LA COMPRENSIÓN DE LA PROBABILIDAD EN LOS NIÑOS: ¿QUÉ PODEMOS APRENDER DE LA INVESTIGACIÓN?[1]

Carmen Batanero
Universidad de Granada,batanero@ugr.es

Resumen. El razonamiento probabilístico de los niños ha sido caracterizado en diversas investigaciones, particularmente por Piaget e Inhelder y Fischbein. En este trabajo se describen los resultados de estos trabajos, con el fin de orientar adecuadamente a los profesores para enseñar la probabilidad a niños en la Educación Primaria.

Introducción

Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos de enseñanza secundaria en las últimas dos décadas se recomienda adelantar la enseñanza a la educación primaria de forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica más directa desde su infancia (ej. NCTM, 2000; M.E.C., 2006). En este último documento se incluyen los siguientes contenidos:

- *Primer ciclo* (6-7 años*:* "Carácter aleatorio de algunas experiencias: Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad" (MEC, 2006, p. 43098).
- *Segundo ciclo:* "Carácter aleatorio de algunas experiencias: Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar" (MEC, 2006, p. 43099).
- *Tercer ciclo:* "Carácter aleatorio de algunas experiencias: Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso" (MEC, 2006, p. 43101).

Una condición para asegurar el éxito de estas propuestas es la formación de los profesores (Batanero et al., 2011). Sin embargo, autores como Pierce y Chick (2011) indican que algunos profesores de matemáticas se encuentran inseguros al enseñar esta materia, pues su interés es contribuir a la formación, no sólo de los conocimientos matemáticos de sus estudiantes, sino también de sus intuiciones probabilísticas. Por otro lado, cuando se sugiere introducir un nuevo tema en el currículo es muy importante estudiar el razonamiento de los niños respecto al mismo, para poder valorar hasta qué punto son asequibles para ellos los nuevos conocimientos que tratamos de enseñar. Los niños aprenden no sólo en la escuela, sino en su entorno familiar y social, y su razonamiento se modifica gradualmente, a partir de sus experiencias y de la interacción con los objetos y el mundo que les rodea. El propósito de esta presentación es dar a conocer a los profesores algunas conclusiones de las investigaciones con niños de primaria en relación a su razonamiento probabilístico, para facilitar al profesor la enseñanza en este nivel educativo.

[1] EN J. A. FERNANDES, P. F. CORREIA, M. H. MARTINHO, & F. VISEU, (EDS..) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

1. Especificidad de la probabilidad

Al comenzar la enseñanza de la probabilidad es especialmente importante analizar los razonamientos de los niños, puesto que en dichas materias tratamos con ideas bastante abstractas y no tan ligadas a la experiencia directa del niño como pudieran ser los conceptos geométricos o numéricos. Desde muy pequeño el niño debe aprender a estimar, discriminar y diferenciar formas, distancias y cantidades. Estos conceptos básicos se pueden concretizar con objetos físicos; por ejemplo, la suma o la resta se pueden ejemplificar juntando o separando colecciones de dulces, piedrecillas o cualquier otro objeto. Además estas operaciones (también el producto o división) tienen la propiedad de ser reversibles (volver a los datos primitivos al deshacer la operación). Así, si un niño añade dos caramelos a un montón de cinco, obtiene siete caramelos; quitando los dos últimos vuelve a los cinco que tenía inicialmente. Además obtiene el mismo resultado cada vez que repita estas operaciones. Igualmente si, por ejemplo, divide un cuadrado en dos partes iguales doblando por la bisectriz y cortando las dos partes; al volver a unirlas vuelve al cuadrado primitivo.

Por el contrario, no existe una experiencia concreta similar de lo aleatorio, ya que no podemos manipular estos fenómenos para producir un resultado específico, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación. Por ejemplo, si hacemos girar la aguja en la ruleta mostrada en la Figura 1, desde la posición inicial (número 6), impulsándola hacia la derecha, no sabemos con seguridad qué número resultará. Supongamos que la ruleta se para en el 1. Si giramos a continuación la aguja en sentido contrario al anterior (hacia la izquierda) no es seguro que vuelva al número 6. Por otro lado, aunque los 8 números en la ruleta tienen la misma probabilidad, no podemos asegurar (e incluso sería difícil) que en ocho giros sucesivos obtengamos una vez cada uno de los números.

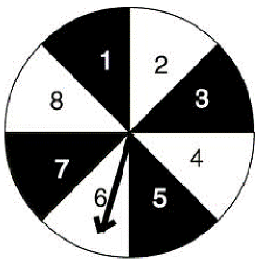


Figura 1. Ruleta con 8 valores equiprobables.

Esta falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios sin duda influye en el desarrollo más tardío de las nociones de probabilidad, aunque esto no quiere decir que los niños no tengan ideas intuitivas al respecto. En lo que sigue analizamos las investigaciones sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico en los niños llevadas a cabo por Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975) y algunas posteriores.

2. Teorías sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico

2.1. Etapas de desarrollo según Piaget

Desde que nacemos hasta que llegamos a la vida adulta, nuestra forma de pensar, así como el razonamiento matemático, van evolucionando. Piaget se centró en dar criterios para determinar en qué nivel de desarrollo intelectual se encuentra el niño a diversas edades respecto a la comprensión formal de los conceptos matemáticos.

La teoría desarrollada por Piaget (1975) indica que cuando un individuo afronta un problema matemático, lo intenta resolver mediante los conocimientos que ya posee, usando esquemas conceptuales existentes. Como resultado de la asimilación, el esquema cognitivo existente se reconstruye o expande para acomodar la situación. Un niño va comprendiendo su entorno del mejorando su sensibilidad a las contradicciones, realizando operaciones mentales, comprendiendo las transformaciones y adquiriendo nuevas nociones.

Piaget postula que la experiencia, la actividad y el conocimiento previo son las bases que determinan el aprendizaje. El conocimiento es construido activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno. El niño trata de adaptarse al mundo que le rodea. Cuando una idea nueva se le presenta, se crea un *conflicto cognitivo* o *desequilibrio* en su estado mental si esta idea choca con las ya existentes.

Por ejemplo, cuando se comienza el estudio de los números decimales, puede crearse un conflicto cognitivo respecto a la idea asumida previamente de que todo número tiene un número siguiente (y que era válida para los números naturales). Así cuando un niño percibe que entre un número decimal y otro pueden concebirse infinitos números diferentes, se encuentra perdido. Para reaccionar a este desequilibrio se requiere un proceso de "equilibración" que consiste en los pasos de asimilación y acomodación. La asimilación es la incorporación (aceptación) por parte del sujeto de los datos nuevos (en este caso, aceptar que hay números que no tienen un único siguiente). La acomodación es el cambio o reestructuración de los ya existentes (sería comprender globalmente la estructura del sistema numérico.

El aprendizaje se concibe como un proceso que progresa lentamente con puntos conflictivos que el alumno debe superar mediante el proceso descrito. Conocer es un proceso de adaptación que organiza el propio mundo de la experiencia. La posibilidad de aprender depende del conocimiento previamente adquirido y del desarrollo intelectual del alumno, que sigue una serie de etapas. Las etapas son particiones en fases, de modo que los sujetos que están en una misma fase tienen un modo de razonamiento similar y la progresión de una etapa a otra siempre sigue un cierto patrón (Piaget, 1975).

Estas etapas determinan el desarrollo evolutivo y se concretizan para el caso de la probabilidad en Piaget e Inhelder (1951). Son las siguientes (la edad es aproximada; puede variar de un niño a otro, pero las etapas siempre se suceden en el mismo orden):

- *Período sensorio motor* (0-2 años). Se caracteriza por el movimiento y las sensaciones y describe el razonamiento de los bebés. El bebé comienza a manipular objetos; percibe y experimenta propiedades (color, tamaño, forma, textura, sabor, olor,...). Hacia los 5 meses discrimina conjuntos de 2-3 ítems; a los 10 meses discrimina conjuntos de 3-4 ítems.

- *Período pre operacional* (2-7 años). Caracterizada por la necesidad de manipular objetos reales para el aprendizaje de un cierto concepto, pues el niño se apoya en sus experiencias empíricas para comprender los conceptos. El niño de preescolar y comienzo de la primaria llega a comprender la organización del espacio, situando y desplazando los objetos (comprendiendo conceptos como dentro/fuera, encima/debajo, delante/detrás, arriba/abajo). También descubre y compara propiedades físicas de los objetos que manipula: longitud, distancia, cantidad. Utiliza diferentes formas de etiquetado para diferenciar colecciones numéricas de pocos elementos, es decir, comienza a contar cantidades pequeñas de objetos y a comprender el concepto de cardinal; contrasta magnitudes por comparación y estima, a partir de una cantidad, la longitud, volumen y peso. Es capaz de ordenar sucesos en el tiempo (saber lo que ocurrió antes y lo que vendrá después). Trabaja con una sola cantidad y resuelve problemas de cambio sencillo (operaciones aditivas).

- *Período de las operaciones concretas* (7-11). Se comienza a comprender la conservación de la masa, peso, número y volumen. Aparecen conceptos secundarios, que no necesitan ser abstraídos de la experiencia concreta. Este es el periodo en que el niño va progresando a lo largo de la educación primaria. Aparece la comprensión de operaciones reversibles (aritméticas) con la adquisición de principios de conservación de cantidad, peso y volumen. Compara y cuantifica magnitudes y formas en geometría;

llega a comprender el sistema métrico decimal y representa datos gráficamente. Agrupa los objetos en función de propiedades aditivas o multiplicativas; ordena elementos en función de una cualidad que varía (por peso, por color). Adquiere la comprensión del sistema de numeración y de las operaciones con números. Comprende conceptos espaciales: espacio que ocupan los objetos y su desplazamiento (topológicas, proyectivas, euclidianas, métricas,…); y, operaciones temporales y cinéticas: orden de sucesión de los objetos en el espacio. Los objetos materiales son un referente importante y todavía tiene dificultad para concebir una operación en forma abstracta.

- *Período de operaciones formales* (11-15). El período de las operaciones formales constituye el último paso del desarrollo intelectual, y de adquisición de las habilidades cognitivas y sociales (Inhelder y Piaget, 1955; Piaget, 1975). Se pueden manipular relaciones entre representaciones simbólicas, se formulan hipótesis y se establecen conclusiones. Se comprende el significado de abstracciones verbalmente, sin referirse a objetos particulares. Características del pensamiento formal son: (a) se contempla lo real como parte de lo posible; (b) se acentúa lo hipotético-deductivo frente a lo empírico-inductivo; (c) se depura el pensamiento proposicional; (d) se acentúa la diferencia entre inteligencia práctica y especulativa; (e) se incrementa la cantidad y calidad de las estrategias de procesamiento de la información; (f) se potencia y acentúa el análisis crítico frente a las percepciones globales; (g) se depura y da carácter sistemático al método de análisis; (h) se desarrollan y amplía el razonamiento combinatorio.

En resumen, según Inhelder y Piaget (1955), la adquisición de las operaciones formales viene caracterizada por el razonamiento combinatorio, la lógica de proposiciones, la proporcionalidad, la comprensión de la relatividad de dos movimientos o velocidades, la comprensión del equilibrio mecánico (toda acción le corresponde una reacción de la misma intensidad pero en sentido contrario), la probabilidad y la correlación, que para Piaget es el último paso en la comprensión de la probabilidad.

2.2. La intuición, según Fischbein

Otro autor muy influyente en el campo de la probabilidad es Fischbein (1975), quien trató de demostrar que los niños tienen ideas correctas parcialmente formadas sobre los conceptos probabilísticos y analizó el efecto de la instrucción para la mejora de estas intuiciones. También concede una gran importancia a la intuición como componente de la inteligencia. Para el autor el conocimiento intuitivo "no está basado en la evidencia empírica o en argumentos lógicos rigurosos y, a pesar de ello, se tiende a aceptar como cierto y evidente" (p. 26).

Las intuiciones son, según Fischbein (1987), procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, y tienen las siguientes características: inmediatez, globalidad, capacidad extrapolatoria, estructurabilidad y auto-evidencia. La inmediatez significa que las intuiciones no son reflexivas, sino que surgen con frecuencia en forma espontánea. El carácter global se opone al analítico o descomposición en partes. Las intuiciones van más allá de un caso particular, en cierto modo tienen un carácter teórico y por eso sirven para extrapolar o hacer predicciones. Parecen autoevidentes para el sujeto, quien no necesita demostración. Las intuiciones se relacionan entre sí, formando estructuras de razonamiento. Fischbein (1987) diferencia entre intuiciones primarias y secundarias:

- Las *intuiciones primarias* se adquieren directamente con la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. Ejemplo de ellas son las intuiciones espaciales elementales, como el cálculo de distancia y localización de objetos, o el admitir que al lanzar un dado todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.

- Por el contrario, las *intuiciones secundarias* se forman como consecuencia de la educación, principalmente en la escuela. Por ejemplo, una intuición secundaria (errónea) es la llamada "falacia del jugador", por la cual, después de lanzar una moneda una serie de veces y haber obtenido caras, el sujeto tiende a predecir que la próxima vez es más probable que salga cruz. Esto se debe a una mala interpretación de la ley de los grandes números.

Una intuición secundaria no se reduce a una simple fórmula aceptada o utilizada automáticamente, sino que se transforma en convicción, en creencia, en un sentimiento de evidencia. Pero una intuición no se forma a partir de la información obtenida de una lectura o de una explicación teórica, sino de una información que el alumno utiliza en sus propias acciones y predicciones a lo largo de gran parte de su desarrollo intelectual.

2.3. Otras investigaciones posteriores

Son muchos los investigadores que, posteriormente, han tratado de confirmar, rechazar o completar las conclusiones de Piaget y de Fischbein y sería imposible reseñarlas acá, debido a su gran número. Una síntesis de ellas puede consultarse en Shaughnessy (1992) y Jones Langrall y Money (2007). De interés para lo que sigue son los estudios de Green (1983) y Cañizares (1997) y Fernandes (2001), quienes realizaron evaluación del razonamiento probabilístico de niños ingleses (11-16 años), españoles (10-14 años) y portugueses (8-11 años) respectivamente con cuestionarios escritos.

3. Algunas conclusiones de las investigaciones sobre razonamiento probabilístico de los niños

Aunque algunas de las investigaciones citadas se interesaron por la comprensión de la probabilidad desde un punto de vista puramente psicológico (para describir etapas de desarrollo y para crear una teoría sobre este desarrollo) el profesor que se enfrenta a la tarea de enseñar al niño está interesado en conocer cuáles son las tareas que puede proponer a distintas edades y qué dificultades puede encontrar el niño en su ejecución. En lo que sigue resumimos esta información sobre la comprensión de conceptos probabilísticos específicos.

3.1. Aceptación del azar

El primer paso para comenzar a enseñar probabilidad es asegurarnos que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas, es decir de apreciar algunas características básicas de la aleatoriedad. Los niños están rodeados de azar desde que nacen, en sus juegos (echar a suertes, juegos de datos, cartas,…) y vida cotidiana (meteorología, deportes,…). ¿Desarrollan, entonces los niños pequeños una comprensión intuitiva del azar?

Esta teoría fue rechazada por Piaget e Inhelder (1951), debido a que ellos tenían una concepción muy compleja del significado del azar, que para ellos es complementario a la relación causa-efecto. Según estos autores el azar ha de verse como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas, que actuando independientemente produce un resultado inesperado. El azar habría que considerarlo asimismo como complementario a la composición lógica de operaciones reversibles y requiere un razonamiento combinatorio, para poder concebir las distintas posibilidades que pueden darse en un fenómeno aleatorio. Pero como el niño pequeño no comprende la idea de causa, ni tiene razonamiento combinatorio, según los autores no tiene un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios.

Piaget organiza el siguiente experimento para probar su teoría. Utiliza una bandeja con dos series de compartimentos (Figura 2). En una de esta serie de compartimentos se colocan cuatro bolas blancas y en el otro cuatro rojas, de modo que al bascular la bandeja se produce la mezcla progresiva de las dos clases de bolas. Antes de mover la bandeja, Piaget pide a los niños que hagan una predicción sobre la colocación final de las bolas.

En el *periodo pre operacional* los niños piensan que, después de mover varias veces la bandeja, las bolas vuelven nuevamente a su lugar original, o bien que el conjunto completo de blancas acabarán en el lugar ocupado originalmente por las rojas, y viceversa. Piaget interpreta esta reacción típica de los niños menores de 7 años como indicadora de que el niño no comprende la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria por tener un pensamiento reversible. Además el niño de esta edad no comprende bien la relación entre causa y efecto, ni tiene razonamiento combinatorio completo, por lo que Piaget piensa no hay una intuición del azar innata en el niño, como no existía tampoco en el hombre primitivo, que atribuía los sucesos aleatorios a causas ocultas o a la "voluntad de los dioses".

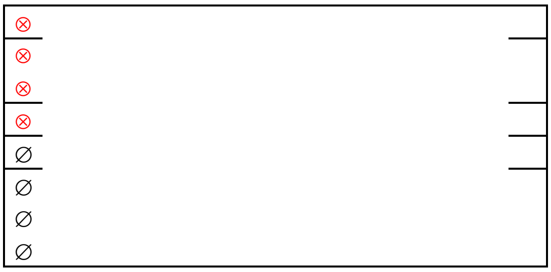


Figura 2. Experimento de la bandeja: Al mover la bandeja, las bolas, que al principio estaban ordenadas se mezclan progresivamente.

Esta opinión de Piaget es rechazada por Fischbein para quien la *intuición primaria* del azar, esto es, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista aparece antes de los 7 años. Fischbein se basa en la conducta de los niños al practicar juegos de azar, ya que en juegos sencillos, los niños son capaces de elegir la opción de mayor probabilidad. Por ejemplo, si preguntamos al niño en cuál de las dos cajas A y B (Figura 3) es más fácil sacar bola roja con los ojos cerrados, el niño es capaz de acertar si el número de casos desfavorables es igual y el número de casos es pequeño.

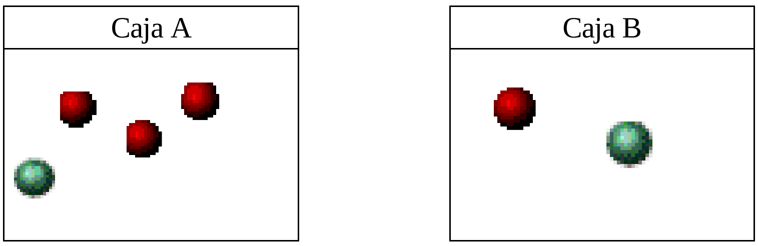


Figura 3. Urnas con fichas de colores.

En el *periodo de las operaciones concretas* (entre 7 y 11 años) con la adquisición de esquemas operacionales espacio-temporales y lógico-matemáticos, el niño alcanza la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, aunque esta comprensión no es completa, puesto que el pensamiento está todavía muy ligado al nivel concreto. No obstante, el niño comienza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles, y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. Puede entender, por ejemplo, que la cantidad de nubes, junto con el viento va a producir o no la lluvia. Pero, si no comprende bien la interferencia de las causas, sin reconocer su independencia, o comprende la independencia y no la interferencia, no llega a construir la idea de azar. Puede entonces pensar que la lluvia la producen las hadas o los mayores o buscar otra explicación causal.

En los fenómenos aleatorios los resultados aislados son imprevisibles pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Así, aunque no sabemos si el próximo bebé que nazca será niño o niña, podemos predecir que en una gran ciudad la mitad más o menos de los recién nacidos serán de cada sexo. Es en este momento, cuando comprende la regularidad global de los fenómenos aleatorios, cuando el niño comienza a asignar probabilidades a los sucesos, como razón entre las posibilidades de un caso particular y del conjunto de posibilidades. Si se aceptan estas teorías, la idea de azar, para Piaget, lo mismo que la de probabilidad, no puede ser totalmente adquirida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de las *operaciones formales*.

Fischbein, por un lado, como hemos visto, indica que hay una intuición parcial del azar en el niño, que se va desarrollando poco a poco. Pero es necesaria la enseñanza, pues de otro modo, es posible que una persona llegue a las operaciones formales con una pobre percepción del azar. Entonces buscará dependencias causales que reduzcan lo incierto, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias, por ejemplo "la mala suerte". Estará influenciado por las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna, que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas.

3.2. La estimación de la frecuencia relativa

Supuesto que un niño sea capaz de diferenciar los fenómenos aleatorios y deterministas, el segundo paso es que pueda estimar en una serie de experimentos cuáles son los sucesos que aparecen con mayor o menor frecuencia. Muchos psicólogos han llevado a cabo experimentos de aprendizaje probabilístico, en los cuales se trata de estudiar las predicciones de los sujetos ante situaciones en que un suceso se repite con una determinada frecuencia relativa.

Por ejemplo (Figura 4), se presenta al alumno dos luces de color diferente (roja y blanca) que se encienden intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia, por ejemplo, el 70 y el 30%, del tiempo respectivamente. Los resultados de este experimento indican que *en el periodo preoperacional* el niño adapta sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan como estímulo. Ello nos indica que los niños son capaces de apreciar las diferentes frecuencias relativas con que aparecen los resultados de los fenómenos aleatorios.

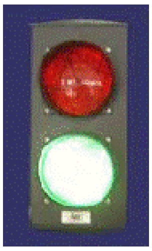


Figura 4. Experimento con dos bombillas.

La estimación de la frecuencia relativa mejora en el *periodo de operaciones concretas*. Como resultado de experiencias acumuladas, la intuición de la frecuencia relativa se desarrolla de un modo natural como consecuencia de las experiencias del niño con situaciones que implican sucesos aleatorios, en las que sea necesaria una estimación de las frecuencias relativas de los fenómenos. Es fácil pensar en tales experiencias en la vida diaria, por ejemplo, cuando estimamos el tiempo que transcurre entre un autobús y otro, o hacemos una previsión sobre si va a llover o no, según el día se presente más o menos nublado, etc. En el *periodo de las operaciones formales* el adolescente ha hecho progresos en comparación a los niños más pequeños en lo que se refiere a la intuición de la frecuencia relativa, particularmente en casos donde las predicciones tienen algún resultado práctico.

3.3. Estimación de posibilidades y noción de probabilidad

Piaget e Inhelder pensaron que el niño en el *periodo pre-operatorio* es incapaz de estimar correctamente la probabilidad de un suceso, por ejemplo, de sacar una bola roja en las urnas representadas en la Figura 3. Sugieren que el niño de esta edad no posee los recursos necesarios, que serían la habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible, el concepto de proporción y los procedimientos combinatorios.

Fischbein piensa que, a pesar de ello, el niño puede estimar probabilidades sencillas o al menos compararlas, por ejemplo, en el problema propuesto en la Figura 3, si le preguntamos en cuál de las urnas es más fácil sacar bola roja. Este tipo de situaciones aparecen con frecuencia en los textos de primaria o recursos en Internet para este nivel (Ver ejemplo de la Editorial Anaya, http://roble.pntic.mec.es/arum0010/temas/porcentaje_probabilidad.html en la Figura 5).

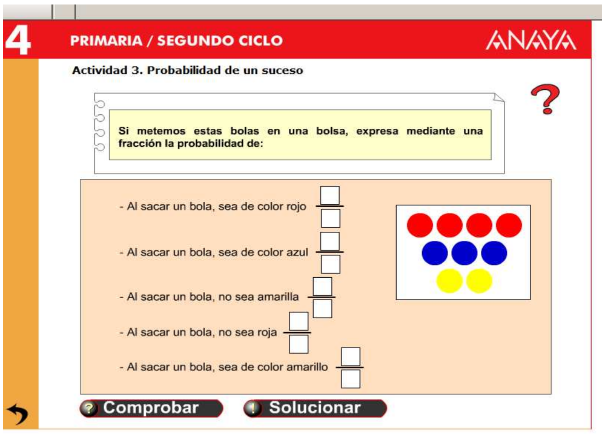


Figura 5. Anaya. Azar y Probabilidad.

En el *periodo de las operaciones concretas* los niños pueden resolver problemas que impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso (por ejemplo, bola roja) en dos experimentos diferentes sólo en situaciones donde, bien el número de casos favorables (bolas rojas) o el número de casos no favorables (bolas verdes) son iguales en ambos experimentos (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias). Posteriormente pasan a resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción.

Los adolescentes progresan rápidamente en el cálculo de probabilidades, incluso cuando las fracciones a comparar tienen diferente denominador. Esto se observa con niños a partir de 12-13 años, en incluso a partir de 10 años con la ayuda de la instrucción.

Muchos otros autores han analizado las estrategias que siguen los niños al comparar probabilidades. Reproducimos en la Tabla 1 una síntesis de la descripción que hace Cañizares (1997).

Tabla 1 — Estrategias de los niños para comparar probabilidades

Estrategia	Edad	Descripción
a. Comparación del número de casos posibles	2-3 años	Elegir la caja que contenga mayor número de bolas
b. Comparación del número de casos favorables	4 años	Elegir la caja que contenga más bolas del color favorable. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos desfavorables es igual en las dos cajas.
c. Comparación del número de casos desfavorables	7 años	Elegir la caja con menor número de bolas del color desfavorables cuando el número de casos favorables es igual. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos favorables es igual en las dos cajas.
d. Estrategias aditivas	8-11 años	Elegir la caja donde la diferencia entre casos favorables y desfavorables sea mayor. Se tienen en cuenta todos los datos pero no se usan proporciones.
e. Estrategia de	12-13	Establecer la proporción entre el número de casos favorables y

correspondencia	años	desfavorables en una de las cajas y comparar con la composición de la otra, eligiendo la caja que de mayor proporción. Resuelve el problema correctamente cuando el número hay una proporción sencilla (por ejemplo 2 a 1) de casos favorables y desfavorables en una de las cajas, pero no en la otra.
f. Estrategias multiplicativas	12-14 años	Aplicar la regla de Laplace. Es la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Es necesario establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después comparar las fracciones así obtenidas
g. Otros tipos		Hacer referencia a la suerte; elegir el color favorito, etc.

3.4. Distribución y convergencia

Piaget e Inhelder (1951) investigaron la comprensión de los niños sobre lo que ellos llamaron “distribuciones uniformes”, que en realidad eran distribuciones de Poisson en el plano.

El niño tiene experiencia de observar la distribución de las gotas de lluvia sobre un embaldosado. Basándose en esta experiencia Piaget e Inhelder usan la siguiente técnica experimental: una hoja de papel blanco es dividida en cuadrados de 2 o 3 cm, y algunas fichas se lanzan sobre la hoja de papel al azar, simulando gotas de lluvia (o bien se les dan al niño fichas para colocar sobre el embaldosado del patio o de una habitación). Se pide al niño que prevea donde caerán las gotas de lluvia sucesivas y cómo se efectuará la distribución, cuando aumentamos el número de gotas. Algunos ejemplos de posibles distribuciones que los niños podrían hacer en esta tarea se presentan en la Figura 6. Un experimento alternativo (Batanero, Serrano y Green, 1998; Batanero y Serrano, 1999) es preguntar a los niños cuáles, entre las cuatro distribuciones presentadas en la Figura 6 serían las que ellos esperan se formen cuando comienza a caer la lluvia sobre las baldosas.

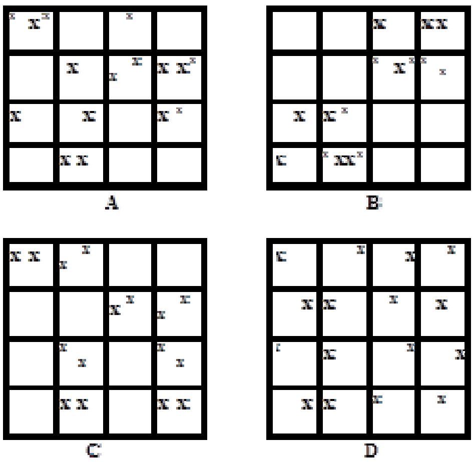


Figura 6. Posibles distribuciones de puntos en un embaldosado.

Los niños de *preescolar* saben que, cuando cae la lluvia, habrá gotas por todas partes, es decir, en todas las baldosas. Ello no implica que comprendan que la distribución es, a la vez, aleatoria y cada vez más regular. En el primer estadio, el niño está convencido de la distribución regular de la lluvia. Cuando trata de reproducirla, distribuye las gotas sistemáticamente, de modo que van rellenando uno a uno todos los cuadrados, antes de repetir uno de ellos. Si la retícula tiene todos los cuadros con alguna gota, excepto un cuadro vacío, los niños colocan la gota en el cuadro vacío, de modo que se lograse un patrón uniforme. El deseo de regularidad domina las predicciones de los niños. Sólo considerarían razonable el modelo D en la Figura 6 e incluso pedirían para poner todas las marcas en el centro de cada cuadro.

Al proponer a los niños del *periodo de las operaciones concretas* el problema, aceptan la irregularidad de la distribución, aunque si todos los cuadrados, menos uno tienen al menos un punto, el cuadrado “seco” se considera todavía como el más probable para recibir la siguiente gota. Es más difícil ya encontrar niños que colocan las gotas en una posición fija (por ejemplo el centro) en todos los cuadrados, es decir, aceptarían sin cuestionar el modelo D en la Figura 6. La comprensión de la ley de los grandes números es sólo intuitiva y empírica.

Con el *periodo de las operaciones formales* se comprende, finalmente, el mecanismo de la convergencia progresiva. En función del número cada vez mayor de gotas, la diferencia en el número de gotas en las baldosas cada vez disminuye más, no en forma absoluta, sino en forma relativa. La ley de los grandes números se comprende por su doble aspecto combinatorio y proporcional. En este estadio (12 años o más) aparece el razonamiento proporcional y Piaget e Inhelder creen que los niños comprenden la ley de los grandes números. Elegirían como aleatorio el modelo A, que es el más razonable, pues en el B aparecen patrones geométricos no esperados y en el C todas las celdas tienen o bien dos puntos o están vacías.

3.5. Convergencia a la distribución normal

Otro problema estudiado por Piaget e Inhelder es la comprensión de la convergencia y la distribución progresivamente normal que se produce, por ejemplo cuando los granos de arena caen a través de un pequeño orificio (en un reloj de arena o bolas en un aparato de Galton, ver Figura 7). El aparato construido por Galton, el Quincux, que tiene forma de plano inclinado de madera donde se han colocado unos clavos regularmente espaciados. Al dejar caer algunas bolas por el orificio superior, se dispersan al azar, recogiéndose en unas casillas colocadas al final del plano inclinado.

Para Piaget, para comprender el mecanismo de esta distribución es preciso captar la simetría de las trayectorias posibles de las bolas al caer por el orificio, porque hay las mismas posibilidades para cada una de orientarse a derecha o izquierda. Las casillas centrales reciben más bolas que las extremas y la disposición es simétrica. Piaget indica que la representación matemática de dicha distribución corresponde a la curva normal.

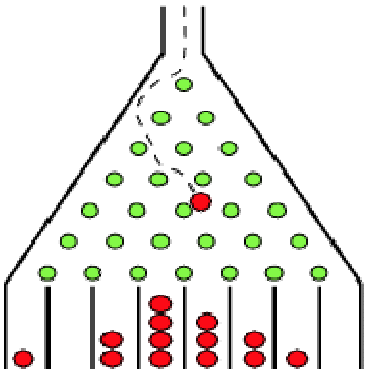


Figura 7. Aparato de Galton.

Piaget utiliza un dispositivo parecido al aparato de Galton, pero simplificado en sus experimentos. Utiliza 5 aparatos, de los cuales cuatro tienen la abertura superior en la parte central y uno la tiene en el extremo superior derecho. Los aparatos se diferencian por el número de bifurcaciones (con 2 en los dispositivos I y V, 3 en el II, 4 en el IIII y un gran número en el aparato IV) (ver Figura 8). En cada una de ellos comienza introduciendo una bola, después una segunda y tercera, preguntando al niño donde cree que va a caer y por qué. Una vez comprendida la experiencia, se pide al niño que explique la forma que tomaría la distribución cuando se dejasen caer un gran número de bolas. Finalmente se dejan caer las bolas y se pide al niño que interprete la distribución obtenida.

El primer estadio se caracteriza por la ausencia de la idea de distribución. En la caja I generalmente los niños hacen apuestas simples a favor de uno de los dos casilleros, pero sin la idea de igualación al aumentar el número de bolas. En la caja II el niño prevé bien una distribución igual en los tres casilleros o bien que todas las bolas irán a parar a uno de los casilleros. Con la caja III el niño apuesta por un de los casilleros centrales o por una distribución irregular. En la caja IV se espera en general una distribución irregular.

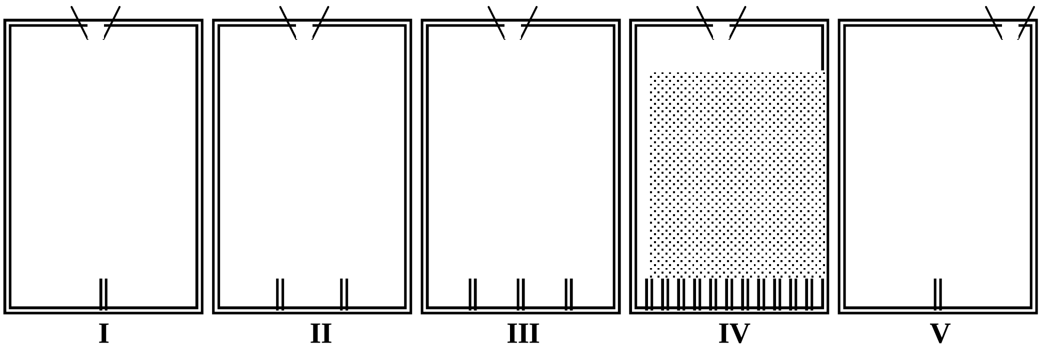


Figura 8. Dispositivo experimental de Piaget.

La etapa de operaciones concretas se caracteriza por un principio de distribución de conjunto generalizable, reconocible. El niño prevé la desigualdad entre las frecuencias laterales y centrales. Pero esta distribución permanece insuficientemente cuantificada, a falta de comprensión de la ley de los grandes números. Por ello, aunque hay una simetría global, no hay aún equivalencia entre los sectores correspondientes. En la caja I el sujeto prevé una igualdad aproximada entre los dos casilleros, pero sin que esta igualdad se consiga progresivamente con el número de bolas. En la caja II se prevé un máximo central, pero sin igualdad en los casilleros laterales. La caja III da lugar a la previsión correcta de la ventaja de las casillas centrales, pero sin equivalencia entre ellas ni entre las laterales. La caja IV no provoca la previsión de una distribución simétrica regular, pero comienza a haber una generalización de las experiencias anteriores sobre la configuración de conjunto.

El tercer estadio (a partir de 12 años) está marcado por la cuantificación de la distribución de conjunto, es decir, por la previsión de una equivalencia entre las partes simétricas correspondientes de la dispersión. Esto es claro para las cajas I a II; la caja IV da lugar a ensayos de graduación hasta descubrir la distribución en forma de campana, el progreso más notable es la comprensión del papel de los grandes números en la regularidad de la distribución.

4. Implicaciones para el aula

El estudio de estas investigaciones sugiere que los niños pueden adquirir nociones probabilísticas, al introducirlas mediante actividades basadas en juegos de azar, que favorecen su adquisición intuitiva. De este modo diversos investigadores sugieren experiencias sencillas que pueden llevar a los niños a la comprensión progresiva de otras más complejas.

Por ejemplo, antes de tratar de trabajar con los niños con el aparato de Galton, sería bueno comenzar con la comprensión de experiencias compuestas sencillas de bifurcación por canales, como las propuestas por Green (1983), donde pregunta a los niños por cuál de los canales pasarán más bolas cuando se dejan caer un número grande de ellas en distintos dispositivos (Figura 9).

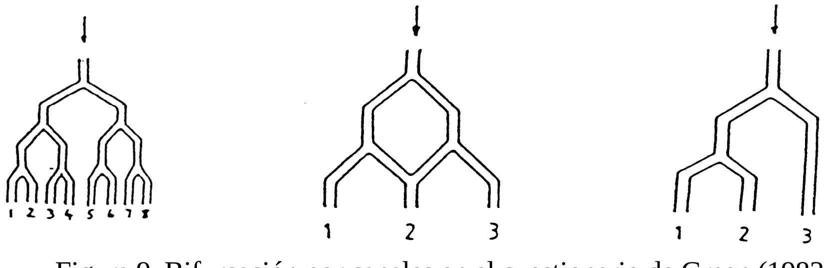
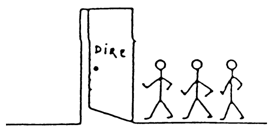


Figura 9. Bifurcación por canales en el cuestionario de Green (1983).

Para responder la pregunta el niño debe comprender la igualdad de posibilidades en cada bifurcación inicial, razonar mediante la regla del producto en cada bifurcación (si, por ejemplo, en primer dispositivo, la mitad de las bolas caen por cada bifurcación en el primer nivel y en el segundo por cada bifurcación la mitad de los que llegan a él, por cada bifurcación del segundo nivel llegan la cuarta parte de las bolas, que a su vez se dividen en dos partes en la última bifurcación. Por tanto, a cada uno de los canales 1 a 8 llegan la mitad de las anteriores, esto es la octava parte de las bolas. En el segundo dispositivo hay también que aplicar la regla de la suma en el canal 2, donde llegarán la mitad de las bolas que se bifurquen a la izquierda en el nivel 1 y la mitad de las que se bifurquen a la derecha en dicho nivel, esto es la mitad de la mitad multiplicado por dos, que da un total de la mitad de las bolas.

Otro punto importante es educar el razonamiento combinatorio, que, aunque se desarrolla lentamente, puede ser favorecido con actividades sencillas de enumeración, como la siguiente, propuesta por Green (1983).

Tres chicos son enviados al director por alborotar. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho del director. ¡Desde luego, ninguno quiere ser el primero!
Supongamos que los niños se llaman Andrés, Benito y Carlos (A, B y C). Escribe todos los posibles órdenes en que podrían alinearse.



La enseñanza ha de cuidar también las creencias infundadas sobre los experimentos aleatorios, por ejemplo, la creencia en la suerte o en números favoritos o la preferencia por un color. En Godino, Batanero y Cañizares (1987) se pueden consultar propuestas didácticas sobre probabilidad, basadas en dichos trabajos y para diferentes edades en la educación primaria. Otro recurso importante es la simulación (Fernandes, Batanero, Contreras y Díaz, 2009) que permite, mediante el apoyo de la tecnología que los niños experimenten situaciones aleatorias y, de este modo, ganen experiencia, mejorando sus intuiciones sobre estas experiencias.

Referencias

Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM-TEIA. Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica Iberoamericana*, 2(2). http://emteia.gente.eti.br/

Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education 30*(5), 558-567.

Batanero, C., Serrano, L. y Green, D. R. (1998). Randomness, its meanings and implications for teaching probability. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 29 (1), 113-123.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. *Quadrante*, *10*(2), 3-32.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante*, Número monográfico. “As novas tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática”, *XVIII* (1-2), 161-183.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988): A*zar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent*. París: Presses Universitaires de France.

Jones, G., Langrall, C., y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid: Autor.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Piaget, J. (1975). *Psicología de la inteligencia*. Buenos Aires: Psique.

Piaget, J., y Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idèe de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Pierce, R. y Chick, H. (2011). Teachers' beliefs about statistics education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics — Challenges for teaching and teacher education* (pp. 151-162). New York: Springer.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465- 494). London: MacMillan.