Capítulo 7

Diagonalización de matrices

7.1. Valores y vectores propios

Definición 7.1.1. Sean A una matriz cuadrada de orden n, x un vector de $\mathbb{R}^n$ no nulo y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si

$$A \cdot x = \lambda x$$

decimos que x es un vector propio de A, y λ es un valor propio de A.

Ejemplo 1. Compruebe que si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces x es un vector propio de A con valor propio $\lambda = 2$.

Sol. Basta comprobar que $A \cdot x = 2x$,

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x.$$

□

7.2. Polinomio característico

Vamos a deducir una ecuación que servirá para hallar los vectores propios. Usaremos que $x = I \cdot x$ donde I es la matriz identidad de orden n.

Escribamos la condición que cumplen los vectores propios $A \cdot x = \lambda x$, y hallemos una condición equivalente:

$$A \cdot x = \lambda x \Leftrightarrow A \cdot x - \lambda x = 0 \Leftrightarrow A \cdot x - \lambda I \cdot x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I) \cdot x = 0.$$

Si suponemos el valor de λ conocido, la última ecuación puede escribirse como un sistema lineal de ecuaciones donde las incógnitas son las componentes de x. Así pues, tener un valor propio y un vector propio de A, es equivalente a encontrar un vector no nulo x que sea solución de ese sistema de ecuaciones para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como el sistema de ecuaciones es homogéneo, tendrá solución no trivial si el determinante de $(A - \lambda I)$ es cero, en cuyo caso podremos buscar el vector propio x.

Definición 7.2.1. Dada una matriz cuadrada de orden n, llamamos polinomio característico de A al polinomio

$$P(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda \cdot I),$$

donde I es la identidad de orden n, y llamamos ecuación característica a la ecuación

$$\mathrm{Det}(A - \lambda \cdot I) = 0.$$

Ejemplo 2. Halle el polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol.

$$P(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda I) = \mathrm{Det}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - (-1)\cdot(-2) = (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 2 = -\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

□

7.3. Cálculo de valores y vectores propios

Proposición 7.3.1. Las soluciones reales de la ecuación característica son los valores propios de A.

Ejemplo 3. Halle los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol. En el ejemplo anterior hemos hallado que el polinomio característico de A es $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$. Para hallar los valores propios de la matriz A basta resolver la siguiente ecuación,

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

por tanto los valores propios de la matriz A son $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$. $\square$

Una vez hallados los valores propios de una matriz, podemos plantearnos para cada uno de estos valores la ecuación $(A - \lambda I) \cdot x = 0$, que hemos visto que es equivalente a la ecuación $A \cdot x = \lambda x$, y que por tanto nos servirá para hallar los vectores propios de la matriz, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. Halle un vector propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda = -1$.

Sol. Planteamos el sistema lineal

$$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y como $\lambda = -1$, el sistema es

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & -2 \\ -1 & 0-(-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & 2y & = & 0, \\ -\ x & + & y & = & 0. \end{array} \right.$$

Observamos que la primera ecuación es múltiplo de la segunda. Para tener un vector propio, basta dar un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ no nulo que cumpla que $-x + y = 0$. Si hacemos $x = 1$, entonces $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A con valor propio asociado $\lambda = -1$. $\square$

7.4. Multiplicidad algebraica y geométrica

Más adelante estudiaremos matrices cuyo polinomio característico tiene todas sus raíces reales (es decir, sin raíces complejas), y cada raíz tiene el *'máximo'* número de vectores propios. Para identificar estas matrices definiremos los conceptos de multiplicidad algebraica y geométrica de un valor propio.

Definición 7.4.1. Todo polinomio $P(\lambda)$ puede factorizarse como producto de polinomios de grado 1 y de grado 2 de la siguiente forma

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{n_r} \cdot ((x - p_1)^2 + {q_1}^2)^{m_1} \cdot \ldots,$$

donde todos los λ_i son números reales distintos.

Llamamos multiplicidad algebraica de λ_i al exponente n_i.

Nótese que al definir vectores propios y valores propios hemos considerado números reales. Sin embargo, en general, al factorizar el polinomio característico de una matriz nos pueden aparecer factores de la forma $(x-p_1)^2+{q_1}^2$, que no tienen raíces reales, y que no darán lugar a valores propios reales.

Vemos a continuación un ejemplo en el que se hallan los valores y vectores propios de una matriz de orden 3.

Ejemplo 5. Halle los valores propios y los vectores propios asociados a la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Sol. En primer lugar planteamos la ecuación característica para hallar los valores propios.

$P(\lambda) = \mathrm{Det}(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot\ (2-\lambda)\cdot\ (4-\lambda) - 4(2-\lambda) = (2-\lambda)\cdot(16-8\lambda+\lambda^2-4) = (2-\lambda)\cdot(12-8\lambda+\lambda^2)$.

Factorizamos el polinomio de segundo grado, hallando sus raíces

$$\lambda^2-8\lambda+12=0 \Rightarrow \lambda = \frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot 12}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{8\pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow \ {\scriptstyle \lambda=6,} \\ \searrow \ {\scriptstyle \lambda=2,} \end{array}$$

con lo que $\lambda^2-8\lambda+12{=}(\lambda-6)\cdot(\lambda-2)$.

Por tanto las raíces del polinomio característico, $P(\lambda)=0$ son

- $\lambda=2$ (que aparece dos veces en la factorización de $P(\lambda)$, es una raíz doble)
- $\lambda=6$ (simple)

Ahora, para cada uno de los valores propios que hemos calculado, obtenemos los vectores propios asociados.

Para $\lambda=6$ planteamos el sistema lineal $(A-6I)\cdot\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, es decir

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escrito en forma de sistema lineal, queda $\left\{\begin{array}{ll} -2x+2z & =0 \\ 2x-4y+2z & =0 \\ 2x-2z & =0 \end{array}\right.$, donde observamos que la tercera ecuación es redundante. Eliminando esta ecuación, tenemos $\left\{\begin{array}{ll} -2x+2z & =0 \\ 2x-4y+2z & =0 \end{array}\right.$, y sumando a la segunda ecuación la primera, obtenemos $\left\{ \begin{smallmatrix} -2x+2z & = & 0 \\ -4y+4z & = & 0 \end{smallmatrix} \right.$, que es un sistema equivalente a $\left\{ \begin{smallmatrix} x & = & z \\ y & = & z \end{smallmatrix} \right.$.

Por tanto los vectores propios asociados a $\lambda = 6$ son los vectores de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\left(\begin{smallmatrix} x \\ x \\ x \end{smallmatrix}\right) = x \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, para $x \neq 0$, que son todos proporcionales a $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Para $\lambda = 2$, planteamos el sistema lineal $(A - 2I) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, es decir

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Al plantear el sistema vemos que aparecen tres ecuaciones iguales, por tanto dos de ellas son redundantes, y nos quedamos con $2x + 2z = 0$, o lo que es lo mismo $z = -x$. Observamos que no aparece ninguna restricción para y.

Por tanto los vectores propios asociados a $\lambda = 2$, son de la forma $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ con $z = -x$, es decir, vectores de la forma $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ -x \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = x \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + y \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ donde x, y son números reales.

$\square$

Obsérvese que en este ejemplo, para el valor propio $\lambda = 6$, todas las soluciones del sistema $(A - 6I) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ se pueden expresar usando un solo parámetro (se puede comprobar que la matriz del sistema, $A - 6I$ tiene rango 2, y hay tres incógnitas, con lo que basta $3 - 2 = 1$ parámetro) y todas las soluciones del sistema $(A - 2I) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ se pueden expresar usando dos parámetros (en este caso la matriz del sistema, $A - 2I$ tiene rango 1, y hay tres incógnitas, con lo que bastan $3 - 1 = 2$ parámetros).

Definición 7.4.2. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio de la matriz A, llamamos subespacio propio asociado a λ al conjunto $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = \lambda \cdot x\}$, es decir a todos los vectores propios asociados a λ, junto con el vector 0.

Definición 7.4.3. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio de la matriz A, llamamos multiplicidad geométrica de λ al número mínimo de parámetros necesarios para expresar la solución general del sistema $(A - \lambda I) \cdot x = 0$.

Puede probarse que la multiplicidad geométrica de λ es n menos el rango de la matriz $A - \lambda I$, es decir, que la multiplicidad geométrica de λ es $n - \mathrm{rg}(A - \lambda I)$.

7.5. Diagonalización de matrices

Definición 7.5.1. Una matriz cuadrada A se dice diagonalizable si existe una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

En tal caso, se dice que las matrices A y P son semejantes.

Llamamos diagonalizar una matriz, a encontrar una matriz D y una matriz inversible P que cumplan que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Nótese que si P es regular (es decir, tiene inversa), entonces $A = P \cdot D \cdot P^{-1} \Leftrightarrow A \cdot P = P \cdot D$.

Para relacionar la diagonalización de una matriz con sus vectores propios, consideramos una columna cualquiera de P, y llamamos x al vector que se corresponde con la columna considerada. Al efectuar el producto $A \cdot P$, nos quedamos con los elementos en los que está involucrado x, esta columna de $A \cdot P$ se corresponde con el vector $A \cdot x$. Si consideramos la misma columna en el producto $P \cdot D$, se obtiene el vector λx, donde λ es un elemento de la diagonal de D (concretamente el que está en la columna situada en la posición que estamos considerando). Como $A \cdot P = P \cdot D$, considerando las columnas citadas, se puede comprobar que $A \cdot x = \lambda x$.

Para diagonalizar una matriz de orden n, debemos hallar una matriz P formada por n vectores propios, y que sea regular. El siguiente resultado indica en qué condiciones esto es posible.

Proposición 7.5.1. Sea A una matriz de orden n, y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sus valores propios. La matriz A es diagonalizable si, y solamente si, se cumplen las siguientes condiciones:

a) La suma de las multiplicidades algebraicas es n, es decir, todas las raíces del polinomio característico son reales.

b) Para cada valor propio, la multiplicidad algebraica es igual a la multiplicidad geométrica.

El proceso necesario para diagonalizar una matriz consiste en encontrar n valores propios que forman la diagonal de D y n vectores que forman las columnas de la matriz P. Vemos primero la manera de hacerlo y después aplicaremos ese método en un ejemplo.

Indicamos a continuación los pasos necesarios para diagonalizar una matriz A, o para determinar que no es diagonalizable.

1) Hallar el polinomio característico $P(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda I)$.

2) Hallar todas las raíces de la ecuación $P(\lambda) = 0$, con esto obtenemos los valores propios y su multiplicidad algebraica.

3) Si la suma de las multiplicidades algebraicas es menor que n, entonces la matriz A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

4) Para cada valor propio λ_i, resolver el sistema $(A - \lambda_i I) \cdot x = 0$, y obtener la forma general de la solución expresada mediante el número mínimo de parámetros y vectores propios. *Estos vectores propios se dicen generadores del subespacio propio* E_{λ_i}.

   La multiplicidad geométrica de λ_i, es el número de estos parámetros (que es igual al número de estos vectores propios) que aparecen en la solución general.

5) Si para algún valor propio la multiplicidad algebraica es distinta a la multiplicidad geométrica, entonces la matriz A no es diagonalizable.

6) Si para cada valor propio la multiplicidad algebraica es igual a la multiplicidad geométrica, y la suma de todas las multiplicidades es n, entonces A es diagonalizable y procedemos a construir P y D.

   La matriz P se forma poniendo por columnas los vectores obtenidos en el paso 4, *esto es, con los generadores de los subespacios propios.*

   La matriz D se forma poniendo en la diagonal de una matriz los valores propios de A, en el siguiente orden: en la i-ésima columna de D se pone el valor propio correspondiente al vector propio de la columna i-ésima de P. Los elementos de D que no están en la diagonal son todos 0.

   Como la suma de las multiplicidades geométricas es n, tendremos n vectores en la matriz P, y n elementos en la diagonal de D.

7) Si se quiere comprobar la diagonalización se puede escoger entre una de las dos siguientes posibilidades:

   - Hallar la inversa de P, y comprobar que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
   - Comprobar que P es inversible (por ejemplo viendo que $\mathrm{Det}(P) \neq 0$) y que $A \cdot P = P \cdot D$.

Ejemplo 6. Determine si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable, y en tal caso, diagonalícela.

Sol. Seguimos los pasos que hemos indicado.

1) Hallamos el polinomio característico. $P(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda I) =$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(-2-\lambda) + 3(1-\lambda) =$$

$= (1-\lambda)\cdot(-4+\lambda^2+3) = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2-1).$

2) Hallamos los valores propios. $P(\lambda) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)\cdot(\lambda^2-1) = 0$. De donde o bien $1-\lambda = 0$ o bien $\lambda^2 - 1$. En el primer caso $\lambda = 1$ y en el segundo caso $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ o $\lambda = -1$.

   Por tanto los valores propios son

   - $\lambda = 1$ que es una raíz doble (multiplicidad algebraica igual a 2) y
   - $\lambda = -1$ que es una raíz simple (multiplicidad algebraica igual a 1).

3) La suma de las multiplicidades algebraicas es $2 + 1 = 3$ que es el orden de la matriz A.

4) Hallamos los vectores propios, concretamente la forma general de los subespacios propios.

   Para $\lambda = -1$, consideramos el sistema $(A - (-1)I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, $\left\{ \begin{array}{rrrl} 3x & & +3z & = 0 \\ & 2y & & = 0 \\ -x & & -z & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = -z \end{array} \right.$. Por tanto los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = -1$ son de la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donde z es un número real. El vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ será una columna de P.

   Para $\lambda = 1$, consideramos el sistema $(A - 1I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, $\left\{ \begin{array}{rrrl} x & & +3z & = 0 \\ 0x & +0y & +0z & = 0 \\ -x & & -3z & = 0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow x = -3z$. Por tanto los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$ son de la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donde y, z son números reales. Los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ serán columnas de P.

5) Para $\lambda = -1$ la multiplicidad geométrica es 1, igual a la algebraica.

   Para $\lambda = 1$ la multiplicidad geométrica es 2, igual a la algebraica.

6) Para construir P ponemos por columnas los vectores propios hallados en el paso 4, por ejemplo en primer lugar los dos asociados a $\lambda = 1$, y luego el asociado a $\lambda = -1$, esto es $P = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Para construir D ponemos en la diagonal, en primer lugar los dos valores $\lambda = 1$, y luego el valor $\lambda = -1$, por tanto $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Para las matrices dadas P y D puede comprobarse que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

$\square$

Podríamos haber escogido otro orden para los vectores de la matriz P siempre que usemos el mismo orden para los valores de la diagonal de D.

7.6. Potencia de una matriz

Supongamos que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ y queremos hallar A^k. En lugar de multiplicar A por si misma k veces, podemos considerar el siguiente desarrollo (en el que se tiene en cuenta que $\underline{P^{-1} \cdot P} = I$, la identidad):

$$A^k = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ veces}} = \underbrace{(P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot \ldots \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1})}_{k \text{ veces}} =$$

$$= P \cdot D \cdot \underline{P^{-1} \cdot P} \cdot D \cdot P^{-1} \ldots P \cdot D \cdot \underline{P^{-1} \cdot P} \cdot D \cdot P^{-1} =$$

$$= P \cdot \underbrace{D \cdot \ldots \cdot D}_{k \text{ veces}} \cdot P^{-1} = P \cdot D^k \cdot P^{-1}.$$

Además, como D es diagonal se tiene que si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {\lambda_r}^k \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7. Halle A^k para $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. Obtenga $\lim_{k\to+\infty} A^k$.

Sol. En primer lugar expresamos A mediante fracciones

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/10 & 6/10 \\ 2/10 & 4/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Hallamos los valores propios de A calculando las raíces de su polinomio característico. Calculamos primero dicho polinomio.

$$P(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4/5-\lambda & 3/5 \\ 1/5 & 2/5-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{5} - \lambda\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{8}{25} - \frac{4}{5}\lambda - \frac{2}{5}\lambda + \lambda^2 - \frac{3}{25} = \lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda + \frac{5}{25} = \lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda + \frac{1}{5}.$$

Para hallar las raíces de la ecuación $P(\lambda) = 0$, multiplicamos ambos miembros por 5, para eliminar los denominadores,

$$5\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 5}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{10} = \frac{6 \pm 4}{10} = \begin{array}{l} \nearrow \ \lambda=1, \\ \searrow \ \lambda=1/5. \end{array}$$

Hallamos los valores propios asociados a $\lambda = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -\frac{1}{5}x & + & \frac{3}{5}y & = & 0 \\ \frac{1}{5}x & - & \frac{3}{5}y & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \ \frac{1}{5}x = \frac{3}{5}y \Rightarrow \ x = 3y.$$

Por tanto los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ son los vectores de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\binom{x}{y} = \binom{3y}{y} = y \cdot \binom{3}{1}$, para $y \neq 0$. Por tanto una columna de la matriz P será $\binom{3}{1}$.

Hallamos ahora los valores propios asociados a $\lambda = \frac{1}{5}$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \frac{3}{5}x & + & \frac{3}{5}y & = & 0 \\ \frac{1}{5}x & + & \frac{1}{5}y & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \ x = -y.$$

Así pues los vectores propios asociados a $\lambda = \frac{1}{5}$ son los vectores de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\binom{x}{y} = \binom{-y}{y} = y \cdot \binom{-1}{1}$, para $y \neq 0$. Por tanto la otra columna de la matriz P será $\binom{-1}{1}$.

Con los valores y vectores propios hallados, podemos obtener la diagonalización de A, ya que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Para hallar P^{-1}, como $\mathrm{Det}(P) = 4$, tenemos que

$$P^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(P)} \cdot \mathrm{Adj}(P)^t = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallamos ahora A^k teniendo en cuenta que si $A = P \cdot D \cdot P^{-1} \Rightarrow A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$. En nuestro caso

$$A^k = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5^k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4\cdot 5^k} & \frac{3}{4\cdot 5^k} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4\cdot 5^k} & \frac{3}{4} - \frac{3}{4\cdot 5^k} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^k} & \frac{1}{4} + \frac{3}{4\cdot 5^k} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\lim_{k\to+\infty} A^k = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$

$\square$
