21	9	23	0	11;8
0	0	0	0	0	0	0	8	1	1	21	1	13	8	36	0	11;2
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	40	1	21	1	38	0	11;3
0	0	0	0	0	0	0	9	9	9	40	9	40	9	45	0	12;0
0	0	0	0	0	0	0	9	3	9	21	9	21	4	55	0	11;5
0	0	0	0	0	0	0	8	1	1	21	1	13	1	62	0	11;11
0	0	0	0	0	0	0	9	1	9	13	9	13	9	82	0	12;7
0	0	0	0	0	0	0	8	8	4	21	8	13	8	109	0	13;2
0	0	0	0	0	0	0	9	1	8	21	1	40	1	139	0	13;7

Tabla 3.4.8. Patrones de respuestas en los ítems de comparación de probabilidades

Patrón de respuesta							Nº de. correctas	Frecuencia
1	1	1	1	1	1	1	7	2
1	1	1	1	1	1	0	6	5
1	1	1	1	0	1	0	5	6
1	1	1	1	1	0	0	5	7
Otros patrones							5	3
1	1	1	0	1	0	0	4	13
1	1	1	1	0	0	0	4	14
Otros patrones							4	14
1	1	1	0	0	0	0	3	13
Otros patrones							3	11
1	1	0	0	0	0	0	2	5
Otros patrones							2	10
0	0	1	0	0	0	0	1	3
0	1	0	0	0	0	0	1	7
1	0	0	0	0	0	0	1	19
0	0	0	0	0	0	0	0	9

Al analizar estas dos tablas se aprecia, en algunos casos, una inversión en el orden de dificultad esperada en estos ítems, según los niveles de razonamiento proporcional descritos por Noelting. El ítem 15 (que corresponde, en el estudio de Noelting, al nivel IIIA2; caracterizado por cualquier fracción que tenga términos múltiplos en una de las fracciones) pasa a ser más sencillo que el ítem 7 (nivel IIB, que corresponde a cualquier clase de equivalencia de la proporcionalidad). El ítem 13 (nivel IB, caracterizado por igual número de casos favorables y diferente número de casos desfavorables) pasa a ser más difícil que el ítem 14 (IIA, fracción correspondiente a la clase de equivalencia de la unidad).

Consideramos esto una indicación de que el razonamiento probabilístico no puede reducirse al razonamiento proporcional. Al comparar los ítems 15 (cajas (12,4) vs (20,10)) y 7 (cajas (40,20) vs (30,15)), ambos sin representación gráfica, vemos que el distractor incluido en este último (la niña mayor es más inteligente y tiene más posibilidad de obtener la bola deseada), que sugiere un posible control del azar por la experiencia, evalúa la utilización por el alumno de componentes subjetivos en la asignación de probabilidades. Ahora bien, estos componentes subjetivos y creencias sobre la aleatoriedad no pueden reducirse al razonamiento proporcional. Por tanto, el ítem 7 resulta más difícil a los niños, pues a la dificultad de razonamiento proporcional se unen aspectos probabilísticos no incluidos en el ítem 15.

Al comparar los ítems 13 y 14, creemos que la inversión de dificultad respecto a lo previsto por las teorías sobre razonamiento proporcional es debido a que en una situación de decisión en ambiente aleatorio, la atención se centra preferentemente en los casos favorables (lo que puede explicarse por la heurística de la disponibilidad descrita en Kahneman, Slovic y Tversky (1982), por la que a los casos que tienen mayor influencia en nuestra percepción les atribuimos una mayor probabilidad). Por ello, aunque, desde el punto de vista del dominio de las fracciones sea más simple una situación con igualdad de casos favorables, en la que hay que comparar los casos desfavorables, muchos alumnos han fracasado en emplear esta estrategia debido al contexto de probabilidad presente en el problema y a que los casos favorables tienen mayor impacto sobre la atención del niño.

En general los alumnos cambian de estrategia, adaptando el nivel de las mismas a la dificultad de los problemas. En los problemas más sencillos usan estrategias de una variable o estrategias de correspondencias, pasando a las aditivas (diferencias entre casos favorables y desfavorables) o contunuando con las estrategias de correspondencias en los problemas más complejos. A continuación comentamos los patrones encontrados.

a) Alumnos con 7 respuestas correctas (Nivel IIIB).

Son sólo dos alumnos de 11 años y cuatro meses y 14 años y 2 meses, respectivamente, los que han dado pruebas de un razonamiento proporcional correspondiente al nivel IIIB de Piaget, ya que han sido capaces de responder correctamente el ítem de este nivel y todos los anteriores. Asimismo han usado repetidamente estrategias multiplicativas, propias de este nivel, aunque en algunos ítems más sencillos han usado otras estrategias, como la correspondencia o la comparación de casos desfavorables, que eran pertinentes al problema y que suponían un menor coste cognitivo. Estos niños no se han visto afectados por los distractores incluidos en los ítems 7 y 8.

b) Alumnos con 6 respuestas correctas (Niveles IIIA y IIB).

Todos ellos (5 alumnos) tienen el mismo patrón de respuestas, puesto que fallan el mismo ítem (I16), correspondiente al nivel IIIB. Sólo un alumno usa una estrategia multiplicativa (alumno 105 en el ítem 8, correspondiente al nivel IIB (cualquier clase de equivalencia)). Puesto que ha resuelto correctamente este ítem y el 7 del mismo nivel, así como los de menor nivel y usa estrategias de correspondencias, situamos a este alumno a partir del nivel IIB de desarrollo del razonamiento proporcional.

Aunque los alumnos de este grupo han resuelto correctamente el ítem 15 (Nivel IIIA) sólo dos de ellos lo han hecho utilizando una estrategia pertinente (105 y 113) y estarían, por tanto, en este nivel. El resto ha usado diferencia entre casos favorables y posibles (nº 42) o simplemente comparación de casos favorables (alumnos 63 y 101) y estarían en nivel IIB.

c) Alumnos con 5 respuestas correctas (Nivel IIIA y IIB). Se aprecian dos patrones predominantes:

- c_1) Alumnos que no responden correctamente a los ítems 15 y 16, que serían los más difíciles respecto al razonamiento proporcional (6 casos). Generalmente han empleado estrategias aditivas para intentar resolver estos dos problemas, aunque en el ítem 13 y 14 algunos han empleado la correspondencia. Los alumnos 87, 92 y 125 emplean estrategias multiplicativas en el ítem 8 y el resto de los alumnos de este grupo usa una estrategia de correspondencia. En el ítem 7 emplean estrategias de correspondencia. En consecuencia, estos alumnos estarían en el nivel IIB de razonamiento proporcional.
- c_2) Alumnos que fallan uno de los ítems 7 u 8 (nivel IIB, con distractores incorporados sobre creencias subjetivas), contestando correctamente el ítem 15 (nivel IIIA2), lo cual contradice lo esperado en el desarrollo del razonamiento proporcional (9 casos). El fallo en los ítems 7 y 8 ha sido

debido a los siguientes tipos de razonamiento. "enfoque en el resultado aislado" (alumno 49 en ítem 8 y 119 en ítem 7), creencia en que un número superior de casos favorables ofrece una mayor probabilidad en caso de proporcionalidad (Alumno 5, que incluso contesta el ítem 16 correctamente, en los ítems 7 y 8; alumno 76 en el ítem 8; alumnos 81, 43 y 97 en ítem 7).

d) Alumnos con 4 respuestas correctas (Niveles IIIA, IIB, IIA y IB). Podemos establecer tres tipos:

- d_1) Alumnos que responden correctamente a los cuatro ítems más sencillos. fallando el 7, 15 y 16 (14 casos). El ítem 8 es de nivel IIB (cualquier clase de equivalencia) y además, se aprecian relaciones de proporcionalidad dentro y entre las urnas, con lo que ha resultado más sencillo que el ítem 7, que también es de nivel IIB. Consideramos que estos alumnos comienzan a resolver los problemas más sencillos del nivel IIB, aunque todavía tienen dificultad, por no haber afianzado suficientemente este tipo de problemas. Estos niños no se han sometido a la influencia de creencias subjetivas, a menos en el problema 8, que han resuelto correctamente. Han usado comparación de casos favorables o desfavorables en los ítems 12 y 13 y estrategias de correspondencia en el ítem 14 (nivel IIA), excepto el alumno 121, que usa la diferencia entre casos favorables y posibles y el alumno 120, que no razona su respuesta. En el ítem 8 algunos usaron estrategias proporcionales (84, 88, 89, 95 y 40) o bien el concepto de juego equitativo, que implica también la comparación de las proporciones en las dos urnas. No han tenido éxito en el ítem 7 debido al razonamiento del "enfoque en el resultado aislado" o el sesgo de equiprobabilidad (29, 25, 39, 40, 61, 84, 89, 95, 99 y 129; en algunos casos, como el del alumno 89, se repite este tipo de argumento en 4 ítems), a la comparación únicamente del número de casos favorables (75, 79, 121, 134) o del número de casos desfavorables (88).
- d_2) Alumnos que solucionan con éxito los problemas I12, I13 , I14, fallan los dos problemas 7 y 8 (nivel IIB) y resuelven correctamente el 15 (nivel IIIA2; 13 alumnos). En los tres primeros ítems se observa una gran variedad de estrategias, incluyendo las aditivas, comparación de casos favorables o desfavorables. Normalmente, el mismo alumno varía la estrategia en función del ítem, aunque algunos, como el alumno 72 y el 140, utilizan sistemáticamente la estrategia de correspondencia. Hacemos notar también que algunos de estos alumnos usan las estrategias de comparación de casos desfavorables o la estrategia aditiva de diferencia entre casos favorables y desfavorables en los ítems I15 e I16 (alumnos 14, 54, 67, 77, 85, 93, 100) que les ha resultado válida, debido a los elementos tomados, en el ítem 15, pero no en el 16. Por ello estos alumnos no alcanzarían el nivel IIIA2, aunque habrían superado el IB. El alumno 140 emplea una estrategia de correspondencia en el ítem 15, por lo que creemos que ha alcanzado el nivel IIIA2, aunque emplea estrategias aditivas en los ítems 7 y 8, en éste último dejándose influir por el distractor empleado en el enunciado. En los ítems 7 y 8 el fallo se ha producido por conceder mayor probabilidad a la urna con mayor número de casos favorables, incluso siendo proporcionales (alumnos 2, 12, 14, 51, 54, 77, 85 en el ítem 7, y 2, 12, 14, 18, 27, 54, 67, 85, 93 en el ítem 8). También se ha manifestado el "enfoque en el resultado aislado" (alumnos 27 y 100, en ítem 7). En otros casos se usan diferencias entre blancas y negras o las respuestas son ambigüas
- d_3) Otros patrones no sistemáticos (14 casos). Aparece una variedad de patrones con respuestas correctas a ítems de diferentes dificultad: Fallos en el ítem 12 ó 14 (21, 16, 31, 72, 130, 122); éxito en el 16 (89, 118, 21, 16, 31), etc. El acierto en los ítems difíciles, como el 16 se debe a que la estrategia usada ha sido válida para los datos de este problema, pero no para el caso general. Se observa también aquí una diferencia con los problemas de comparación de fracciones, donde creemos muy improbable la utilización, por el alumnos, de este tipo de estrategia (por ejemplo, comparar los casos desfavorables) para saber cual de las dos fracciones es mayor. El fallo en los ítems fáciles ha sido debido a elegir una estrategia no adecuada al problema. En general estos niños tienen un nivel bajo de razonamiento proporcional, incluido entre el nivel IB (ya que recurren a la estrategia de comparación del segundo término de la fracción) y IIA (alumnos 26, 48, 102, 8 y 122, que resuelven los tres primeros problemas y usan la estrategia de correspondencia).

e) Alumnos con 3 respuestas correctas (Niveles IIA, IB, IA).

- e_1) Alumnos que responden correctamente los tres primeros ítems (13 casos). Es semejante al caso d_2. En el ítem 8 se muestra, con frecuencia, le influencia del mayor número de casos favorables y en el 7 aparecen respuestas ambiguas o se manifiesta el "enfoque en el resultado aislado" (alumnos 71 y 132; este último también repite este argumento en los ítems 15 y 16). Hay algunos alumnos muy consistente en su estrategia, (como el 74, 98, 110) que usan casi siempre una estrategia aditiva. La estrategia de correspondencia aparece con menor frecuencia que en los casos anteriores y, cuando se usa, es en los problemas más sencillos, que fueron resueltos correctamente. Se diría que el alumno no es capaz de extender esta estrategia a los casos más complejo a causa de un insuficiente razonamiento proporcional. En su conjunto estos alumnos se sitúan al nivel IIA, pues han resuelto correctamente hasta este nivel de dificultad.
- e_2) Alumnos que responden correctamente el ítem 12 y 13, empleando preferentemente la comparación de casos favorables en el 12 y la de casos desfavorables en el 13 y fallan el ítem 14, no llegando a aplicar la estrategia de correspondencia (6 casos). Estarían en el nivel IB. Aunque superan algún otro problema, ha sido porque la estrategia (incorrecta) empleada les ha sido productiva para ese problema particular. Un ejemplo es el del alumno 1, que, salvo en el ítem12, usa sistemáticamente la comparación de casos desfavorables, resolviendo correctamente los ítems 12 y 13, pero no el 14, y obteniendo éxito, de forma casual, en el ítem 16.
- e_3) El resto de los casos (5) no muestra patrones sistemáticos, salvo responder correctamente el ítem 1, (lo que correspondería a un nivel IA).

f) *Alumnos con 2 respuestas correctas. (Nivel IA, IB, IIA)*

- f_1) Respuestas correctas a los ítems 12 y 14 (5 casos). Generalmente el ítem 14 lo resuelven con una estrategia de diferencia, que, en este ítem es indistinguible de la correspondencia. El ítem 1 lo resuelven mediante comparación de casos favorables. No llegan a comparar casos desfavorables en el ítem 13, lo que lleva a una solución incorrecta. Por ello los situamos en el nivel IA. Lo mismo ocurre con los que sólo resuelven el ítem 12, de los tres primeros, como el alumno 103 y el 56, que usan sistemáticamente la comparación de casos favorables.
- f_2) Alumnos que, además del ítem 12, dan la solución correcta al ítem 13, mediante comparación aditiva, adecuada al mismo. Estos alumnos estarían situados en el nivel IB (33 y 68).
- f_3) El alumno 59 resuelve correctamente los ítems 13 y 14, usando la correspondencia en éste último, aunque falla en el primer ítem, posiblemente por falta de atención. Creemos que este alumno estaría en el nivel IIA.
- f_4) El resto de alumnos (8 casos) no muestra patrones identificables. En algunos de ellos (13, 32, 111) aparece sistemáticamente el sesgo de equiprobabilidad o el "enfoque en el resultado aislado".

g) *Alumnos con 1 respuesta correcta (IIA, IB, IA o inferior).*

- g_1) Alumnos que sólo resuelven el ítem 12, generalmente con estrategias de una variable (comparación de casos posibles o bien de casos favorables), por lo que estarían en el nivel IA (19 casos). Con frecuencia estos alumnos conservan la misma estrategia en todos los ítems, lo que les lleva al fracaso en los más difíciles. No aparecen estrategias de correspondencia. En los ítems 7 y 8, algunos alumnos usan estrategias aditivas (alumnos 22 en el ítem 7 y 137 en los ítems 7 y 8), otros justifican su creencia en la "suerte" (alumnos 19, 20, 28, 34 en el ítem 7, 50 en ambos), algunos dan respuestas ambiguas (35, 41, 91, en el ítem 7; 34, 73, 141, en el 8; 46 en ambos), o se basan en el mayor número de bolas de un color (20, 22, 28, 30, 35, 41, 58, 91, 127, en el ítem 8) o invocan factores causales (alumno 30 en el ítem 7).
- g_2) Alumnos que han resuelto correctamente y con estrategia adecuada el ítem 13 (nivel IB), aunque han fallado en el 12 (nivel A1), por usar una estrategia incorrecta (65 y 70) o basarse en el “enfoque en el resultado aislado” (66). Estos alumnos estarían iniciando el nivel IB (2 casos).

- g_3) El resto de alumnos (8 casos) sólo resuelven correctamente el ítem 14. Sin embargo, no usan una estrategia adecuada (correspondencia o proporcionalidad, salvo en el caso del alumno 90, y ni siquiera una estrategia numérica. Tampoco las usan o rara vez en los otros ítems. Estos sujetos se caracterizan por dar sistemáticamente una respuesta basada en el "enfoque en el resultado aislado" o el sesgo de equiprobabilidad y han dado la solución correcta al ítem 14 porque se trata de un caso de equiprobabilidad. Consideramos, en consecuencia que estos niños tienen un nivel muy bajo de razonamiento proporcional, que no alcanza incluso el IA. Sin embargo se aprecia una cierta idea de probabilidad, aunque incorrecta.

h) *Alumnos que han fallado todos los ítems (Ausencia de razonamiento proporcional)*

Finalmente los alumnos que han fallado todos los ítems (9 casos) se dividen en dos tipos generales: o bien usan solamente la comparación de casos favorables, sin que les resulte productiva por falta de razonamiento proporcional o bien manifiestan sistemáticamente el "enfoque en el resultado aislado" o una combinación de ambos. Son los alumnos en los cuales el razonamiento proporcional no ha empezado a desarrollarse, o bien mantienen una creencias erróneas sobre la probabilidad.

Como consecuencia destacamos lo siguiente:

◊ La distribución de niveles de razonamiento proporcional de los niños es: nivel 0 (15 alumnos), IA (29 alumnos), IB (32 alumnos), IIA (20 alumnos), IIB (24 alumnos), IIIA (12 alumnos) y IIIB (2 alumnos). Vemos que, en general el nivel de razonamiento proporcional de los alumnos es bajo. Ello podría ser un obstáculo para el aprendizaje de las probabilidades, aunque, también la enseñanza de la probabilidad podría ser un contexto muy rico que favoreciese el desarrollo del razonamiento proporcional de estos alumnos.

◊ Con un mismo nivel de desarrollo de razonamiento proporcional el éxito en los problemas probabilísticos de comparación de probabilidades ha sido muy variado, salvo en el caso de los niveles IIIB (7 aciertos) y IIIA (6 aciertos). En el nivel IIB el número de aciertos oscila entre 6 (3 niños), 5 (6 niños) y 4 (15 niños). En el nivel IIA el número de aciertos ha sido 4 (5 niños), 3 (13 niños), 2 (1 niño) y 1 (1 niño). En el nivel IB los aciertos han sido 4 (21 niños), 3 (7 niños), 2 (2 niños) y 1 (2 niños). En el nivel IA los aciertos han sido 3 (5 niños) 2 (5 niños) y 1 (19 niños). Los niños que no llegan al nivel IA han tenido 2 aciertos (8 casos), 1 acierto (7 casos) o 0 aciertos (9 casos).

◊ De lo anterior observamos que no hay una coincidencia total, aunque si bastante correlación entre el nivel de razonamiento proporcional y el éxito en tareas probabilísticas de un nivel proporcional dado.

Los desajustes son debidos a los siguientes casos:

a) Factores del problema que inducen la asignación de probabilidades subjetivas, especialmente en los dos ítems tomados del cuestionario de Fischbein y Gazit

b) Creencia en la imposibilidad de asignar probabilidades a los sucesos aleatorios, razonando de acuerdo al "enfoque en el resultado aislado" descrito por Konold o bien pensar que todos los resultados son equiprobables, mediante el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre.

c) Mayor fijación en los casos favorables, incluso en aquellos problemas que han de resolverse mediante la comparación de casos desfavorables. Creemos que es debido a un mecanismo similar al descrito por Kahneman y Tversky como la heurística de la disponibilidad.

Ahora bien, estos tres mecanismos no son pertinentes en los problemas de comparación de razones, mientras que pueden actuar en un problema probabilístico, incluso tan simple como los planteados. Esta diferencia entre los problemas de proporción y de probabilidad se pone también de manifiesto en el hecho de que no se conserva exactamente el orden previsto por los estudios de razonamiento proporcional en la jerarquía de dificultad de los problemas.

3.4.4. Implicaciones entre aciertos/fallos en los diversos ítems

Una de las conclusiones obtenidas en el análisis de los ítems de comparación de probabilidades es que no se cumple totalmente, aunque sí de una forma aproximada el orden en los niveles de dificultad de los problemas de comparación de fracciones señalados por Noelting (1980a), pues hemos observado, en algunos casos, inversión en el orden de dificultad de los ítems. Asimismo, al estudiar los patrones de respuestas, hemos obtenido que sólo en una parte de los alumnos se sigue un patrón de acuerdo con los supuestos de una progresión de la dificultad por niveles. Alumnos con un mismo número de respuestas correctas aparecen divididos en grupos con diferentes patrones de respuesta y, con bastante frecuencia, los ítems más difíciles son resueltos por alumnos que fallan los ítems más sencillos. Esto ocurre en los alumnos con 5, 4, 3, 2 y 1 respuesta correcta, donde más de la mitad de los sujetos no siguen el patrón supuesto en el escalograma de Gutman.

Por otro lado, nuestros supuestos teóricos, secundados por los resultados empíricos del capítulo 2, nos hacen concebir el conocimiento de los alumnos con una estructura no lineal, sino multidimensional. Para apoyar este supuesto, abordamos en esta sección el análisis implicativo de los aciertos/fallos de los alumnos en los diferentes ítems de comparación de probabilidades, es decir, de las 7 primeras columnas de la tabla de datos 3.4.7, de la página 117.

La técnica de análisis implicativo ha sido puesta a punto recientemente por el equipo de R. Gras y sus colaboradores (Gras, 1995). Mientras que las técnicas de análisis "cluster", análisis factorial y análisis de correspondencias se basan en las nociones de similaridad y distancia, que son simétricas, la implicación entre variables es una relación asimétrica. La asociación entre las variables (o categorías) A y B se basa en la estimación de la frecuencia de ocurrencia de $A \wedge B$ y de $noA \wedge noB$. Sin embargo, la implicación de A sobre B se basa en la rareza de ocurrencia de $A \wedge noB$. La probabilidad de ocurrencia de este suceso, en la hipótesis de independencia entre las variables es la intensidad de implicación de A sobre B, que varía de 0 a 1.

En los estudios didácticos nos interesa, con frecuencia, considerar este tipo de relaciones, por ejemplo, cuando queremos ver si la resolución de un tipo dado de problema por un alumno permite predecir su éxito en otro diferente (Batanero y cols., 1994b). Esta problemática se presenta cuando consideramos que el éxito en diversos tipos de ítems son indicativos de haber alcanzado ciertos "niveles" o "etapas" de conocimiento, por lo que es adecuado para nuestra investigación.

Esta aplicación del método recuerda a la técnica del escalograma (por ejemplo, el escalograma de Gutman). Sin embargo, el análisis implicativo extiende dicha técnica, puesto que permite trabajar también con variables cualitativas y puede producir como resultado una escala arborescente. No supone una ordenación lineal de los "niveles" de dificultad, como las técnicas de escalograma clásico. A partir de la noción de cuasi-implicación, medida por una intensidad, y la de grafo de implicación (Larher, 1991; Gras y Larher, 1993), este método permite representar, en el seno de una familia de variables, el orden (preorden) parcial que lo estructura.

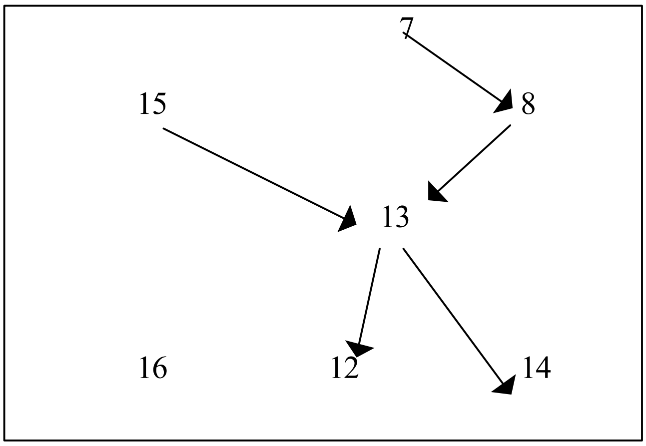
Puede también elegirse un "umbral de significación", de modo que sólo se representan en el grafo las relaciones cuya intensidad es superior a este umbral, que, al ser una probabilidad, varía entre 0 y 1. En nuestro caso, hemos elegido el umbral 0.95, es decir, en el grafo se presentan solamente aquellas implicaciones cuya intensidad es superior a 0.95, en una escala (0, 1). En la figura 3.4.1 se presenta el grafo obtenido, en el que podemos observar una estructura no lineal y una conservación sólo parcial de los niveles descritos por Noelting (1980a y b).

En primer lugar, el ítem 16 (nivel IIIB) aparece aislado, debido a que ha sido solucionado con éxito por pocos niños, y a que su acierto no ha proporcionado ningún valor predictivo sobre el acierto en el resto de los ítems.

En la parte superior del grafo aparecen dos ramas diferenciadas que se unen en el ítem 13. Es por ello que, tanto el ítem 15 (nivel IIIA2) como los ítems 7 y 8 (nivel IIB) implican al ítem 13 (nivel IB), lo que concuerda con los resultados de Noelting sobre la comparación de fracciones. Sin embargo, no hay relación entre el ítem 15 y alguno de los ítems 7 u 8 tomados de Fischbein y Gazit (1984) Creemos que ello confirma nuestra hipótesis de que los distractores incluidos por Fischbein y Gazit en estos ítems han variado el orden de dificultad prevista para estos problemas. Sin embargo, aparece una relación entre los ítems 7 y 8, ambos con distractores subjetivos y de los cuales el 8 es más simple, puesto que existe doble proporcionalidad entre los términos de las fracciones a comparar.

Aparece una nueva inversión del orden de dificultad por la implicación existente entre los ítems 13 (nivel IB) y 14 (nivel IIA). Ello es debido a la mayor dificultad que ha supuestos para los alumnos considerar las probabilidades cuando los casos favorables son iguales y los casos desfavorables son distintos, respecto a la clase de equivalencia de la unidad, resultado contrario al esperado en los problemas de comparación de fracciones. No aparece tampoco relación entre los problemas debido al efecto del "enfoque en el resultado aislado" o el "sesgo de equiprobabilidad" sobre algunos aciertos en el ítem 14, cuya solución correcta (equiprobabilidad) ha sido obtenida, en ocasiones, no por razonamiento proporcional, sino por este tipo de razonamiento.

Figura 3.4.1: Grafo implicativo



3.5. RAZONAMIENTO COMBINATORIO Y SU USO EN LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

Una vez analizado el razonamiento proporcional de los niños y su uso en los problemas de comparación de probabilidades, así como las estrategias empleadas en esta comparación, pasamos a describir los resultados obtenidos en el resto del cuestionario. Hemos dividido estos resultados en dos tipos: En primer lugar estudiamos el razonamiento combinatorio de los niños y su empleo en la asignación de probabilidades y en la determinación de los elementos del espacio muestral. Heitele (1975) considera que la combinatoria no es un simple auxiliar de la probabilidad, sino que existe entre ambas materias una estrecha conexión puesta de manifiesto en la estructura de los experimentos compuestos, cuyo espacio muestral se determina mediante operaciones combinatorias. Además, la definición de las operaciones combinatorias también puede llevarse a cabo usando la idea (probabilística) de muestreo con y sin reemplazamiento. Como sugieren Piaget e Inhelder (1951) una adecuada capacidad combinatora es precisa cuando avanzamos en el nivel de razonamiento probabilístico. Sin embargo, numerosas investigaciones, como las de Fischbein y Gazit (1988), Navarro-Pelayo (1994) y Batanero y cols. (1997a y b) ponen de manifiesto la falta de razonamiento combinatorio incluso en alumnos que han alcanzado la etapa de las operaciones formales, por lo que consideramos de interés analizar este tipo de razonamiento en nuestra muestra.

Por otra parte, en la sección 3.6. estudiamos las creencias previas de tipo subjetivo, que son el origen de muchos de los sesgos descritos en el razonamiento probabilístico, y que han sido clasificadas a su vez en tres apàrtados: a) las posibilidades de control de lo aleatorio; b) la percepción de la independencia en contextos prácticos y c) la idea de juego equitativo.

En primer lugar comentamos los resultados sobre el razonamiento combinatorio de los niños.

3.5.1. Enumeración del espacio muestral. Suceso seguro

Un primer punto en el que los niños deben aplicar su razonamiento combinatorio es la enumeración de los elementos del espacio muestral. Esta no es una actividad sencilla, como han puesto de manifiesto, entre otros, English (1991, 1993), Mendelhson (1981) o Maury y Fayol (1986) al estudiar la capacidad de enumerar colecciones sencillas de objetos y encontrar que las estrategias de los niños son, con frecuencia, incompletas o no sistemáticas. En el item 1, que reproducimos a continuación, proponemos una situación para evaluar la capacidad combinatoria de los alumnos y sus ideas sobre el suceso seguro.

ITEM1.- En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Piaget e Inhelder (1951) postulan que la formación de las ideas de azar y probabilidad dependen de la evolución de las operaciones combinatorias y que estas se desarrollan de forma natural al iniciarse la adolescencia. Por el contrario Fischbein (1975) cree que es necesaria una instrucción específica en combinatoria para que se desarrolle esta capacidad. En la investigación de Navarro-Pelayo (1994), los alumnos de 14 y 15 años presentaron dificultades generalizadas en la resolución de problemas combinatorios simples y la instrucción se mostró como un factor que influía positivamente en el razonamiento combinatorio de los alumnos, aunque no en todos los tipos de problemas.

Para resolver con éxito el ítem 1, el alumno debe conjeturar sobre las distintas cantidades que puede extraer, y las posibilidades de éxito que éstas le ofrecen, relacionando sus conjeturas con su idea de suceso seguro. Aunque la tarea puede parecer fácil, en la muestra anterior constatamos que los niños no parecían confundir los conceptos de seguro y probable , pero que, en una proporción importante de alumnos, su razonamiento combinatorio fue insuficiente para resolver este problema.

En la tabla 3.5.1 exponemos las respuestas obtenidas a este ítem según el curso académico. Hay dos opciones que hemos considerado correctas, aunque la que realmente implica una consideración de todas las posibilidades (enumeración sistemática) es la que señalamos con (**), mientras que la otra es la respuesta, más económica en tiempo y esfuerzo, de los que deciden sacar todas las bolas (*). Respecto a los alumnos que dan esta respuesta, no podemos afirmar que su razonamiento combinatorio sea o no erróneo, sino que no hacen uso de él porque no lo consideran necesario para resolver la tarea. Sin embargo, sí que manifiestan un adecuado significado personal sobre la idea de suceso seguro.

Tabla 3.5.1. Porcentaje de respuestas en el ítem 1, según curso

Respuestas	Curso				Total
	5º Prim.	6º Prim.	1º ESO	2º ESO	
3 bolas	41.7	37.8	21.1	34.4	33.6
6 bolas	25.0	40.5	18.4	18.8	25.9
8 bolas (**)	8.3	8.1	18.4	18.8	13.3
9 bolas (*)	5.6	2.7	28.9	12.5	12.6
Otra	11.1	10.8	10.5	15.6	11.9
No contesta	8.3	0.0	2.6	0.0	2.8

Los resultados obtenidos en este ítem indican una fuerte tendencia a confundir el suceso seguro con el posible, marcada por los alumnos que eligen como respuesta 3 bolas, ya que si se sacan menos de 3 bolas es imposible obtener una de cada color. Esta tendencia está más acentuada en los niños más jóvenes, pero se mantiene también por encima del 20% en los alumnos de 1º de E.S.O. y del 34% en los de 2º de E.S.O. Además, en el total de alumnos la respuesta mayoritaria a esta cuestión es la de afirmar que con tres bolas tendremos asegurado el éxito. En los niños que dan esta respuesta no existe un cálculo de las posibles combinaciones de colores.

Hemos analizado también los argumentos de los alumnos para confirmar nuestra interpretación. Algunos ejemplos de este argumento los encontramos en las respuestas de Ricardo (12;1): *"tres, porque hay tres tipos de colores"* (Alumno nº58), o de Miguel (12;10): *"hay que sacar tres bolas, porque hay tres colores, pero como hay de unos más que de otros, ahí actúa la suerte"* (Alumno nº 86). Parece que para este alumno el problema en asegurar el éxito con tres bolas está en la falta de equiprobabilidad de los colores. Belén (12;5) responde: *"Debe sacar tres bolas. A lo mejor le toca una bola roja, una bola verde y una bola blanca"* (Alumno nº 89). En la respuesta de esta alumna se ve claramente que está usando la idea de posibilidad en lugar de la de certeza.

Estos porcentajes pueden ser ampliados con los que responden que "6 bolas", pues dan esta respuesta interpretendo que es dentro de la caja donde debe quedar una bola de cada color. Jesús (11;1) nos dice: *"para estar segurísimo habrá que sacar seis bolas, porque si hay nueve en total, y hay de tres variedades, sacas bolas de cada variedad hasta que te quede una de cada variedad"* (Alumno nº 22).

También hemos encontrado que una parte de los alumnos que dan estos tipos de respuesta, no dan por sentado que la extracción de realice al azar, por lo que no encuentran improcedente sacar una bola roja, otra verde y otra blanca, como afirma Alicia (11;3): *"debe sacar una bola roja, una verde y una blanca, pues entonces, debe mirar dentro de la caja y coger una de cada color"*. (Alumno nº 38), o la respuesta de Francisco (11;7): *"saco tres bolas, una roja, una verde y otra blanca. Además, aquí no dice que no se vean"*. (Alumno nº 53). Por ello el análisis de entrevistas será necesario para interpretar mejor el razonamiento de estos alumnos.

En cuanto a los alumnos que realizan con éxito el estudio de posibilidades de colores para cada extracción, mediante razonamiento combinatorio, hemos encontrado que no llegan al 15% , en general. Existe un incremento, con la edad, de este tipo de respuesta, lo cual es lógico, si se consideran los estudios sobre razonamiento combinatorio. Estos alumnos sí son plenamente conscientes de la diferencia entre suceso probable y suceso seguro, y realizan mentalmente un proceso de enumeración que les lleva a la solución correcta. Un ejemplo lo tenemos en la respuesta de Ginés (11;3): *"si se sacaran primero las bolas rojas y verdes, serían siete, pero como son una de cada color, pues ocho"*. (Alumno nº26).

Tenemos otro porcentaje de alumnos que también manifiestan una adecuada intuición del suceso seguro al elegir sacar todas las bolas. No sabemos si no desglosan el repertorio de posibilidades por economizar esfuerzos o porque, como afirman Fischbein y cols. (1991), la totalidad sugiere al alumno cierto tipo de "unidad", que se asocia con más facilidad con el suceso seguro que un subconjunto de posibilidades, que sugiere mejor la noción de "posible". Alejandro (12;11), por ejemplo, decide así economizar sus esfuerzos: *"deberá sacar nueve, es decir todas, ya que si no, a lo mejor saca de unas todas y de otras nada"*. (Alumno nº 75). Ignacio (12;10) intenta asegurarse de la siguiente manera: *"tendrá que cogerlas todas y así estará lo más seguro posible"*. (Alumno nº 94).

Finalmente, hemos de admitir que, en algunos casos, nos han quedado ciertas dudas sobre si las respuestas obtenidas son fruto de diferentes interpretaciones de este ítem por parte de los alumnos, sobre todo los más pequeños, aunque en la mayoría de respuestas el razonamiento de los alumnos se sigue con claridad. En este sentido, las entrevistas personales nos proporcionarán la oportunidad de profundizar sobre las respuestas encontradas.

3.5.2. Asignación de probabilidades

El razonamiento combinatorio también se precisa para la asignación y comparación de probabilidades usando la regla de Laplace. Hemos incluido dos ítems de este tipo, aparte de los ya comentados sobre comparación de bolas en urnas. En los ítems 10 y 11 proponemos cuestiones en las que el alumno tiene que realizar una asignación de las probabilidades en un experimento, cuyo espacio muestral consta de dos o tres sucesos simples que no son equiprobables, lo que se deduce aplicando la regla de la suma. En el caso del ítem 10 el generador aleatorio es conocido y produce sólo dos resultados. Aunque los niños pueden aplicar aquí simplemente el razonamiento proporcional, no pedimos a los alumnos que elijan entre dos urnas, como en los ítems 7, 8, 12, 13, 14, 15 y 16, sino sólo que comparen cual de los dos sucesos simples es más probable. El ítem 11 es un problema que requiere una enumeración de posibilidades, además del razonamiento proporcional, pues el niño debe considerar la composición de la urna después de realizada la extracción. Debe además ser capaz de diferenciar la extracción con y sin reemplazamiento. En los dos casos nos interesa comprobar la incidencia del sesgo de equiprobabilidad, descrito por Lecoutre (1992), y su influencia según la edad y el rendimiento matemático de los alumnos. Por ello lo analizamos separadamente del resto de los ítems.

ITEM 10.-Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:
(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña ___
(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___
(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña ___
(D) No lo sé ___
¿Por qué?..

ITEM 11.- En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea?
(A) El rojo tiene mayor probabilidad ___
(B) El azul tiene mayor probabilidad ___
(C) El verde tiene mayor probabilidad ___
(D) Todos los colores tienen la misma probabilidad ___
(E) No lo sé ___
¿Por qué?..

Como puede verse en la tabla 3.5.2., los porcentajes de respuestas correctas en el ítem 10 se incrementan con la edad a lo largo de todos los cursos, aunque sin llegar a las tres cuartas partes de los alumnos en el último curso. Esto es debido a una fuerte influencia del distractor C, que es el que afirma que los sucesos son equiprobables, es decir que sugiere el sesgo de equiprobabilidad. Dado que en esta cuestión no había que comparar fracciones, sino que bastaba con una simple comparación absoluta del número de niñas y el de niños, podemos afirmar que la alta incidencia de este tipo de respuesta (C) está causada por una indebida asociación intuitiva entre aleatoriedad y equiprobabilidad, por la cual algunos alumnos sostienen que el hecho de que un resultado sea impredecible equivale a que todos los sucesos implicados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Tabla 3.5.2. Porcentaje de respuestas al ítem 10, según curso

Respuestas	Curso				Total
	5º Prim.	6º Prim.	1º ESO	2º ESO	
A	5.6	2.7	2.6	0.0	2.8
B *	55.6	62.2	65.8	71.9	63.6
C	30.6	29.7	29.0	25.0	28.7
D	5.6	5.4	2.6	3.1	4.2
Mas de una opcion	2.8	0.0	0.0	0.0	0.7

* Respuesta correcta

Así lo manifiesta Ricardo (12;1) en su explicación, después de elegir la opción C: *"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual. En parte podría ganar una niña"* (Alumno nº58). Este sesgo ha sido descrito por Lecoutre (1992). Los datos recogidos apuntan a que dicho sesgo, aunque mejora ligeramente con la edad, parece ser bastante estable. Como habíamos observado en la primera muestra y en los ítems de comparación de probabilidades, la aplicación de la regla de Laplace no es intuitiva para los niños que no han tenido enseñanza formal al respecto.

En la sección 3.6.2. tendremos ocasión de comprobar la incidencia de algunos sesgos muy arraigados relacionados con la independencia. En el ítem 11 trataremos el caso contrario. Presentaremos sucesos que en realidad son dependientes para ver qué tratamiento les da el alumno. Aquí interviene un generador aleatorio que produce tres resultados no equiprobables. Se informa sobre la realización previa de varias extracciones sin reemplazamiento, conociendo el resultado y se pregunta acerca de la siguiente extracción. Trataremos de averiguar cómo influye en los alumnos la información previa suministrada y si el nuevo suceso es o no tratado como dependiente de los anteriores, así como la capacidad combinatoria de los niños para enumerar los casos posibles.

Tabla 3.5.3. Porcentaje de respuestas al ítem 11, según curso

RESPUESTAS	CURSO				TOTAL
	5º Prim.	6º Prim.	1º ESO	2º ESO	
A	8.3	5.4	0.0	0.0	3.5
B *	50.0	51.4	68.4	71.9	60.1
C	11.1	2.7	2.6	0.0	4.2
D	25.0	32.4	28.9	18.8	26.6
E	5.6	5.4	0.0	6.2	4.2
Mas de una opción	0.0	2.7	0.0	3.1	1.4

* Respuesta correcta

Como puede verse, los porcentajes de éxito aumentan con la edad, aunque, al igual que ocurría con el ítem 10, ni siquiera en el último curso las respuestas correctas llegan a las tres cuartas partes de los alumnos, lo que nos lleva de nuevo a considerar el factor de equiprobabilidad, que vuelve a repetirse con una frecuencia aproximada, (aunque algo inferior en 5º y 1º) a la del ítem 10. Esto podría corroborar el dato de repercusión del sesgo de equiprobabilidad (opción D) en, al menos, la cuarta parte de los alumnos, cuando se encuentran ante situaciones aleatorias.

Entre los razonamientos utilizados para explicar la elección realizada hemos detectado un 8.4% de alumnos que utilizan, para apoyar la equiprobabilidad, el argumento de que la diferencia entre las cantidades de bolas es muy pequeña, y por tanto no influye significativamente en la comparación de probabilidades. Así nos lo expone Alejandro (11;7) después de elegir la opción D (opción de equiprobabilidad): *"Porque por una bola tiene que ser muy raro que salga"* (Alumno nº46); o Javier (11;9) que también elige la opción D aduciendo: *"Porque hay el mismo número de bolas menos la azul"* (Alumno nº 68).

En cuanto a la influencia del rendimiento matemático en las respuestas a estos dos ítems, los datos, que aparecen en la tabla 3.5.4, muestran que en ambos ítems hay un mayor porcentaje de respuestas correctas entre los alumnos de rendimiento alto, a la vez que disminuye algo el sesgo de equiprobabilidad en el ítem 10, y, menos significativamente, en el ítem 11.

Tabla 3.5.4 Porcentaje de respuestas correctas y sesgo de equiprobabilidad en los ítems 10 y 11, según el rendimiento matemático.

Item	Respuesta	Rendimiento matemático			Total
		Bajo	Medio	Alto	
10	Correcta	58.1	58.6	73.8	62.9
	Equiprobabilidad	32.6	32.8	21.4	29.4
11	Correcta	53.5	58.6	69.0	60.1
	Equiprobabilidad	25.6	29.3	23.8	26.6

Es importante no obstante destacar que, aunque el sesgo de equiprobabilidad parece mejorar muy levemente con la edad, continúa teniendo una incidencia de más del 20%, incluso en los niños de nivel matemático alto.

3.6. CREENCIAS PREVIAS

El concepto de probabilidad ha tenido, desde sus orígenes, un doble significado en el seno de la institución matemática (Hacking, 1975). Desde un punto de vista objetivo, la probabilidad se muestra como un grado que mide la evidencia objetiva de una afirmación particular, evidencia obtenida, bien de información de tipo estadístico (probabilidad frecuencial), bien por consideraciones de simetría o aplicación del principio de indiferencia (probabilidad laplaciana). Sin embargo, una segunda corriente es la consideración de la probabilidad como una medida de la creencia personal del sujeto en dicha afirmación (probabilidad subjetiva). Estas dos corrientes de pensamiento conviven en la actualidad, no sin mutuas críticas y es tan fuerte su influencia que han dado origen a dos epistemologías diferenciadas de la inferencia estadística (inferencia clásica y bayesiana).

Uno de los puntos en que se fundamente la posición subjetivista es que la información que posee la persona que emite un juicio de probabilidad puede cambiar este juicio. Esta afirmación tiene un peso evidente en situaciones como el diagnóstico médico o la inversión en bolsa, en que el modelo bayesiano puede aprovechar con ventaja el conocimiento experto en un cierto campo.

En el contexto escolar, nuestros alumnos incorporan con frecuencia conocimientos y creencias que influyen en su asignación de probabilidades en problemas que han sido propuestos para ser resueltos dentro de la norma objetiva, bien clásica o frecuencial. Aunque algunas de estas creencias son infundadas, y no pertinentes para la solución del problema, no por ello tienen menor fuerza, y el profesor debe ser consciente de su existencia, y conocerlas, ya que la enseñanza de la probabilidad debe fundamentarse en estas creencias previas de los alumnos. Como indica Konold (1995), no es suficiente realizar en clase experimentos para cambiar las intuiciones de los alumnos, porque los datos experimentales rara vez nuestran todos los patrones que queremos enseñar y porque, debido a la variabilidad de los experimentos, los resultados experimentales podrían incluso empeorar las intuiciones incorrectas de los alumnos, al coincidir por azar con sus expectativas previas.

Nuestro interés en esta sección se centra en el estudio de los diferentes factores de tipo subjetivo que pueden influir en la asignación y comparación de probabilidades,por los niños, que ya habían sido detectados en los ítems tomados del cuestionario de Fichbein y Gazit. A continuación describimos los resultados obtenidos, clasificados según diversos apartados.

3.6.1. Factores causales y control de lo aleatorio

En los items 2 y 3 tratamos de evaluar la tendencia de los alumnos a introducir factores causales improcedentes que les ayuden a controlar las situaciones aleatorias, y que han sido descritos en investigaciones, como las de Fischbein y cols. (1991). En ambas cuestiones se preguntaba acerca de la influencia, en sentido positivo o negativo, de dos conocidas supersticiones muy arraigadas en la cultura popular, como la creencia en que "comenzar con el pié derecho" puede afectar positivamente una actividad, o el popular descrédito del día 13, sobre todo cuando coincide con martes, como día fatídico. Estos ítems son los siguientes:

ITEM 2.- José procura entrar en clase, cada día, poniendo primero el pié derecho. Cree que ésto aumenta su suerte de obtener buena nota. ¿Cuál es tu opinión?

ITEM 3.- Marta tiene una cita con el chico que le gusta para el día 13 de este mes. Ella está muy preocupada y va a intentar cambiar la cita de día, ya que dice que siendo día 13 todo va a salir mal, porque este número trae muy mala suerte. ¿Tú que opinas?

En la tabla 3.6.1. presentamos los porcentajes de los tipos de respuesta encontrados. Como puede observarse, en ambas cuestiones el porcentaje de respuestas correctas es bastante alto y aumenta con la edad de los alumnos, hasta el punto de que a más de un 90 % de los alumnos de 2º curso no parece afectarles este tipo de factores socioculturales en sus decisiones en situaciones de incertidumbre. Alegan que se trata de supersticiones, y en su justificación, muchos alumnos mencionan experiencias personales, como el caso de Alberto (12;0) que responde al ítem 2 de la siguiente manera: *"Que es una tontería porque hay muchos chicos de mi clase, incluido yo, que no entran con el pié derecho y sacamos buenas notas"*(Alumno nº 42), o la respuesta que da Sandra

(10;7) al ítem 13: *"que eso es mentira, porque yo soy el número 13 en clase y no tengo mala suerte"*(Alumno nº 13).

Sin embargo, todavía tenemos un 20% de alumnos de 5º curso que admiten la superstición, y hemos de destacar el dato de que, entre los alumnos más supersticiosos (5º y 6º), el porcentaje de repuestas correctas es superior en el ítem 2 que en el 3. Esto puede ser debido a que la creencia de que los días martes y trece traen mala suerte esté más extendida popularmente. Roberto (12;2) responde al ítem 3: *"eso es una tontería, en cambio, si es martes y trece sí, porque a mí me salió todo mal"* (Alumno nº 72) o Rafael (10;9) que afirma *"trae mala suerte si el trece cae en martes, si no, no tiene por qué salir mal"* (Alumno nº9). Este mismo alumno responde al ítem 12: *"que hace bien,* (en entrar con el pié derecho) *y yo lo voy a intentar".*

Tabla 3.6.1. Porcentaje de los respuestas a los items 2 y 3, por cursos.

	5º Prim.		6º Prim.		1º ESO		2º ESO	
	Item 2	Item 3	Item 2	Item 3	Item 2	Item 3	Item 2	Item 3
Resp. Correcta	69.4	55.6	86.7	78.4	84.2	86.8	90.6	90.6
Admite la superstícion	19.4	22.2	2.7	8.1	0.0	2.6	0.0	0.0
Predestinacion	2.8	2.8	0.0	0.0	2.6	0.0	0.0	0.0
Ambigua	8.3	19.4	10.8	8.1	13.2	7.9	9.4	9.4
Otras	0.0	0.0	0.0	2.7	0.0	2.6	0.0	0.0
No contesta	0.0	0.0	0.0	2.7	0.0	0.0	0.0	0.0

La respuesta incorrecta con más peso ha sido la que hemos denominado "ambigua", debido a que niega la influencia de la creencia, pero a la vez la justifica. Por ejemplo, Jose Antonio (13;3) responde al ítem 13 *"que a la gente se le ha metido en la cabeza que en ese día todo ha de salir mal, y por miedo a eso, todo le sale mal por su culpa"* (Alumno nº 135). En esta respuesta, sin embargo, parece haber subyacente una creencia en el control de lo aleatorio, aunque sea a través de mecanismos psicológicos. También encontramos unos pocos alumnos que no dejan lugar para el azar, ya que para ellos todo está predestinado, como ocurre con Lina (11;3) que responde al ítem 2: *"Que eso está destinado. No tendría que entrar con el pié derecho"* y al ítem 3: *" yo creo que eso es una tontería. Eso es el destino, y si está destinado que le va a salir mal la cita, pues le saldrá, y si no, pues no"* (Alumno nº 36). En cualquier caso, pensamos que la realización de entrevistas personales a algunos alumnos que admiten las creencias podría arrojar algo más de luz sobre el razonamiento probabilístico de estos alumnos.

En cuanto a la relación entre el porcentaje de respuestas correctas y el rendimiento matemático, tal y como se observa en la tabla 3.6.2 encontramos que los porcentajes de éxito están muy igualados en los niños con rendimiento bajo y medio, y son ligeramente superiores en los niños con un rendimiento calificado como alto. De nuevo las respuestas son mejores en el ítem 2, aunque las diferencias se van reduciendo con el aumento del rendimiento matemático. Hemos de mencionar también que, aunque no se observe en la tabla, el porcentaje de los alumnos que admiten la superstición desciende, en ambos ítems, al aumentar el rendimiento matemático, pasando de un 11.6 % para los de rendimiento bajo a un 2.4% para los alumnos de rendimento alto.

Tabla 3.6.2. Porcentaje de respuestas correctas en función del rendimiento matemático

Item	Rendimiento Matemático			Total
	Bajo	Medio	Alto	
2	81.4	81.0	85.7	82.5
3	74.4	75.9	83.3	77.6

3.6.2. Percepción de la independencia y uso de heurísticas

La noción de independencia de sucesos tiene una importante base subjetiva que es fuente de algunos sesgos. Heitele (1975) señala la dificultad de aplicar esta idea en un contexto práctico, incluso cuando se comprenda y acepte desde un punto de vista teórico. Para Sanchez (1996) y Truran y Truran (1997), es necesario diferenciar entre la independencia de dos sucesos referidos a un mismo experimento y la independencia de experimentos. Mientras que la primera es fácil de comprender, la segunda siempre tiene un componente subjetivo sobre si el resultado de un experimento aleatorio está o no influído por otro experimento aleatorio, posiblemente del mismo generador aleatorio.

En los ítems 4, 5 y 6 se estudia la intuición que manifiestan los alumnos sobre la independencia de experimentos, ante la posible influencia de factores ajenos a los mismos. En el caso de los ítems 4 y 6 el factor introducido es la realización o no del suceso en extracciones anteriores. En el ítem 4 se considera la creencia en un número afortunado (asignar más probabilidades a la obtención de un número al saber que ha resultado ganador anteriormente). También está relacionado con la idea de que un proceso estocástico tiende a equilibrarse (si un número todavía no ha salido, tiene mayor probabilidad), es decir con la heurística de la representatividad.

En el ítem 6 se considera más específicamente la conocida "falacia del jugador" o efecto de recencia negativa (Fischbein, 1975), por el que la no ocurrencia de un suceso durante varias extracciones consecutivas aumentaría su probabilidad de ocurrencia en próximas extracciones. Aunque este sesgo también puede manifestarse en el ítem 4, aquí se presenta explícitamente.

En el ítem 5 el sesgo implicado viene de la aplicación de la heurística de la representatividad (Kahneman y cols., 1982), según la cual, el sujeto considera más probable aquél suceso que más se parece al proceso de generación aleatoria, que se percibe como no ordenada. A continuación reproducimos estos ítems.

ITEM 4.- Lola rellenó en cierta ocasión un impreso de lotería con los siguientes números: 1, 7, 13, 21, 22, 36; y ganó. Como consecuencia, piensa que debe jugar siempre con el mismo grupo de números, porque de este modo ganará. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

ITEM 5.- Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos.

Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana?

ITEM 6.- Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "la lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces, y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima". ¿Cuál es tu opinión sobre la explicación de Pedro?

Tabla 3.6.3. Porcentajes de los tipos de respuesta obtenidos en los ítems 4, 5 y 6, desglosados por curso.

Item	Curso	Respuesta							
		Independencia	Control azar	Recencia Negativa	Numeros en orden	Numeros desorden	Suerte o destino	Otras	No contesta
4	5º	55.6	0.0	33.4	----	----	8.3	2.8	0.0
	6º	35.1	8.1	37.8	----	----	5.4	13.5	0.0
	1º	34.2	0.0	42.1	----	----	18.4	2.6	2.6
	2º	53.1	0.0	37.5	----	----	3.1	6.2	0.0
Total ítem 4		44.1	2.1	37.8	----	----	9.1	6.3	0.7
5	5º	25.5	----	----	5.6	38.9	5.6	25.0	0.0
	6º	5.4	----	----	0.0	45.9	8.1	40.5	0.0
	1º	39.5	----	----	0.0	36.8	0.0	21.1	2.6
	2º	46.9	----	----	0.0	34.4	6.2	9.4	3.1
Total ítem 5		28.7	----	----	1.4	39.2	4.9	24.5	1.4
6	5º	8.3	----	47.2	----	----	----	41.7	2.8
	6º	16.2	----	43.2	----	----	----	35.1	5.4
	1º	36.8	----	23.7	----	----	----	34.2	5.3
	2º	31.3	----	34.4	----	----	----	28.1	6.2
Total ítem 6		23.1	----	37.1	----	----	----	35.0	4.9

Los resultados obtenidos en estos ítems los presentamos en la tabla 3.6.3. según el tipo de respuesta asignada, y desglosadas por curso académico, para ver la influencia de la edad.Los items propuestos eran de respuesta abierta, por lo que los tipos de respuesta detectados fueron clasificados, a posteriori, tal y como aparecen en la tabla. En las tres cuestiones, la respuesta correcta es la denominada "Independencia", en la que el alumno manifiesta explícitamente que reconoce la independencia de los sucesos implicados. Hemos denominado "control del azar" a aquellas respuestas al ítem 4 en que el alumno es partidario de volver a jugar con el mismo número, porque con él tendrá más posibilidades de ganar.

Llamamos "recencia negativa", según la terminología de Fischbein (1975), al tipo de respuesta en que el alumno considera más probable el suceso contrario al que ya ha ocurrido. Este tipo de respuesta aparece tanto en el ítem 4, como en el 6.

Con los términos "numeros en orden" y "numeros en desorden" nos referimos a la preferencia de los alumnos como suceso más probable de un número en que la secuencia de cifras guarde determinada relación (123456), u otro cuya secuencia, también explícita, no guarde relación aparente (378146).

La categoría de respuesta denominada "suerte o destino" se refiere a aquellos alumnos que proclaman la equiprobabilidad de todos los sucesos, en base a que todos "dependen de la suerte" o porque todo está predestinado.

De los datos obtenidos, podemos observar que, en general, menos de la mitad de los alumnos reconocen la independencia en el item 4. Además, el porcentaje de respuestas correctas disminuye con la edad a lo largo de los tres primeros cursos, para aumentar algo en el último curso. Pero son, en general, los niños más pequeños, los que mejor responden a esta cuestión, y los que manifiestan una menor incidencia del sesgo de recencia negativa, que es la repuesta incorrecta más frecuente en este ítem, llegando a alcanzar el 42% de los alumnos de 1º.

Los sujetos que manifiestan esta tendencia responden que es mejor elegir otros números distintos, porque los que ya han salido no volverán a salir de nuevo, como lo manifiesta Ricardo (12;1) al afirmar: *"la lotería nunca es igual, siempre cambian de números para que haya más intriga. Lola, yo que tú rellenaría otros números"* (Alumno nº58). Esta respuesta nos proporciona un ejemplo de la heurística de representatividad, pues el alumno no admite que, en un proceso que es aleatorio, pueda repetirse un resultado. Esta tendencia es muy fuerte, y sigue revelándose con la misma incidencia en el ítem 6, sólo que en este caso son los niños más pequeños los que más la manifiestan.

En el ítem 5 el porcentaje de respuestas correctas es aún inferior, aunque aquí, salvo en el curso de 6º, el reconocimiento de la independencia parece aumentar con la edad. El bajo porcentaje de éxito en 6º coincide con un aumento considerable de las respuestas denominadas como "otras", en las que se incluyen un gran número de respuestas demasiado ambigüas para clasificarlas de correctas, pero que no denotan, necesariamente, una falta de reconocimiento de la independencia por parte de los alumnos, sino simplemente una falta de explicitación de la misma.

Algunos ejemplos de este tipo de respuesta son los que dan Laura (11;3) *"que deberían comprar los dos, por si acaso compran uno y sale el otro"* (Alumno nº65) y Pedro (13;2) *"Si Olivia quiere un número, que lo coja, y si le da suerte, mejor, y Juana lo mismo"* (Alumno nº 73). De todas formas, el tipo de respuesta más frecuente, en la totalidad de los alumnos, es la de considerar más probable el número cuyos dígitos presentan un aparente desorden, lo que vuelve a manifestar la incidencia de la heurística de representatividad.

En cuanto al ítem 6, hemos de destacar un efecto contrario al ítem 4 en lo que al porcentaje de respuestas correctas se refiere. Mientras que cuando se le preguntaba al alumno acerca de un número afortunado (ítem 4) el reconocimiento de la independencia decrecía ligeramente con la edad, en los tres primeros cursos, subiendo algo en 2º; en este caso, en que se pregunta acerca de un número "que no toca", el reconocimiento de la independencia aumenta considerablemente con la edad en los tres primeros cursos, para bajar algo en 2º.

Este efecto puede deberse a dos factores: por un lado hemos de considerar de nuevo el alto porcentaje de alumnos, mayor en los cursos inferiores, que dan respuestas ambiguas, o que no abordan el problema propuesto, centrándose en cuestiones morales o de índole social, como la repuesta de Elena

(10;1), que nos dice *"que no hay que tener ese afán de ganar, porque a lo mejor no gana en ninguno y es desperdiciar el dinero tontamente"*. (alumno nº29), o la de Amanda (11;8) *"es un dinero perdido. Si sigue perdiendo, seguirá jugando, y si gana también. La lotería es un juego y no hay que ganar a la fuerza"* (Alumno nº63). No estamos seguros de si los alumnos que dan una respuesta de este tipo reconocen la independencia, aunque puedan existir ciertos indicios. Por eso no las hemos incluído entre las respuestas correctas.

Por otra parte, el descenso de los porcentajes de las respuestas de recencia negativa en los tres primeros cursos, podría apoyar la validez del aumento en las respuestas correctas, lo que nos indicaría que el reconocimiento de la independencia estaría condicionado por el tipo de pregunta y desde luego, el porcentaje de los alumnos que rechazan la idea de que la esperanza de ganar aumenta después de una larga racha sin ganar es inferior a los que admiten que, después de una ganancia, el número tiene las mismas posibilidades de volver a salir que las que tenía al principio y mientras esta última respuesta parece ser bastante estable, e incluso intuitiva para la mitad de los alumnos más pequeños, no ocurre así con la anterior, en que pocos alumnos manifiestan una correcta intuición de independencia, y ésta parece madurar algo con la edad.

En general, lo que sí podemos afirmar del análisis de respuestas a estos tres ítems es la gran incidencia que tiene la heurística de representatividad en las decisiones de los alumnos, que les lleva a manifestar importantes sesgos relacionados con la intuición de independencia de sucesos en más de un 37% de los casos.

Creemos interesante analizar también las respuestas a estos ítems según el rendimiento matemático de los alumnos, cuyos resultados aparecen en la tabla 3.6.4.

Tabla 3.6.4. Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas más frecuentes a los items 4, 5 y 6, según rendimiento matemático

Item	Respuesta	Rendimiento matemático			Total
		Bajo	Medio	Alto	
4	Correcta	48.8	37.9	47.6	44.1
	Recen negat	30.3	39.6	42.8	37.8
5	Correcta	32.6	25.9	28.6	28.7
	Nos desorden	25.6	39.7	52.4	39.2
6	Correcta	20.9	22.4	26.2	23.1
	Recen negat	32.6	46.6	28.6	37.1

En general, podemos observar un efecto similar a las respuestas desglosadas por curso, pero más acentuado, si cabe. Vemos que en los ítems 4 y 5 hay bastante estabilidad en el porcentaje de respuestas correctas, pero, sin embargo, los principales sesgos muestran un claro efecto creciente con el rendimiento matemático. Sólo en el ítem 6, el que menos respuestas correctas presenta, parecen aumentar levemente las respuestas correctas, y estabilizarse el sesgo según el rendimiento matemático.

Esto nos lleva a concluir que este tipo de errores, basados en la heurística descrita por Kahneman, Slovic y Tversky (1982), lejos de ser superados de forma espontánea por los alumnos con un buen rendimiento en matemáticas, ni de forma natural según el desarrollo evolutivo de los individuos, se ven favorecidos por el proceso de enseñanza, acentuándose en los alumnos que presentan un mayor éxito en las calificaciones de la asignatura.

3.6.3. Juego equitativo

La noción de juego equitativo se ha tratado en los ítems 8 y 9, en contextos de extracción de bolas y lanzamiento de un dado, respectivamente, que se incluyen a continuación.

ITEM 8.- Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

ITEM 9.- María y Esteban juegan a los dados. María gana 1 peseta si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1 Esteban gana una cierta cantidad de dinero. ¿Cuánto debe ganar Esteban cuando le sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo?

RESPUESTA _________ pts.

¿Por qué? ....

El primer caso ha sido analizado en la sección 3.4., en la que tratábamos las tareas de elección de urnas. Encontramos, entonces, (ver tabla 3.4.5, página 114), que más del 42% de los alumnos consideraba que el juego no era justo, porque aplicaban la estrategia de comparación de los casos favorables como única variable, con lo que los sucesos no resultaban equiprobables. Los alumnos, en este ítem interpretaban que juego justo es sinónimo de equiprobabilidad de los sucesos esperados. Por ejemplo, Cristina (11;3) responde: *"Eduardo tiene razón. Para jugar a este juego, deberían de tener los dos la misma cantidad de bolas"*. (Alumno nº 56).

Una de las razones por las que intentábamos explicar el significativo aumento de respuestas incorrectas justificadas por medio de la estrategia de comparación de casos favorables, con respecto a los ítems 14 y 7, que correspondían al mismo nivel de dificultad, es que ha sido precisamente la introducción de la idea de juego justo a la tarea de comparación de urnas lo que ha provocado una comparación más simplista de los sucesos, conformándose con la desigualdad de bolas para afirmar la ventaja de uno de los jugadores, mientras que cuando no se introducía esta idea, el análisis de ventajas se realizaba más pormenorizadamente por una mayor cantidad de alumnos (hay un 26% de alumnos que responden correctamente, frente a un más de la mitad en el ítem 14).

En el ítem 9 se introduce una referencia al premio. Ahora la desigualdad entre las probabilidades de ganancia de los jugadores es evidente y se pone el énfasis en utilizar la recompensa como factor equilibrador de ventajas desiguales. En la tabla 3.5.6. exponemos las soluciones propuestas por los alumnos.

Tabla 3.6.5. Porcentaje de respuestas al ítem 9, según curso

Respuesta	Curso				Total
	5ª Prim	6º Prim	1º ESO	2º ESO	
1 pts.	13.9	16.2	7.9	9.4	11.9
2, 3 ó 4 pts	8.4	10.8	10.5	6.2	9.1
5 pts. *	44.4	56.8	63.2	68.7	58.0
6 pts.	11.1	10.8	5.3	9.4	9.1
Otra	11.1	5.4	5.3	6.2	7.0
No contesta	11.1	0.0	7.9	0.0	4.9

* Respuesta correcta

En general, más de la mitad de los alumnos responden correctamente a este ítem. Además, el porcentaje de éxito se incrementa con la edad. Entre las respuestas incorrectas, hay una que tiene un peso algo superior a las demás. Es la respuesta "1 pts.". Este tipo de respuesta es más frecuente en los cursos inferiores y manifiesta la tendencia a igualar las ventajas de los contrincantes asignando las mismas cantidades a ambos, aún ignorando la información dada de no equiprobabilidad de los sucesos implicados. Así nos lo demuestra Javier (10;5) con su respuesta: *"(Esteban debe ganar) 1 pts porque así da igual la cantidad que salga. Así los dos ganarán los mismos dineros"* (Alumno nº14)

Debemos concluir, pues, que aunque la mayoría de los sujetos son conscientes de que la recompensa puede equilibrar las desigualdades en las ventajas, algunos alumnos de los cursos inferiores no llegan a coordinar las diferentes variables que les proporciona la información del problema, para darse cuenta de esta posibilidad de equilibración. Así, realizan, de nuevo, la comparación de una sola variable: bien los sucesos implicados, bien la recompensa asignada a cada jugador, pero no consideran ambas cosas a la vez.

En cuanto a los argumentos empleados, un 46% del total de los alumnos apoyan su respuesta correcta con un argumento en que se cuantifican las posibilidades de los contrincantes, como ocurre con la respuesta de Ricardo (12;1): *"María tiene 5 oportunidades más, o sea, que considero justo que sean 5 pts."* (Alumno nº 58), o la de Carlos (10;11): *"5 pts., porque María tiene cinco oportunidades para ganar 1 pts y Esteban una oportunidad".* (Alumno nº 2), mientras que un 19.6% de los argumentos admiten la ventaja de María, pero no la cuantifican explícitamente.

Este tipo de argumentos son empleados para justificar la respuesta correcta, o cualquier cantidad de dinero superior a 1 pts. Así, Ginés (11;3) responde: *"(Esteban debe ganar) 6 pts. porque tiene menos posibilidades"* (Alumno nº 26), y Triana (11;3) utiliza el mismo argumento para justificar otra respuesta: *"(Esteban debe ganar) 2 pts porque si no, el juego no es justo. Tiene que ganar más dinero porque María tiene más posibilidades de ganar"* (Alumno nº 16). También Carlos (12;4) utiliza el mismo argumento, pero esta vez acompaña a la respuesta correcta: *"(Esteban debe ganar) 5 pts. porque María tiene muchas más posibilidades, cosa que Esteban no, y lo más seguro es que gane María, por eso, si gana Esteban, debe ganar más dinero".* (Alumno nº 77).

También nos interesaba estudiar el efecto del rendimiento matemático sobre las respuestas de los alumnos (tabla 3.6.6), y hemos obtenido un claro incremento del porcentaje de respuestas correctas al aumentar el rendimiento matemático de los alumnos, así como una menor incidencia de los demás tipos de respuesta en los alumnos de alto rendimiento académico, por lo que podemos afirmar que el proceso de instrucción, al igual que la maduración, influyen significativamente en la consideración de juego equitativo por parte del alumno.

Tabla 3.6.6. Porcentajes de respuestas al ítem 9, según rendimiento matemático

Respuestas	Rendimiento matematico			Total
	Bajo	Medio	Alto	
1 pts	14.1	17.2	2.4	11.9
2, 3 ó 4 pts	18.6	5.1	4.8	9.1
5 pts *	46.5	60.3	66.7	58.0
6 pts	7.0	6.9	14.3	9.1
Otra	11.6	5.2	4.8	7.0
No contesta	2.3	5.2	7.1	4.9

* Respuesta correcta

También hemos podido observar una tendencia a la justificación de la respuesta mediante la cuantificación, tanto mayor cuanto más alto es el rendimiento. Así, el porcentaje de alumnos que dan una justificación cuantitativa para su respuesta correcta va creciendo según el rendimiento matemático (34.9%, 46.6% y 57.1% para un rendimiento bajo, medio y alto, respectivamente), mientras que los que hacen una apreciación global en la comparación de posibilidades disminuye del rendimiento bajo al alto, siendo aún más bajo para los de rendimiento medio (27.%, 13.8% y 19.0% para un rendimiento bajo, medio y alto, respectivamente)

3.7. CONCLUSIONES

En este capítulo hemos analizado los resultados obtenidos de aplicar un tercer cuestionario a una muestra de niños de 10 a 14 años. Nos hemos enfocado en la comparación de probabilidades simples y el uso de factores subjetivos en la asignación de probabilidades como componentes específicos del razonamiento probabilístico de los niños, para posteriormente elegir algunos alumnos sobre los que se llevarán a cabo entrevistas de mayor profundidad. Estos puntos han sido ampliados con el análisis del razonamiento combinatorio y las intuiciones de los alumnos sobre el suceso seguro y el juego equitativo. Las conclusiones obtenidas sobre las respuestas al cuestionario son las siguientes:

◊ El nivel de razonamiento proporcional que los alumnos han utilizado en los problemas de comparación de probabilidades no alcanza la comparación de fracciones cualesquiera (nivel IIIB en la terminología de Noelting, 1980a y b), incluso sencillas, aunque muchos alcanzan la comparación de fracciones en el caso de clases de equivalencia (niveles IIIA y IIB). Esto da una indicación de los tipos de problemas de comparación de probabilidades que sería posible abordar para estos alumnos y en particular, en cada uno de los niveles escolares, ya que se ha mostrado una progresión importante con la edad, aunque no en todos los problemas propuestos.

◊ Una reflexión importante sobre este resultado se refiere a la necesidad de una planificación muy cuidadosa de las propuestas de trabajo, para estas edades, con probabilidades frecuenciales, puesto que al estudiar las frecuencias relativas obtenidas en sucesivas series de ensayos, los alumnos precisarán la comparación de diferentes fracciones y en algunas de estas actividades podrían aparecer problemas del nivel IIIB. Parece plausible que los niños sean capaces de comparar las estimaciones frecuenciales de las probabilidades de distintos sucesos en una misma serie de experimentos, puesto que en este caso tendríamos que comparar fracciones con el mismo denominador. No obstante, éstas podrían no ser reducible a tareas de nivel IA o IB en el caso de que el espacio muestral se componga de más de dos experimentos simples, donde el número de casos desfavorables pudiera no ser tan evidente a los alumnos o donde el número de casos favorables o desfavorables no fuera igual para permitir una tarea de tipo IA o IB. En todo caso, pudiera resultar difícil la comparación de frecuencias relativas en distintas series de experimentos, al tratarse de una tarea de un nivel IIIA o IIIB. Esta dificultad podría añadirse a las detectadas por Serrano y Cols. (1992; 1996).

◊ El orden de dificultad de los problemas de comparación de probabilidades propuestos no coincide exactamente, aunque sí guarda una cierta relación con la dificultad prevista para problemas equivalentes de comparación de fracciones. Por un lado, hemos visto que ha sido más sencillo a los alumnos la comparación de problemas tipo IIA (clase de equivalencia de la unidad) que el tipo IB (comparación de casos desfavorables), posiblemente porque los casos favorables tienen mayor impacto en la atención que los casos desfavorables. Por otro lado, los distractores subjetivos incluidos en algunos ítems han influido en la comparación de probabilidades por parte de los niños, haciendo también variar el nivel de dificultad de las tareas proporcionales. Sería necesaria una investigación más detallada sobre este punto para poder separar el efecto de cada uno de estos factores sobre la dificultad de la tarea. En cualquier caso, tanto el análisis de patrones de respuestas como el análisis implicativo nos indican una jerarquía no lineal en la dificultad de los problemas propuestos.

◊ Los alumnos han demostrado poseer un adecuado significado personal de la idea de suceso seguro, aunque en algunos casos se confunde con la de suceso posible. Sin embargo, el razonamiento combinatorio es con frecuencia insuficiente para resolver con éxito el problema 1. Tampoco se aplica siempre este razonamiento combinatorio para asignar probabilidades a experimentos simples no equiprobables, sino que, con frecuencia hemos observado el sesgo de equiprobabilidad o bien un razonamiento de "enfoque en el resultado aislado".

◊ Un pequeño porcentaje de alumnos manifiestan creencias en el control de lo aleatorio y en supersticiones extendidas en la cultura popular, aunque este porcentaje decrece con la edad y el rendimiento matemático de los alumnos. Más frecuente es el empleo de la heurística de la representatividad y los sesgos asociados, en particular la recencia negativa que es manifestada en los ítems 4 y 6 por la tercera parte de los alumnos, independientemente de la edad. Además estos sesgos se han mostrado favorecidos por el proceso de enseñanza.

◊ Finalmente, y aunque más de la mitad de los alumnos tienen una intuición correcta sobre el juego equitativo, hemos encontrado una variedad de interpretaciones de este concepto, en torno a las cuales pretendemos profundizar en el proceso de entrevistas clínicas. En todo caso, la variedad de significados asignados sugiere la conveniencia de incluir este concepto en los programas de enseñanza de la probabilidad.

CAPITULO 4

RAZONAMIENTO PROBABILISTICO Y PROPORCIONAL. ANALISIS DE ENTREVISTAS

4.1. INTRODUCCION

El análisis de las respuestas de los alumnos al segundo cuestionario, expuesto en el capítulo anterior, se completó con una serie de entrevistas clínicas que se llevaron a cabo con una submuestra de alumnos. La finalidad principal de esta fase del trabajo era aclarar aquellos puntos oscuros que aparecieran en las respuestas al cuestionario, indagar sobre la importancia de los sesgos manifestados y describir en profundidad los modos de razonamiento de los alumnos entrevistados, estudiando la consistencia de sus estrategias en las tareas de comparación de probabilidades en distintos contextos. Esperábamos mostrar casos prototípicos de independencia entre el razonamiento proporcional y el probabilístico, que indicaran que el razonamiento proporcional, por sí sólo, no supone la superación de los sesgos inducidos por los elementos subjetivos.

En este capítulo presentamos el análisis de las entrevistas realizadas a una muestra reducida de alumnos, que fueron elegidos en base a sus respuestas en el cuestionario, de modo que representasen la variedad de tipos de razonamiento detectados con el mismo.

En las secciones 4.2 y 4.3 describimos los objetivos, el guión de la entrevista, la muestra seleccionada y el proceso de realización. El resto del capítulo se dedica al análisis de las respuestas de los alumnos en cada uno de los puntos siguientes: niveles de razonamiento proporcional y estrategias en la comparación de probabilidades; razonamiento combinatorio y noción de suceso seguro en la asignación de probabilidades; creencias previas sobre factores causales y control de la aleatorio; percepción de la independencia y uso de heurísticas y concepción de juego equitativo.

4.2. OBJETIVOS Y GUIÓN DE LA ENTREVISTA

La entrevista se centró en esclarecer las respuestas que los alumnos seleccionados dieron al cuestionario que hemos descrito en el capítulo 3 e incluimos en el anexo 4, y comprobar su consistencia y coherencia. La finalidad de realizar entrevistas personales a algunos alumnos de los que han respondido al cuestionario es, por una parte, profundizar en las estrategias de comparación de probabilidades, tratando de determinar si son consistentes y en qué conocimientos previos se apoyan, sobre todo en los casos en que la estrategia elegida les conduzca a error, así como hasta qué punto sus estrategias dependen del contexto y la demanda de la tarea.

Por otra parte nos interesa conocer en qué grado los alumnos toman sus decisiones basándose en creencias subjetivas o supersticiones. Intentaremos determinar si poseen otro tipo de creencias que no aparezcan contempladas en el cuestionario, si sus respuestas son consistentes en diferentes situaciones y si son las mismas independientemente de la edad. Otro objetivo que nos hemos propuesto es estudiar si existe alguna relación entre algunos sesgos, ya caracterizados en la literatura, y las experiencias previas del niño en la práctica de diferentes juegos de azar.

Aunque las respuestas al cuestionario nos han proporcionado bastante información con respecto a los objetivos propuestos en nuestra investigación, pensamos que sólo una serie de entrevistas personales, en un ambiente en que el alumno se encuentre relajado y donde se le anime a expresar sus argumentos con detalle, nos proporcionarán el medio para profundizar en las respuestas relativas a creencias personales y a los criterios seguidos en la toma de decisión. En particular, estamos interesados en estudiar las hipótesis 5 y 6 de la investigación, que se enunciaron en la forma siguiente:

Hipótesis 5: Esperamos mostrar ejemplos de niños con suficiente razonamiento proporcional, que siguen afectados en su comparación y asignación de probabilidades por creencias de tipo subjetivo.

Hipótesis 6: Algunos niños modifican sus estrategias en la comparación de probabilidades, en función del contexto, discreto o continuo, en que se presenten las situaciones.

Con esta finalidad, expondremos, para cada ítem, los objetivos que nos propusimos estudiar con la entrevista, y las expectativas respecto a las respuestas esperadas de los alumnos. También indicaremos las pautas generales de actuación, que, naturalmente, las consideramos flexibles, en el sentido de que quedó a discreción de la investigadora el decidir qué preguntas hacer a cada alumno para clarificar el pensamiento del sujeto, en función de las estrategias y sesgos que manifestase, tratando de que, en ningún caso, la entrevista sobrepasase los 30 minutos.

ITEM 1: Concepto de suceso seguro y capacidad combinatoria

1.- En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Sobre este ítem se plantearon las siguientes preguntas concretas al alumnos:

⇒ ¿Qué crees que quiere decir el ejercicio cuando habla de "estar seguro"?
⇒ ¿Puedes explicar por qué has dado esa respuesta?
⇒ ¿Sacando una bola menos ya no estarías seguro?
⇒ ¿Cuántas tendrías que sacar si hubiera 10 rojas, 8 verdes y 5 blancas? ¿Por qué?

Los objetivos planteados al entrevistar a los alumnos respecto a su respuesta en este ítem son los siguientes:

1. Detectar las estrategias de actuación del alumno en la elección de su respuesta al ítem.
2. Comprobar qué interpretación ha dado el alumno al enunciado, y si lo ha comprendido.
3. Profundizar en la idea que tiene el alumno sobre suceso seguro.
4. Comprobar si se manifiesta sistemáticamente una confusión del espacio muestral de referencia que lleve al alumno a una solución errónea del problema, incluso en los casos en que se comprenda la idea de suceso seguro.

Después de detectar que una tercera parte de la totalidad de los alumnos respondieron a este ítem diciendo que es suficiente con sacar tres bolas, estamos interesados en profundizar sobre los motivos que les llevan a tal afirmación, asegurándonos de si se trata de una mala concepción de la noción de suceso seguro, confundida con la de suceso probable, o una interpretación del enunciado que no contemple la extracción como aleatoria. En este caso, pretendemos que el alumno retome la cuestión, enfatizando este carácter aleatorio del experimento, y comprobando si se mantiene la respuesta. Cuando el alumno proponga la respuesta correcta, nuestro objetivo será hacerle exteriorizar su razonamiento y comprobar si generaliza la situación.

En los casos en que el alumno responda “sacar todas las bolas”, intentaremos indagar y provocar una respuesta alternativa, preguntándole qué ocurriría si sacara una o dos bolas menos. Ante todo, nos interesa que el alumno “reflexione en voz alta”, explicitando al máximo su razonamiento, esperando, así, poder obtener mayor información sobre la idea que tiene de suceso seguro, y la capacidad combinatoria que manifiesta en esta situación concreta.

ITEMS 2 Y 3: En estos ítems se presentan supersticiones sobre situaciones que afectan positiva o negativamente (casos del ítem 2 y 3 respectivamente) en las situaciones aleatorias.

2.- José procura entrar en clase, cada día, poniendo primero el pié derecho. Cree que ésto aumenta su suerte de obtener buena nota. ¿Cuál es tu opinión?

3.- Marta tiene una cita con el chico que le gusta para el día 13 de este mes. Ella está muy preocupada y va a intentar cambiar la cita de día, ya que dice que siendo día 13 todo va a salir mal, porque este número trae muy mala suerte. ¿Tú que opinas?

Las posibles pautas de actuación para la entrevistadora serían las siguientes:

- ⇒ ¿Qué entiendes por "la suerte" de una persona? ¿Podrías poner algunos ejemplos?
- ⇒ ¿Piensas que hay "cosas" que influyen en la suerte de una persona? ¿Cuales? ¿Puedes explicar por qué crees que traen buena (o mala) suerte?
- ⇒ Si hubieras decidido hacer un viaje y antes de salir te cruzas con un gato negro, ¿continuarías con tus planes y te irías, o aplazarías el viaje para otro día?
- ⇒ Si tuvieras que jugar un partido de fútbol en la competición del colegio y antes de empezar se te rompe un espejo, ¿jugarías de todos modos el partido, o preferirías que otro compañero jugara en tu lugar para que no perdierais por tu culpa?
- ⇒ ¿Te han sucedido a ti o a alguien que conozcas sucesos parecidos?
- ⇒ ¿Tienes algún número preferido o que creas que te trae buena suerte o mala suerte? ¿Por qué?
- ⇒ Cuando juegas a cara o cruz, ¿eliges siempre lo mismo, o te da igual elegir cara que cruz? ¿Por qué?
- ⇒ Al lanzar un dado, ¿crees que hay números más difíciles de obtener que otros? ¿Y más fáciles? ¿Por qué?

Estas preguntas tienen como objetivos los que exponemos a continuación:

1. Descubrir cuál es la interpretación por parte del alumno de la palabra "suerte" en este contexto.
2. Explorar las creencias subjetivas que manifiesta el sujeto en torno a situaciones aleatorias, y en qué las basa.
3. Determinar la consistencia de estas creencias al aplicarlas a distintas situaciones.
4. Estudiar si este tipo de creencias subjetivas sin base aparente se manifiestan también en situaciones que involucren experimentos aleatorios clásicos, tales como lanzamientos de dados, monedas o extracciones de bolas.

Las respuestas a estos ítems nos indican que, aunque la mayoría de los alumnos no se dejan influir por supersticiones y creencias de tipo socioculturales, sin embargo, los datos nos sugieren que ciertas creencias están más extendidas que otras; habiendo alumnos que no admiten que “entrar con el pié derecho” influya en las situaciones aleatorias, pero afirman que los martes, sobre todo si caen en trece, pueden influir negativamente. Ante esta situación, nos planteamos indagar en las entrevistas sobre otras creencias que puedan afectar a los alumnos, mencionando en particular, los gatos negros y la ruptura de un espejo. Además, nos interesa la argumentación que dan los alumnos que sí manifiestan estas influencias para explicar sus convicciones. Aparte de estas creencias de tipo social, también queremos comprobar si el alumno manifiesta otras preferencias injustificadas y sin base objetiva sobre otros experimentos aleatorios clásicos.

ITEMS 4, 5 Y 6: Se trata de cuestiones que exploran la utilización de sesgos y heurísticas por parte de los sujetos.

4.- Lola rellenó en cierta ocasión un impreso de lotería con los siguientes números: 1, 7, 13, 21, 22, 36; y ganó. Como consecuencia, piensa que debe jugar siempre con el mismo grupo de números, porque de este modo ganará. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

5.- Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos.
Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana

6.- Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "la lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces, y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima". ¿Cuál es tu opinión sobre la explicación de Pedro?

Las pautas de actuación vienen dadas por las preguntas que reproducimos a continuación:

⇒ ¿Puedes explicar con más detalle tus respuestas a las preguntas 4, 5 y 6?
⇒ Cuando estás jugando al parchís y necesitas obtener un 5 para poder sacar ficha, ¿te molesta que la persona que va antes que tú saque un 5? ¿Por qué?
⇒ ¿Sueles jugar a la lotería, bono loto o primitiva? ¿Con cuánta frecuencia?. ¿Juegas con frecuencia a otros juegos de azar? ¿A cuáles?
⇒ Ya sabes que hay personas que se abonan a un número en la Lotería Nacional o en la ONCE para jugar todas las semanas al mismo número. ¿Tú crees que estas personas tienen más posibilidades de ganar que otra que juegue cada semana a un número distinto?
⇒ ¿Has leído alguna vez en la prensa o visto en la TV noticias acerca de algún número que haya salido premiado varias veces, o personas a las que le ha tocado la lotería muchas veces? ¿Qué piensas acerca de esto?
⇒ Mucha gente encarga sus números de Lotería de Navidad a Madrid. ¿Por qué crees que hacen esto?. ¿Los números de Madrid tienen más suerte?
⇒ Cuando alguien compra un número de lotería, ¿piensas que hay alguna manera de aumentar la suerte para que le toque?

Los objetivos pretendidos con estas preguntas son los siguientes:

1. Profundizar en los argumentos que aportan los sujetos que manifiestan sesgos tendentes a la representatividad o a la disponibilidad.
2. Establecer si existe alguna relación entre las experiencias previas de los alumnos relativas a juegos de azar y la manifestación de estos sesgos.
3. Determinar si los alumnos que responden erróneamente están intentando aplicar algún conocimiento anterior o manifiestan alguna creencia subjetiva de origen intuitivo o sociocultural.
4. Establecer la causa de que los alumnos mayores manifiesten este tipo de sesgos con mayor frecuencia y convicción que los más pequeños.

La manifestación, por parte de más de la tercera parte de los alumnos, en todos los cursos, de sesgos basados en la heurística de representatividad, descrita por Kahneman, Slovic y Tversky (1982), está influyendo en la consideración de la independencia de los sucesos hasta el punto de que el porcentaje de alumnos que reconocen esta independencia es inferior a la mitad. Estos resultados confirman los hallados por Batanero, Serrano y Garfield (1996) en alumnos de 14 y 17 años. Pretendemos utilizar esta fase clínica para profundizar en el razonamiento de los alumnos entrevistados y estudiar si las sesgos son resistentes y se manifiestan en otros contextos relacionados con juegos de azar. Pensamos que en el razonamiento de los alumnos que manifiestan los sesgos pueden influir factores de tipo subjetivo, como creencias infundadas en números afortunados o con más probabilidades de ganar; o intuiciones incorrectas sobre la no equiprobabilidad de ciertos sucesos, que se apoyan en la heurística de representatividad. Sería el caso de los alumnos que asignan una mayor probabilidad de ganar a una determinada secuencia de números en aparente desorden, porque el carácter imprevisible del experimento aleatorio hace menos probable la aparición de una secuencia ordenada. Estos alumnos estarían expresando una convicción, sin base en la evidencia empírica ni en argumentos lógicos rigurosos, pero que para ellos es autoevidente y autoconsistente, asignándole un carácter teórico. Tendría, pues, el carácter de intuición.

Por otra parte, podemos encontrar alumnos que argumenten en base a conocimientos previos sobre probabilidad que funcionan en otro dominio de problemas, pero no en la situación que nos ocupa. Es el caso del efecto de recencia negativa o la "falacia del jugador", que intenta "equilibrar" la ocurrencia de sucesos considerados equiprobables, en una pequeña secuencia de experimentos, lo que hace contemplar como dependientes a sucesos que no lo son.

En estos casos, pensamos que, en parte debido a la influencia del razonamiento típicamente determinista (Pozo, 1987), los alumnos se ven afectados por una necesidad de introducir cierto control en las situaciones aleatorias, una tendencia a reducir la incertidumbre de los sucesos, remitiéndolos a formas de determinación más controlables.

Un objetivo complementario para nosotros era tratar de descubrir si, en los alumnos entrevistados, existe relación entre la experiencia práctica que poseen en relación con juegos de azar, y la manifestación de los sesgos implicados en estos tres ítems, pues creemos que la experiencia podría tener un efecto negativo sobre la aparición de estos sesgos, ya que la experiencia que puede conseguir una persona es muy limitada para poder extrapolar conclusiones en relación a una sucesión ilimitada de ensayos.

ITEMS 7 Y 8: Elección entre dos cajas con composiciones proporcionales. Detección de las creencias en falsas relaciones causales inducidas por los distractores incluidos en los enunciados.

7.- Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

8.- Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

Pautas de actuación: En este caso dependerá de la respuesta previa del alumno:

a) Ante una estrategia determinista al ítem 7, en que el alumno admita la relación causal, realizaremos las siguientes preguntas:

- ⇒ ¿Crees que la edad/inteligencia de una persona puede influir en sus posibilidades de ganar la lotería?. Si pongo en una caja 5 bolas rojas y 5 blancas, ¿quién crees que tendrá más posibilidades de sacar una bola blanca, sin mirar, tú o yo?

b) Ante una estrategia aditiva en el ítem 7, estudiaremos la respuesta al ítem 8, que contempla explícitamente esta estrategia y haremos notar al niño que, aunque una caja tenga más cantidad de bolas blancas, también tiene más cantidad de bolas negras, y le preguntaremos si esto no hace que se tengan menos posibilidades de ganar.

c) Ante una estrategia de correspondencia al ítem 7, analizaremos si la respuesta al ítem 8 también es de correspondencia y le preguntaremos si puede explicar mejor por qué piensa que las dos cajas dan la misma posibilidad.

Además, con carácter general, haremos las siguientes preguntas:

- ⇒ ¿Puedes explicar qué quiere decir que el juego sea justo?.
- ⇒ Te planteo un juego con una baraja española: Tú y yo sacamos cada uno una carta al azar. Tú ganas un ficha si sacas una carta de oros, y yo si saco un as. Después de varias partidas, gana quien tenga más fichas. ¿Es un juego justo?. ¿Por qué?. En caso de respuesta negativa preguntaremos qué podríamos hacer para que lo fuera.

Los objetivos pretendidos son los siguientes:

1. Identificar distintos tipos de estrategias utilizadas por los alumnos en problemas de elección entre dos cajas que contienen bolas de dos colores, con composición proporcional, y profundizar en las variables que influyen en la elección de un tipo de estrategia u otro.
2. Explorar la influencia de la variable edad sobre la estrategia utilizada por los alumnos.
3. Explorar la influencia de posibles variables de tarea sobre la estrategia de elección de los alumnos.
4. Descubrir la interpretación que hace el alumno de la idea de "juego justo"

El bajo porcentaje de respuestas correctas obtenido para estos dos ítems, y la inversión de los niveles de dificultad previstos por Noelting (1980a y b) para problemas de comparación de fracciones, nos lleva a plantearnos la influencia que han podido tener los factores subjetivos incluidos en estas dos cuestiones sobre los argumentos de decisión empleados por los alumnos, y la estabilidad de tales argumentos.

Tanto el ítem 7 como el 8 corresponden al nivel IIB de Noelting, en los que existe proporcionalidad en la composición de las cajas. Sin embargo, el primero ha resultado perceptiblemente más difícil. Creemos que puede ser debido a que el factor subjetivo que aparece en su enunciado ha intervenido afectando sensiblemente la respuesta esperada, y con más fuerza que el introducido en el ítem 8. Por otra parte, nos interesa indagar sobre las estrategias de aquellos alumnos cuya respuesta al ítem 7 ha eludido la comparación entre las cajas. En cuanto al contexto de los problemas de comparación de probabilidades, nos proponemos completar el estudio de argumentos introduciendo en la fase de entrevistas algunas cuestiones sobre comparación de ruletas. Estas aparecen detalladas en la página 146 :

La interpretación de la idea de "juego justo" es otro de nuestros puntos de interés, enlazando la respuesta al ítem 8 con la del ítem 9, y contrastándolas con juegos en contextos de cartas.

ITEM 9: Concepto de juego equitativo.

9.- María y Esteban juegan a los dados. María gana 1 peseta si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1 Esteban gana una cierta cantidad de dinero. ¿Cuánto debe ganar Esteban cuando le sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo? RESPUESTA _________ pts.
¿Por qué?...

Las preguntas a plantear al alumno respecto a este ítem son las siguientes:

⇒ ¿Puedes explicar mejor por qué has decidido esa respuesta?
⇒ ¿Puede ser justo un juego en que un jugador tiene más probabilidades de ganar?
⇒ Te propongo jugar conmigo a un juego con una baraja española y con las siguientes reglas: Cualquiera de los dos saca una carta. Si sale una carta de oros, tú ganas una ficha y si sale otro palo, yo la gano. ¿Es un juego justo?... (en caso de que la respuesta sea que no: ¿cómo podríamos hacer que lo fuese?).

Los objetivos planteados con estas preguntas son los siguientes:

1. Descubrir la interpretación que hace el alumno de la idea de juego justo o equitativo en el caso de sucesos compuestos no equiprobables.
2. Determinar si el alumno tiene en cuenta la equiprobabilidad de los sucesos simples, o sólo el recuento total de casos.
3. Establecer si hay asignación de probabilidades o simplemente una comparación de casos.

Al comparar los resultados de los ítems 8 y 9, en los que se trata el concepto de juego justo o equitativo, encontramos que el porcentaje de los alumnos que responden correctamente al ítem 9 es muy superior del de los que lo hacen al ítem 8. Esta diferencia puede estar relacionada con el diferente contexto y situación planteados. Mientras que en el ítem 8 hay que establecer la equiprobabilidad de ganar de ambos jugadores, en un contexto de bolas, en el ítem 9 hay que establecer la no equiprobabilidad, en contextos de dados , y ajustar la ganancia para que se mantenga el equilibrio. Es posible que el contexto de dados esté más próximo al niño, y además, las fracciones a comparar tienen el mismo denominador, por lo que el problema se reduce a una comparación de los numeradores (1/6 vs 5/6).

Pretendemos indagar sobre la idea de juego equitativo que poseen los alumnos entrevistados, y si son conscientes o no de la diferente probabilidad de ganar de los dos jugadores del ítem 9. También estamos interesados en la respuesta de los alumnos que han manifestado el sesgo de equiprobabilidad, cuando se les enfatiza este hecho.

ITEM 10: Comparación de probabilidades en el caso de sucesos no equiprobables.

10.-Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña ___
(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___
(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña ___
(D) No lo sé ___

¿Por qué?..

Pautas de actuación:

⇒ En caso de responder la opción c) se hará la siguiente pregunta: ¿Y si en la clase hubiera 15 niños y 15 niñas?

Objetivos que se tratan de conseguir:

1. Profundizar en la estrategia utilizada por el alumno para hacer la comparación.
2. Detectar el sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992)

Aunque las cifras de éxito en este ítem son buenas, y crecientes con la edad, sin embargo, los datos de la tabla 3.5.2 (página 236) nos indican que hay un porcentaje de alumnos, superior a la cuarta parte, que manifiestan el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre (1992). Nuestro principal interés en esta fase de entrevistas se centrará en explorar la consistencia de este sesgo, haciendo notar a los alumnos que lo manifiesten, la diferencia entre la cantidad de niños y de niñas

ITEM 11: Comparación de probabilidades en extracciones sin reemplazamiento.

11.- En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad ___
(B) El azul tiene mayor probabilidad ___
(C) El verde tiene mayor probabilidad ___
(D) Todos los colores tienen la misma probabilidad ___
(E) No lo sé ___

¿Por qué?..

Pautas a seguir:

En el caso de contestar d), se indicará al alumno que no hay la misma cantidad de bolas de cada color, y se le hará la siguiente pregunta:

⇒ ¿Y si al sacar las tres bolas hubieran resultado 2 verdes y 1 azul?

Objetivos a conseguir:

1. Determinar si el alumno diferencia entre los casos de extracción con reemplazamiento de los de extracción sin reemplazamiento.

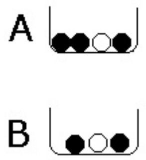
2. Detectar el sesgo de equiprobabilidad, y su consistencia en diferentes contextos.
3. Identificar la estrategia de elección utilizada.

Al igual que ocurre con el ítem 10, los resultados apuntan a que la mayoría de los alumnos resuelven con éxito la cuestión. Para hacer la comparación de probabilidades, tienen en cuenta la composición previa de la urna, y las modificaciones tras las extracciones sin reemplazamiento. El sesgo de equiprobabilidad se vuelve a repetir en la cuarta parte de las respuestas, por lo que nos interesa utilizar la fase de entrevistas para llamar la atención de aquellos alumnos que incurran en el sesgo, sobre el hecho de que las cantidades de bolas de cada color en la caja son diferentes, y la posible influencia de las extracciones previas.

ITEMS 12, 13, 14, 15 Y 16: Elección entre urnas con diferente composición.

12.- En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo)

Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál elegirías para hacer la extracción?
Señala la respuesta correcta:



(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ___
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ___
(C) Las dos cajas dan la misma posibilidad ___
(D) No lo se ___

¿Por qué? ....

Pautas a seguir:

Tras pedir al alumno que explique suficientemente sus estrategias de comparación de probabilidades que utiliza para responder a los ítems correspondientes del cuestionario, especialmente aquellas que no resulten pertinentes; se presentarán al alumno varios problemas similares de comparación de probabilidades, pero en contextos de ruletas, haciéndole las siguientes preguntas (ver figuras 4.2.1 a 4.2.5):

⇒ Entre las parejas de ruletas que te presento a continuación, ¿con cuál preferirías jugar si ganas cuando obtienes el color azul?

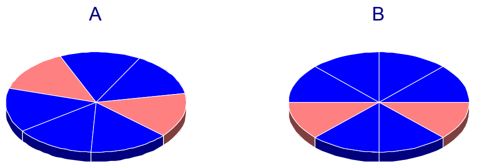


Figura 4.2.1

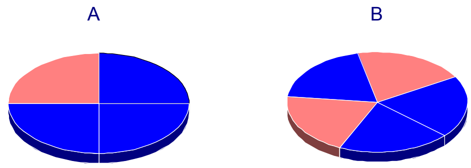


Figura 4.2.2

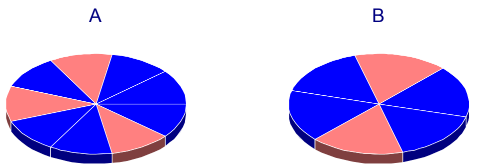


Figura 4.2.3

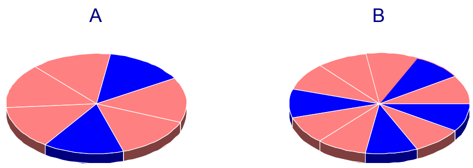


Figura 4.2.4

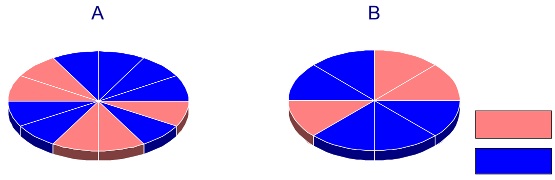


Figura 4.2.5

Objetivos a conseguir:

1. Identificar estrategias de elección de urnas en casos de diferente nivel de dificultad.
2. Búsqueda de relaciones entre el nivel de dificultad de la tarea y la estrategia utilizada por el alumno.
3. Establecer la consistencia o inconsistencia de la estrategia elegida por un mismo alumno, a lo largo de los diferentes tipos de tareas.
4. Estudiar la influencia del contexto en la elección de la estrategia.

El escaso uso, por parte de los alumnos, de las estrategias multiplicativas en estos ítems de comparación de probabilidades, y el predominio de la estrategia de comparación absoluta de los casos favorables, nos lleva a plantearnos indagar sobre la consistencia de las estrategias usadas por los alumnos, profundizando, en el desarrollo de la entrevista, sobre las razones que el alumno da para la pertinencia de la estrategia usada.

Finalmente, estamos interesados en estudiar si la estrategia de elección depende, además del nivel de dificultad de la tarea, del contexto en el que ésta se presenta, contrastando así los resultados obtenidos con los de otras investigaciones (Maury, 1984; Singer y Resnick, 1992) sobre la influencia del contexto en las estrategias utilizadas por los alumnos en problemas de comparación de probabilidades, según las cuales, contextos como los usados por Noelting (1980a y b), de mezclas de zumo con agua, para la comparación de fracciones, o de urnas con diferente composición de bolas blancas y negras, para la comparación de probabilidades, evocarían una comparación del tipo parte-parte (o casos favorables vs casos desfavorables), mientras que un contexto como ruletas con sectores coloreados, inducirían a un tipo de comparación parte-todo, y por tanto, a la aplicación de la regla de Laplace. Además, en el caso de las ruletas, puede aparecer la influencia de la distribución de los sectores en la decisión del alumno. Por este motivo incluimos en las entrevistas clínicas algunas preguntas sobre elección de la ruleta que ofrece mayor probabilidad de obtener el color azul, de entre una pareja de ruletas coloreadas con sectores azules y rojos. Además de variar el número de sectores de las ruletas presentadas, con el fin de cubrir la gama de los niveles de dificultad establecidos en el cuestionario, también hemos tenido en cuenta la distribución de sectores de un mismo color, contiguos o separados (ver figuras 4.2.1 - 4.2.5, en la página 146).

4.3. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA Y PROCESO DE REALIZACIÓN DE LA ENTREVISTA

Para realizar las entrevistas clínicas se seleccionaron un total de 8 alumnos, dos por cada uno de los cursos que participaron en la recogida de datos. La selección de éstos alumnos fue intencional, con el fin de ampliar al máximo la información que proporcionaban las respuestas al cuestionario. En esta sección describimos los criterios seguidos en esta selección y las características de los alumnos que tomaron parte en la entrevista.Nos basamos en las respuestas de los alumnos al cuestionario, que como ya hemos mencionado antes, constaba de 16 ítems, que podían agruparse en cuatro grupos:

A. Items para la comparación de probabilidades.

A_1: Items en contextos de bolas (7, 8, 12, 13, 14, 15 y 16)

A_2: Otros contextos (sesgo equiprobabilidad) (10 y 11)

B. Items sobre creencias previas (2 y 3)

C. Items para detectar la intuición de independencia y el uso de heurísticas (4, 5 y 6).

D. Items sobre la noción de suceso seguro y la capacidad combinatoria (1)

E. Items sobre juego equitativo (8 y 9).

Según las respuestas dadas por los alumnos al grupo de ítems A_1, y las estrategias empleadas, a cada alumno le fue asignado un nivel de razonamiento proporcional basado en los antecedentes de la investigación sobre comparación de fracciones. Estos niveles podían variar desde el nivel 0 al nivel IIIB (ver la sección 3.4.3).En general, aunque un alumno vaya asignado a un nivel determinado, eso no quiere decir que las únicas estrategias que empleará serán las del nivel correspondiente, sino que refinará sus estrategias según los requisitos del problema, hasta el nivel en que se encuentre.

Las respuestas al grupo de ítems A_2 clasifican a los alumnos en dos clases:
a) Los alumnos que **no manifiestan el sesgo de equiprobabilidad**. Estos alumnos responden correctamente a ambos ítems del grupo.
b) Los que **manifiestan sesgo de equiprobabilidad**. (Responden incorrectamente a algún ítem del grupo).

Las respuestas a los dos ítems del grupo B, sobre creencias previas clasifican a los alumnos en tres grupos:
a) **No supersticiosos**: no les influyen las creencias socioculturales en sus decisiones sobre la respuesta a problemas probabilísticos.
b) **Semi-supersticiosos** (La influencia de la creencia depende de ésta, o del contexto o de sus experiencias)
c) **Supersticiosos** (Se dejan influir por las creencias socioculturales mencionadas).

El grupo de ítems C, sobre independencia y control del azar evalúa la incidencia de la heurística de representatividad, por lo que clasificaría a los alumnos en dos grupos:
a) Alumnos que **manifiestan la heurística de representatividad** (responden incorrectamente a, al menos, dos de los tres ítems del grupo.
b) Alumnos que **no manifiestan la heurística de representatividad** (Al menos dos respuestas correctas de las tres del grupo).

El ítem correspondiente al grupo D se ha tenido en cuenta en la clasificación, según la respuesta sea **correcta** o **incorrecta**

En el grupo de ítems E, se ha tenido en cuenta si la respuesta al ítem 9 fué **correcta** o **incorrecta**.

Tras esta clasificación de los alumnos según los seis aspectos mencionados, los criterios de selección de los sujetos que iban a participar en las entrevistas se llevó a cabo atendiendo, sobre todo, a la clasificación que proporcionaban los grupos de cuestiones A_1 y B, tomando de cada curso escolar dos alumnos de diferente nivel de razonamiento proporcional y tratando de que alguno de ellos manifestase algún grado de superstición, con el fin de indagar en sus concepciones. No fue difícil que los alumnos seleccionados manifestasen, además, en algunos casos, la heurística de representatividad, pues ésta se presentó con mucha frecuencia. En la tabla 4. 3.1. se exponen las características de los 8 alumnos seleccionados para la entrevista, según las categorías mencionadas.

Las entrevistas se llevaron a cabo en el mismo colegio, en un horario en que no interfiriera con actividades deportivas o de recreo. Todas ellas fueron grabadas en audio y posteriormente transcritas. Aunque se diseñó un guión de entrevista estandarizado, expuesto en la sección anterior, la entrevista se personalizó, analizando previamente las respuestas de cada alumno al cuestionario escrito, para insistir en los aspectos más convenientes, según el caso. Otro punto a considerar fueron las respuestas que el alumno iba dando, que en ocasiones requerían nuevas preguntas por parte de la investigadora (que en el texto transcrito aparece como E) para aclarar totalmente la situación. En cualquier caso, se pretendió que la entrevista no durase más de 30 minutos, para que no disminuyera la atención del alumno. Analizaremos las respuestas de todos los alumnos agrupadas según los apartados considerados en el capítulo 3. En letra pequeña reproduciremos algunos fragmentos literales que puedan servirnos como ejemplos. La transcripción completa se encuentra en el anexo 5.

Tabla 4.3.1.: Clasificación de los alumnos que participaron en las entrevistas, según las cuatro categorías de ítems

CUR-SO	Nº Alumno	Nº Items[1] correctos	Grupos de ítems					
			A1	A2	B	C	D	E
5º	8	5	IIIA	Correcta	Semisup.	Con sesgo	Incorrecto	Correcto
	30	1	IA	Equipr.	Superst.	Con sesgo	Incorrecto	Incorrecto
6º	37	7	IIIB	Correcta	No Super.	Sin sesgo	Correcto	Correcto
	42	6	IIIA	Correcta	Semisup.	Con sesgo	Incorrecto	Correcto
1º	84	4	IIB	Correcta	Semisup.	Con sesgo	Correcto	Correcto
	10	3	IIA	Correcta	Semisup.	Con sesgo	Incorrecto	Incorrecto
2º	135	4	IIB	Equipr.	Semisup.	Con sesgo	Correcto	Incorrecto
	139	0	IA	Equipr.	No Super.	Sin sesgo	Incorrecto	Correcto

4.4. NIVELES DE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y ESTRATEGIAS EN LA COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES

Tras entrevistar a todos los alumnos, presentamos los resultados obtenidos clasificados en los tres grandes apartados utilizados en el capítulo 3 para analizar las respuestas al cuestionario. Éstos son: niveles de razonamiento proporcional y estrategias en la comparación de probabilidades; razonamiento combinatorio y su uso en la asignación de probabilidades y creencias previas.

En este apartado exponemos la parte de las entrevistas en que se interrogó a los alumnos sobre sus respuestas y estrategias a los ítems 7, 8 y 12 a 16, para analizar las estrategias empleadas por los alumnos en la comparación de probabilidades, en contexto de urnas. Además les propusimos una serie de problemas equivalentes, referidos a la comparación de probabilidades en contexto de ruletas, para analizar si el cambio de contexto influía en sus estrategias. Los problemas propuestos han sido expuestos en la sección 4.2 (ver página 146).

Alumno nº8: Juan Manuel

Este alumno, de 5º curso, había obtenido un total de 5 respuestas correctas en los ítems de comparación de probabilidades, habiendo resuelto correctamente el ítem 15 (nivel IIIA) y fallando el ítem 7 (IIB) que incorpora un distractor subjetivo. En el ítem 7, Juan Manuel dio una respuesta referida solamente al factor subjetivo encontrado, eludiendo la comparación entre las cajas, por lo que la investigadora (en el texto transcrito aparece con la letra E) decidió insistir sobre este punto para aclarar su estrategia de elección. Encontramos que, tanto en este ítem, como en el 8, a pesar de las respuestas escuetas y elusivas, el alumno empleaba en realidad una estrategia multiplicativa, estableciendo claramente las razones entre los casos favorables y los posibles de ambas cajas, aunque el distractor incluido en el ítem le había llevado a una respuesta fallida en el cuestionario.

(Ante la alusión al ítem 7)
J.M: Tienen las mismas.
E: ¿Por qué?
J.M: Pues, porque es como si... Se divide en tres cuartos de 60, que eso es lo que suman, ¿no?, y salen... dos cuartos, que diga, dos tercios (señala el nº 40), y un tercio (señala el 20), y aquí, hay 45. Un tercio (señala el 15), dos tercios (señala el 30).

Vemos que el alumno muestra un razonamiento proporcional correspondiente al nivel IIIA, así como también en las respuestas al ítem 8:

(Ante la pregunta al ítem 8)

[1] Ver tabla 3.4.7, página 150

J.M: Sí, es justo.
E: ¿Por qué?
J.M: Por lo mismo de antes.
E: Vamos a ver, ¿lleva ventaja alguno de los dos?
J.M: No, porque 90 lo dividimos en tercios y aquí hay un tercio (señala el 30) y aquí hay dos (señala el 60). Con treinta, lo dividimos en tercios de diez, y aquí hay un tercio (señala el 10) y aquí hay dos (señala el 20).

Observamos que, aunque en el cuestionario se había dejado influir, aparentemente, por el mayor número de bolas en una de las urnas en el ítem 7, rectificó su respuesta en la entrevista, mostrando un razonamiento proporcional correspondiente al nivel IIB. Las respuestas que dio al grupo de cuestiones sobre comparación de probabilidades en contextos de ruletas, denotan, sin embargo, que en ningún caso de ellas emplea la estrategia multiplicativa, sino estrategias de comparación de una variable o estrategias aditivas, dejándose influir, en casos de duda, por apreciaciones subjetivas que es incapaz de justificar.

Aunque no hace mención al área de los sectores, en unas ocasiones es consciente de que la decisión ha de tomarla en función de ésta, pues intenta hacer mediciones aproximadas con sus dedos, a pesar de que en otra ocasión dice que no influye. Hace estas mediciones en un intento de relacionar las proporciones de los sectores de una y otra ruleta y así aplicar una estrategia de correspondencia, propia del tercer nivel, pero al fracasar, toma una decisión por simple aproximación global:

E: Entre estas dos ruletas, (ruleta A: 5a vs 2r; ruleta B: 6a vs 2r; nivel IA) ¿cuál elegirías, si tienes que obtener azul para ganar?
J:M: Esta (señala la B)
E: ¿Por qué?
J.M: Porque aquí (señala la B) tiene las mismas naranjas que aquí y tiene más azules.
E: ¿Cuál de las dos preferirías en este caso (ruleta A: 3a vs 1r; ruleta B: 3a vs 2r; nivel IB)
J.M: La A.
E: ¿Por qué?
J.M: Porque aquí (en la B) hay las misma azules que aquí, más una naranja.
E: Entre éstas dos, ¿Cuál prefieres? (ruleta A: 6a vs 3r; ruleta B: 4a vs 2r; nivel IIB)..
J.M: La A, porque hay dos más azules, y sólo una más naranja.

Juan Manuel sigue aquí un razonamiento semejante al que le había hecho fallar el ítem 7 del cuestionario, por lo que parece que no está muy seguro de la influencia del mayor número de casos favorables, en caso de proporcionalidad. Lo mismo ocurre en el caso siguiente:

E; ¿Y cómo sabes que hay la misma cantidad de azules y de rojos?
J.M: Porque, si sumas dos de aquí (señala la B) se convierte en una de éstas (señala la A).
E: Y por último, entre estas dos: (ruleta A: 7a vs 5r; ruleta B: 5a vs 3r; nivel IIIB)
J.M: (silencio) La A.
E: ¿Por qué?
J.M: Porque aquí (señala un sector rojo de la B), si la separo por mitades, en la A hay 5 (rojos) y aquí hay 6 (en la B).
E: Entonces, ¿tú crees que la mitad de cada sector de la B equivale a un sector de la A?
J.M: Sí.
E: ¿Estás seguro?
J.M: (Intenta medir los sectores con sus dedos pulgar e índice y compararlos) Bueno, no son iguales. Entonces, la B.
E: ¿Por qué?
J.M: Se ve que hay más azul que en la A (Intenta demostrarlo midiendo con los dedos). La verdad es que no lo se, no estoy seguro.
E: Entonces, ¿elegirías una o te daría igual?
J.M: Me daría lo mismo, porque tengo un lío...
E. Está bien.

Alumno nº30: Alejandro

Alejandro es un alumno de 5º curso clasificado en el nivel IA de estrategias de comparación de urnas, ya que sólo había respondido al ítem 12. En el ítem 8 falla porque sólo establece comparaciones de nivel IA, relacionando sólo los casos favorables. Aún después de que la entrevistadora le llamase la atención sobre el número de bolas desfavorables, sigue considerándolo intranscendente.

E: (Después de leer el ítem 8) ¿Crees que hay alguno que tiene más posibilidades de ganar?
A: Luis.
E: ¿Por qué?
A: Porque tiene 30 blancas y 60 negras. Tiene más oportunidad, porque tiene más bolas blancas.
E: Pero también tiene más negras, y también puede fallar.
A: Yo que se... Luis tiene ventaja.

En los contextos de elección entre ruletas, aunque varía la estrategia, pues en las urnas elegía sistemáticamente la que tenía más bolas, sigue utilizando estrategias de nivel IA, ya que siempre escoge la ruleta con más sectores azules, independientemente del tamaño de éstos. Sólo hay un caso, (las dos ruletas con el mismo número de sectores azules), en que Alejandro toma la decisión atendiendo al menor número de sectores rojos. En ningún caso hace referencia al área de los sectores.

E: Entre éstas dos, ¿Cuál prefieres? (ruleta A: 6a vs 3r; ruleta B: 4a vs 2r; nivel IIB).
A: La A
E: ¿Por qué?
A: Porque hay dos más azules. Aquí (en la A) hay 6 y aquí (en la B) sólo hay 4.
E: Pero son más grandes.
A: Bueno, pero eso no importa

Alumno nº37: Pablo

Pablo es un alumno de 6º curso que fue calificado como perteneciente al nivel IIIB, ya que contestó correctamente los 7 ítems de comparación de probabilidades de elección de urnas. Fue capaz de utilizar una estrategia multiplicativa en su comparación, y lo hará, incluso cuando la tarea le permita otra opción para resolverla con éxito. Podemos suponer, pues, que en la entrevista manifestará este mismo nivel en el contexto de ruletas.

En su puntualización a la respuesta dada al ítem 15 dejó muy clara la estrategia desarrollada, en la que establece las razones entre las partes y las compara reduciéndolas a común denominador. En el último ítem razona de forma análoga.

E: Lee el ítem 15 y su respuesta: "Aquí me dices que la caja G, porque tiene 2/3 de negras y la H tiene 1/2, que es menor"
P: Es que esto lo reduzco, bueno, saco el mínimo común múltiplo a los denominadores.
E: ¿Y cuáles son los denominadores?
P: (Escribe: $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$
$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$)
Pues, 3/1, y el otro sería 2/1 (En este caso no tiene necesidad de escribir las cantidades 20 y 10, ni simplificarlas), entonces, como 3 es mayor que 2, pues tiene más posibilidades la G.
(el alumno pasa a continuación al ítem 16)
P: Y ésta sería igual... 5 y 3. Pues ... (trata de descomponer en factores el 15) 15 entre 5 a 3, por 7, 21 ... Y 15 entre 3, 5, por 5, 25. Sí, lo tenía bien planteado, me sale más posibilidades en la caja K.

En las cuestiones sobre elección de ruletas, las reacciones de Pablo resultan muy interesantes, pues reproducen un proceso de aprendizaje y construcción de una estrategia adecuada, según el requerimiento de la tarea. Así, comienza utilizando estrategias de nivel 1 (comparación de una variable), pero cuando la entrevistadora le hace notar que los sectores no son iguales en ambas ruletas, cambia de estrategia para intentar comparar las áreas ocupadas, por aproximación. Cuando la tarea no permite la comparación por aproximación es cuando desarrolla una estrategia más sofisticada, de tipo multiplicativo, pero esta vez las razones establecidas son del tipo parte-todo.

Parece ser, pues, que el nuevo contexto no le sugiere inmediatamente continuar con las estrategias que estaba llevando a cabo un momento antes, al comparar urnas, y vuelve a las argumentaciones más simples; pero cuando llega a elaborar una estrategia superior, decide rehacer sus respuestas aplicando esta nueva táctica, consciente de su eficacia.

E: (ruleta A: 5a vs 2r; ruleta B: 6a vs 2r; nivel IA), ¿cuál elegirías, si tienes que obtener azul para ganar?

P: Esta (señala la B)

E: ¿Por qué?

P: Porque tengo aquí dos naranjas (en la A) y aquí tengo otras dos, pero vamos, yo tengo más posibilidades en la que tenga más azul que es ésta (señala la B)

E: ¿Por qué sabes que ésa tiene mas azul?

P: Porque aquí (en la B) hay seis sectores, y aquí 5 (en la A)

E: Pero, ¿los sectores son iguales de grandes?

P: No, claro... Me creía que eran iguales... ¡No había caído yo en eso!. Entonces, si no son iguales... éstos son más grandes (en la A). Si entre esto y esto (señala los dos arcos rojos en la B) miden, por ejemplo, 10, y entre esto y esto (señala los dos arcos rojos en la A) miden 15, entonces, la A es como si tuviera tres. Pues tendrían las mismas posibilidades.

E: Pero, entonces, tú ¿por cuál te decides, o te da lo mismo?

P: Yo que sé. Yo mediría, pero... no se.

E: ¿Cual de las dos preferirías en este caso (ruleta A: 3a vs 1r; ruleta B: 3a vs 2r; nivel IB)

P: La A.

E: ¿Por qué?

P: Porque esto tiene un cuarto de rojo (la A), y si pongo esto y esto (señala los dos sectores rojos en la B), yo creo que hacen más de un cuarto.

E: Entre éstas dos, ¿Cuál prefieres? (ruleta A: 6a vs 3r; ruleta B: 4a vs 2r; nivel IIB).

P: Pues... entre estos dos (señala los sectores rojos de la B) y estos tres (señala los rojos de la A), son más o menos iguales. Yo creo que son iguales.

E: ¿Y ente éstas dos? (ruleta A: 2a vs 5r; ruleta B: 4a vs 7r; nivel IIIA)

P: Vamos a ver... es que éstas son muy parecidas. Si ésta la pusiera aquí y esta aquí me daría... puede ser un cuarto de círculo... (trata de juntar mentalmente los sectores azules para comparar el área ocupada). Es que... aquí hay 4 azules de 11 (señala la B) y aquí hay 2 azules de 7 (en la A), entonces... (escribe las fracciones 4/11 y 2/7, y luego escribe 28/77 y 22/77. Entonces enmarca la fracción 28/77) Ya está, es más probable la B.

E: Y por último, entre éstas dos: (ruleta A: 7a vs 5r; ruleta B: 5a vs 3r; nivel IIIB)

P: Pues, aquí hay 5 rojos de 16 (en la ruleta A) y aquí, 3 rojos de 8 (en la B), entonces... (escribe las fracciones 5/12 y 3/8, y luego descompone en factores el 12 y el 8, entonces escribe $2^3\times3$, $8\times3=24$ y a continuación, 10/24 y 9/24) Es mejor elegir la B, porque tiene menos parte roja.

E: Bueno, ya está...

P: Pero, bueno, ahora me gustaría hacer otra vez las primeras, que así es más fácil...

E. De acuerdo, veamos... En la primera pregunta...

P: Pues, aquí hay 5 azules de 7 (en la A) y aquí, 6 azules de 8 (en la B). (Escribe 5/7 y 6/8, y luego, 40/56 y 42/56). La B.

E: En el segundo...

P: (Escribe 3/4 y 3/5) La A.

E: ¿Y en el tercero?

P: En ésta hay cuatro sobre seis (en la B) y éste,(la A), seis sobre nueve (escribe 4/6 y 6/9 y luego, 2/3 y 2/3). Son Iguales.

E: ¿Tú crees que en las ruletas influye en algo el que los sectores aparezcan juntos o separados?

P: No, yo no creo que influya. Hombre, si la aguja cae en medio de dos, y juego contra un tramposo, y dice que ha salido el otro, pues si, pero si no, no influye)

Alumno nº42: Alberto

Alberto es un alumno de 6º curso que, a raíz de sus respuestas al cuestionario fue calificado en el nivel IIIA de estrategias de comparación de urnas, ya que resolvió correctamente todos los ítems, excepto el 16, correspondiente al nivel IIIB y fue capaz de usar estrategias de correspondencia, aunque en otras ocasiones utiliza estrategias aditivas, que después de le entrevista comprobamos que eran, en realidad, estrategias de correspondencia.

A partir de las explicaciones que da este alumno comprobamos que en las respuestas a los ítems 7 y 8, que en el cuestionario aparecían algo ambiguas y confusas, está construyendo una correspondencia entre las bolas blancas y negras de cada urna. Alberto utiliza a veces el término "diferencia" entre bolas blancas y negras para expresar la razón entre ambas. En otras ocasiones, como en los ítems 15 y 16, se refiere a la operación de restar. Esto nos sugiere que podría ocurrir que algunos de los alumnos que utilizan la comparación aditiva entre urnas estén utilizando, en realidad, una estrategia de correspondencia, y la confusión sea meramente cuestión de terminología.

E: A ver, (en el ítem 7) ¿cuál es la diferencia en la caja de cada una?

AL: Pues, de 40 a 20 hay 20, o sea, está la mitad de ese número, y de 30 a 15, la mitad, que es 15. Bueno, también es verdad que la diferencia en éste (señala los datos de Pilar) es más grande, porque tiene 20 y hay 40, pero, no se... Ella tiene aquí menos bolas, bueno no, tiene Rosa menos bolas que Pilar, pero, vaya, que existe la misma diferencia de una caja a otra.

E: Lee el ítem 8 y su respuesta: " Que es verdad, el juego no es justo, ya que Luis tiene más bolas blancas que Eduardo; pero también Luis tiene más bolas negras que Eduardo, por lo que también tiene menos probabilidades de ganar".

AL: Claro, porque la diferencia es la misma, de 20 la mitad es 10 y de 60 la mitad es 30, pero para ganar hay que sacar una bola blanca, y éste (Luis) tiene 30 bolas blancas, y el otro tiene 10 bolas blancas, pero claro, también, pues puede perder, porque también influyen las 60 bolas negras, mientras que éste (Eduardo) tiene 20 nada más. Está equilibrado. Yo creo que es justo, porque si hay la misma diferencia...

En el cambio de contexto, Alberto experimenta un salto hacia un nivel inferior en sus comparaciones, ya que sólo utiliza estrategias de una variable, aunque tiene en cuenta las dos para decidir en función de qué variable va a realizar su elección. Estas son las estrategias de nivel 1, y las utiliza sólo cuando hay un dato igual en ambas ruletas:

E: Entre estas dos ruletas, (ruleta A: 5a vs 2r; ruleta B: 6a vs 2r; nivel IA), ¿cuál elegirías, si tienes que obtener azul para ganar?

AL: A ver, cuatro y dos, cinco... Esta (señala la B)

E: ¿Por qué?

AL: Porque hay más azules. Aquí hay seis cuadros azules (señala la ruleta B) y aquí cinco (señala la A), mientras que lo que le influye a éste son dos rojos, y a ésta también son dos rojos.

Alumno nº84: Juan

Juan es un alumno de 1º de E.S.O. clasificado, según sus respuestas el cuestionario, en un nivel IIB pues utiliza estrategias de dos variables, de correspondencia en algunos casos y aditivas en otros y ha respondido correctamente a los ítems 12, 13, 14 y 8.

En la entrevista aclara suficientemente su respuesta al ítem 7 que, a priori, parecía mostrar el sesgo de equiprobabilidad, pero tras la petición de que ampliase su respuesta, el alumno deja clara una estrategia de correspondencia de construcción propia

E: (Respecto al ítem 7) Ya, no influye la edad que tenga la persona, ni la inteligencia, ¿y la cantidad de bolas que haya en la caja, influye?

J: Aquí no, porque como hay 40 blancas y 20 negras, o sea, la mitad de negras que de blancas, y aquí es lo mismo, la mitad de negras que de blancas.

Respecto al cambio de contexto de elección de urnas a ruletas, Juan emplea exactamente los mismos tipos de estrategias, que, al igual que con las bolas, evolucionan según la dificultad de la demanda de la tarea, para mostrar un retroceso en las dos más difíciles, en que usa estrategias aditivas.

E: Entre éstas dos, ¿Cuál prefieres? (ruleta A: 6a vs 3r; ruleta B: 4a vs 2r; nivel IIB).

J: Me da lo mismo, porque aquí hay 6 azules y 3 rojos, ¿no?, que es la mitad; y aquí hay 4 azules y 2 rojos, que también es la mitad, entonces da lo mismo.

E: ¿Y entre estas dos? (ruleta A: 2a vs 5r; ruleta B: 4a vs 7r; nivel IIIA)

J: Creo que da igual.

E: ¿Por qué?

J: Porque aquí (señala la A) hay 5 rojos y dos azules ¿no?, entonces hay tres triángulos de diferencia, y aquí, (señala la B) como hay siete, al quitar los azules, quedan tres, así que hay la misma posibilidad.

E: Y por último, entre estas dos: (ruleta A: 7a vs 5r; ruleta B: 5a vs 3r; nivel IIIB)

J: Pues también da igual, porque si aquí tenemos 7 azules y 5 rojos, si los restamos me quedan dos azules, y si aquí tenemos 5 azules y 3 rojos, si los restamos, pues nos queda lo mismo.

Alumno nº108: Rafael

Rafael es un alumno de 1º de E.S.O. que responde a casi todos los ítems de comparación de probabilidades del cuestionario comparando una variable (sólo los casos favorables o sólo los desfavorables, depende de la tarea), excepto en dos, en que utiliza una comparación aditiva. Sólo respondió correctamente a los ítems 12, 13 y 14. Se encuentra, por tanto en un nivel IIA, y no manifestó es sesgo de equiprobabilidad.

En sus respuestas a la entrevista se reafirma en las estrategias empleadas en los contextos con bolas, pero al cambiar a un contexto de ruletas, sus estrategias se vuelven de nivel 0 ó 1. Salvo en una cuestión, decide siempre en función del número de sectores azules. No le importa el área ocupada, y sí el hecho de que los sectores aparezcan juntos o dispersos, argumentos que utiliza indistintamente para avalar una mayor probabilidad de ocurrencia del suceso.

(Items de elección de ruletas)

E: Entre éstas dos, ¿Cuál prefieres (para obtener azul)? (ruleta A: 6a vs 3r; ruleta B: 4a vs 2r; nivel IIB).

R: La A.

E: ¿Por qué?

R: Porque, aparte de que hay más número de casillas azules, las rojas están desperdigadas, pero si estuviesen en una misma casilla de tres habría más posibilidades de que saliera roja.

E: ¿Y entre estas dos? (ruleta A: 2a vs 5r; ruleta B: 4a vs 7r; nivel IIIA)

R: La B.

E: ¿Por qué?

R: Porque hay más número de casillas azules que en la A. Aquí hay sólo dos (señala la A) pero aquí hay más (señala la B). Son menores, pero, como la aguja gira, Habría en ésta dos posibilidades y aquí cuatro, pero serían menores, pero estarían desperdigadas.

E: Pero, ésta (señalando la B) también tiene más rojos...

R: Pero los rojos aquí (en la B) están mucho más desperdigados que en la A.

E: Y por último, entres estas dos: (ruleta A: 7a vs 5r; ruleta B: 5a vs 3r; nivel IIIB)

R: La A.

E: ¿Por qué?

R: Porque hay más casillas que en la B, pero como son más pequeñas, están más desperdigadas y hay más rojas. Hay más azules, pero también hay más rojas... Sí, la A.

E: Pero, si hay más azules y también más rojas, ¿por qué escoges la A?

R: Porque hay más azules que rojas.

E: Pero también aquí (señala la B).

R: Pero las rojas son más grandes y están más apelmazadas.

Alumno nº135: Jose Antonio

Jose Antonio es un alumno de 2º de E.S.O., cuyas respuestas al cuestionario lo calificaban en el nivel IIB de elección de urnas. Obtuvo respuestas correctas en los ítems 12, 13, 7 y 8. Aunque utilizaba estrategias de correspondencia en los ítem 7 y 8, retrocedía a las aditivas en las respuestas a los ítems 15 y 16.

Por otra parte, al cambiar al contexto de ruletas, Jose Antonio no utiliza, en ningún momento, la estrategia aditiva, sino la comparación de una sola variable y el concepto de área. En la mayoría de las tareas trata de comparar las áreas ocupadas por los sectores favorables en ambas ruletas, y toma la decisión por aproximación.

E: Entre éstas dos, ¿Cuál prefieres? (ruleta A: 6a vs 3r; ruleta B: 4a vs 2r; nivel IIB).

J.A: La B.

E: ¿Por qué?

J.A: Porque, más o menos, aunque tiene menos de los dos, creo que aquí ocupan más espacio los azules.

E: ¿Cómo sabes que aquí (en la B) ocupan más espacio? ¿cómo lo calculas?

J.A: Porque dos de los de A son como uno de los de B. Pues aquí (en B) habría dos más de A.

Alumno nº139: Carolina

Carolina es una alumna de 2º de E.S.O. Por sus respuestas al cuestionario, la clasificamos en el nivel IA de estrategias de elección de urnas, pues responde comparando, exclusivamente, el número de casos favorables, y en los casos en que no lo hace es porque manifiesta el sesgo de equiprobabilidad, opinando que las urnas son equiprobables porque depende del azar. No tuvo ninguna respuesta correcta en estos problemas.

En los contextos de ruletas, sin embargo, no se deja llevar por el sesgo de equiprobabilidad, sino que basa sus elecciones en la comparación del número de sectores desfavorables, y en factores improcedentes, como la distribución de los sectores, que si están más separados los considera más probables.

E: lee el ítem 16 y su respuesta: "En ésta me dices que prefieres la caja J porque hay más posibilidad, aunque también perfectamente puede ser la opción A (la misma posibilidad)"...

C: Bueno, es que es lo mismo, porque de 7 y 5 nada más que se lleva dos. 5 y 3 igual, sólo que en la caja J hay más y en la K hay menos. Pero son iguales.

E: Entonces, en la pregunta anterior, ¿qué diferencia hay de 4 a 12?

C: 8

E: ¿Y de 10 a 20?

C: 10

E: Entonces, si la diferencia no es la misma...

C: Hombre, que la H tendría más posibilidad, pero... igual. Yo creo que igual. Es un poco de suerte.

...

(preguntas de elección de ruletas)

E: Entre éstas dos, ¿Cual prefieres? (ruleta A: 6a vs 3r; ruleta B: 4a vs 2r; nivel IIB).

C: La B.

E: ¿Por qué?

C: Porque hay nada más que dos rojas. Aunque en ésa (ruleta A) sean más chicos, pero también los azules son más chicos.

4.5. RAZONAMIENTO COMBINATORIO Y SU USO EN LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

El segundo punto analizado en las entrevistas es el razonamiento combinatorio de los alumnos y el uso que hacen de este razonamiento para determinar los casos favorables y posibles en un experimento aleatorio y asignar probabilidades. Puesto que Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975) indican el papel fundamental de la capacidad combinatoria en el desarrollo del pensamiento probabilístico, hemos considerado necesario investigar con mayor detalle este razonamiento en nuestros alumnos.

4.5.1. Enumeración del espacio muestral. Suceso seguro

Otro punto analizado ha sido las respuestas de los alumnos al ítem 1, en el que se precisa la capacidad de enumeración sistemática. Esta destreza no es hoy día objeto explícito de enseñanza y, sin embargo, investigaciones como las de Maury y Fayol (1986), Fischbein y Gazit (1988), Navarro-Pelayo (1994) y Batanero y cols. (1997a y b) muestran que muchos alumnos llegan a la etapa de las operaciones formales sin haber adquirido esta capacidad.

Por otro lado, en este ítem los alumnos deben aplicar su concepción sobre el suceso seguro. A este respecto Fischbein y sus cols. (1991) nos indican que para muchos niños la idea de seguro es más difícil de asimilar que la idea de probable. En lo que sigue analizamos nuestros resultados en este ítem.

Alumno nº8: Juan Manuel

Juan Manuel respondió incorrectamente al ítem 1, pero, en el curso de la entrevista mostró que no había interpretado adecuadamente el enunciado de la pregunta. Cuando la investigadora le aclaró la cuestión, el alumno demostró cierta capacidad combinatoria para realizar el estudio de casos que requería la tarea, aunque la respuesta inmediata fue la de sacar todas las bolas, que es la que no requiere ningún esfuerzo. Más tarde. Juan Manuel fue consciente de qué casos daban lugar al suceso seguro y cuáles eran posibles pero no seguros, mostrando, por tanto, una capacidad combinatoria suficiente y una comprensión adecuada de la idea de suceso seguro.

E: Lee el ítem 1 del cuestionario y la respuesta: "6 bolas. ¿Recuerdas por qué?
J.M: No me acuerdo.
E: Repite el enunciado anotando los datos y recalcando que la extracción se realiza sin mirar.
J.M: ¿Una de cada color tengo que sacar?
E: Sí.
J.M: Entonces, todas.
E: Eso serían 9. ¿Y si sacases 8 bolas?
J.M: También.
E: ¿Y si sacas siete?
J.M: Pues, puede, pero eso ya es más difícil, porque si se quitan 7, pues a lo mejor no se saca ninguna blanca.

Alumno nº30: Alejandro

Alejandro responde incorrectamente al ítem 1 porque no ha interpretado bien la pregunta, aunque, después de las aclaraciones oportunas, demuestra no poseer una noción clara de suceso seguro, y no considera necesario analizar las posibles combinaciones de bolas para decidir si es seguro o no que se va a obtener una de cada color. Simplemente, elige un número que a él le parece suficientemente grande para darle una alta probabilidad de éxito y le asigna la seguridad. No hace una estimación aproximada, sólo se basa en una experiencia previa remota.

E: (Referido al ítem 1) Si, por ejemplo, sacaras tres bolas sin mirar, ¿podrías estar seguro de que tienes una de cada color?.
A: No podría estar seguro, porque a lo mejor coges dos verdes y una roja.
E: ¿Y con cuatro bolas?
A: Con cuatro ya sí.
E: ¿Estarías seguro de que habría una roja, una verde y una blanca?
A: Sí.
E: Te propongo otro ejemplo: Si tuvieras 10 bolas rojas, 8 bolas verdes y 5 bolas blancas, (anota las cantidades) ¿Cuántas sacarías, sin mirar, para estar seguro de que habrías obtenido una ficha de cada color?.
A: Pues, ... 15 bolas.
E: ¿Por qué 15?
A: Porque así te salen... 2 rojas, 8 verdes y 5 blancas.
E: ¿Y con 15 estarías seguro?
A: Y con 10.
E: ¿Con 10 estarías seguro?
A: Sí.
E: ¿Por qué estás tan seguro? ¿Y si te salieran las 10 rojas?
A: Es que yo, en un cumpleaños ya lo he hecho, con los ojos tapados. Saqué diez bolas y me salió una de cada color.
E: Pero, ¿no te podrían haber salido las diez rojas?
A: No, yo lo hice y me salió.
E: ¿Y si lo hicieras de nuevo, te saldría otra vez?
A: No sé ya.
E: No sabes lo que te saldría, pero ¿No podrían salirte las 10 rojas?
A: No.

Alumno nº37: Pablo

Pablo demuestra poseer una correcta idea de "suceso seguro". No tiene ninguna duda de lo que se le pide en el enunciado del ítem 1 y no sólo responde correctamente a esta tarea, sino que además, en su explicación demuestra que es consciente de la estrategia que puede seguir en este tipo de situaciones, la generaliza y resuelve con éxito otra situación análoga donde los valores eran mayores.

P: (Respecto al ítem 1)... Pues, tengo que sacar 8 bolas porque las dos mayores son cuatro y tres, entonces ya van siete y como de blancas hay dos, pues, una más y así es seguro que sale una de cada color.

E: ¿Y si sacaras una bola menos, no podrías estar seguro?.

P: No, puede que no salieran blancas.

E: Si quieres puedes tomar nota en este papel: Si en la caja hubiese 10 rojas, 8 verdes y 5 blancas, ¿Cuántas bolas cogerías para estar seguro de obtener una de cada color?.

P: (Escribe los datos). A ver, este es más complicado... Si saco 18, no, 19.

E: ¿Por qué?

P: Porque la dos mayores son 18 y una de las otras, 19.

Alumno nº42: Alberto

En la entrevista queda patente que el alumno no interpretó correctamente la información del problema cuando respondió al cuestionario, por lo que se hizo necesaria la aclaración de que las bolas se extraían sin mirar. Aunque Alberto demuestra poseer una concepción correcta del suceso seguro, cuando se le pregunta por una solución que no sea la de sacar todas las bolas, hace una estimación aproximada. El estudio de casos que realiza no es sistemático. Sólo se plantea algunos ejemplos de lo que podría ocurrir, sopesa las cantidades de bolas de cada clase, y da una solución por aproximación. Cuando las cantidades implicadas son mayores, ni siquiera se atreve a apuntar una respuesta distinta a sacar todas las bolas.

AL: (Después de aclararle la demanda de la tarea)... Entonces sacaría lo máximo que se pudiese sacar. Si hay nueve bolas, pues sacaría nueve, y así sí que estaría seguro.

E: ¿Y si sacaras una bola menos?

AL: También segurísimo, porque hay más de un número de cada color.

E: ¿Y si sacas siete?

AL: Pues ya es más difícil, porque blancas sólo hay dos, pero, bueno, no creo, porque también hay cuatro rojas, que influyen más. Sí, yo creo que con siete sí.

E: ¿Y si sacas seis?

AL: Eso ya es más difícil. Pues ya no estaría tan seguro.

E: Si quieres puedes tomar nota en este papel: Si en la caja hubiese 10 rojas, 8 verdes y 5 blancas, ¿Cuántas bolas cogerías para estar seguro de obtener una de cada color?.

AL: Con que saque... Es que es difícil, porque si hay 10 rojas. No se, yo las sacaría todas, porque... tú di que sacas 5. Pues te pueden salir una de cada color, porque hay muchas de cada, pero es que también de rojas hay 10 y igual te salen ocho y también pueden salir muchas verdes y muchas rojas...

Alumno nº84: Juan

En el ítem 1, Juan no manifiesta ningún tipo de duda respecto al significado de suceso seguro, y lo demuestra en sus respuestas en las que evidencia el estudio de casos que ha realizado para solucionar la cuestión, que, además es capaz de generalizar.

E: (Respecto al ítem 1)... ¿Me puedes explicar un poco por qué me contestas eso?

J: Porque si tú sacas una bola y sale roja, ¿no?, y sacas otras tres y también salen rojas, ¿no?... Como aquí hay cuatro y tres, siete, y dos, nueve, pues tienes que sacar ocho bolas para que, por lo menos una blanca, una verde y una roja salgan.

E: Y si sacamos una bola menos, ¿ya no estarías seguro?. Por ejemplo, sacando siete bolas...

J: No, porque podrías sacar las cuatro bolas rojas y las tres verdes, que son siete, y entonces te faltaría la bola blanca.

E: Si quieres puedes tomar nota en este papel: Si en la caja hubiese 10 rojas, 8 verdes y 5 blancas, ¿Cuántas bolas cogerías para estar seguro de obtener una de cada color?.

(El alumno anota las cantidades de bolas rojas, verdes y blancas, y escribe: 18 + 5 = 23... Silencio)

J: Pues, 19

E: ¿Por qué?

J: Pues, porque puedes sacar las diez rojas, y las ocho verdes, pues si sacas diecinueve, ya sabes que tendrás una de cada color.

Alumno nº108: Rafael

La idea que parece tener Rafael de suceso seguro es la de muy probable. En el ítem 1 se conforma con una solución que aumente las probabilidades de éxito, aunque no se lo garantice. Para encontrar el número exacto de bolas a extraer, Rafael diseña un algoritmo de estructura aditiva en el que realiza tantas extracciones como sumen las diferencias entre el número de bolas más frecuente y el de los demás colores, más uno.

Cuando la investigadora le hace notar que la fórmula no garantiza el éxito, comienza a probar con casos aislados, pero sin sistematicidad, así que decide sacar todas las bolas.

E: Lee el ítem 1 del cuestionario y la respuesta: "Yo creo que tienen que sacar tres veces para tener la posibilidad de sacar una de cada color". ¿Sigues de acuerdo con esa respuesta?
R: No.
E: ¿Por qué?
R: Porque ahora, como tienes 3 bolas verdes y dos blancas, hay más posibilidad de que salgan las bolas rojas, que las verdes o blancas, entonces, una vez para la bola roja, otra para la misma posibilidad de bolas verdes, y dos para la misma posibilidad de bolas blancas que de rojas.
E: Entonces, ¿Cuántas bolas habría que extraer?
R: Cuatro.
E: ¿Y si extraes cuatro bolas sí estarás seguro de obtener una de cada color? (Asentimiento)... ¿Qué piensas que es "estar seguro"?
R: Pues que hay más posibilidades de que te puedan salir las otras bolas.
E: Y si coges cuatro bolas, ¿estarás seguro de que te salgan, como mínimo, una roja, una verde y una blanca?
R: No, porque también influye la suerte.
E: Entonces, cogiendo 4 bolas, ¿no estarías seguro?
R: Totalmente, no.
E: Y si coges cinco, ¿estarías seguro?
R: Si.
E: Si quieres puedes tomar nota en este papel: Si en la caja hubiese 10 rojas, 8 verdes y 5 blancas, ¿Cuántas bolas cogerías para estar seguro de obtener una de cada color?.
(El alumno anota las cantidades de bolas rojas, verdes y blancas)
R: 8
E: ¿Por qué?
R: Porque hay una de esta posibilidad (señala las 10 rojas). Para tener igual de posibilidades que con las rojas, son dos (señala las 8 azules), y cinco para igualar a las rojas (señala las 5 blancas)
E: Y si sacas 8 bolas, ¿no podría ocurrir que las 8 bolas salieran rojas?.
R: Sí.
E: Entonces no tendrías una de cada color.
R: Entonces, tendría que sacar más de 10 rojas, porque podría salir más de una roja y la blanca y la azul.
E: Sacando 11, por ejemplo...
R: No, 11 no, porque podría tener la mala suerte de coger 10 rojas.
E: ¿Te valdrían, entonces 12?
R: Si.
E: ¿Y si te salieran 10 rojas y 2 verdes?
R: Pues habría que coger más. Para estar seguro de que te salieran todas, habría que coger 23.
E: ¿Por qué 23?
R: Porque 5 y 8 son 13, más las 10 rojas son 23.
E: O sea que las cogerías todas...
R: Sí.

Alumno nº135: Jose Antonio

Jose Antonio tiene una adecuada concepción de la idea de suceso seguro. La respuesta que este alumno da al ítem 1 es "todas las bolas", para economizar el esfuerzo de un estudio de casos; pero ante el requerimiento de la entrevistadora, el alumno se muestra capaz de diseñar una estrategia para decidir el menor número de bolas que le garantice el éxito en la tarea, y de generalizarlo a una nueva situación.

E: Si quieres puedes tomar nota en este papel: Si en la caja hubiese 10 rojas, 8 verdes y 5 blancas, ¿Cuántas bolas cogerías para estar seguro de obtener una de cada color?.
J.A: Otra vez todas.
E: Eso serían 23. ¿Y si sacaras 22?

J.A: También.
E: Y si sacas 21?.
J.A: También.
E: Entonces, hay más de una solución. Dime el menor número posible
J.A: 19.
E: ¿Por qué 19?
J.A: Porque las que menos hay son de cinco. Las otras son diez y ocho, dieciocho. Si sacas una más ya tienes las diez, las ocho y una de las otras cinco.

Alumna nº139: Carolina

Carolina demuestra en sus respuestas una concepción inadecuada del suceso seguro. Aunque al expresar su idea de este concepto, ésta parece ser aceptable, en sus comentarios al ítem 1 deducimos que, para ella, estar segura es tener cierta probabilidad, cuanto mayor mejor, pero no exige el 100%. A instancias de la investigadora, comienza a estudiar los casos posibles, pero termina acortando camino y decidiendo que entonces lo mejor es sacar todas las bolas. Sin embargo, cuando se le plantea otra cuestión similar, vuelve a tomar como solución un caso que no ofrece una probabilidad del 100%.

E: Si quieres puedes tomar nota en este papel: Si en la caja hubiese 10 rojas, 8 verdes y 5 blancas, ¿Cuántas bolas cogerías para estar segura de obtener una de cada color?.
C: Cogería ocho.
E: ¿Y estarías segura de obtener una de cada color?
C: Creo que sí.
E: Tú que entiendes por "estar seguro".
C: Hombre, eso es un poco de suerte, porque a lo mejor coges algunas y tienes suerte, pero a lo mejor no.
E: Entonces, podrías coger tres bolas y tener suerte y que te saliera una de cada, pero podrían no salirte, entonces con tres bolas ¿podrías estar segura?
C: No.
E: Pero cogiendo 8 ¿sí estarías segura?
C: Tampoco. A lo mejor tendría suerte y a lo mejor no.
E: Pero, entonces, ¿qué es estar segura?
C: Hombre, segura es... que seguro que cogerías una de cada color.
E: Entonces, con ocho...
C: Pues, digo yo que sí.

4.5.2. Asignación de probabilidades

La capacidad combinatoria de los alumnos se debería poner de manifiesto en la asignación de probabilidades, para la determinación de los casos favorables y posibles, y, en especial en los ítems 10 y 11. Sin embargo, el sesgo de equiprobabilidad se presenta con frecuencia en los alumnos entrevistados y les lleva a errores sistemáticos en la asignación de probabilidades, como mostramos en los casos siguientes:

Alumno nº30: Alejandro

Respecto al sesgo de equiprobabilidad, encontramos que este alumno rectifica su primera respuesta al ítem 10, tras la pregunta de la investigadora. Sin embargo, en el ítem 11, en que hay implicados mayor número de sucesos simples, Alejandro manifiesta una resistente tendencia al sesgo de equiprobabilidad, pues, después de exponer correctamente las cantidades de bolas que quedan dentro de la caja, y ser consciente de que hay más azules, se reafirma en su opinión de que los sucesos son equiprobables.

E: Lee el ítem 10 y su respuesta: "Tú me dices que es más probable que el nombre sea de niña que de niño, porque da igual que sea niña, que sea niño, que sea niño, que sea niña"
A: Es que da lo mismo.
E: ¿Entonces, por qué me has dicho al principio que es más probable que sea de niña?
A: ¡Ah!, Es que me he equivocado. Porque hay más niñas.
E: Lee el ítem 11 y su respuesta: "Dices que todos los colores tienen la misma probabilidad, porque da igual un color que otro".

A: Sí, porque todos son iguales. Da igual un color que otro.
E: Pero, al sacar dos rojos y 1 azul, ¿Qué queda dentro?
A: Pues... 2 rojas, 3 azules y 2 verdes
E: Entonces, si hay más bolas azules que de las demás...
A: No importa, eso no.

Alumno nº135: José Antonio

José Antonio manifestaba el sesgo de equiprobabilidad en sus respuestas a los ítems 10 y 11. Sin embargo, en la entrevista revela una serie de contradicciones entre este sesgo y la consideración del mayor número de casos favorables, por las que, al aplicarlas simultáneamente, en el ítem 7 llega a afirmar que, aunque tengan las mismas probabilidades, una de ellas tiene más.

Lo mismo le ocurre en el ítem 8, en el cual, para poder casar las dos estrategias establece la diferencia entre "igualdad de probabilidades" e "igualdad de dificultad". Creemos que puede ser la tendencia al sesgo de equiprobabilidad lo que le lleva a afirmar que, aunque piense que un jugador lo tiene más difícil, el juego es justo.

J.A: (Explicando su respuesta al ítem 7)... Es que no tiene nada que ver la edad, porque si no miran, no creo que con los dedos sepan distinguir el color. Tiene más posibilidades porque tiene más bolas de ese color, pero ya está.
E: Pero tú me contestabas que las dos tienen las mismas posibilidades, por tener el doble de blancas que de negras...
J.A: Bueno, tener las mismas, las tienen, pero la mayor tiene más posibilidades, porque tiene más bolas blancas.
E: Pero también tiene más negras...
J.A: Pero, de todas maneras, las blancas disminuyen en 10 y las negras disminuyen en 5.
E: Lee el ítem 8 y su respuesta: " Que sí es justo, porque también tiene el doble de negras que él".
J.A: Sí, el juego es justo, porque también hay más bolas negras.
E: Sin embargo, en el anterior me has dicho que no...
J.A: Es que aquí hay muchas más negras que antes. Tiene muchas más negras que blancas. Este tiene una diferencia de 10 (señala a Eduardo) y éste de 30 (señala a Luis), entonces, tiene más posibilidades.
E: ¿Cuál?, ¿No decías que era justo?
J.A: Si, es justo, pero Luis, al tener más negras es un poquito más difícil.
E: ¿Tu qué crees que quiere decir que un juego sea justo?
J.A: Pues que los dos tengan las mismas posibilidades.
E: ¿Entonces el juego es justo o no?
J.A: Sí.
E: Luego los dos tienen las mismas posibilidades...
J.A: Sí, pero que uno es más difícil que otro. No es lo mismo la dificultad que tener la misma posibilidad. Es justo porque uno tiene menos y otro tiene más, pero más o menos tienen lo mismo, pero luego es más difícil porque uno tiene muchas más negras que blancas. Uno tiene una diferencia de 10 y otro tiene una diferencia de 30... Entonces es más difícil el de Luis.
E: Pero si uno lo tiene más difícil para ganar que el otro, entonces ¿cómo que es justo?
J.A: Bueno, yo lo veo justo.

Alumno nº 139: Carolina:

Aunque en el ítem 7 del cuestionario daba una respuesta ambigua, refiriéndose exclusivamente a que la edad no tiene nada que ver con la inteligencia, tras la interpelación de la entrevistadora, Carolina incurre en una contradicción cuando afirma que si el suceso es aleatorio, las cajas son equiprobables, pero, a la vez, la que tenga más bolas blancas tendrá más probabilidades. Esta respuesta es parecida a la que nos daba Jose Antonio (alumno nº 135) y, al igual que él, no considera que el juego del ítem 8 sea justo por no tener las cajas el mismo número de bolas, a pesar de que piensa que, al ser la extracción aleatoria, los sucesos son equiprobables independientemente de la composición de las cajas. Creemos que Carolina denota una gran influencia del sesgo de equiprobabilidad; hasta el punto de modificar la estrategia que la alumna considera óptima para realizar la elección, que es la de decidirse por la caja con mayor número de bolas favorables.

E: (Respecto al ítem 7)... Así que tu crees que la inteligencia no tiene nada que ver con la edad, ¿y con sacar la bola blanca?

C: No, eso es suerte, no es inteligencia.

E: Entonces, crees que las dos tienen las mismas posibilidades de sacar un bola blanca, o una tiene más posibilidades?

C: Las dos iguales.

E: ¿Influye el número de bolas que haya en cada caja?

C: Creo que es suerte, bueno, si tiene más blancas, tendrá más posibilidades, pero... ¿quien sabe?.

También en el resto de los ítems de elección de urnas manifiesta esta confusión, llegando a señalar más de una opción en algunos de ellos, porque no logra decidir qué estrategia es la más apropiada.

Además, en sus comentarios al ítem 11, Carolina nos explica su razonamiento, que le lleva a afirmar dos opciones simultáneamente. Creemos que aquí se manifiesta el sesgo de "enfoque en el resultado aislado" ("outcome aproach"; Konold, 1989); pues la alumna no se decide a asignar más probabilidad al suceso salir azul, a pesar de que hay más bolas azules que de ningún otro tipo, porque considera que si saliera una ficha de otro color, entonces la afirmación "la azul es más probable" no sería correcta. Subordina, pues, la determinación del suceso más probable a lo que ocurra en la extracción.

E: (Referido al ítem 11) Pero tú dices que "todas tienen igual de posibilidades, pero el azul tiene más posibilidad". ¿Cómo puede ser eso?

C: Porque lo más seguro es que saques la azul, pero a lo mejor puedes sacar otra.

E: Entonces, ¿que quiere decir "tener más posibilidades"?

C: Porque si hay más, es normal que saques de esa, pero a lo mejor puedes coger una amarilla, que sólo hay una.

4.6. CREENCIAS PREVIAS

4.6.1. Factores causales y control de lo aleatorio

Alumno nº8: Juan Manuel

Juan Manuel fue catalogado en principio como semisupersticioso y en la entrevista nos muestra cómo sus creencias están fuertemente influenciadas por sus propias experiencias o las de personas cercanas. Aunque afirma conocer diferentes creencias muy difundidas, sólo le afecta la de que el nº 13 le va a influir negativamente.

E: ¿Y con respecto al día 13?.

J.M: Eso ya es otra cosa, porque a mi se me cayó una vez el papel higiénico al water el día 13.

E: ¿Y crees que a tí el día 13 te trae mala suerte?

J.M: Sí

...

E: Imagínate que tuvieras que hacer un viaje, y antes de salir te cruzas con un gato negro, ¿continuarías con tus planes de salir de viaje, o preferirías dejarlo para el día siguiente?

J.M: ¡Va!, me importa poco, porque, además, un vecino mío tiene un gato negro, entonces tendría que tener mala suerte todos los días, si eso fuera así.

Otro factor causal considerado por este alumno es la disposición física de los sectores sobre la asignación de probabilidades en contexto de ruletas:

E: No se si habrás observado que estos sectores azules (señala la B) son más grandes que éstos. ¿Eso influye?

J.M: No importa.

E: ¿Y entre estas dos? (ruleta A: 2a vs 5r; ruleta B: 4a vs 7r; nivel IIIA)

J.M: (silencio) La B.

E: ¿Por qué?

J.M: Porque tiene más.

E: ¿Qué tiene más, azules?

J.M: Sí.

E: Pero también tiene más naranja.

J.M: Ya, pero pasa una cosa, que sale igual, pero mejor tenerlos más esparcidos que en dos grandes.
E: ¿Por qué los prefieres repartidos?
J.M: Porque es mejor.

Alumno nº30: Alejandro

La creencia en supersticiones es variable en este alumno. Aunque según sus respuestas al cuestionario parecía admitir ambas creencias, en la entrevista afirma que sólo le influye la primera, pero con la condición de que la persona camine rápidamente, para evitar la planificación. Tampoco le afectan personalmente otras situaciones propuestas, aunque a otras personas que conoce sí.

E: Lee el ítem 2 y su respuesta: "Que sí, pero tiene que ir rápido". ¿Por qué?
A: Tiene que ir rápido al colegio y si entra con el pié derecho, le traerá suerte.
E: ¿Y si pone el pié izquierdo?
A: No.
E: ¿Tú lo has comprobado alguna vez?
A: Sí, para los exámenes, lo hago algunas veces.
E: ¿Y con respecto al día 13?. ¿Tú crees que el día 13 trae mala suerte?
A: A mi hermano, le trae mala suerte.
E: ¿Y a ti?
A: No, a mi no.

Alejandro denota ser muy influenciable por creencias previas y sobre todo por relaciones de tipo determinista. Descubre relaciones de causa-efecto en casi todas las situaciones aleatorias, que para él siempre son controlables, bien por manipulación de los elementos implicados o bien "haciendo trampas".

En los ítems 7 y 8 no descubre la equiprobabilidad de los sucesos implicados porque considera que es posible controlar el experimento por parte de la persona más inteligente, lo que le lleva a afirmar que "una persona que entienda de lotería tiene más posibilidades de ganar"

A: Si Pilar tiene 10 años y Rosa 8, Pilar es más grande y entiende más, y a lo mejor Rosa es más chica y Pilar le puede hacer algún engaño o algo, y puede ganar Pilar.
E: ¿Y si sacan la bola sin mirar, cómo lo va a hacer?
A: Pues, también le puede tocar a Rosa, pero yo creo que a Pilar.
E: Entonces, si una persona que sea superinteligente juega a la lotería, ¿crees que tiene más posibilidades de ganar?
A: Sí. Si entiende de lotería, sí.

Alumno nº37: Pablo

Pablo denota en sus respuestas una ausencia total de creencias en supersticiones o factores socio-culturales improcedentes, tanto en sus opiniones sobre creencias populares, como la del número 13; como respecto a sus preferencias en juegos de loterías, dados o monedas.

E: Cuando juegas a cara o cruz con una moneda, ¿tienes una opción preferida, o te da igual?.
P: Lo hago sin pensar. Casi siempre el primero que lo dice elige cara y el segundo cruz, pero a mi me da igual, vamos que no me enfado.
E: Y al lanzar un dado?. Crees que hay números que sean más fáciles de obtener y números que sean más difíciles?
P: No, todos son iguales.

Alumno nº42: Alberto

Alberto manifiesta cierta tendencia hacia algunas creencias subjetivas populares, basándose en episodios de su propia experiencia. Así, no le gustan los días trece, y considera que los gatos negros le traen "mala suerte", pero no lo ve como algo social, sino personal: mientras a otras personas no les afecta, a él concretamente le influyen negativamente. En un intento de explicación, él atribuye esto a factores psicológicos, como la idea de que si alguien cree fuertemente en algo, puede influir en su ocurrencia. Es así como explica el control que dice poseer sobre ciertos experimentos aleatorios, como el resultado del lanzamiento de una moneda. Asimismo, Alberto expresa su afición a los símbolos religiosos, y de ahí su preferencia por la "cruz" en el lanzamiento de una moneda, evento que, como ya hemos mencionado, afirma poder controlar para que salga su opción.

AL: (Respecto al día 13)... Yo pienso que es verdad, porque, no se... parece que también es una tontería, similar a la segunda pregunta, pero, a mi me pasan siempre cosas malas el día 13. No se si es que porque como te lo crees, te pasa algo malo; o el que piensa que entrar con el pié derecho le va a dar buena suerte, pues si entra, yo que se, pues a lo mejor le sale.

...

E: Cuando juegas a cara o cruz con una moneda, ¿tienes una opción preferida, o te da igual?.

AL: Cruz. La cara me da mala suerte. Yo, como siempre voy con cosas de Jesús y cosas de esas, pues siempre elijo cruz, como si simbolizase a Cristo.

E: ¿Y crees que sale más veces la cruz por algún motivo?

AL: No se, es que yo estoy en un equipo de fútbol, ¿no?, y siempre que hay que echar a cara o cruz a ver quien saca, siempre elijo cruz y la mayoría de las veces gano.

AL: Pero, ¿tu crees que al lanzar la moneda sale más veces cruz que cara o igual ...?

AL: No sé, cuando yo la echo sale más veces cruz que cara.

E: ¿Por qué?

AL: No se, cuando está la moneda en el aire, yo hago como si yo la estuviese moviendo. Me quedo mirando como si la estuviese moviendo. Es que hay veces que cae, y se queda rodando la moneda, y yo hago así (hace un gesto con la mirada) y se pone cruz. No siempre ocurre, pero hay veces que sí.

...

E: ¿Piensas que existe alguna manera de "atraer" la suerte para que te toque?

AL: Pues no sé. Yo cuando juego a los dados, soplo así (hace el gesto de soplar al dado entre sus manos).

E: ¿Y has comprobado que te trae suerte?

AL: Sí. Cuando no quiero que me salga un seis porque caigo en una casilla que me van a matar, o algo, lo hago. Es que yo soy muy supersticioso. Yo me lo creo todo.

Respecto al efecto de la disposición física, en contexto de ruletas. y en los casos en que no hay ningún dato igual, y la diferencia entre las áreas ocupadas no es muy perceptible, toma la decisión en función de estrategias ingenuas, basadas en creencias sobre la preferencia de sectores juntos o dispersos.

E: Entre éstas dos, ¿Cuál prefieres? (ruleta A: 6a vs 3r; ruleta B: 4a vs 2r; nivel IIB).

AL: La B.

E: ¿Por qué?

AL: Porque los sectores son más grandes, pero es lo mismo, porque es que aquí hay dos chicas (señala dos sectores azules en la A), pero equivalen a una grande como ésta, ¿no? (señala un sector azul en la B), más o menos...

E: ¿Cómo lo sabes?

AL: Pero, de todas formas, aquí están menos, ... menos... aquí hay en el lado derecho de la B hay azul, pues en el lado izquierdo también hay azul, y sólo en medio hay porciones rojas, mientras que aquí (en la A) pues está salteado, aquí hay rojo, aquí también, aquí también... en la A es más difícil.

Alumno nº84: Juan

Este alumno declara no creer en supersticiones ni en otras creencias populares, aunque sí las conoce y ha oído hablar de ellas, pero no se deja influir. Aunque afirma poseer un número preferido, no es por cuestión de suerte, sino porque le gusta, y para él todas las caras de un dado son equiprobables. Sin embargo, proclama saber cómo controlar el lanzamiento de una moneda para que salga la cara, que es lo que él suele elegir.

E: ¿Tienes algún número preferido?.

J: Si, el cuatro. No es que me traiga buena suerte, es que como tengo ese número desde segundo, pues me gusta.

E: Cuando juegas a cara o cruz, ¿tienes una opción preferida, o te da igual?.

J: Prefiero jugar a cara. Porque casi siempre gano, no se porqué.

E: Pero, ¿tú crees que tiene más posibilidades de salir cara que cruz?

J: Yo creo que sí.

E: ¿Por qué?.

J: No se. A lo mejor, si pones la moneda con la cara para arriba, y la lanzamos, pero claro, si la pones boca abajo, a lo mejor tiene más posibilidad cruz.

E: Entonces, ¿tú sabes cómo tienes que lanzar una moneda para que te salga lo que tú quieres?
J: Pues, yo, normalmente pongo para arriba la cara y normalmente gano, pero a veces también pierdo.

Para este alumno la distribución de los sectores no influye en la elección, en contexto de ruletas:
E: Y por último, entre estas dos: (ruleta A: 7a vs 5r; ruleta B: 5a vs 3r; nivel IIIB)
J: Pues también da igual, porque si aquí tenemos 7 azules y 5 rojos, si los restamos me quedan dos azules, y si aquí tenemos 5 azules y 3 rojos, si los restamos, pues nos queda lo mismo.
E: ¿Crees que influye en algo el hecho de que los sectores azules estén más juntos o estén dispersos?
J: Eso da igual.

Alumno nº108: Rafael

Rafael no cree en la influencia de factores externos, como supersticiones, pero se muestra respetuoso con las personas a las que les afecta, alegando que cada uno puede hacer lo que quiera, pero por eso no le va a influir. Sin embargo, en cada situación reserva una parcela para la influencia de un factor aleatorio, al que llama "suerte", solo que no es controlable de forma externa.
E: ¿Entonces, crees que si José es supersticioso le va traer buena suerte entrar con el pié derecho?
R: No, porque puede ser todo lo supersticioso que quiera, pero si no hace bien el examen porque tiene mala suerte, o puede que tenga buena suerte y apruebe.
E: ¿Me podrías decir que entiendes tú por "tener suerte"?
R: Pues... jugar a los bolos y derribarlos todos, si es la primera vez que juegas.
E: ¿Tú crees que hay cosas que pueden influir en la suerte de una persona?
R: Si. Por ejemplo, mi madre se sacó las oposiciones, ¿no?, e indudablemente, el 50% de las oposiciones es suerte, entonces, si eso es verdad, una persona podría ir muy bien preparada, y tener mala suerte.
E: ¿Y crees que una persona puede hacer algo para mejorar su suerte, como tocar madera, o guardar una herradura, o alguna otra cosa?
R: No. Yo no lo creo.

Alumno nº135: José Antonio

Aunque conoce muchas creencias populares y afirma que su madre cree en su influencia, José Antonio no se deja influir directamente por ellas. Opina que son tradiciones, algunas muy extendidas, y a las personas que se las creen, su propia sugestión es lo que les influye.
E: Lee el ítem 2 y su respuesta: "Creo que ese chico es supersticioso".
J.A: Sí, es como mi madre, que es muy supersticiosa.
E: ¿Pero eso aumenta su suerte o no?
J.A: Pues hay gente que sí cree y le pasa y otras veces les va bien. A lo mejor entra con el izquierdo y tiene más suerte un día y entra con el derecho y tiene mala suerte.
E: ¿Entonces va a influir o no?
J.A: No.

En contexto de ruletas, cuando tiene dudas elige la que tiene los sectores favorables dispersos, pero esa variable no le afecta cuando no tiene dudas sobre cuál ocupa más área.
E: ¿Y entre estas dos? (ruleta A: 2a vs 5r; ruleta B: 4a vs 7r; nivel IIIA)
J.A: La B.
E: ¿Por qué?
J.A: Porque están salteadillos y... no sé... es muy difícil, pero como hay más, pues tiene más posibilidades.
E: Pero son más chicos...
J.A: Pero están más salteaíllos.

Alumna nº139: Carolina

Carolina no admite la influencia de creencias socioculturales en sus decisiones, ni considera que puedan influir en los sucesos.

Afirma tener un número preferido, y que suele pedir la opción "cruz" en los lanzamientos de monedas, pero lo hace por costumbre, no porque considere esta opción más probable. También considera equiprobables los seis resultados posibles en el lanzamiento de un dado.

E: Cuando juegas a cara o cruz con una moneda, ¿tienes una opción preferida, o te da igual?.
C: Me da igual. Hombre, casi siempre elijo la misma, pero por costumbre. Casi siempre cruz.
E: ¿Crees que tiene más posibilidades de salir que la cara, o no?
C: No, no hay ninguna razón.
E: Y al lanzar un dado?. Crees que hay números que sean más fáciles de obtener y números que sean más difíciles?
C: Yo creo que no. Puede salir el que sea.

Como ya hemos comentado, en los contextos de ruletas, sin embargo, no se deja llevar por el sesgo de equiprobabilidad, sino que basa sus elecciones en la comparación del número de sectores desfavorables, y en factores improcedentes, como la distribución de los sectores, que si están más separados los considera más probables:

E: ¿Y entre estas dos? (ruleta A: 2a vs 5r; ruleta B: 4a vs 7r; nivel IIIA)
C: Yo que sé... Quizás ésta (la B).
E: ¿Por qué?
C: Porque son más chicos, pero hay más y además, están más separados.

4.6.2. Percepción de la independencia y uso de heurísticas

Alumno nº8: Juan Manuel

Aunque Juan Manuel fue clasificado como un sujeto que manifiesta la heurística de representatividad, sin embargo, en la entrevista muestra que esta influencia se produce sólo cuando relaciona la situación con su propia experiencia práctica, pues teóricamente, reconoce la independencia de los sucesos. Parece existir, pues, un conflicto entre el planteamiento teórico y el práctico.

E: Y al lanzar un dado?. Crees que hay números que sean más fáciles de obtener y números que sean más difíciles?
J.M: Mmm... todos son iguales, pero casi nunca te sale un seis, menos en el parchís, que te salen siempre tres seises y te vas a tu casa.
E: ¿Tú crees que el seis es más difícil de salir en el dado?
J.M: Sí. A mi me pasa eso.
E: Lee el ítem 4 y su respuesta: "Que no, porque nunca sale la misma combinación".
J.M: Es que nunca sale la misma combinación.
E: ¿Es imposible?
J.M: Hombre, es posible, pero casi nunca pasa.
E: Entonces, ¿tiene más posibilidades si cambia de números?
J:M: Tiene las mismas, pero es más normal que cambie.
...
E: Cuando juegas al parchís y necesitas un 5 para sacar ficha, ¿si la persona que tira antes que tú saca un 5, crees que te influye?.
J.M: Me molesta, porque así el otro me va sacando ventaja.
E: Bueno, ¿pero crees que disminuyen tus posibilidades de sacar el cinco?
J.M: No. Tengo las mismas posibilidades.
E: Supongo que sabes que hay personas que siempre compran el mismo número cuando juegan a la lotería. ¿Tú crees que es mejor jugar siempre al mismo número, o es mejor cambiar?
J.M: Pues no sé. Yo diría que es mejor cambiar.

Alumno nº30: Alejandro

De las respuestas de Alejandro a la entrevista deducimos que manifiesta una fuerte tendencia al sesgo de representatividad, pues defiende la idea de que un número tiene menos posibilidades de ganar, una vez que ya ha salido, hasta que pase mucho tiempo, ignorando así la independencia de los ensayos. También opina que se puede "aprender" a jugar a la lotería, y que cuanto más se juegue, más fácil resultará ganar.

Creemos que es posible que estos sesgos estén influenciados por situaciones de carácter sociocultural (noticias en TV, creencias populares, etc), pues el alumno se apoya continuamente en este tipo de ejemplos.

También se manifiesta la creencia en la posibilidad de controlar el azar. Para Alejandro, si le gusta un número, eso le otorga más posibilidades de ganar en cualquier juego (dados, monedas, loterías...)

E: Pero, ¿tú crees que una vez que ha tocado un número ya no puede volver a tocar más?
A: No.
E: ¿Nunca jamás?
A: Hombre, pues al año siguiente, o por ahí.
...
E: (Respecto al ítem 5) ¿Crees que hay uno que te da más posibilidades que el otro, o no?
A: Si, éste (señala el 123456).
E: ¿Por qué crees que ése es mejor?
A: Porque me gusta más.
E: ¿Y crees que con ése tienes más posibilidades de ganar o tiene las mismas?
A: Tengo más posibilidades, porque me gusta más ese número.
E: ¿Y eso hace que tengas más posibilidades?
A: Sí.
E: Lee el ítem 6 y su respuesta: "Pues si no gana, no sabrá jugar muy bien".
A: Claro, si no gana es por algo. Si quiere jugar bien, pues que entrene un poco, que juegue en su casa, pero si no gana es que no sabe jugar muy bien.
E: ¿Cómo debería de entrenar para jugar a la lotería?
A: Pues,... que compre números hasta que le toque, y ya sigue jugando bien.
E: O sea, comprando números. ¿Tu crees que cuando compre muchos números se irá entrenando y así le tocará más veces?
A: Sí.
E: Entonces, si pierde muchas veces...
A: Es que no sabe jugar y ya está.
...
E: Has leído alguna vez en la prensa o visto en la TV noticias acerca de una persona que le haya tocado la lotería varias veces, o un mismo número que le haya tocado más de una vez?
A: Sí, a un hombre de Madrid le tocó dos veces, pero porque él quería jugar con el mismo número, pero la mujer le dijo que no, que cambiara.
E: ¿Y le tocó porque cambió de número?
A: Sí, eso le dio suerte.
E: No se si sabes que algunas personas, cuando juegan a la lotería, encargan sus números a Madrid o a otro sitio, a algún familiar. ¿Por qué crees que hacen eso?
A: Porque en Madrid hay mucha suerte.
E: Pero, los números de Madrid tienen más suerte que los de Granada?
A: Sí. No sé por qué, pero tienen más suerte, lo dijeron un día en el telediario.
E: ¿Qué dijeron?
A: No me acuerdo bien, pero que tienen más suerte los de Madrid.

Alumno nº37: Pablo

Este alumno no manifiesta, en ningún momento, la heurística de representatividad. Para él, los sucesos planteados en los ítems 4, 5 y 6 son independientes, y los resultados posibles, equiprobables. Aunque muestra cierta contradicción entre sus concepciones teórica (por la que considera todos los números equiprobables) y práctica (le parece más raro que salga un número tan "particular"), sin embargo, se decide por la equiprobabilidad.

E: Lee el ítem 5 y su respuesta: "Los dos números tienen las mismas posibilidades de salir"
P: Hombre, es más raro que salga éste (señala el 123456), pero vamos, lo mismo puede salir éste que el otro.

Alumno nº42: Alberto

Alberto demuestra una fuerte tendencia a la heurística de representatividad, afirmando que, antes o después, el número elegido en la lotería tiene que tocar. Sin embargo, uno que ya ha tocado es imposible que vuelva a salir. Es coherente con esta opinión cuando explica por qué hay gente que siempre juega con los mismos números, y se muestra de acuerdo con esta decisión.

AL: (Respecto al ítem 4)... No creo, porque hay muchas veces que la lotería... Casi siempre cambian los números. O sea, a lo mejor en este cupón salen esos números. Ella los elige y vale, gana, y en el próximo, pues puede que estén, pues tres números de esos, pero en el próximo puede que no tenga ninguno...

E: Pero, ¿es imposible que se repitan?

AL: Para mi es imposible. Por lo menos cambiará uno seguro, porque creo yo que cuando se compran los cupones, a la siguiente semana se cambia de cupón, y si se cambia el dibujito y todo, pues también se cambia eso, algún número o algo. No creo que salgan igual que la semana anterior.

E: Pero hay personas que siempre compran el mismo número cuando juegan a la lotería. ¿Tú conoces a alguien?

AL: Pues no. Bueno, me parece que mi tía siempre pone el trece o no sé, no me acuerdo bien.

E: Pero tú crees que eso le va a dar más posibilidades de ganar?

AL: Yo le digo que no, que es mejor que cada día elija uno, pero es que, claro, si tú durante una semana estás eligiendo el 5, y no te toca, y dices... voy a cambiar de número, y ese día que cambias te sale el cinco que antes no te salía, entonces no se sabe. Yo creo que, si todavía estos números no han salido, que siga con esos números, claro, porque tienen que salir. Es que a ella ya le habían salido, por eso es mejor que cambie.

Alumno nº84: Juan

Juan manifiesta una clara contradicción entre sus intuiciones teóricas o lógicas y sus intuiciones respecto a la práctica en lo referente a la independencia de sucesos en contextos de loterías. Aunque admite que todos los números son equiprobables, afirma también que el que ya ha salido premiado no va a salir con la misma facilidad que uno que no haya salido previamente.

E: Tu crees que es mejor seguir jugando con el mismo número o cambiar?

J: Yo creo que es mejor que cambie?

E: ¿Tendrá así más posibilidades de ganar?

J: Yo creo que sí. Tendrá las mismas, ¿no?, pero que la lotería tiene muchas probabilidades, un mogollón, pero si siempre echa a éste no va a salirle. Tendrá las mismas posibilidades que el 4900, ¿no?. Pero a lo mejor le sale más el 4900 que éste, porque había salido la semana pasada.

La heurística de representatividad también queda patente en las respuestas de este alumno. Además, se ve reforzada por un comentario hecho por un profesor con anterioridad a este estudio.

E: Lee el ítem 5 y su respuesta: "yo creo que Juana, porque para que no salgan números consecutivos antes se le da una serie de vueltas".

J: Si. Nuestro profesor de lengua nos dijo eso, ¿no?. Los números consecutivos, a lo mejor salen, ¿no?, pero que como es algo de azar, pues hay más posibilidades de que salga éste que éste (señalando, respectivamente a los números 378146 y 123456), porque en éste están todos seguidos, entonces, al darle muchas vueltas, pues se descolocan las bolas, y es muy difícil que salgan consecutivos.

E: ¿Y, crees que es más fácil que salgan colocadas en este orden?.

J: Pues, mejor.

Alumno nº108: Rafael

La heurística de representatividad y el efecto de recencia negativa están presentes en las respuestas de Rafael, pues afirma tajantemente que una vez que un número ha salido premiado, no volverá a salir, o que para tener más probabilidades de éxito hay que cambiar de números en cada sorteo, o que un número determinado, cuyas cifras no aparezcan en el orden natural tiene más probabilidades que uno que sí.

Al igual que ocurría con Juan (alumno nº 84), su sesgo se ve reforzado por los comentarios del profesor acerca de la manera de garantizar la aleatoriedad del sorteo.

E: Lee el ítem 4 y su respuesta: "No creo que deba de hacer eso, porque la suerte no te dice lo que va a hacer, y no debes apostar siempre a lo mismo".

R: Si, porque nuestro profesor de lengua nos dijo una vez que para que salgan las bolas, pues le dan unas vueltas a los bombos para que los números salgan mezclados y nunca tengan la posibilidad de sacar los mismos números

E: ¿Tu crees que es imposible que vuelvan a salir los mismos números o es más difícil que antes?

R: Es muy difícil, es imposible.

...

E: Lee el ítem 5 y su respuesta: "Creo que Juana es la más acertada, porque una vez me dijeron que dan las vueltas calculadas para que no salgan consecutivos".

R: Si. Es muy difícil que salgan números consecutivos aunque podría ocurrir, pero es más fácil que salga un número desordenado.

E: ¿Y, crees que éste (378146) tiene más posibilidades de salir que éste otro (123456), por estar desordenado?

R: Si.

Alumno nº135: José Antonio

José Antonio es consciente de la equiprobabilidad de los números en el juego de loterías, y de la independencia de los ensayos, y así lo afirma en su entrevista, pero sin embargo, manifiesta a la vez que, a pesar de ser equiprobables, es mejor jugar con números que no guarden orden, o cambiar de número en cada sorteo, mejor que permanecer jugando siempre con el mismo. Esto vuelve a avalar, creemos, la separación que, en contextos probabilísticos, existe entre la intuición teórica y la representación mental de la práctica.

J.A: (Referente al ítem 4)... Hombre, yo creo que es más fácil con los dígitos salteados, pero puede tocar cualquiera, incluso todos el mismo número.

E: Pero, entonces, ¿tú crees que uno tiene más posibilidades que otro, o tienen las mismas?

J.A: Tienen las mismas, aunque para mí, prefiero el salteado.

E: ¿A pesar de que piensas que los dos tienen las mismas?... ¿No es eso una contradicción?

J.A: Bueno, más o menos, pero no me gustan los números seguidos.

E: ¿Y los capicúas?

J.A: Esos sí.

E: ¿Por qué?. ¿Te traen suerte?

J.A: No, pero me gustan los capicúas, y los años.

Alumna nº139: Carolina

En general, Carolina considera que todos los números son equiprobables en el juego de la lotería, por lo que no manifiesta el sesgo de representatividad en el ítem 5, ni tampoco piensa que después de una gran racha del suceso contrario, aumenten las probabilidades del suceso dado (ítem 6). Sin embargo, cuando se trata de números que sí han salido premiados (ítem 4), se produce la contradicción que ya hemos comentado entre teoría y práctica, o, siguiendo a Burks (1963), entre un concepto "a priori" (el hecho de que todos los números son equiprobables) y un concepto empírico (Por la experiencia que tengo, un número que acaba de salir premiado, no volverá a salir. Es mejor cambiar de número)

E: (Respecto al ítem 4)... ¿Tú crees que estos números son ahora más improbables que otros?

C: Sí, yo creo que si ya han salido, sí.

E: Cuando estás jugando al parchís y necesitas un 5 para sacar ficha, ¿si la persona que tira antes que tú saca un 5, crees que disminuyen tus posibilidades de sacar un 5?.

C: Es que eso no tiene nada que ver, porque si muevo bien el dado...

E: ¿Y en el caso de la lotería sí tiene que ver? ¿Los números que han salido son luego más improbables?

C: Bueno, sí pueden salir, pero luego... nunca ocurre.

4.6.3. Intuición de juego equitativo

Alumno 8: Juan Manuel

Respecto al ítem 9, Juan Manuel parece poseer una idea acertada de cuándo un juego es o no justo, y así lo demuestra en sus respuestas a la entrevista, siendo capaz de determinar sucesos equiprobables, o de cambiar los premios para igualar las ganancias.

E: Yo te propongo un juego, y tú me dices si es justo o no: Con una baraja española, sacamos una carta sin mirar. Si la carta sale de oros, ganas tú. Si sale un as, gano yo. ¿Crees que sería justo el juego?.

J.M: no, porque yo tengo más probabilidades, porque hay cuatro ases y once de oros, porque el as no lo cuento.

E: Lee el ítem 9, y su repuesta: "Tú me dices que Esteban tiene que ganar 5 pts cada vez que salga un

1, porque tiene cinco posibilidades menos de ganar." ¿Tu crees que aquí María y Esteban tienen las mismas posibilidades de ganar?

J.M: Hombre, María tiene más posibilidades, pero Esteban, si gana, se lleva más.

E: Te voy a proponer otro juego: Con una baraja española, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tu ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?

J.M: No, no, porque tú lo tienes más fácil. Si a tí te sale una de bastos, te la llevas, te sale una de copas, te la llevas, te sale una de cualquier cosa que no sea oros y te la llevas.

E: Entonces, ¿cómo cambiaríamos el premio para que fuese justo?

J.M: Pues, que cada uno se lleve dos palos.

E: Bueno, pero en vez de cambiar las reglas de las cartas, vamos a cambiar el dinero del premio.

J.M: Pues, tu te llevas una y yo me llevaría tres.

Alumno nº30: Alejandro

Para Alejandro la idea de juego justo carece de sentido. Puesto que presentó un fuerte arraigo del sesgo de equiprobabilidad, no es de extrañar que no considere desiguales las posibilidades de ganancia en el juego del ítem 9, y otorgue ventaja a Esteban porque "María sólo gana 1 pts."

Aunque en otra fase de la entrevista declaró que conoce juegos de cartas, tampoco en este contexto reconoció la no equiprobabilidad de dos sucesos compuestos, por lo que no dudó de que los juegos presentados eran equitativos.

E: Si María va a ganar 1 pts. Entonces, ¿qué es lo que le vamos a dar a Esteban?

A: 3 pts.

E: ¿por qué?

A: No sé.

E: Entre María y Estéban, ¿tienen los dos la misma probabilidad de ganar, o lleva alguno ventaja?

A: Sí, lleva ventaja Estéban, porque Esteban gana cierta cantidad y María sólo 1 pts.

E: Te voy a proponer otro juego: Con una baraja española, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tu ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?

A: Sí.

E: ¿Ninguno de los dos lleva ventaja?

A: No.

Alumno nº37: Pablo

Respecto a la idea de juego equitativo, Pablo es capaz de decidir si dos sucesos compuestos son o no equiprobables, en contextos conocidos, como juegos con dados o cartas. En los casos en que no existe equiprobabilidad, determina, con éxito, dos sucesos compuestos que sí sean equiprobables, o bien, establece las cantidades correspondientes a los premios para igualar las ganancias.

E: Yo te propongo un juego, y tú me dices si es justo o no: Con una baraja española, sacamos una carta sin mirar. Si la carta sale de oros, ganas tú 1 pts. Si sale de otro palo, gano yo 1 pts. ¿Crees que sería justo el juego?.

P: No... Porque hay doce de oros y 36 de las otras, y tú tendrías más posibilidades.

E: Entonces, ¿cómo podríamos cambiar el juego para que sea justo?

P: Pues gano yo si sale de oros o de bastos, y tu si salen los otros dos.

...

E: ¿Cómo podríamos variar la cantidad de dinero de premio para que fuese justo?

P: Pues, tu juegas 3 pts y yo sólo juego 1 pts. Porque así, yo tengo más posibilidades de perder, pero vamos, pierdo menos, y si gano yo, me gano más.

Alumno nº42: Alberto

Este alumno considera que, además de otorgarle un premio de 5 pts. al jugador del ítem 9, para que el juego sea justo se han de garantizar un elevado número de partidas. Esta idea está en consonancia con la heurística de representatividad que manifestó en los ítems 4, 5 y 6, por la que no consideraba los ensayos como independientes.

E: (Respecto al ítem 9)... ¿Puede ser justo un juego donde un jugador tenga más probabilidades de ganar que otro?

AL: Depende: si a Esteban le diesen 5 pts, estaría equilibrado, porque a ella, por cada número que salga de esos, le dan sólo 1 pts., pero, si sólo le dan tres oportunidades para sacar números, seguro que salen esos (señala los números de María), pues Esteban sólo tiene un número para ganar. Hombre, si saca ese número, le dan el dinero de golpe, pero si no lo saca y acaba el juego con tres veces que saquen número, María se va a llevar 3 pts. y el otro al final se va a quedar con nada.

Alumno nº84: Juan

Juan es consciente de cuándo un juego es equitativo, incluso aunque los jugadores no tengan las mismas probabilidades de ganar. En contextos familiares (juegos con dados o cartas) reconoce la equiprobabilidad o no de dos sucesos compuestos, y establece correctamente los premios para igualar las ganancias en el caso de existir ventaja para un jugador.

E: Te voy a proponer otro juego: Con una baraja española, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tu ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?

J: No.

E: ¿Por qué?

J: Porque ganamos lo mismo, pero tú tienes tres palos, y yo sólo tengo un palo.

E: Entonces, ¿cómo lo modificamos para que sea justo?

J: Pues que yo ganara, entonces, 3 pts.

Alumno nº108: Rafael

Rafael explica que para él un juego es justo cuando haya igualdad de posibilidades para todos los jugadores. Aunque no consigue reconocer la equiprobabilidad en el juego del ítem 8, sí resuelve correctamente el ítem 9, aclarando cómo una variación en el premio puede hacer que el juego resulte equitativo. Cuando a Rafael se le propone un nuevo juego en contexto de cartas, puede ver la falta de equiprobabilidad de los sucesos compuestos, y proponer dos nuevos sucesos equiprobables, pero no consigue decidir cómo variar los premios para igualar las ganancias y hacer que el juego sea justo

E: (A propósito del ítem 9) ¿Entonces crees que el juego sí puede ser justo aunque los dos jugadores no tengan las mismas posibilidades de ganar...?

R: Sería justo, porque gana 5 pts, pero María debería de ganar 1 cuando sacase 2, 3, 4 ó 5, para igualar las posibilidades.

...

E: Te voy a proponer otro juego: Con una baraja española, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tu ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?

R: No.

E: ¿Quien tiene más posibilidades?

R: Tú.

E: Entonces, ¿cómo lo modificamos para que sea justo?

R: Pues la mitad de la baraja para uno y la mitad de la baraja para el otro.

E: ¿Y con el premio?

...

R: ... Sería 5 si tenemos el mismo número de cartas, yo de oros y tú de los demás.

E: Pero hay muchas más de los demás que de oros ¿no?.

R: Pero las igualamos. Yo tendría el mismo número de oros que tú de las demás.

E: ¡Ah!, ¿y con la baraja entera?

R: La mitad. Por ejemplo las copas y espadas para mí, y los bastos y los oros para tí.

E: Pero si mantenemos, con toda la baraja, tú los oros y yo las demás...?

R: Entonces es injusto.

Alumno nº135: José Antonio

Aunque José Antonio tuvo problemas con la equiprobabilidad de las urnas del ítem 8, en contextos más familiares, como dados y cartas, el alumno es capaz de determinar la equiprobabilidad o no de dos sucesos compuestos. Además, en el caso del ítem 9 (un suceso compuesto y un suceso simple no equiprobables) soluciona con éxito la tarea de asignar el premio para igualar las ganancias, pero en el caso de otro juego de cartas (dos sucesos compuestos no equiprobables), aunque reconoce la falta de equiprobabilidad, no asigna correctamente los premios que conviertan el juego en equitativo, pues no respeta la proporción inversa entre los casos favorables y los premios.

E: Te voy a proponer otro juego: Con una baraja española, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tu ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?

J.A: No.

E: ¿Por qué?

J.A: Porque hay más cartas de los otros palos, y es más fácil que ganes tú.

E: Entonces, ¿cómo lo modificamos para que sea justo?

J.A: Pues si sale una de oros, yo debo ganar más pesetas que tú.

E: ¿Cuántas más?

J.A: No se... cuatro, por ejemplo, o más. Por lo menos más que tú.

E: Pero dime cuánto más.

J.A: Pues... ¿se cuentan los ochos, nueves y dieces?

E: No. La baraja española tiene hasta el siete, y luego sota...

J.A: Pues yo ganaría treinta.

Alumna nº139: Carolina

Carolina relaciona la idea de equidad en el juego con la necesidad de que los dos jugadores tengan las mismas probabilidades, sin embargo, debido a la influencia del sesgo de equiprobablidad en sus decisiones, tiene problemas para establecer cuándo dos sucesos compuestos son o no equiprobables. De hecho, en cada caso opta por la igualdad hasta que la investigadora le interroga sobre el tema, y entonces cambia de opinión. Creemos que en el transcurso de la entrevista se produce cierto aprendizaje, por el cual la alumna va modificando sus siguientes respuestas. En el juego de urnas proporcionales piensa que no hay equiprobabilidad, mientras que en contextos de cartas y dados sí la reconoce, y es capaz de determinar sucesos equiprobables, o modificar los premios para igualar las ganancias.

En los casos en que, por falta de equiprobabilidad, se establecen diferentes premios, encuentra cierto equilibrio en las ganancias, pero considera que el juego no es justo.

E: ¿Tu qué crees que quiere decir que un juego sea justo?

C: Pues, que los componentes tengan las mismas posibilidades, o sea, las mismas cosas para hacer.

E: Yo te propongo un juego, y tú me dices si es justo o no: Con una baraja española, sacamos una carta sin mirar. Si la carta sale de oros, ganas tú. Si sale un as, gano yo. ¿Crees que sería justo el juego?.

C: Si. Tenemos las mismas posibilidades. Aunque yo saque distinta carta que tu, pero más o menos, puede salir o la mía o la tuya o ninguna.

E: ¿Pero, crees que estamos igualadas en las posibilidades? (Vuelve a explicar el juego)

C: Bueno, creo que oros hay más... Tengo más posibilidades, creo que no es justo, pero podrías ganar tú perfectamente.

E: Entonces, el juego es justo o no?

C: No

E: Y, ¿qué hacemos para que el juego sea justo?

C: Pues que, por ejemplo, yo sacara cualquiera de oros y tu cualquiera de espadas. Así sería justo.

E: Lee el ítem 9... ¿Crees que este juego es justo?

C: Pss.

E: ¿En este juego, ¿María y Esteban tienen las mismas posibilidades de ganar?

C: Yo creo que sí. Bueno, uno de ellos tiene más posibilidades, pero, creo que si. Puede salirle también al otro.

E: Si, pero, María gana con cinco números y Esteban con uno. ¿Tienen las mismas posibilidades?.

C: No, María tiene más.

E: ¿Y crees que al cambiar el premio de Esteban ya sí es justo?

C: Hombre, no es justo, porque todavía no tienen las mismas posibilidades. Esteban gana más, si gana, pero no tiene igual de posibilidades.

E: Te voy a proponer otro juego: Con una baraja española, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tu ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?

C: Tampoco, porque tú tienes muchas más posibilidades, porque puedes sacar bastos, o lo que sea, pero yo nada más que oros.
E: Entonces, ¿cómo lo modificamos para que sea justo?
C: Pues, por ejemplo, yo oros y bastos también, y tú espadas y copas.
E: Y sin cambiar las reglas de los palos...
C: Yo tendría que ganar más dinero.
E: ¿Cuánto?
C: Pues tres pts.
E: ¿Por qué?
C: Porque tú tienes tres palos distintos y yo uno.

4.7. CONCLUSIONES SOBRE LAS ENTREVISTAS

Como resumen del análisis realizado en las secciones anteriores, en la tabla 4.6.1. presentamos las principales características puestas de manifiesto por los alumnos en el desarrollo de las entrevistas.

Del análisis de la fase de entrevistas podemos extraer las siguientes conclusiones:

Comparación de probabilidades

◊ El nivel de razonamiento proporcional, por sí sólo, no determina el éxito en los problemas propuestos, como podemos ver en la tabla 4.6.1.

◊ Algunos alumnos no dominan la terminología de fracciones, por lo que utilizan términos aditivos para establecer relaciones multiplicativas. Así, dos alumnos usan el término "diferencia" entre el número de bolas rojas y blancas para referirse a la razón entre ambas, lo que nos sugiere que debemos ser cautelosos con algunas respuestas que afirman la equiprobabilidad y fueron calificadas como de estrategia aditiva.

◊ Hemos encontrado un alumno que intenta compaginar la estrategia aditiva con la de correspondencia en los ítems 7 y 8, lo que le conduce a contradicciones del tipo "aunque tengan igual probabilidad, uno de los jugadores tiene más". Creemos que una afirmación como ésta sería inmediatamente descartada por el alumno si trabajara en un contexto clásico de proporcionalidad, (como mezclas o unidades fraccionadas), y que es debido a que se trata de una situación donde se especula con "lo que podría ocurrir", por lo que el alumno no considera la afirmación como contradictoria. Pensamos que este hecho confirma la dificultad añadida de un problema de decisión planteado en un contexto probabilístico, respecto a la dificultad prevista para un problema similar en contexto de proporciones.

◊ Al cambiar el contexto en los problemas de comparación de probabilidades, de elección de urnas a ruletas, hay 3 alumnos que reproducen exactamente el mismo tipo de estrategias, 4 alumnos utilizan estrategias de un nivel inferior al que utilizaron con las urnas, y 1 alumno mejora su nivel de elección, utilizando, sistemáticamente, estrategias multiplicativas. Concluímos, pues que, aunque estamos de acuerdo en que las ruletas evocan mejor las relaciones de tipo parte-todo, esto sólo lleva a la utilización de la regla de Laplace a algunos alumnos (de alto nivel en la comparación de fracciones). En otros casos, el factor perceptivo del área ocupada por los diferentes sectores parece ser dominante. Así, los alumnos comparan de forma aproximada el área ocupada por el color favorable en cada ruleta, y eligen la que, a su juicio, tenga más área de ese color. Desde luego, este tipo de comparación lleva implícita la relación parte-todo, dada por la consideración de que, a mayor área del color favorable, menor área del color desfavorable, lo que se deduce de la delimitación física de la ruleta.

◊ En la decisión en contextos de ruletas, los alumnos raramente reconocen la equiprobabilidad (tan sólo 2 alumnos de los 8 la reconocieron). Cuando se encuentran indecisos recurren a criterios irrelevantes, como la distribución de los sectores. La mayoría afirman que los sectores contiguos ofrecen una probabilidad mayor que los sectores dispersos, por lo que, cuando las ruletas presentan mayor área del color favorable (azul) que del desfavorable (rojo), prefieren los sectores azules juntos, pero si las ruletas ofrecen el panorama contrario (más área roja que azul), prefieren la que tenga los sectores azules más dispersos.

Tabla 4.6.1. Resumen de los resultados de las entrevistas

	Alumnos							
	N.8 Juan Manue	N. 30 Alejandro	N. 37 Pablo	N. 42 Alberto	N. 84 Juan	N. 108 Rafael	N. 135 Jose Anton.	N. 139 Carolina
Razonam. Proporcio.	IIIA	IA	IIIB	IIIA	IIB	IIA	IIB	IA
Items compara. Prob. correctos	12, 13, 14, 15, 8	12	12, 13, 14, 15, 16. 7, 8	12, 13, 14,15, 7, 8	12,13, 14, 8	12, 13,14	12, 13, 7, 8	Ninguno
Suceso seguro	Si	No	Si	Si	Si	No	Si	No
Enumera. Sistem.	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
Sego equipr.		Si					Si	Si
Outcome approach								Si
Supersti-ciones	Día 13	Pie derecho Dia 13 (no a él)		Día 13 Gato neg.		Suerte, no con-trolable	Otras personas	
Disposición física	Ruletas			Ruletas		Ruletas	Ruletas; en caso de duda	Ruletas
Control del azar		inteligencia trampas; aprendizaje		Control personal Soplar; mirar;	Lanza-miento monedas		Sugestión	
Prefiere ciertos resultados				Cruz	Números preferid. (no por suerte)	Números preferid.; cruz		
Heurísticas	Representa-tividad	Representa-tividad; Recencia negativa		Represen tatividad; Recencia negativa	Represen tatividad; Recencia negativa	Represen tatividad; Recencia negativa	Representa-tividad	Represen tatividad
Reconoce indepen.	Teórica	No	Tórica y práctica	No	Teórica	No	Teórica	Teórica
Juego equit.	Correcta	Sin sentido	Correcta	Influencia representa-tividad	Correcta	Correcta	No respecta proporciones	Dificultad aplicación
Otros					Influencia experiencia	Influencia experienca		

◊ Tres alumnos manifiestan el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), considerando los sucesos equiprobables por el hecho de que ambos tengan probabilidad de ocurrencia no nula, y el experimento es aleatorio. Además, uno de esos alumnos se deja llevar en su decisión por el factor subjetivo introducido en el ítem 7.

◊ Un alumno manifiesta el sesgo denominado "outcome aproach" o "enfoque en el resultado aislado" (Konold, 1989), que, junto con el de equiprobabilidad, subordina la mayor probabilidad de obtención del suceso más frecuente a la posibilidad que existe de que salga cualquier otro.

Influencia de creencias subjetivas y heurísticas:

◊ Para la mayoría de los alumnos, todas las situaciones están influidas por un factor aleatorio al que llaman "suerte", que unos pocos alumnos consideran controlable mediante factores externos y otros no.

◊ No hemos encontrado alumnos supersticiosos puros, aunque algunos alumnos afirman poseer ciertas creencias en la influencia de factores irrelevantes de origen socio-cultural, pero sólo parcialmente, y si las circunstancias lo requieren, las ignoran. En cambio, hemos encontrado alumnos que manifiestan creencias en números afortunados o preferencia por ciertos resultados.

◊ Cinco alumnos de los 8 entrevistados no manifestaron ningún tipo de creencia subjetiva en la influencia de supersticiones, aunque uno de ellos pensaba que podían afectar a otras personas. Tres alumnos, que manifestaron ciertas creencias, justificaban sus opiniones en base a su propia experiencia o la de personas muy cercanas.
◊ Algunos alumnos (2) afirman poseer cierto control sobre el experimento aleatorio (loterías, lanzamiento de moneda o dado), bien colocando el objeto de una forma determinada antes del lanzamiento, bien con el poder de su mente (deseándolo fuertemente, es como si ellos estuvieran moviendo la moneda), o bien afirmando que es posible aprender a jugar bien a la lotería.
◊ La heurística de representatividad es muy fuerte en la mayoría de los alumnos entrevistados, y en dos ocasiones se ha visto reforzada por los comentarios, previos a la realización de este estudio, que hizo un profesor sobre el método de garantizar la aleatoriedad de un sorteo. Este hecho refleja la importancia de la influencia de las concepciones del profesor sobre las del alumno, y la extensión de la heurística de representatividad, que, como manifiestan Kahneman, Slovic y Tversky (1982) llega a manifestarse en sujetos adultos con mucha frecuencia.
◊ Algunos alumnos manifiestan una fuerte contradicción entre sus intuiciones sobre la equiprobabilidad de sucesos ("a priori"), como la idea de que todos los números en un sorteo son equiprobables, y sus representaciones mentales basadas en la experiencia práctica (no conozco ningún caso en que un número haya salido premiado dos veces seguidas), llegando a formular afirmaciones del tipo: "aunque los números en un sorteo son equiprobables, en la práctica uno es más difícil que el otro".

Pensamos que la influencia de la experiencia práctica de los alumnos o personas cercanas a ellos es muy importante en la formación de sus significados personales sobre la probabilidad. Como dicha experiencia es, forzosamente, muy limitada, induce a la formación de conceptos empíricos contradictorios con sus intuiciones "a priori" (Burks, 1963). Aunque los alumnos son conscientes de que existe cierta contradicción, pensamos que la asumen como parte del modelo científico con el que acostumbran a tratar: no es extraño que en el aula se requiera de los alumnos el esfuerzo de abstracción necesario para la representación de la realidad por medio de modelos teóricos, idealizados, cuyas leyes describen el funcionamiento de la realidad práctica en condiciones ideales (como las mediciones sobre modelos geométricos ideales, o la interpretación de datos estadísticos). Debido a ello, los alumnos no se sorprenden de encontrar disparidad entre sus intuiciones y sus concepciones basadas en la práctica.

Suceso seguro y capacidad combinatoria:

- Algunos alumnos entrevistados respondieron al ítem 1 sin interpretar que la extracción se realiza aleatoriamente, por lo que consideran suficiente la extracción de tres bolas para obtener una de cada color, o de seis bolas para que queden en la caja una de cada color. Esta interpretación podría extenderse a otros alumnos que han dado la respuesta tres o seis en este ítem.
- Sin embargo, aunque la mayoría de los alumnos entrevistados manifiesta un adecuado significado personal sobre la noción de suceso seguro, hay tres alumnos para los cuales “estar seguro” significa tener una alta probabilidad. Así, una proporción importante de alumnos podría sostener cierta confusión entre estos conceptos. Además, sólo 4 de los 8 alumnos entrevistados realizan un estudio sistemático y completo de los casos. El resto sólo hace una estimación aproximada que no representa un suceso seguro, mostrando una escasa capacidad combinatoria.
- Un problema similar al del ítem 1, pero con datos mayores se muestra para los alumnos como más difícil. Hay tres alumnos que, respondiendo correctamente al ítem 1, también solucionan el problema complementario, e incluso explican la generalización de la estrategia. Un alumno generaliza una fórmula incorrecta, de estructura aditiva, para decidir cuántas extracciones tiene que realizar.

Concepto de juego equitativo:

◊ La mayoría de los alumnos (5 de 8) demuestran una adecuada concepción de la idea de juego justo o equitativo, aunque hay uno que introduce factores externos, como la idea de "hacer trampas". También encontramos un alumno que, además de igualar las ganancias en juegos donde los participantes no tienen las mismas probabilidades, exigen que haya un alto número de partidas para que el juego sea equitativo, ignorando así la independencia de los ensayos.

◊ Hay un alumno que considera que todos los juegos aleatorios, si no se hace trampas, son justos.

◊ La mayoría de los alumnos entrevistados son capaces de determinar si dos sucesos compuestos son o no equiprobables, en contextos familiares (cartas y dados), mejor que en contextos de urnas. Creemos que esto es debido a que con la baraja de cartas sólo tienen que comparar los casos favorables, pues el número total de casos posibles es el mismo (la baraja completa), y lo mismo sucede en el lanzamiento del dado del ítem 9.

◊ La mayoría de los alumnos son capaces de establecer los premios que corresponden a dos sucesos compuestos no equiprobables (propuestos en contextos de cartas y dados) para igualar las ganancias y hacer que el juego sea justo, aunque hay 2 alumnos que, aunque reconocen que al modificar el premio de Esteban en el ítem 9 se igualan las ganancias, siguen considerando que el juego no es justo.

CAPITULO 5

CONCLUSIONES GENERALES E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN

5.1. INTRODUCCIÓN

Una vez expuestos nuestros resultados experimentales en los Capítulos 2, 3 y 4, finalizamos esta Memoria con la presentación de las conclusiones obtenidas. Comenzamos con una breve exposición de las principales aportaciones originales de la Tesis, a las que siguen las conclusiones sobre las hipótesis de investigación formuladas en la sección 1.3.3.

Para finalizar, indicamos algunas posibles líneas para continuar y completar nuestra investigación y unas reflexiones sobre las posibles implicaciones de nuestro trabajo para la enseñanza de la probabilidad en el primer ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

5.2. APORTACIONES DEL ESTUDIO

Un primer objetivo que se fijó en nuestro trabajo fue evaluar las intuiciones probabilísticas de los alumnos de edades comprendidas entre 10 y 14 años, sobre un amplio conjunto de conceptos probabilísticos elementales. El estudio, realizado sobre nuestra primera muestra experimental mediante el cuestionario de Green (1982), que fué presentado en el capítulo 2, así como en los anexos 1 y 3, proporciona una información valiosa sobre estas intuiciones que permitirá orientar el trabajo de los profesores encargados de introducir la probabilidad en los primeros cursos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Estos resultados, que fueron comparados con las respuestas obtenidas por Green (1982), y el estudio comparativo sobre la misma muestra de alumnos del instrumento de Green y el de Fischbein y Gazit (1984) proporcionan importantes aportaciones sobre el razonamiento probabilístico de los alumnos. Permiten también contextualizar las peculiaridades de las intuiciones de nuestros escolares respecto a los resultados obtenidos en otras investigaciones previas sobre el razonamiento probabilístico.

Otro resultado de nuestra investigación es la identificación de factores en el razonamiento probabilístico, obtenida del estudio multivariante de las respuestas de los alumnos de nuestra primera muestra a los cuestionarios de Green (1982) y Fischbein y Gazit (1984), llevado a cabo en el capítulo 2. Estos factores apuntan a la existencia de componentes diferenciados en este razonamiento, cuyo análisis detallado podría ser objeto de nuevas investigaciones específicas por otros autores interesados en la intuición probabilística de los niños de estas edades.

Otros objetivos para nuestro trabajo, que fueron descritos en la sección 1.2.3, eran el análisis de las estrategias de los alumnos en la comparación de probabilidades y su comparación con las análogas esperadas en problemas de comparación de fracciones de idéntica dificultad. Para lograr este objetivo construimos un nuevo cuestionario, tomando datos de una segunda muestra de alumnos, algunos de los cuales también colaboraron en nuestro estudio mediante entrevistas en profundidad. Como resultado, en los capítulos 3 y 4 presentamos un estudio detallado de estas estrategias y las variables que influyen en su elección. El cuestionario construido también podría ser utilizado para la evaluación en el campo de la probabilidad.

El estado de la cuestión sobre la evaluación del razonamiento probabilístico de los alumnos, los estudios sobre problemas de comparación de probabilidades y sobre la influencia en los mismos de elementos subjetivos que presentamos en el capítulo 1, complementa el realizado previamente en la tesis de Serrano (1996) sobre heurísticas y sesgos en el razonamiento estocástico y sobre interpretación de la probabilidad desde el punto de vista frecuencial.

Todos estos resultados constituyen las principales aportaciones de nuestro trabajo. El interés de algunas de estas aportaciones ya se ha puesto de manifiesto en las publicaciones del mismo que hemos citado a lo largo de la tesis, especialmente en Cañizares y cols. (1997), Cañizares y Batanero (1997) y Godino y cols. (1994).

5.3. CONCLUSIONES RESPECTO A LAS HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Una vez descritos los resultados globales de nuestro estudio, pasamos a un análisis más específico de los resultados concretos obtenidos, respecto a cada una de las hipótesis fijadas en la sección 1.3.3. Analizamos en primer lugar las hipótesis de la primera fase del estudio.

Hipótesis 1: *La estructura de las respuesta de una muestra de suficiente tamaño de alumnos de edades comprendidas entre 10 y 14 años al cuestionario de Green (1982) es de tipo componencial.*

Esta hipótesis ha sido analizada en el Capítulo 2, desde un punto de vista teórico y experimental. En primer lugar, el análisis de los contenidos evaluados por el instrumento de Green, de las variables de tarea de los ítems que lo constituyen y de la representatividad de las mismas en la escala de nivel probabilístico, nos indicó que dicha escala dejaba fuera una parte importante del contenido original del instrumento. Apoyándonos en los trabajos de Izard (1994) y Truran (1994d), así como de nuestro propio análisis sugeríamos la ineficacia del nivel de razonamiento probabilístico definido por Green para explicar toda la riqueza de las intuiciones de los alumnos sobre los conceptos evaluados en el cuestionario completo.

Esta conclusión es apoyada a partir del análisis factorial de las respuestas al test de Green en nuestra primera muestra experimental, en la que diferenciamos una multitud de factores, ninguno de los cuales tenía un peso considerablemente mayor que el resto. Cada uno de estos factores estaba constituido por un pequeño número de ítems, generalmente similares o que evalúan aspectos relacionados de la intuición probabilística de los alumnos. Algunos de estos factores no quedan cubiertos dentro de la escala de nivel probabilístico construida por Green. Todos estos puntos contradicen la suposición de un nivel lineal de razonamiento probabilístico en los alumnos de nuestra muestra.

Hipótesis 2: *Esperamos encontrar una falta de correlación entre los resultados obtenidos sobre una misma muestra de alumnos al test de Green y a otro cuestionario que incorpore elementos de tipo subjetivo.*

Esta hipótesis es consecuencia lógica de la anterior, puesto que dos cuestionarios diferentes de probabilidad podrían evaluar componentes diferenciados del razonamiento probabilístico de los alumnos. Por otro lado, el análisis teórico del instrumento de Green realizado en el capítulo 2 reveló en el mismo un enfoque preferente en la concepción objetiva de la probabilidad (especialmente la basada en asignación de probabilidades mediante la regla de Laplace) y una carencia de ítems que evaluasen elementos subjetivos usados por los alumnos en la evaluación de probabilidades (con excepción de unos pocos ítems que evalúan el empleo de heurísticas).

Admitida la hipótesis de un razonamiento probabilístico de tipo componencial, es lógico esperar una falta de correlación entre los resultados del test de Green y otro instrumento que incorpore estos elementos subjetivos, sobre una misma muestra de alumnos. Para comprobarlo, se realizó un estudio de correlación de las puntuaciones parciales y totales en un test tomado de Fischbein y Gazit (1984) y cada uno de los componentes supuestos por Green en su instrumento: razonamiento combinatorio, probabilístico y verbal, así como con el nivel probabilístico y la puntuación total.

Los resultados dividen los ítems del cuestionario de Fischbein y Gazit en dos grupos: Un primer grupo de ítems que correlaciona (aunque sólo moderadamente) con los resultados del test de Green. Se trata de ítems relacionados con la comparación de probabilidades en contexto de urnas, que pudieran tener un fuerte peso del razonamiento proporcional. Asimismo hay un ítem que evalúa el razonamiento combinatorio de los alumnos que también correlaciona con el test de Green.

Por otro lado, los ítems que evalúan la influencia de elementos subjetivos y creencias culturales sobre la asignación de probabilidades han mostrado una escasa correlación con los componentes y puntuación total en el test de Green, lo que nos indica que este tipo de tarea pudiera constituir un componente del razonamiento probabilístico escasamente representado en el test de Green.

Esta conclusión se vio reforzada con el análisis factorial del test de Fischbein así como el análisis factorial conjunto de los dos instrumentos. Los dos grupos de ítems señalados aparecieron como factores claramente separados en el primer análisis y uno de estos grupos constituyó un factor específico en el análisis factorial conjunto, lo que supone una evidencia experimental para justificar nuestra hipótesis.

La segunda parte del estudio fue dedicada a la caracterización más completa de estos dos factores identificados en el test de Fischbein, que fue completado con algunos ítems del test de Green y otros de elaboración propia, para incluir los diferentes niveles de razonamiento proporcional contemplados por Noelting (1980 a) y b). Las hipótesis que, sobre este segundo estudio nos hicimos son las siguientes:

Hipótesis 3: *La dificultad que los alumnos de 10 a 14 años encuentran en los problemas de comparación de probabilidades es superior a la obtenida en la investigación de Noelting (1980a y b) en problemas análogos de razonamiento proporcional, según su edad.*

En el análisis de los resultados de la segunda muestra experimental en los ítems de comparación de probabilidades obtuvimos un escaso porcentaje de éxito en algunos ítems cuya edad media de resolución para un problema equivalente de fracciones era menor que la de los niños de la muestra. Esto fue especialmente evidente en aquellos ítems que incorporaban elementos subjetivos, que han mostrado ser un distractor muy fuerte en la resolución del problema. Asimismo, el estudio de los patrones de respuesta indicó que el número de problemas resueltos por alumnos con el mismo nivel de razonamiento proporcional era bastante variable. Finalmente indicamos que el orden previsto de dificultad de los problemas, dado por la tipología de Noelting (1980a y b) según las fracciones incluidas en el ítem no se conservó en nuestra muestra y que el análisis implicativo mostró una estructura de tipo no lineal en la dificultad de los problemas propuestos. Todo ello nos confirma en nuestra hipótesis de mayor dificultad de un problema de comparación de probabilidades respecto a otro equivalente de comparación de fracciones y nos sugiere el interés de un estudio más detallado de esta problemática.

Hipótesis 4: *La dificultad de los problemas de comparación de probabilidades y la estrategia de resolución que usan los alumnos de la muestra se ven afectados por la inclusión de distractores subjetivos.*

Nuestro estudio de estrategias en la comparación de probabilidades, realizado en los capítulos 3 y 4 proporciona una información valiosa a los profesores sobre la riqueza de intuiciones probabilísticas de los niños y sobre el significado específico que la noción de fracción cobra en un contexto probabilístico. Los elementos subjetivos y las creencias culturales de los alumnos sobre el control de lo aleatorio, la independencia de los ensayos repetidos y lo que sería un juego equitativo son específicos del campo de la probabilidad y no pueden reducirse al concepto de fracción o al razonamiento combinatorio.

Ha sido notable, tanto en el análisis de los argumentos del cuestionario, como en las entrevistas realizadas, que algunos alumnos manifiestan unas creencias en la posibilidad de control de lo aleatorio, bien por si mismos o en otras personas de mayor edad o inteligencia. En otros casos, la independencia de ensayos no es claramente percibida poniéndose de manifiesto la heurística de la representatividad y los sesgos asociados. Finalmente, para ciertos alumnos la imprevisibilidad de los fenómenos aleatorios les lleva a adoptar el sesgo de equiprobabilidad o el "enfoque en el resultado aislado". En situaciones que chocan con alguna de estas creencias, los alumnos han obviado el trabajo con las fracciones, asignando la probabilidad en base a estos elementos subjetivos, modificando, en consecuencia, la estrategia seguidas en los ítems que no contienen estos distractores subjetivos.

Hipótesis 5: *Esperamos mostrar ejemplos de niños con suficiente razonamiento proporcional, que siguen afectados en su comparación y asignación de probabilidades por creencias de tipo subjetivo.*

Esta hipótesis es una profundización en la anterior e implica el estudio de entrevistas para comprobar el razonamiento proporcional de los alumnos que se veían afectados por los sesgos en la resolución de los problemas de comparación de probabilidades. En el capítulo 4 analizamos las entrevistas realizadas a dos alumnos en cada uno de los niveles educativos señalados, sobre sus respuestas al cuestionario.

Los resultados del estudio de entrevistas, que se presentan sintéticamente en la tabla 4.6.1. (pag. 173), muestran ejemplos de alumnos con un mismo nivel de razonamiento proporcional (alumnos 8, 42 y 135) y diferente tasa de éxito en los problemas de comparación de probabilidades. Asimismo se muestra la falta de relación entre la existencia de supersticiones y el nivel de razonamiento proporcional, pues los alumnos citados se muestran influidos por ciertas supersticiones y otros de más bajo nivel de razonamiento no manifiestan esta influencia.

Asimismo dos de estos alumnos (8 y 135) reconocen la independencia a nivel teórico, mientras que el otro no la reconoce. La concepción del juego equitativo tampoco es uniforme en estos alumnos. Por otro lado, la heurística de la representatividad es compartida por todos los niños, independientemente de su nivel de razonamiento proporcional.

Hipótesis 6: *Algunos niños modifican sus estrategias en la comparación de probabilidades, en función del contexto, discreto o continuo en que se presenten las situaciones.*

Esta última hipótesis fue estudiada en la fase de entrevistas, introduciendo cuestiones de comparación de probabilidades en un contexto diferente a la elección entre urnas. La comparación de probabilidades en los niños entrevistados se vio fuertemente influida al modificar el contexto, sustituyendo las urnas con bolas por ruletas con sectores coloreados. La mayoría de los alumnos entrevistados modificaron, en el nuevo contexto, sus estrategias utilizadas en el cuestionario para problemas de análogo nivel de dificultad, aunque sólo un alumno de los ocho entrevistados perfeccionó su estrategia hacia la aplicación de la regla de Laplace. La estrategia mayoritaria en contexto de ruletas fue la comparación de las áreas ocupadas por el color favorable. Algunos niños sugirieron que la disposición física de los sectores (por ejemplo, el hecho de que estuviesen separados o contiguos) podría modificar las probabilidades de los sucesos. Estos argumentos, claramente, no tienen cabida en un contexto de urnas.

5.4. SUGERENCIAS SOBRE FUTURAS INVESTIGACIONES

Nuestro trabajo realiza algunas aportaciones en la evaluación de las intuiciones probabilísticas de los alumnos de nuestro entorno socio cultural y sobre los significados que atribuyen a los conceptos probabilísticos elementales, complementando los resultados previos de Serrano (1996) sobre los alumnos de 14 y 18 años. No obstante, la diversidad de resultados obtenidos en estas dos tesis muestra un amplio campo de investigación que apenas empieza a recibir atención por parte de la comunidad de investigación en educación matemática.

Sería preciso un estudio más extenso y de mayor profundidad sobre la incidencia del razonamiento proporcional y combinatorio en la capacidad de comparación de probabilidades por parte de los alumnos de secundaria así como sobre las estrategias empleadas en la resolución de este tipo de problema. Nuestra investigación ha mostrado que no es suficiente poseer un nivel de razonamiento proporcional dado para resolver un problema equivalente de comparación de probabilidades. En primer lugar la aplicación de la regla de Laplace no es espontánea. Por otro lado los elementos subjetivos introducidos como distractores en los ítems han llevado con frecuencia al cambio de estrategia o al fracaso en la resolución de los problemas. El contexto en que se presenta el problema (discreto o continuo), el sesgo de equiprobabilidad y otros sesgos en el razonamiento probabilístico han mostrado su efecto sobre la dificultad de estos problemas. El análisis del peso relativo de cada uno de estos factores, así como el diseño de estrategias instruccionales adecuadas para su control implican un amplio campo de investigación sobre la didáctica de la probabilidad.

El significado que, para los niños de nuestra muestra, tiene la idea de juego equitativo sugiere que, en contextos familiares, los alumnos manifiestan una adecuada intuición de este concepto, aunque en algunos alumnos se observa un pobre desarrollo del concepto de esperanza matemática. Ahora bien, estos dos conceptos -juego equitativo y esperanza matemática- han tenido un escaso tratamiento por parte de la investigación educativa, por lo que no hay estudios completos del desarrollo evolutivo de estos conceptos. Puesto que la enseñanza de la probabilidad a alumnos de estas edades está fuertemente apoyada en los juegos y experimentación, consideramos que el análisis de la formación del concepto de esperanza matemática en el niño y su aplicación a la idea de juego equitativo debería constituir una línea de investigación prioritaria dentro del campo de la didáctica de la probabilidad.

5.5. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN EL PRIMER CICLO DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

Nuestro trabajo sugiere que el razonamiento proporcional de los alumnos entre 10 y 14 años permite el trabajo con situaciones probabilísticas, siempre que la exigencia de comparación de fracciones se mantenga en un nivel adecuado (IIIA o inferior). Los problemas en los que intervienen fracciones de mayor complejidad son resueltos por un número reducido de alumnos. Puesto que el aprendizaje de las fracciones, en si mismo, no es el principal objetivo del estudio de la probabilidad, esta dificultad de razonamiento proporcional no supone un obstáculo para comenzar la enseñanza de la probabilidad, siempre que se elijan unas tareas adecuadas al alumno.

El contexto de los problemas ha supuesto un cambio de estrategias de los alumnos, así como en el nivel de dificultad de los problemas. Además, en determinadas situaciones, como contextos de loterías y otros juegos de azar, la experiencia de los alumnos, necesariamente limitada, y la influencia de factores subjetivos socialmente extendidos, favorecen la formación de sesgos y creencias que llegan a interferir con otras intuiciones probabilísticas correctas, provocando en el alumno afirmaciones contradictorias en relación con las situaciones aleatorias. Los distractores subjetivos, por otro lado, han hecho que los alumnos olviden las estrategias normativas y se guíen por sus creencias sobre el efecto de factores improcedentes en situaciones aleatorias. Ello indica la necesidad de presentar al alumno un contexto probabilístico los más variado y rico posible, que permita hacer aflorar y corregir sus intuiciones incorrectas en el campo de la probabilidad. Estamos de acuerdo con Rico y Castro (1994) cuando indican que los errores pueden contribuir positivamente al proceso de aprendizaje y que, puesto que los errores con frecuencia aparecen dentro de marcos conceptuales existentes en el alumno, la instrucción debiera tenerlos en cuenta y anticiparlos dentro de la planificación de la enseñanza.

En la justificación de nuestra propuesta curricular para la enseñanza de la probabilidad (Godino y cols., 1987) indicábamos una serie de razones por las que defendíamos una enseñanza temprana de la probabilidad: La orientación excesivamente determinista de los currículos, la opiniones de los investigadores en el área, el hecho de que la probabilidad está presente en la vida del niño desde su nacimiento y la posibilidad de mostrar, mediante la probabilidad, una aplicación directa de la matemática a la realidad. ¿Suponen los resultados de nuestra tesis un cambio de posición respecto a la que defendíamos en dicha propuesta?

Nuestra conclusión es que las dificultades detectadas en modo alguno deben suponer una vuelta a un currículo determinista, ni privar al niño del desarrollo guiado de su intuición probabilística desde unas edades tempranas, teniendo también en cuenta la finalidad formativa y la dimensión social de la educación matemática (Rico, 1997). Sin embargo, es necesario aún mucha investigación sobre las capacidades de los alumnos y un intenso trabajo experimental sobre la adecuación de las propuestas curriculares para las diferentes edades.

REFERENCIAS

Ahlgren, A. y Garfield, J. (1991). Analysis of the probability curriculum. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds), *Chance encounters: Probability in education* (pp.107-134). Dordrecht: Kluwer.

Amir, G. y Williams, J. (1994). The influence of children's culture on their probabilistic thinking. En J. P. Pontes y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v2, pp. 24-31). Universidad de Lisboa.

Audrey, J. (1989). *Finding out: Conducting and evaluating research.* Belmont, Ca: Wadsworth Publishing Company.

Azorin, F. y Sánchez Crespo, J. L. (1986). *Métodos y aplicaciones del muestreo*. Madrid: Alianza Editorial.

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal.

Bar-Hillel, M. (1983). The base- rate fallacy controversy. En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 39-62). Amsterdam: North-Holland.

Batanero, C., Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1994a). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1994b). The use of implicative and correspondence analysis for assessing pupils' combinatorial reasoning. En R. Grass (Ed.), *Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques* (pp.245-256). Rennes: A.R.D.M.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), T*he assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: IOS Press e International Statistical Institute.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Sstudies in Mathematics,* 32, 181-199.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones didácticas. *UNO*, 5, 15-28.

Batanero, C. y Serrano, L. (1997). The meaning of randomnes for secondary school students and implications for teaching probability. Ponencia invitada en la *51 Sesión del International Statistical Institute,* Estambul, Agosto, 1997.

Batanero, C., Serrano, L. y Garfield, J. B. (1996). Heuristics and biases in secondary school students' reasoning about probability. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v2, pp. 51-58), Universidad de Valencia.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Bentz, H. J. (1982). Stochastics teaching based on common sense. En D. R. Grey y cols. (Eds.*), Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 753-765). University of Sheffield.

Bentz, H. J. y Borovcnik, M. G. (1982). On representativeness: A fundamental strategy. *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 276-284). University of Sheffield.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa.* Barcelona: P.P.U.

Borovcnik, M. G. (1988). Revising probabilities according to new information. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 298-302). University of Victoria.

Borrás, E. (1996). *Algunos modelos de simulación aleatoria y su aplicación a la enseñanza del azar.* Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Barcelona.

Borrás, E. y Morata, M. (1989). El azar y su aprendizaje. *Suma*, 4, 15-20.

Bruner, J. S. y Kenny, H. (1966). On relational concepts. In J. S. Pruner, R. R. Oliver y P. M. Greenfield (Eds.), *Studies in Cognitive Growth* (pp. 168-182). New York: J. Wiley.

Burks, A. W. (1963). *Chance, cause, reason: An enquiry into the nature of scientific evidence.* Chicago: The University of Chicago Press.

Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia.

Canal, C. (1996). Tocar madera. *El País Semanal,* 1006 (14/1/96), pp. 80-81.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1996). Niveles y estrategias en la comparación de probabilidades en alumnos de 10 a 14 años. En P. Flores y otros (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: el currículo* (pp. 337-344). Universidad de Granada.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO,* 14 (pp. 93-104).

Cañizares, M. J., Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (1996). Effects of cultural beliefs on childrens' understanding of probabilities. Comunicación presentada en *ICME 8.* Sevilla, 1996.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997a). Evaluación del razonamiento probabilístico en alumnos de 10 a 14 años. *IV Jornadas de la L.O.G.S.E.* Universidad de Granada.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997b). Subjective elements in chidren's comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the XXI International Conference on the Psychology of Mathematics Education.*(v.2, pp 49-56) University of Lahti.

Cañizares, M. J., Godino, J. D. y Batanero, C. (1989). Evaluación de la intuición probabilística en niños del ciclo superior de EGB. *Actas de las III Jornadas de la Sociedad Andaluza de Matemáticas Thales* (pp. 269-277). Huelva: Escuela de Magisterio .

Carmines, E. G. y Zeller, R. A. (1979). *Reliability and validity assesment.* London: Sage.

Carretero, M., Pérez Echeverría , M. P. y Pozo, J. I. (1985*). El aprendizaje de las nociones de proporción, probabilidad y correlación durante la adolescencia y la vida adulta.* Madrid: Universidad Autónoma.

Chevallard, Y. (1989). *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*. Seminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. Grenoble: Universié Joseph Fourier.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 12, n.1 pp. 73-112

Chapman, R. H. (1975). The development of children's understanding of proportions. *Child Development,* 46, 141-148.

Champan, L. J. y Chapman, J. P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid psychodiagnostic signs. *Journal of Abnormal Psychology*, 74. 271-280.

Cohen, J. (1957). Subjective probability. *Scientific American,* 197, 128-138.

Cook, T. D. y Campbell, D. T. (1979). *Quasi-experimentation: Design and analysis issues for field settings*. Chicago: Rand McNally.

Cuadras, C. M. (1991). *Métodos de análisis multivariante.* Barcelona: Eunibar.

Dane, F. C. (1990). *Research Methods*. Pacific Grow, CA: Thompson Information Publishing Group.

Davies, H. (1965). Development of the probability concept in children. *Child Development,* 99, 29-39.

Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research methods.* London: Sage.

Diaconis, P. y Freedman, D. (1981). The persistence of cognitive illusions. *The behavioral and brain sciences,* 4, 333-334.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 451-474.

English, L. D. (1993). Chidren's strategies for solving two-and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24, 255-273.

Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*.. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Falk, R. (1986 a). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 - 297). University of Victoria.

Falk, R. (1986 b). Misconceptions of statistical significance. *Journal of Structural Learning.,* 9, 83-96.

Falk, R., Falk, R. y Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics,* 11, 181-204.

Fernández, A. y Rico, L. (1984). *Prensa y Educación Matemática.* Madrid: Síntesis.

Fine, T. L. (1973). *Theories of Probability. An examination of foundations*. London: Academic Press.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the learning of Mathematics,* 5 (2), 9-14.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics,* 15, 1-24.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, 193-198.

Fischbein, E., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

Fichbein. E., Pamput, E. y Minzat, I. (1967). The child's intuition of probability. *Enfance, 2, 193-280.*

Fischbein, E., Pamput, E. y Minzat, I. (1970 a). Comparison of fractions and the chance concepts in children. *Child Development,* 41, 365-376.

Fischbein, E., Pamput, E. y Minzat, I. (1970 b). Effecs of age and instruction on combinatorial ability in children. *The British Journal of Educational Psychology,* 40, 261-270.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1996). Intuitions and schemata in probabilitic thinking. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 353-360). Universidad de Valencia.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28(1), 96-105.

Fischbein, E., Tirosh, D., Stavy, R. y Oster, A. (1990). The autonomy of mental models. *For the Learning of Mathematics,* 10(1), 23-30.

Fontana, A. y Fey, J. H. (1994). Interviewing: The art of science. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 361-376). London: Sage.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: Eunsa.

Freudenthal, H. (1973). The "empirical law of large numbers" or "the stability of frequencies", *Educational Studies in Mathematics*, 4, 484-490.

Garfield, J. B. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review,* 63 (1), 25-34.

Garfield, J. B. y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 44 - 63.

Ghiglione, R. y Matalon, B. (1989). *Las encuestas sociológicas*. México: Trillas.

Gil, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos*. Barcelona. P.P.U.

Giménez, J. (1991). *Innovación metodológica sobre el número racional positivo.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Gil, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos.* Barcelona: P.P.U.

Giménez, J. (1992). Some wrong strategies to detemine probabilities in 8th graders. Report of a preliminary study. En W. Geeslin y K. Graham (Eds*.), Proceedings of the XVI PME Conference* (v.3, p. 163). University of New Hampshire.

Glayman, M. y Varga, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela*. Barcelona: Teide.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 14 (3), 325-355.

Godino, J. y Batanero, C. (1996). Institutional and personal meaning of mathematical objects. *Journal für Mathematikdidaktik, 2, 99-121.*

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska (Ed*.), ICMI study publication on research in mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1994). A comparative study of two instruments for evaluating primary probabilistic reasoning. En J. Garfield (Ed.), *Research Papers at Icots IV.* University of Minnesota.

Goezt, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Morata.

Goldberg, E. (1966). Probability judgment by preschool children. *Child Development,* 37, 157-167.

Gras, R. (1995). L'analyse statistique implicative. En R. Gras (Ed.), *Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques.* (pp. 129-143). Rennes: A.R.D.M.

Gras R. y Larher A. (1993): L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse des données. *Mathematiques, Informatiques et Sciences Humaines, 120, 5-31.*

Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years.* Ph. Dissertation. University of Loughborough

Green, D. R. (1983 a). School pupils' probability concepts. *Teaching Statistics*, 5 (2), 34-42.

Green, D. R. (1983 b). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 766 - 783). University of Sheffield.

Gutiérrez, A. (1991). La investigación en Didáctica de las Matemáticas. En: A. Gutiérrez (Ed), *Area de conocimiento didáctica de la matemática* (pp. 149-194). Madrid: Síntesis.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. London: Cambridge University Press.

Hart, K. (1981). *Childrens' understanding of mathematics.* London: John Murray.

Harten, von G. y Steinbring, H. (1983). Randomness and stochastic independence. On the relationship between intuitive notion and mathematical definition. En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 363-374). Amsterdan: North Holland.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.

Herman, J. (1990). *Analyse de données qualitatives. V. 2*: *Traitement d'enquêtes, modèles multivariés*. Paris: Masson.

Hoemann, H. W. y Ross, B. M. (1975). Children's understanding of probability concepts. *Child Development,* 42, 221-236.

Hoemann, H. W. y Ross, B. M. (1982). Children's concepts of chance and probability. En Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition* (pp. 93-121). Berlín: Springer Verlag.

Holmes, P., Kapadia, R., Graham, A. y Cox, B.(1990). *L'estatistica en el vostre mon*. Barcelona: Universidad Autónoma (versión inglesa del Schools Council Publications en 1980).

Hope, J. A. y Kelly, I. W. (1983). Common difficulties with probabilistic reasoning. *Mathematics Teacher,* 76, 565-570.

Huberman, A. M. y Miles, F. M. (1994). Data management and analysis methods. En D. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428-444). London: Sage.

Izard, J. (1994). Patterns of development with probability cocepts: Assessment for informative purposes. Comunicación presentada en el *Fourth International Conference on Teaching Statistics.* Maraquech, 1994.

Jennings, D. L., Amabile, M. T. y Ross, L. (1982). Informal covariation assessment: Data-based versus thery-based judgments. En D. Kahneman, P. Slovic y A.Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 211-230). New York: Cambridge University Press.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W. y Mogill, T. A. (1996). Using children's probabilistic thinking to inform instruction. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v2, pp. 137-144). Universidad de Valencia.

Junta de Andalucía (1989). *Diseño curricular de matemáticas. Enseñanza Secundaria. 12 - 16 años.* Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia.

Junta de Andalucía (1992). Decreto 105/1992 de 9 de junio (BOJA del 20) por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la E.S.O. en Andalucía.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.). (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Karplus, R. y Karplus, E.F. (1972). Intellectual development beyond elementary school III: Ratio: a longitudinal study. *School Science and Mathematics,* 72, 735-742.

Karplus, E. F., Karplus, R. y Wollman, W. (1974). Intellectual development beyond elementary school IV: Ratio, the influence of cognitive style. *School Science and Mathematics,* 74, 476-482.

Karplus, R. y Peterson, R. W. (1970), Intellectual development beyond elementary school II: Ratio, a survey. *School Science and Mathematics,* 70, 813-120.

Karplus, R., Pulos, S.y Stage, E. K. (1983a). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983b). Early adolescents' proportional reasoning on rate problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 219-233.

Kelley, H. (1973). The process of causal attribution. *American Psychologist,* 28, 107-128.

Kirk, J. y Miller, L. (1986). *Reliability and validaty in qualitative research*. London: Sage.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59- 98.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

Konold, C. (1995). Confessions of a coin flipper and would-be instructor. *The American Statistician*, 49 (2), 203-209.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal of Research in Mathematics Education,* 24, 41-61.

Langer, E. J. (1982). The illusion of control. En D. Kahneman, P. Slovic y A.Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 231-238). New York: Cambridge University Press.

Larher A. (1991): *Implications statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique*. Thése d'Université. Université de Rennes I.

Lecoutre, M. P. (1985). Effect d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur le judgements probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6, 193-213.

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357- 368.

Lecoutre, M. P. y Cordier, J. (1990). Effet du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP*, 372, 9-22.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Matalón, B. (1979). Epistemología de las Probabilidades. En J. Piaget (Ed.), *Epistemología de la Matemática* (pp. 121-145). Buenos Aires: Paidós.

Maury, S. (1984). La quantification des probabilités: analyse des arguments utilisés par les élèves de classe de seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 5(2), 187-214.

Maury, S. y Fayol, M. (1986). Combinatoire et résolution de problèmes au cours moyens et deuxième années. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7, 63-104.

M.E.C. (1989a). *Diseño curricular base para la educación primaria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

M.E.C. (1989b). *Diseño curricular base para la educación secundaria obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

M.E.C. (1991). Real Decreto 1006/1991 de 14 de Junio (BOE del 26 de Junio) por el que se establecen las enseñanza mínimas correspondientes a la Educación Primaria.

M.E.C. (1992). *Matemática. Secundaria Obligatoria.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Mendelsohn, P. (1981). Analyse procedurale et analyse structurale des activités de permutation d'objects. *Archives de Psychologies,* 49, 171-197.

Messick, S. (1991). Validity. En R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (pp. 13-104). New York: American Council on Education y MacMillan.

Miles, M. B. y Huberman, A. M. (1984), *Qualitative data analysis. A sourcebook of new methods.* London: Sage Publications.

Moore, D, (1995). *The basic practice of statistics.* New York: Freeman.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

N.C.T.M. (1989). *Curriculum and evaluation standars for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nisbett, R. y Ross, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgment.* Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Diferentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics,* 11 (2), 217-253.

Noelting, G. (1980 b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at succesive stages: Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in mathematics,* 11(3), 331-363.

Novak, J. D. y Gowin, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

Ojeda, A. M. (1994a). *Understanding fundamental ideas of probability at Pre-University levels.* Ph. D. King's College. University of London.

Ojeda, A. (1994b). Students' understanding of the idea of conditional probability. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp.177-184). University of Lisbon.

Ojeda, A. M. (1996). Contextos, representaciones y la idea de probabilidad condicional. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemáticas educativas* (pp.291-310). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Ortiz, J. J. (1996). *Significado de conceptos probabilísticos en los textos de bachillerato.* Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Pérez Echeverria, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Universidad Autónoma.

Pérez Echeverría, M. P., Carretero, M. y Pozo, J. I. (1986). Los adolescentes ante las matemáticas: Proporción y probabilidad. *Cuadernos de Pedagogía,* 133, 9-13.

Piaget, J. y García, R. (1973). *Las explicaciones causales*, Bacelona: Barral.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Pitkethly, A. y Hunting, R. (1996), A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 31, 5-37.

Pozo, J. A. (1987). *Aprendizaje de la ciencia y pensamiento causal.* Madrid: Visor.

Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Elementos y evaluación. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática (*pp. 17-61). Sevilla: Alfar.

Rico, L. (1997). Reflexión sobre los fines de la Educación Matemática. *Suma,* 24, 5-20.

Rico, L. y Castro, E. (1994). Difficulties and errors in number reasoning development. En N. A. Malara y L. Rico (Eds.), *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education (*pp.123-130). Universitá di Modena.

Romberg, T.A. (1993): How one comes to know: models and theories of the learning of mathematics. En M. Niss (Ed.), *Investigations into assessment in mathematics education; an ICMI Study* (pp. 97-111). Dordrecht: Kluwer.

Sachs, G. (1983). *Medición y evaluación en educación, psicología y "guidance".* Barcelona: Herder.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemáticas educativas* (pp. 389-404). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Scardamalia, M. (1977). Information processing capacity and the problem of horizontal décalage: A demonstration using combinatorial reasoning tasks. *Child Development,* 48 (1), 28-37.

Scozzafava, R. (1996). The evaluation and interpretation of probability: The inescapable role of the subjective view. Roma: Universitá "La Sapienza".

Scott, P. (1988). *Introducción a la investigación y evaluación educativa*. México: UNAM.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Serrano, L., Batanero, C. y Godino, J. D. (1991). Sucesiones de ensayos de Bernouilli y procesos estocásticos asociados. *Actas de las V Jornadas Andaluzas de profesores de matemáticas,* (pp. 233-247). Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Serrano, L., Batanero, C. y Godino, J. D. (1992). Use of the representativeness heuristics in a situation of simulation. Comunicación presentada en el VII *International Congress of Mathematics Education.* Quebec.

Serrano, L., Batanero C. y Ortiz, J. J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de Bachillerato. *SUMA*, 22, 43-50.
Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465- 494). London: MacMillan.
Shulman, L. S. (1989). Paradigmas y programas de investigación en la enseñanza. En M. C. Wittrock (Ed.), *La investigación en la enseñanza* (v.1, pp. 9-92). Barcelona: Paidós.
Siegler, R. S. (1980). Developmental sequences within and between concepts. Monographs of the society for research in child development, n. 189.
Siegler, R. S. y Vago, S. (1978). The development of a proportionality concept: Judging relative fullness. *Journal of Experimental Child Psychology,* 46, 371-395.
Sierra, R. (1985). *Técnicas de investigación social. Teoría y ejercicios.* Madrid: Paraninfo.
Simon, H. A. (1962). An information processing theory of intellectual development. En W. Kessen y C. Kuhlman (Eds.), *Thought in young child. Monographs of the society for research in child development,* 27 (2), 150-155.
Singer, J. A. y Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: Are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics,* 23, 231-246.
Steinbring, H. (1986). L'independence stochastique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (3), 5-50.
Teigen, K. H. (1983a). Studies in subjective probability I: Prediction of random events. *Scandinavian Journal of Psychology,* 24, 13-25.
Teigen, K. H. (1983)b. Studies in subjective probability II: Dilemmas of chance. *Scandinavian Journal of Psychogy,* 24, 27-33
Teigen, K. H. (1983c). Studies in subjective probability III: The unimportance of alternatives. *Scandinavian Journal of Psychology,* 24, 97-105.
Teigen, K. H. (1983d). Studies in subjective probability IV: Probabilities, confidence and luck. *Scandinavian Journal of Psychology,* 24, 175-191.
Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada.* México: Limusa.
Tourniare, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics,* 16(2), 181-204.
Truran, K. (1994). Children's understanding of random generators. Short oral communication. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.). *Proceeding of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. (v4. pp 328-336). University of Lisbon.
Truran, J. (1994a). Children's understanding of random generators. En: J. Garfield (Eds). *Research Papers from the Fourth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS IV)*. The International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics.University of Minnesota.
Truran, J. (1994b). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte and J. F. Matos (Eds), *Proceedings ot the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (v4, pp. 337-344). University of Lisbon.
Truran, J. (1994c). Diagnosing children’s probabilistic understanding. Comunicación presentada en la Conferencia anual del Mathematics Education Research Group of Australasia, New South Wales, Julio, 1994.

Truran, J. y Truran, K. (1997). Statistical independence. One concept or two? En B. Phillips (Ed.). *Papers on Statistical Education presented at ICME8* (pp. 87-100).Australia: Swiburne University of Technology.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Belief in the law of small numbers. En D. Kahneman, P. Slovic y A.Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 23-31). New York: Cambridge University Press.

Vallecillos, A. (1992). *Nivel de significación en un contraste de hipótesis: Estudio teórico-experimental de errores en estudiantes universitarios.* Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico - experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios.* Tesis doctoral Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press.

Weber, R. (1986). *Basic Content Analysis.* London: Sage.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas.* Madrid: Crítica.

Yin, R. K. (1994). *Case study research.* London: Sage Publications.

Yost, P., Siegel, A. y Andrews, J. N. (1962). Non verbal probability judgement by young children. *Child Development,* 33, 769-780.