Máster Universitario en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos
Departamento de Matemática Aplicada
Análisis Numérico
Curso 2017/18

Práctica 1
Introducción a Mathematica
Cálculo simbólico y aproximado

ACCESO A MATHEMATICA EN EL ORDENADOR

Los pasos a dar con el ordenador para poder trabajar con Mathematica son:

1. Encender el ordenador y entrar en "acceso general".

2. En el menú Inicio seleccionamos la opción Programas->Mathematica3.0.

De esta forma el ordenador cargará el programa y ya estará preparado para que podamos trabajar con él.

CELDAS DE ENTRADA Y DE SALIDA

Al ejecutar el programa Mathematica se abre un fichero en blanco (llamado Untitled - 1). En su interior iremos escribiendo todas las operaciones algebraicas que deseemos realizar. Por ejemplo, podemos pedir a Mathematica que calcule el resultado de la sencilla operación 1+1:

```
1 + 1
```

```
2
```

que proporciona el valor 2 como resultado.

Para ejecutar una operación en Mathematica pulsaremos la tecla Intro.

Toda la información de cada archivo se organiza según una serie de celdas. Cada una de ellas aparece con un corchete en su parte derecha. Fundamentalmente, trabajaremos con dos tipos de celda:

1. **Celdas de entrada (In)**, en las que se introducen datos (en el ejemplo anterior "1+1" es la celda de entrada);

2. **Celdas de salida (Out)**, en las que aparecen los resultados de los cálculos efectuados por el programa (en el ejemplo anterior "2" es la celda de salida).

OPERACIONES ALGEBRAICAS BÁSICAS CON MATHEMATICA

Las operaciones básicas (suma, resta, producto y cociente) se expresan con los símbolos usuales:

```
+ - * /
```

```
2 - 3
```

```
-1
```

```
5 * 2
```

```
10
```

```
8 / 4
```

```
2
```

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

La exponenciación se realiza con el símbolo ^ (o pulsando las teclas Ctrl+6):

```
2 ^ 4
```

```
16
```

2^4

```
16
```

La radicación se realiza con el comando **Sqrt[x]** (o bien pulsando las teclas Ctrl+2). Por ejemplo, para calcular $\sqrt{4}$ escribiremos

```
Sqrt [4]
```

```
2
```

$\sqrt{4}$

```
2
```

En el menú *File->Palettes* aparece la opción *Basic Input*, con la que podemos obtener un amplio grupo de símbolos matemáticos.

ASIGNACIÓN DE VALORES A VARIABLES

Para asignar un valor a una variable se utiliza el signo "="

```
x = 3
y = 2
```

```
3
2
```

```
x + y
```

```
5
```

Para eliminar el valor asignado a una variable se utiliza la orden **Clear[***nombre_variable***]**

```
Clear[x]
```

```
x
```

x

La orden **Clear["Global`*"]** se utiliza para eliminar los valores tengan asignados todas las variables que hayan sido utilizadas previamente. Es conveniente escribir **Clear["Global`*"]** siempre que empecemos una nueva sesión de trabajo con *Mathematica* para evitar que el ordenador tenga grabados los valores de variables que hayan podido ser introducidos anteriormente.

REDONDEO DECIMAL DE UN NÚMERO REAL

El comando **N** se utiliza para obtener el redondeo decimal de un número real expresado en la misma base decimal. Por ejemplo:

```
N[π]
```

3.14159

El siguiente ejemplo proporciona el redondeo del número real $e^4 + \sqrt{\pi}$:

```
N[E^4 + Sqrt[Pi]]
```

56.3706

El comando **N[x,n]** se utiliza para obtener el redondeo de x con n cifras significativas. Por ejemplo, para obtener el redondeo de π con 20 cifras significativas escribimos el comando

```
N[π, 20]
```

3.1415926535897932385

ALGUNAS FUNCIONES MATEMÁTICAS

Funciones trigonométricas (argumentos en radianes)

$$\text{Sin}\left[\frac{\pi}{3}\right]$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos}\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

0

$$\text{Tan}\left[\frac{\pi}{4}\right]$$

1

Funciones exponenciales y logarítmicas

```
Exp[2]
```

E^2

```
Log[4.]
```

```
1.38629
```

MATRICES

- Para introducir una matriz en el ordenador utilizando *Mathematica*, escribiremos, entre dos llaves, y por filas, todos los elementos de la matriz. Las filas se representan a su vez entre llaves y tanto las distintas filas como los distintos elementos de una misma fila se separan por comas.

Por ejemplo, para introducir la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$ escribiremos el comando

```
A = {{2, 7, -1}, {1/2, 2, 0}}
```

$\left\{\{2, 7, -1\}, \left\{\frac{1}{2}, 2, 0\right\}\right\}$

- *Mathematica* dispone de una opción para poder visualizar en pantalla la expresión matricial de *A*. Esta opción es

```
MatrixForm[A]
```

Por ejemplo, para visualizar la expresión matricial de la matriz *A* definida anteriormente basta escribir

```
MatrixForm[A]
```

$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- Para introducir en el ordenador una matriz diagonal cuya diagonal principal sea $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$, utilizaremos la sentencia

```
DiagonalMatrix[{a11, a22, ..., ann}]
```

Por ejemplo, la matriz A= $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se introduce mediante el comando

```
A = DiagonalMatrix[{-2, 1, 0}];
MatrixForm[A]
```

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **OBSERVACIÓN: Para introducir una matriz con *Mathematica* también puede ser utilizado el botón $\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$ que para tal efecto aparece en la paleta de símbolos. En principio, este botón proporciona una matriz de tamaño 2×2, sin embargo, podemos aumentar el numero de filas de la matriz pulsando CONTROL+ENTER, y el número de columnas pulsando CONTROL+la tecla de la coma.**

Operaciones con Matrices

- Para determinar la suma o la diferencia de dos matrices A y B, o el producto de un número real λ por la matriz A, basta escribir

A+B, **A-B** y **λA**, respectivamente.

Por ejemplo, dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ -7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, calcularemos $A+B$, $A-B$ y $3A$:

```
A = {{2, 1, 3}, {4, -1, 4}, {7, 2, 5}};
B = {{0, 1, 5}, {1, 1, 7}, {-7, 2, 9}};
A + B
A - B
3 A
```

```
{{2, 2, 8}, {5, 0, 11}, {0, 4, 14}}
{{2, 0, -2}, {3, -2, -3}, {14, 0, -4}}
{{6, 3, 9}, {12, -3, 12}, {21, 6, 15}}
```

Las expresiones matriciales de $A+B$, $A-B$ y $3A$ son:

- Para determinar el producto de dos matrices A y B escribiremos

A.B

Por ejemplo, el producto de las matrices A y B definidas anteriormente es:

```
MatrixForm[A.B]
```

$$\begin{pmatrix} -20 & 9 & 44 \\ -29 & 11 & 49 \\ -33 & 19 & 94 \end{pmatrix}$$

- **OBSERVACIÓN: Para determinar el producto de dos matrices no es válido escribir la expresión A*B.** Por ejemplo, si para obtener el producto de las matrices A y B del ejemplo anterior escribimos $A*B$:

```
MatrixForm[A * B]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 \\ 4 & -1 & 28 \\ -49 & 4 & 45 \end{pmatrix}$$

vemos que el resultado no es el mismo que el obtenido con el comando A.B, que es el que proporciona el resultado correcto.

- **OBSERVACIÓN: El comando MatrixForm[A] representa la forma matricial de la matriz, pero no la matriz, de forma que, por ejemplo, para sumar dos matrices A y B no podemos escribir "MatrixForm[A]+B" ni "MatrixForm[A]+MatrixForm[B]", sino A+B.**

- **OBSERVACIÓN:** Para determinar la potencia n de una matriz A se puede utilizar también el comando

MatrixPower[A,n]

por ejemplo, para calcular A^{17}, siendo A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, podemos utilizar el comando

```
A = {{1, 0, 0}, {1, 0, -1}, {0, 2, 0}};
MatrixPower[A, 17]
```

```
{{1, 0, 0}, {171, 0, -256}, {-170, 512, 0}}
```

COMANDOS

Abs[x]

Calcula el volr absoluto de x

```
Abs[
-2]
```

2

ArcCos[x]

Devuelve el ángulo $\alpha \in [0, \pi]$ cuyo coseno vale x

```
ArcCos[
1]
```

0

ArcSin[x]

Devuelve el ángulo $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cuyo seno vale x

```
ArcSin[
1]
```

$\frac{\pi}{2}$

Cos[x]

Devuelve el coseno del ángulo x

```
Cos[
π/2]
```

0

Det[A]

Calcula el determinante de la matriz A

```
A = {{1, 2}, {3,
    4}};

Det[
 A]
```

-2

DiagonalMatrix[{a1,a2,...,an}]

Define una matriz diagonal de orden n en la que los elementos de la diagonal son $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

```
Di = DiagonalMatrix[
   {1, 2, 3}];
MatrixForm[Di]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Eigenvalues[A]

Devuelve los valores propios de la matriz A

```
A = {{2, 0, 3}, {0, 1, 0},
   {-1, 0, -2}};
Eigenvalues[A]
```

{-1,1,1}

Eigenvectors[A]

Devuelve los vectores propios de la matriz A

```
A = {{2, 0, 3}, {0, 1, 0},
   {-1, 0, -2}};
Eigenvectors[A]
```

{{-1,0,1},{-3,0,1},{0,1,0}}

Exp[x]

Devuelve el número e elevado a x

```
N[ Exp[3], 5]
```

20.086

Expand[*expresión*]

Devuelve una forma desarrollada de *expresión*

```
Expand[(a +
    b)^2]
```

$a^2 + 2\,ab + b^2$

For[comienzo,condicion, incremento, e]

Genera un bucle con los argumentos descritos

```
For[i = 1, i ≤ 6, i++, Print[i -
   2]]
```

-1

0

1

2

3

4

IdentityMatrix[n]

Define la matriz identidad de orden *n*

```
IdentityMatrix[
 3]
```

{{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}

If[condicion,v,f]

Ejecuta v si condicion es cierta y f en caso contrario

```
a = 3;
If[a > 0, Print["positivo"], Print[
  "negativo"]]
```

positivo

Integrate[f[x],x]

Devuelve una primitiva de la función *f*

```
Integrate[(x^2 + 1),
x]
```

$x + \frac{x^3}{3}$

Integrate[f[x],{x,a,b}]

Devuelve la integral definida de la función *f* en el intervalo *[a,b]*

```
Integrate[(x^2 + 1),
{x, -3, 2}]
```

$\frac{50}{3}$

Inverse[A]

Devuelve la inversa de la matriz *A*

```
A = {{1, 2}, {3,
    4}};
MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

LinearSolve[A,B]

Proporciona una solución de un sistema ecuaciones lineales en el que A es la matriz de coeficientes del sistema y B es el vector de los términos independientes.

```
A = {{1, 2}, {2,
    4}};
B = {3, 6};
LinearSolve[A, B]
```

{3,0}

Log[x]

Devuelve el logaritmo neperiano del número x

```
N[Log[10], 4]
```

2.303

MatrixPower[A,n]

Proporciona la n-ésima potencia de la matriz A

```
A = {{1, 2}, {0, 1}};
MatrixPower[A,
 9]
```

{{1,18},{0,1}}

Max[v]

Calcula la coordenada máxima del vector (o matriz) v

```
Max[{1, -3, 6, 8 /
   5}]
```

6

N[x]

Devuelve el redondeo decimal de un número real *x*

```
N[
 π]
```

3.14159

N[x,n]

Devuelve el redondeo decimal de un número real *x* con *n* cifras significativas

```
N[π,
 10]
```

3.141592654

NIntegrate[f[x],{x,a,b}]

Devuelve una aproximación numérica de la integral definida de la función f en el intervalo *[a,b]*

```
NIntegrate[Exp[x^2 + 1],
 {x, -2, 2}]
```

89.4458

NSolve[f[x]==0,x]

Proporciona una aproximación numérica de las soluciones de la ecuación *f(x)=0*

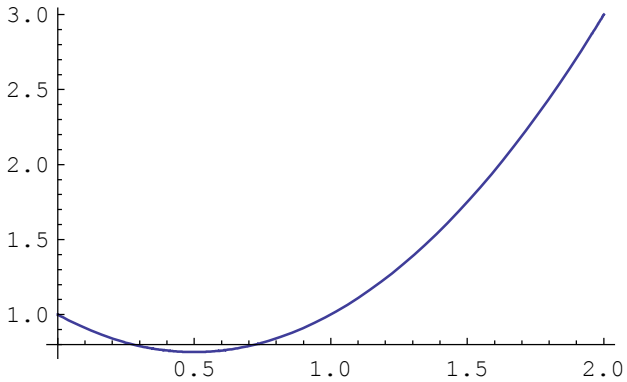
```
NSolve[x + 1/3 == 0,
 x]
```

{{x→-0.333333}}

Plot[f[x],{x,a,b}]

Genera la gráfica de la función f(x) en el intervalo [a,b]

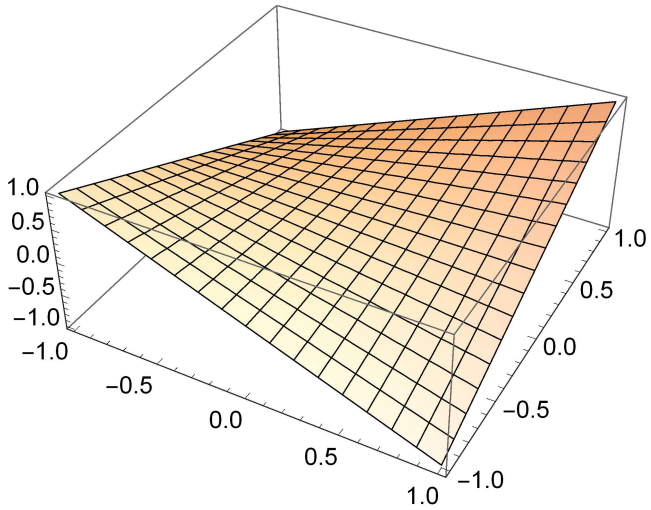
```
Plot[x^2 - x + 1, {x, 0,
  2}]
```



Plot3D[f[x,y],{ x,a,b} ,{ y,c,d}]

Genera la gráfica de la función f(x,y) en el rectángulo [a,b]x[c,d]

```
Plot3D[x y, {x, -1, 1}, {y, -1,
 1}]
```



Print[“cadena”]

Genera una salida que consiste en la expresión alfanumérica *cadena*

```
Print[
"hola"]
```

hola

Product[expresion(i),{ i,k,n}]

Halla el producto de los términos expresion(i), desde i=k hasta i=n

```
Product[i, {i, 1,
 17}]
```

355687428096000

Simplify[*expresión*]

Devuelve la forma más simplificada posible de *expresión*

```
Simplify[x^2 + 2 x +
 1]
```

$(1 + x)^2$

Sin[x]

Devuelve el seno del ángulo *x*

```
Sin[
 π/2]
```

1

Solve[f[x]= = 0,x]

Proporciona las soluciones de la ecuación *f(x)=0*

```
Solve[x^2 - 1 == 0,
x]
```

{{x→-1},{x→1}}

Solve[A.{ variables} = = B,{ variables}]

Resuelve un sistema de ecuaciones lineales en el que *A* es la matriz de coeficientes del sistema, *B* es el vector de los términos independientes y *variables* son las incógnitas.

```
A = {{1, 2}, {3, 4}};
B = {1, 0};
Solve[A.{x, y} ==
 B {x, y}]
```

$\{\{x \to -2, y \to \frac{3}{2}\}\}$

Sqrt[x]

Calcula la raíz cuadrada de un número real *x*

```
Sqrt[
9]
```

3

Sum[expresion(i),{ i,k,n}]

Halla la suma de los términos expresion(i), desde i=k hasta i=n

```
Sum[i, {i, 1,
 100}]
```

5050

Table[x(i),{ i,k,n}]

Genera un vector x de n coordenadas x(i) (análogamente para matrices de coeficientes a(i,j))

```
Table[i^2, {i, 1,
 5}]
```

{1,4,9,16,25}

Introduciendo un doble índice se obtiene una matriz

```
Table[i - j, {i, 1, 2}, {j, 1,
 3}]
```

{{0,-1,-2},{1,0,-1}}

Transpose[A]

Devuelve la matriz traspuesta de *A*

```
A = {{1, 2}, {3,
    4}} ;
MatrixForm[Transpose[A]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. - Halla el redondeo del número real sen $(\pi / 3)$ con 15 cifras significativas y el de $\log(2) + e^2$ con 10 cifras significativas.

2. - Multiplica las matrices {(1, 2, 3}, {2, 3, 0}, {0, 0, 1}} y {{-3, 2, 9}, {2, -1, -6}, {0, 0, 1}} y visualiza el resultado en forma de matriz.

3. - Para x = 15.2, calcula los valores v1 = $x\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$ y v2 = $x \Big/ \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)$. Diseña además un bucle que determine los valores de v1 y v2 para x = 9.9^1, 9.9^2, ..., 9.9^20.

4. - Resuelve el sistema de ecuaciones lineales :

$$2.3\,x + 1.2\,y = 0.99$$
$$4.4\,x + 2.37 = 1.89$$

5. - Define mediante el comando Table un vector v de 12 coordenadas, de forma que la coordenada i - ésima sea $(1/2)^i$. Una vez hecho esto ejecuta las instrucciones v[[2]] = 7 y v[[5]] = 7 y observa el resultado sobre v. Modifica la última coordenada de v como 3.

6. - Calcula la suma de los cuadrados de los primeros 15 números naturales mediante un adecuado bucle. Comprueba el resultado con el comando Sum.

7. - Halla el producto de los números naturales comprendidos entre 6 y 19 haciendo uso de un bucle y comprueba el resultado con la sentencia Product.

8. - Diseña un programa que, a partir de una matriz cuadrada genere como salida el mensaje "la matriz es regular" si es regular, o el mensaje "la matriz no es regular" en caso contrario. Úsalo con la matriz de orden 4 x4 cuyo coeficiente (i, j) es (i - j) / (2 i + 5 j).