

## ¿HACIA DÓNDE VA LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA?

*Carmen Batanero*

*Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada,  
batanero@goliat.ugr.es*

*Blaix15, 2-13, 2000*

### RESUMEN

*Aunque hace apenas unos años era muy escaso el número de personas que se interesaba por los problemas de la enseñanza y aprendizaje de la estadística, en la actualidad asistimos a un aumento notable de las publicaciones, diseños curriculares e investigación relacionados con este tema. El propósito de este artículo es hacer un breve resumen de este desarrollo en el ámbito internacional y reflexionar sobre la situación actual y perspectivas futuras de la educación estadística en nuestro país.*

Recientemente la estadística se ha incorporado, en forma generalizada, al currículo de matemáticas de la enseñanza primaria y secundaria y de las diferentes especialidades universitarias en la mayoría de países desarrollados. Las razones de este interés hacia la enseñanza de la estadística han sido repetidamente señaladas por diversos autores, desde comienzos de la década de los ochenta. Por ejemplo en Holmes (1980) encontramos las siguientes:

- La estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos. Para orientarse en el mundo actual, ligado por las telecomunicaciones e interdependiente social, económica y políticamente, es preciso interpretar una amplia gama de información sobre los temas más variados.
- Es un útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema. La estadística es indispensable en el estudio los fenómenos complejos, en los que hay que comenzar por definir el objeto de estudio, y las variables relevantes, tomar datos de las mismas, interpretarlos y analizarlos.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva; hemos de ser capaces de usar los datos cuantitativos para controlar nuestros juicios e interpretar los de los demás; es importante adquirir un sentido de los métodos y razonamientos que permiten transformar estos datos para resolver problemas de decisión y efectuar predicciones (Ottaviani, 1998).
- Ayuda a comprender otros temas del curriculum, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

Otro aspecto que fue ya señalado por Fischbein (1975) es el carácter exclusivamente determinista que el currículo de matemáticas ha tenido hasta hace unos años, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad: "En el

*mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico".*

Más recientemente, Begg (1997) señala que la estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso de ordenadores y trabajo cooperativo y en grupo, a las que se da gran importancia en los nuevos currículos. Además, la probabilidad y la estadística se pueden aplicar fácilmente, puesto que no requieren técnicas matemáticas complicadas. Sus aplicaciones, proporcionan una buena oportunidad para mostrar a los estudiantes la utilidad de la matemática para resolver problemas reales, siempre que su enseñanza se lleve a cabo mediante una metodología heurística y activa, enfatizando la experimentación y la resolución de problemas.

Todas estas razones han impulsado la investigación y el desarrollo curricular en el campo específico de la estadística. Ejemplos de proyectos curriculares desarrollados de acuerdo a estas ideas son, por ejemplo los del Schools Council Project on Statistical Education en el Reino Unido (1957-1981) y el Quantitative Literacy Project en Estados Unidos (1985-98). Los materiales didácticos, el software educativo, investigaciones, revistas, reuniones y congresos sobre la enseñanza de la estadística han crecido espectacularmente en los últimos años.

Por otro lado, el interés por la enseñanza y comprensión de la estadística no es exclusivo de la comunidad de educación matemática. La preocupación por las cuestiones didácticas y por la formación de profesionales y usuarios de la estadística ha sido una constante de los propios estadísticos, y las investigaciones sobre el razonamiento estocástico han tenido un gran auge en el campo de la psicología. En lo que sigue analizamos los trabajos sobre educación estadística llevados a cabo en estos tres campos. Nuestro objetivo es proporcionar información a los profesores e investigadores, con el fin de interesarlos por la enseñanza de la estadística y impulsar el desarrollo de la investigación sobre educación estadística en nuestro país.

## **EDUCACIÓN ESTADÍSTICA DENTRO DE LA ESTADÍSTICA**

La relación entre el desarrollo de un país y el grado en que su sistema estadístico produce estadísticas completas y fiables es clara, porque esta información es necesaria para la toma de decisiones acertadas de tipo económico, social y político. La formación adecuada, no sólo de los técnicos que producen estas estadísticas, sino de los profesionales y ciudadanos que deben interpretarlas y tomar a su vez decisiones basadas en esta información, así como de los que deben colaborar en la obtención de los datos requeridos es, por tanto, un motor del desarrollo.

La educación estadística ha sido una preocupación crucial del *Instituto Internacional de Estadística* (ISI) desde su fundación en 1885, que se concretó oficialmente en 1948 en el establecimiento del *Comité de Educación*, encargado de promover la formación estadística, colaborando, para este fin, con la *UNESCO* y otros organismos internacionales, y marcando el comienzo de un programa sistemático de apoyo a la educación (Vere-Jones, 1997).

En aquel momento, un objetivo común a las *Naciones Unidas* y al *ISI* era mejorar la información estadística disponible en los países en vías de desarrollo, lo que implicaba la necesidad de preparar suficiente número de técnicos estadísticos en estos países. Las responsabilidades del *Comité de Educación* incluyeron el desarrollo de diplomaturas y licenciaturas en estadística en los que se formarían los profesores y técnicos estadísticos. Una de las primeras actividades de este comité fue la creación de los *Centros de Internacionales de Educación Estadística* en Calcuta y Beirut, para atender las necesidades formativas de los países de su respectivo entorno geográfico.

Asimismo, el Comité ha colaborado en la producción y difusión de ayudas para la enseñanza, por ejemplo la preparación de libros de texto universitarios, de bibliografías específicas y diccionarios de términos estadísticos. Subcomités especiales se dedicaron a impulsar la introducción de la estadística en las escuelas, el papel de la mujer en la estadística, y la promoción de conferencias sobre la educación estadística, dando origen, en particular a los *ICOTS (International Conference on Statistical Education)* que se iniciaron en 1982 en la Universidad de Sheffield y han continuado cada cuatro años.

Otro tipo de conferencias iniciadas por el Comité de Educación, como satélites del *ICME (International Congress of Mathematics Education)*, son las *Round Table Conference* sobre temas específicos de educación estadística, que han sido los siguientes: "Estadística en la escuela" ( en las conferencias de Viena, 1973; Varsovia, 1975 y Calcuta, 1977), "La enseñanza universitaria de la estadística en los países en vías de desarrollo" ( celebrada en La Haya, 1968), "Enseñanza de la estadística y ordenadores", ( en las conferencias de Oisterwijk, 1970 y Camberra, 1984), y "Formación de profesores" (celebrada en Budapest, 1988).

La puesta en marcha en el *Centro de Educación Estadística de la Universidad de Sheffield* de la revista *Teaching Statistics* dirigida a los profesores y el éxito de la misma a lo largo de sus 21 años de existencia mostró el interés de los profesores por los aspectos didácticos y la necesidad de compartir y discutir los problemas educativos.

En 1991 el *ISI* decide crear una nueva sección, a la que se transferirían las responsabilidades y objetivos que hasta entonces había tenido el Comité de Educación. Nace así *IASE (International Association for Statistical Education)*, con igualdad de derechos y obligaciones que el resto de las secciones del Instituto, participando en la elaboración de sus revistas y organización de sus Sesiones bianuales, contribuyendo a su financiación y teniendo representación en sus organismos directivos. El objetivo principal de *IASE* es el desarrollo y mejora de la educación estadística en el ámbito internacional. En la actualidad cuenta con unos 500 miembros, que son personas interesadas en la enseñanza de la estadística en cualquiera de los niveles educativos, el desarrollo de software estadístico, la enseñanza de la estadística en empresas o industria, preparación de expertos estadísticos para las unidades estadísticas en el gobierno y el desarrollo curricular, libros de texto y materiales didáctico. Como indica Hawkins (1999), la Sociedad tiene un triple objetivo:

- Como organización profesional, proporciona un foro de discusión para todos los que de algún modo se interesan por la educación estadística;
- Como sociedad de investigación, se encamina hacia la constitución de una disciplina autónoma;

- Al ser el brazo educativo del ISI, toma el liderazgo y responde a las cuestiones sobre educación y formación estadística y promueve la educación estadística, especialmente en los países en desarrollo.

Entre las responsabilidades asumidas por esta sociedad, se encuentran la organización de las conferencias *ICOTS* a partir del *ICOTS IV* (celebrada en Marrakech 1994) y de las *Round Table Conference* asociadas al *ICME*, habiendo organizado hasta la fecha las dedicadas a "Enseñanza del análisis de datos" (celebrada en Quebec, 1992) y "Impacto de las nuevas tecnologías en la investigación" (que tuvo lugar en Granada en 1996).

La diversidad de temas que interesan a los educadores estadísticos se ha reflejado en el programa del *V ICOTS*, celebrado en 1988 en Singapur, cuyo lema: *Expanding the network*, hizo alusión a la voluntad de expansión y filosofía de trabajo en equipo de la sociedad. Esta filosofía también se tradujo en la misma organización del trabajo científico del congreso, donde las sesiones fueron coordinadas por más de una treintena de personas funcionando en forma arborescente y comunicadas entre sí. Los grandes temas: "Educación en la escuela", "educación post-secundaria", "educación en el centro de trabajo", "educación y sociedad", "perspectiva internacional de la educación estadística", "investigación", "el papel de la tecnología", y "otros factores que determinan la educación estadística", se han derivado en unos 200 trabajos presentados y siete listas de discusión organizadas para continuar el trabajo a distancia.

Se han promovido además otras conferencias. En 1993 tuvo lugar la *Primera Reunión Científica de IASE* en Perugia, y la *Segunda Reunión Científica de IASE* se celebró en El Cairo en 1994. IASE ha realizado presentaciones de su trabajo en otras conferencias con sesiones de educación estadística como la *Conferencia conjunta de IAOS/IASS*, Aguas Calientes, México, 1998 (Ottaviani, 1998), la *IV Conferencia Internacional Iraní de Estadística*, Teherán, 1998 (Batanero, 1998 a), y la *IV Conferencia de Sociedades latinoamericanas de Estadística*, Mendoza, 1999 (Ottaviani, 1999).

IASE ha promovido también la publicación de libros, entre los cuales los más recientes son la colección de trabajos sobre estadística presentados en *ICME 8* (Phillips, 1996) las Actas de la Conferencia que se celebró en Tartu, Estonia sobre *Educación Estadística y Estadística Computacional* (Tiit, 1997) y *The Assessment Challenge in Statistics Education* editado por I. Gal y J. Garfield (1997), que discute los problemas teóricos y prácticos de la evaluación del razonamiento estadístico.

Actualmente se ha iniciado la preparación de la próxima *Round Table Conference* asociada al *ICME 9*, que tendrá lugar en Tokio en el año 2000 y estará dedicada a estudiar el problema de la "Formación de investigadores en el uso de la Estadística". Vemos que la preocupación por la educación estadística no acaba con la etapa universitaria, puesto que una formación básica estadística es imprescindible hoy día a los investigadores en diversas ciencias, no solo para poder valorar y tomar decisiones sobre los diseños de su investigación, sino para poder leer la literatura científica de su especialidad y para poder comunicarse con los estadísticos profesionales, a propósito del análisis de sus datos. Asimismo las sesiones que *IASE* ha organizado en la *52 sesión del ISI* (Helsinki, 1999) han abarcado desde la formación de profesores, el papel de la visualización, el uso de datos estadísticos oficiales en la

enseñanza y la evaluación hasta la controversia actual sobre el uso de los tests de significación.

## **LA PERSPECTIVA PSICOLÓGICA: INVESTIGACIÓN SOBRE EL RAZONAMIENTO ESTOCÁSTICO**

La influencia que, en el campo de la psicología, han tenido las investigaciones sobre el razonamiento estocástico es tal que Pérez Echeverría (1990) habla de la "revolución probabilista" para referirse a este impacto, equiparándolo al que ha tenido la perspectiva cognitiva. Esta importancia se debe al giro que estos estudios han implicado en los trabajos sobre razonamiento humano, donde se ha pasado de un modelo de actuación acorde a la lógica formal, a concebir un decisor que actúa de acuerdo a un sistema probabilístico complejo, utilizando heurísticas adquiridas en su relación empírica con lo cotidiano. Trabajos como los recogidos en Kahneman y cols. (1982), que tocan entre otros puntos el razonamiento correlacional, la inferencia, la probabilidad condicional y regla de Bayes, han contribuido a este cambio de paradigma en los estudios psicológicos.

Un concepto fundamental en estos trabajos es el de *heurística* o estrategia inconsciente que reduce la complejidad de un problema probabilístico, suprimiendo parte de la información. Aunque las heurísticas ayudan en muchos casos a obtener una solución aproximada al problema, en otros producen sesgos en las conclusiones obtenidas, con las consiguientes implicaciones en las decisiones tomadas. Consideremos, por ejemplo, el siguiente ítem adaptado de Kahneman y cols. (1982).

Ejemplo 1. En un hospital maternal se lleva un registro del sexo de los recién nacidos. ¿Cuál de los dos sucesos siguientes te parece que tiene más probabilidad?

- A. Que entre los próximos 10 recién nacidos haya más de un 70 % de niñas.
- B. Que entre los próximos 100 recién nacidos haya más de un 70 % de niñas.
- C. Las dos cosas me parecen igual de probables.

La respuesta correcta a este ítem es la A, aunque la mayoría de los sujetos suelen considerar correcta la respuesta C. Esto es debido a que sólo tienen en cuenta que la proporción de niñas en las dos muestras es la misma, sin tener en cuenta el tamaño de las muestras, que es también un dato del problema, ya que las muestras pequeñas son más variables que las grandes. Al suprimir un dato (el tamaño de la muestra) se ha reducido la complejidad del problema, pero se ha producido una solución incorrecta. Razonamientos como el mostrado en el ejemplo (la heurística de la representatividad) han sido estudiados por los psicólogos, en diversos contextos de aplicación, tales como diagnóstico médico o juicios legales.

Por otro lado, y a partir de los estudios de Piaget e Inhelder (1951), la adquisición de las ideas de aleatoriedad y probabilidad, del razonamiento combinatorio, de la intuición de la frecuencia relativa, distribución y convergencia, así como de la capacidad de cuantificación de probabilidades ha sido analizada en los niños desde sus primeros años a la adolescencia, determinándose, en consecuencia diferentes etapas en el desarrollo del razonamiento probabilístico. Otros autores han estudiado también la influencia de creencias previas y concepciones animistas de los niños sobre su

capacidad de percepción de lo aleatorio. La importancia que estos trabajos tienen para los profesores es que permiten seleccionar de una forma racional el tipo de tareas probabilísticas que podemos proponer a nuestros alumnos en función de su edad. Los instrumentos de evaluación contruidos en estas investigaciones son también útiles para valorar los conocimientos y modos de razonamientos de nuestros alumnos.

Mención particular merecen los trabajos de Fischbein (1975) y otros posteriores del mismo autor, ya que constituyeron uno de los primeros puentes de unión entre la psicología y la educación matemática. Interesado no solo por la formación de los conceptos formales, sino por la aparición de intuiciones parciales sobre los conceptos estocásticos, se preocupó también del efecto de la instrucción. Sus investigaciones apoyan decididamente la conveniencia de adelantar la educación estocástica y también muestran que, sin instrucción, es difícil que se desarrolle un razonamiento estocástico adecuado, incluso una vez que se alcanza la etapa de las operaciones formales.

Fischbein fue uno de los fundadores del grupo PME (Psychology of Mathematics Education) que en 1999 celebra su 23 reunión anual y es, en la actualidad el principal foro de investigadores en educación matemática. En 1994 se creó un grupo de trabajo sobre estocástica dentro de PME, que sigue trabajando en la actualidad. Uno de los proyectos que este grupo tiene en marcha es la elaboración de una monografía donde se haga un resumen de las principales investigaciones en el campo de la educación estadística y se discutan sus implicaciones didácticas.

## **ESPECIFICIDAD DE LA ESTADÍSTICA DENTRO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

El interés por la enseñanza de la estadística, dentro de la Educación Matemática, viene ligado al rápido desarrollo de la estadística como ciencia y como útil en la investigación, la técnica y la vida profesional, impulsado notablemente por la difusión de los ordenadores y el crecimiento espectacular de la potencia y rapidez de cálculo de los mismos, así como por las posibilidades de comunicación. Todo ello ha facilitado el uso de la estadística a un número creciente de personas, provocando, en consecuencia, una gran demanda de formación básica en esta materia, formación que ha sido encomendada, en los niveles no universitarios, a los profesores de matemáticas.

Los nuevos currículos de educación primaria y secundaria incluyen en forma generalizada recomendaciones sobre la enseñanza de la estadística. Sin embargo, en la práctica son todavía pocos los profesores que enseñan este tema y en otros casos se trata muy brevemente, o en forma excesivamente formalizada. Analizaremos, a continuación, la problemática que, para muchos profesores supone la enseñanza de la estadística.

Una primera dificultad proviene de los cambios progresivos que la estadística está experimentando en nuestros días, tanto desde el punto de vista de su contenido, como del punto de vista de las demandas de formación. Estamos caminando hacia una sociedad cada vez más informatizada y una comprensión de las técnicas básicas de análisis de datos y de su interpretación es cada día más importante. Esto nos lleva a tener que enseñar estadística a alumnos con capacidades y actitudes variables, e incluso a los que siguen un bachillerato no científico, que no disponen de la misma base de conocimientos de cálculo que sus compañeros.

Al mismo tiempo, la estadística como ciencia, atraviesa un periodo de notable expansión, siendo cada vez más numerosos los procedimientos disponibles, alejándose cada vez más de la matemática pura y convirtiéndose en una "ciencia de los datos", lo que implica la dificultad de enseñar un tema en continuo cambio y crecimiento. Por ejemplo, todo profesor que ha tratado de incorporar las calculadoras gráficas o el ordenador en su clase de estadística, conoce bien el trabajo añadido que supone la continua puesta al día en el manejo de estos recursos.

Por otro lado, el número de investigaciones sobre la didáctica de la estadística es aun muy escaso, en comparación con las existentes en otras ramas de las matemáticas. Por ello, no se conocen aun cuales son las principales dificultades de los alumnos en muchos conceptos importantes. Sería también preciso experimentar y evaluar métodos de enseñanza adaptados a la naturaleza específica de la estadística, a la que no siempre se pueden transferir los principios generales de la enseñanza de las matemáticas. Las investigaciones existentes no son muy conocidas por los profesores, ya que falta todavía mucha labor de difusión, especialmente de trabajos realizados fuera de nuestro país. Precisamente trabajos como este artículo o los publicados en la revista UNO, n. 5, quieren contribuir a llenar este hueco.

La misma naturaleza de la estadística es muy diferente de la cultura determinista tradicional en clase de matemáticas. Un indicador de ello es que aun hoy día prosiguen las controversias filosóficas sobre la interpretación y aplicación de conceptos tan básicos como los de probabilidad, aleatoriedad, independencia o contraste de hipótesis, mientras que estas controversias no existen en álgebra o geometría (Batanero y Serrano, 1995). Las dimensiones políticas y éticas del uso y posible abuso de la estadística y la información estadística contribuyen, asimismo, a la especificidad del campo.

La formación específica de los profesores en este ámbito específico es prácticamente inexistente. En España sólo muy recientemente se ha iniciado una asignatura específica de didáctica de la estadística en la Licenciatura en Ciencias y Técnicas estadísticas de la Universidad de Granada y creemos que este tipo de asignatura es prácticamente inexistente en otras universidades. Los profesores que provienen de la Licenciatura de Matemáticas no tienen una formación específica en didáctica de la estadística y muchos de ellos tampoco en estadística aplicada. La situación es aun peor en lo que se refiere a los profesores de primaria, la mayor parte de los cuales no han tenido una formación ni siquiera básica ya no sobre la didáctica de la estadística, sino sobre los conceptos básicos de estadística o probabilidad.

Por otro lado, aunque existen libros de texto excelentes, la investigación didáctica está comenzando a mostrar como algunos errores conceptuales y pedagogía inadecuada se transmiten con una frecuencia mayor de lo que sería deseable en los libros de texto (Sánchez-Cobo, 1996; Ortiz, 1999).

Un último punto es la naturaleza interdisciplinar del tema, que hace que los conceptos estadísticos aparezcan en otras materias, como ciencias sociales, biología, geografía, etc., donde los profesores, a veces se ven obligados a enseñar estadística, lo que puede ocasionar conflictos cuando las definiciones o propiedades presentadas de los conceptos no coinciden con las impartidas en la clase de matemáticas.

Parece, en consecuencia, necesario una mejor preparación previa y formación permanente del profesorado y un apoyo de los departamentos universitarios y grupos de investigación implicados para lograrlo. El papel de las sociedades profesionales, como la IASE es también decisivo, especialmente a partir de la constitución de grupos locales activos que sirvan de intermediarios entre los profesores, estadísticos profesionales e investigadores en educación estadística en sus distintas vertientes. En este sentido, una iniciativa importante es la que se está iniciando en la actualidad, de organizar un grupo Iberoamericano dentro de IASE.

## ¿COMO ENSEÑAR ESTADÍSTICA?

En las secciones anteriores hemos justificado la importancia de la formación estadística. Esperando haber convencido a los profesores del interés que para sus alumnos tienen los conocimientos estadísticos básicos, trataremos a continuación, de sugerir la forma es que debiéramos llevar a cabo esta enseñanza. Para ello, debemos reflexionar, en primer lugar, sobre los fines principales de esta enseñanza que son los siguientes:

- Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la estadística en la sociedad, conociendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo.
- Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones.

Puesto que, como hemos dicho, estamos en presencia de una ciencia que cambia rápidamente, lo más importante no serán los contenidos específicos, sino el tratar de desarrollar en nuestros alumnos una actitud favorable, unas formas de razonamiento y un interés por completar posteriormente su aprendizaje.

La principal razón del estudio de la estadística es que los fenómenos aleatorios tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Tradicionalmente, la mayoría de las aplicaciones mostradas en el estudio de la probabilidad se refieren al campo de los juegos de azar, porque éste es familiar e interesante para los alumnos y porque los espacios muestrales en estas aplicaciones son finitos. Sin embargo, si queremos que el alumno valore el papel de la probabilidad y estadística, es importante que los ejemplos que mostramos en la clase hagan ver de la forma más amplia posible esta fenomenología, e incluyan aplicaciones de su mundo biológico, físico, social y político, como las descritas en Tanur (1989). Sin renunciar a los juegos de azar, aplicaciones como las características genéticas, la previsión atmosférica, el resultado de las elecciones, el crecimiento de la población, la extinción de las especies, el efecto del tabaco o drogas sobre la salud, la extensión de epidemias, los resultados deportivos, el índice de precios o el censo de la población son cercanas a los intereses de los alumnos.

### **Metodología de enseñanza**

Ya hemos indicado que la probabilidad y la estadística son muy cercanas al mundo familiar al alumno y que, por tanto proporcionan una oportunidad extraordinaria de "matematizar", de mostrar al alumno el proceso de construcción de modelos, así como la diferencia entre "modelo" y realidad. Por otro lado, las teorías de aprendizaje aceptadas con mayor generalidad enfatizan el papel de la resolución de problemas, de la

actividad del alumno en la construcción del conocimiento, así como de la formulación (lenguaje matemático), validación (demostración y razonamiento de las ideas matemáticas) e institucionalización (puesta en común; acuerdo social en la construcción del conocimiento). El profesor no es ya un transmisor del conocimiento, sino un gestor de este conocimiento y del medio (instrumentos, situaciones) que permita al alumno progresar en su aprendizaje.

Cobran entonces un papel primordial los proyectos estadísticos y la experimentación con fenómenos aleatorios. Los proyectos permiten a los alumnos elegir un tema de su interés en el cual precisen definir los objetivos, elegir los instrumentos de recogida de datos, seleccionar las muestras, recoger, codificar, analizar e interpretar los datos para dar respuesta a las preguntas planteadas. Los proyectos introducen a los alumnos en la investigación, les permiten apreciar la dificultad e importancia del trabajo del estadístico y les hace interesarse por la estadística como medio de abordar problemas variados de la vida real.

La experimentación con fenómenos aleatorios (real o simulada) proporciona al alumno una experiencia estocástica difícil de adquirir en su relación empírica con lo cotidiano. Es precisamente esta falta de experiencia la que Fischbein sugiere podría causar el desarrollo de intuiciones estocásticas incorrectas. Trataremos con más detalle el tema de la experimentación en los siguientes apartados.

### **Materiales manipulativos**

Como en cualquier otra rama de las matemáticas, el material manipulativo debe desempeñar un papel básico en los primeros niveles de enseñanza, por la necesidad que tienen los niños de contar con referentes concretos de los conceptos abstractos que tratamos de enseñarles. En este sentido los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática del NCTM (1991) afirman que en el estudio de la probabilidad en primaria y secundaria los estudiantes deben explorar situaciones de forma activa, experimentando y simulando modelos de probabilidad. Pero hay que tener en cuenta que el material en sí mismo no es suficiente, por lo que es esencial el tipo de situación didáctica que se organice en torno al material. Conviene también tener en cuenta algunos puntos específicos sobre el uso de tales materiales.

Una característica particular de los experimentos aleatorios es su carácter irreversible, destacado por Piaget e Inhelder (1951), para quienes la aleatoriedad se produce por la interferencia de una serie de causas, que actuando independientemente, llevan a un resultado impredecible. Una vez producido un resultado aleatorio, no es posible volver al estado inicial con seguridad. Por ejemplo, si al impulsar la aguja de una ruleta numerada obtenemos el número 5, un giro en sentido contrario no nos devuelve, en general, a la posición inicial.

Mientras que en el aprendizaje de las operaciones básicas en aritmética o de los conceptos geométricos, el niño puede explorar, mediante composición y descomposición una operación o propiedad dada (por ejemplo, al estudiar la suma de dos números o la descomposición de un polígono en triángulos) con ayuda de material concreto (mediante las regletas o mediante modelos de polígonos), ello no es posible en el caso de los fenómenos aleatorios, debido a su carácter irreversible. Una repetición de

la experiencia aleatoria tampoco sirve para comprobar un resultado, cosa que sí ocurre, por ejemplo, con las operaciones aritméticas.

El análisis de un experimento aleatorio va más allá del resultado inmediato y requiere la consideración de todos los sucesos posibles, es decir del espacio muestral del experimento. Por tanto, el uso del material para la clase de probabilidad, implica realizar una serie de experimentos, recoger sus resultados, calcular las frecuencias de los distintos resultados, elaborar tablas y gráficos, y comprobar conjeturas (hipótesis) sobre el experimento, es decir, organizar un estudio estadístico del experimento. Sólo cuando se recogen datos de una serie larga de experimentos se produce la convergencia y se aprecian regularidades en el comportamiento de los fenómenos aleatorios. De la misma forma, si lo que partimos es de una clase de estadística (situación de análisis de datos) será difícil olvidar completamente los problemas probabilísticos sobre la variabilidad, aleatoriedad, generalizabilidad de las conclusiones, posibilidad de predicción. Actividades diseñadas con esta filosofía se recogen, por ejemplo en Godino y cols (1987).

## **Simulación**

Un uso característico del material en estocástica consiste en utilizarlo para sustituir un experimento aleatorio difícil de observar en la realidad, por otro equivalente. Por ejemplo, si los alumnos no se convencen de cuál es la respuesta correcta en el ejemplo 1 podríamos organizar en la clase una situación de simulación en la forma siguiente:

Ejemplo 2. Sustituimos el experimento consistente en observar el sexo de un recién nacido por el de lanzar una moneda, con el siguiente convenio: Si al lanzar la moneda obtengo una cara supongo que ha nacido un niño, en caso contrario que ha nacido una niña.

La mitad de la clase realiza experimentos lanzando a la vez 10 monedas y contando el número de veces que la proporción de "niñas" (caras) es mayor del 70 por ciento.

La otra mitad realiza el mismo experimento lanzando a la vez 100 monedas.

Un número moderadamente grande de ensayos, por ejemplo 10 por alumno, servirá para ver la diferencia entre las dos probabilidades del ejemplo 1. La situación puede mejorarse si los alumnos de cada grupo representan gráficamente la proporción de niñas obtenidas en cada repetición de su experimento, que servirá para mostrar que los valores medios coinciden pero no la variabilidad.

La simulación permite condensar el experimento en el tiempo y en el espacio y operar con el experimento simulado para obtener conclusiones válidas para el experimento original. Además proporciona un método "universal" para obtener una estimación de la solución de los problemas probabilísticos. En la enseñanza de la estocástica en secundaria la simulación cobra papel importante, ya que, como se sugieren en los *Estándares* del NCTM ayuda al alumno a conocer las diferencias entre la probabilidad experimental y la teórica. El centro de atención de la docencia ya no se limita a enseñar técnicas combinatorias, sino que se da mayor importancia al análisis del problema y el diseño de un procedimiento adecuado de simulación.

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que la realización de experimentos, en sí misma (el enfoque frecuencial de la enseñanza de las probabilidades) permite encontrar una estimación de la solución del problema (incluso la solución para algunos problemas, como los de optimización). Pero no proporciona la justificación del porqué esa solución es correcta. Para el caso del ejemplo A la justificación de la solución requiere la enumeración de todas las posibilidades al lanzar las 10 o 100 monedas y el estudio de cuántas posibilidades hay asociadas a 0, 1, 2, .... 10 caras, en el primer experimento y 0, 1, 2,.... 100 en el segundo esto es, la distribución binomial. Será necesario un estudio matemático de esta distribución y no sólo el análisis estadístico de los datos, para probar de forma concluyente cuál es la solución correcta.

## **ALGUNAS TENDENCIAS FUTURAS**

En los apartados anteriores hemos descrito el panorama actual de la educación estadística y analizado la forma en que debe llevarse a cabo esta enseñanza. Es indiscutible que el siglo XX ha sido el siglo de la estadística, que ha pasado a considerarse una de las ciencias metodológicas fundamentales y base del método científico experimental. La enseñanza de la estadística, sin embargo, aún se encuentra en sus comienzos, aunque como hemos descrito parece avanzar de una forma imparable. ¿Será el siglo XXI el siglo de la educación estadística? Analizaremos a continuación algunos indicadores que parecen dar una respuesta positiva a esta pregunta, así como sugerir algunos cambios previsibles en nuestros métodos de enseñanza de esta materia.

Un primer indicador de la expansión futura de la educación estadística son los trabajos previstos por *IASE*, como el congreso *ICOTS VI* en el 2002 y las sesiones de educación en la *Conferencia ISI* de Corea en 2001. Otras sociedades de estadística o de educación están también organizando de secciones específicas de educación estadística, como, por ejemplo, la *ASA (American Statistical Association)*, *AERA (American Educational Research Association)*, *Royal Statistical Society*, en Inglaterra, *Sociedad estadística Japonesa*, la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, etc..

Un tipo de agrupación diferente, es el *International Study Group for Research in Learning Probability and Statistics* formado por más de 250 investigadores de unos 40 países, que se conectan a través del correo electrónico e intercambian información por medio de un Boletín distribuido electrónicamente y situado en Internet. La flexibilidad de este tipo de organización se debe a su bajo costo y eficiencia en la distribución de la información, así como en la disponibilidad de ayuda de tipo diverso, desde el intercambio de trabajos, la lectura o revisión de trabajos en curso o el desarrollo de proyectos conjuntos.

Las revistas orientadas a los profesores de estadística son un indicador de la existencia de una problemática docente y de un interés de los profesores por mejorar su acción docente. El mejor exponente lo tenemos en *Teaching Statistics*, que ha cumplido ya 21 años de existencia durante los cuales se ha ido desarrollando y adquiriendo una identidad y calidad internacional reconocida. Además de los artículos sobre temas didácticos, la versión actual incluye temas históricos, curriculares, resúmenes de investigación, actividades para el aula, análisis de software y libros, bancos de datos con orientaciones para su uso en clase y las páginas centrales editadas por el *IASE* con noticias de la sociedad. Otras revistas similares son *Induzioni* en Italia y *Stochatik in der Schule*, en Alemania, además de la ya citada *Journal of Statistical Education*, publicada

en la North Carolina State University, que es una revista de educación estadística en el ámbito universitario con un servicio de información asociado (Batanero, 1998c).

Algunas de las asociaciones que hemos nombrado preparan boletines de noticias que distribuyen por Internet con un sistema semejante al de las revistas electrónicas, como la *Newsletter* del *International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics*. A nivel docente podemos citar el boletín del *Statistics Teacher Network*, que es una asociación de profesores de estadística en los niveles de primaria y secundaria.

A la vista de todas estas posibilidades, surge la pregunta de hacia donde va la educación estadística y que tipo de enseñanza tendrá lugar en el futuro (Hawkins, 1997). Es difícil dar una respuesta, aunque los libros de texto se empiezan a transformar a ediciones electrónicas e incluso en formato accesible a la consulta, modificación y sugerencias a través de Internet. Es también sencillo obtener datos de todo tipo para que los estudiantes puedan realizar investigaciones sobre casi cualquier tema, incluso con pocos recursos disponibles. El profesor puede cargar estos conjuntos de datos de la Internet e introducirlos en las calculadoras gráficas de los alumnos que tienen una difusión mucho mayor. De este modo los alumnos pueden trabajar con los datos en casa o exportarlos a otros ordenadores o calculadoras. También pueden combinar diferentes conjuntos de datos en un mismo proyecto o "enviar" a la red sus propias colecciones de datos para que sean usadas por nuevos estudiantes en cualquier rincón del planeta (Batanero, 1998b).

Las listas de discusión entre profesores o entre alumnos, la "tutoría" de alumnos a distancia, cuando el trabajo del alumno no permite la comunicación directa con el profesor son ya hechos cada vez más cercanos y ya están siendo implementados en forma experimental en algunas escuelas y universidades, como, por ejemplo, la experiencia australiana de formación a distancia de profesores (Watson, 1999). La rapidez del cambio tecnológico hace previsible la extensión de estas nuevas formas de enseñanza y aprendizaje en un plazo de tiempo no muy lejano.

En nuestro país algunos grupos de profesores e investigadores hemos comenzado a interesarnos por la educación estadística. Por ejemplo, en la Universidad de Granada hay un grupo de investigación que ha producido algunas tesis doctorales sobre el tema y que está implicado activamente, tanto en *IASE* como en otros organismos implicados en la educación estadística. En otras Universidades como Jaén, Cádiz y Murcia se están también desarrollando grupos de investigación en el tema.

Es sin embargo necesario un gran esfuerzo y sobre todo la participación activa de los profesores si queremos participar en las nuevas tendencias educativas y extender el uso y la valoración de la estadística entre nuestros alumnos. Esperamos que este artículo contribuya a concienciar a los profesores de la necesidad de su cooperación en esta tarea que, sin duda repercutirá en la mejor preparación de sus alumnos y en el desarrollo económico de nuestro país.

Agradecimientos: Este trabajo forma parte del Proyecto PB96-1411. DGES. Madrid.

## REFERENCIAS

- Batanero, C. (1988 a). Current situation and future perspectives for Statistical Education. Conferencia plenaria en la *IV Iranian International Statistical Conference*. Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.
- Batanero, C. (1998 b). Recursos para la educación estadística en Internet. *UNO*, 15, 13-25.
- Batanero, C. (1998c). Recursos en Internet para la Educación Estadística. *UNO*, 15, 13-25.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1992). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31.
- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones didácticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5, 15-28.
- Begg, A. (1997). Some emerging influences underpinning assessment in statistics. En I. Gal, y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 17-26). Amsterdam: IOS Press.
- Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Gal, I, and Garfield, J (editors) (1997). *The assessment challenge in statistics education*. The Netherland: IOS Press, The International Statistical Institute.
- Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Hawkins, A. (1997). How far have we come? Do we know where we are going? En E. M. Tiit (Ed.), *Computational statistics & statistical education* (pp. 100-122). Tartu: International Association for Statistical Education e International Association for Statistical Computing.
- Hawkins, A. (1999). What is the International Statistical Institute? *Teaching Statistics*, 21(2), 34-35.
- Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics 11 -16*. Sloug: Foulsham Educational.
- Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- N. C. T. M. (1991). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Thales ( traducción española del original publicado en 1989 por la NCTM).

Ortiz de Haro, J. J. (1999). *Significado de conceptos probabilísticos en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ottaviani, M.G. (1998). Developments and perspectives in statistical education, *Proceedings IASS/IAOS Joint Conference, Statistics for Economic and Social Development, Aguascalientes, Mexico, 1-4 September 1998 (CD-ROM)*.

Ottaviani, M.G. (1999). A note on developments and perspectives in statistics education. Conferencia plenaria en el *IV Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística*, 26-30 July 1999, Mendoza, Argentina.

Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: ICE de la Universidad Autónoma.

Phillips, B. (editor) (1996). *Papers on Statistical Education, Presented at ICME-8*. Swinburne University of Technology, Australia.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Sánchez-Cobo, F.T. (1996). *Análisis de la exposición teórica y de los ejercicios de correlación y regresión en los textos de Bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo, Universidad de Granada.

Tanur, J. M. (Ed.) (1989). *La Estadística; una guía de lo desconocido*. Madrid: Alianza Editorial.

Tiit, E.M. (1997). *Computational Statistics and Statistical Education*. Proceedings of the Tartu Conference, 1996. IASE/IASC.

Vere-Jones, D. (1997). The coming age of statistical education. *International Statistical Review*, 63(1), 3-23.

Watson, J. (1999). Professional development for teachers of probability and statistics: Into an era of technology. *International Statistical Review*, 66(3), 271-290.