Prácticas con ordenador de Matemáticas
Grado en A.D.E.

1. Introducción

Wolfram|Alpha es un 'motor de conocimiento computacional' en cuya caja de búsqueda podremos escribir órdenes para efectuar operaciones matemáticas, representar funciones, hacer consultas ...

Para poder usarlo, introducimos esta dirección `www.wolframalpha.com` en el navegador Mozilla Firefox.

Aunque lo usaremos para efectuar operaciones como las vista en la asignatura, Wolfram|Alpha puede hacer más cosas, como vemos en los ejemplos.

Ejemplo 1.

```
where am i
spain age distribution
sky spain
santander bbva
spain debt
```

Wolfram|Alpha permite escribir las instrucciones de distintas maneras e interpreta lo que escribimos, por eso debemos estar atentos a lo que interpreta, por si no fuera lo que queremos calcular.

2. Operaciones

Usaremos los operadores usuales para las operaciones básicas `+ - * / ^`.

Ejemplo 2.

```
2+2
15-5
```

```
2 4
2*4
3^3
```

Observe que el espacio permite multiplicar.

Para modificar el orden usual de las operaciones, empleamos paréntesis.

Ejemplo 3.

```
2+2/2
(2+2)/2
2^2*3
2^(2*3)
```

3. Funciones elementales

En Wolfram|Alpha podremos emplear las funciones seno, coseno, tangente y logaritmo neperiano escribiéndolas como `sin, cos, tan, ln`. (Tanto si usamos `ln` como si usamos `log`, Wolfram|Alpha lo entenderá como logaritmo neperiano, que en su lenguaje se escribe `log`. Si queremos usar el logaritmo en base 10, podemos usar `log10`.)

Ejemplo 4.

```
tan(pi/4)
ln(e^2)
```

También usaremos `abs` para la función valor absoluto, y `sqrt` para la raíz cuadrada.

Ejemplo 5.

```
|3-5|
sqrt(64)
```

Para evaluar una función en un punto procedemos de la siguiente manera.

Ejemplo 6.

```
sqrt(x-2), x=5
```

4. Resolver ecuaciones

También podemos resolver ecuaciones e inecuaciones

Ejemplo 7.

```
solve(x^2-5=0,x)
2*x>-3
x^2-2*x-3>0
```

5. Gráficas de funciones

Para representar una función empleamos el comando plot.

Ejemplo 8.

```
plot[x^2+x-1 , {x,-3,4}]
plot[e^x , {x,-5,5}]
plot[1/(1+2*e^(-2x)) , {x,-4,5}]
plot[sin(x) , {x,-pi,pi}]
```

Si queremos representar conjuntamente dos funciones, podemos introducir las dos funciones entre llaves.

Ejemplo 9.

```
plot({sin(x),cos(x)},{x,-3,3})
```

6. Límites

Ejemplo 10.

```
limit(e^x , x->0)
limit(e^x , x->-infinity)
limit(arctan(x) , x->infinity)
limit( (x+1)/(x-1) , x->1)
```

Observe que en este último límite, se nos ha mostrado el límite por la izquierda y el límite por la derecha.

7. Derivación

Para derivar una función, usamos el comando d

Ejemplo 11.

```
d[sin(x),x]
d[x^2+3x+43,x]
```

También podemos evaluar la derivada en un punto.

Ejemplo 12.

```
d[sin(x),x], x=0
d[ln(x^2+3x),x], x=1
```

8. Polinomio de Taylor

Para hallar el polinomio de Taylor de orden 3 en el punto x=0 de la función seno

Ejemplo 13.

```
taylor sin(x), x=0, order 3
```

Podemos usar este comando para hallar la recta tangente. Si queremos la recta tangente de la función de la función exponencial en el punto x=0, escribimos `taylor e^x, x=0,order 1`

9. Optimización

Ejemplo 14.
```
optimize x^3-2x
```

Vemos en el resultado, que no hay extremos absolutos, pero nos devuelve un máximo y un mínimo relativo.

Si queremos indicar un intervalo para la variable x, lo podemos hacer de la siguiente manera.

Ejemplo 15.
```
optimize x^3-2x , {x,-2,2}
```

En este caso nos ha mostrado los extremos relativos y los extremos absolutos.

Si solo estamos interesados en los mínimos, podemos usar el comando `minimize` :

Ejemplo 16.
```
minimize 3x^4-20x^3+36x^2 , {x,0,4}
```

De forma similar se puede usar el comando `maximize`.

10. Integral indefinida

Para calcular primitivas usamos el comando `integrate`.

Ejemplo 17.

```
integrate( x/(x+1)^2 , x )
integrate( 1/(x^2-9) , x )
integrate( sin(x) , x )
```

11. Integral definida

Para hallar integrales definidas, usamos el mismo comando `integrate`, pero indicando los límites de integración.

Ejemplo 18.

```
integrate( abs(ln(x)) , {x,1/e,e} )
integrate( x^9/sqrt(1+x) , {x,0,1} )
```

12. Matrices

Para introducir una matriz basta poner las filas entre llaves, y cada fila la introducimos con sus elementos entre llaves. Así la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se introduce como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 19.

```
{{1,3,2},{2,3,4},{0,1,1}}
```

Al introducir una matriz Wolfram|Alpha nos devuelve, entre otras cosas, su determinante, la inversa, el polinomio característico, los valores propios (reales y complejos), los vectores propios, y diagonaliza la matriz.

Ejemplo 20.

```
det( {{1,3,2},{2,3,4},{0,1,1}} )
inv( {{1,3,2},{2,3,4},{0,1,1}} )
eigenvalues( {{1,3,2},{2,3,4},{0,1,1}} )
```

Si queremos diagonalizar una matriz

Ejemplo 21.

```
diagonalize {{1,0,2},{-1,1,2},{1,0,1}}
```

13. Operaciones con matrices

Para sumar matrices usamos el símbolo `+`, para multiplicar basta usar un espacio.

Ejemplo 22.

```
{{1,0},{-2,1},{3,0}} + {{-1,1},{2,1},{1,4}}
{{1,0},{-2,1},{3,0}} {{7},{3}}
```

Para hallar la potencia de una matriz usamos el comando `matrixpower` indicando la matriz a elevar y la potencia.

Ejemplo 23.

```
matrixpower[ {{1,2},{2,0}} , 4]
matrixpower[ {{1,2},{2,0}} , -1]
```

14. Rango y forma escalonada reducida

Para hallar el rango de una matriz usamos el comando `rank`, y para hallar la forma escalonada reducida usamos `rowreduce` .

Ejemplo 24.

```
rank {{2,1,3,-2},{4,0,8,0},{2,-1,5,2}}
rowreduce {{1,0,2},{-1,1,2},{1,0,1}}
```

15. Resolución de sistemas de ecuaciones

También podemos usar Wolfram|Alpha para discutir y resolver sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 25.

```
solve(2x-4y+z=4,2x+3y+z=1)
solve(x+y+z=0,x-y+z=0)
solve(x+y=2,-x-y=2)
```

16. Ejercicios

1. Halle $0{,}93 \cdot (1{,}0225)^{1000}$.

   (Sol. $4{,}28350844971 \cdot 10^9 = 4283508449{,}71$)

2. Halle una aproximación numérica de la expresión

$$\frac{e^{\pi} - 2}{\operatorname{sen}(\pi/2) + 1}.$$

   (Sol. 10.57034631638963450286454318397427369013305312130010599672...)

3. Represente la función $g(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

4. Represente conjuntamente las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = x - x^3/6$ en el intervalo $[-2, 2]$. Lo mismo en el intervalo $[-8, 8]$.

5. Calcule el límite cuando $x \to 3$ por la izquierda, y cuando $x \to +\infty$, de $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{-x^2 + x + 6}$.

   (Sol. infinito, -1)

6. Estudie los extremos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3 \cdot 5^2 x + 2$.

   (Sol. Un máximo relativo de g es 252 y se alcanza en $x = -5$. Un mínimo relativo de g es -248 y se alcanza en $x = 5$)

7. Consideremos una empresa que elabora un producto con función de ingreso $I(q) = 3q^2 + q$ y función de coste $C(q) = 2q^2 + 5q$. ¿Existen niveles de producción para los que el beneficio es negativo? ¿Para cuáles? ¿Para cuántas unidades vendidas los resultados de la empresa son los peores?

   (Sol. Si $0 < q < 4$ hay beneficio negativo. Si $q = 2$ el beneficio es -4, el peor posible.)

8. Consideremos una empresa con función de coste $C(q) = q^2 - 40q + 1$. Halle el valor de q que minimiza el coste medio.

   (Sol. $q = 1$)

9. Calcule el polinomio de Taylor de orden 4 en el punto $a = \pi$ de la función $h(x) = \operatorname{sen}(3 \cdot \cos x)$.

   (Sol. $-\sin(3) + \frac{3}{2}(x - \pi)^2 \cos(3) + \frac{1}{8}(x - \pi)^4 (9 \sin(3) - \cos(3))$)

10. Halle las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 4 = \sqrt{x} + 3/x$.
(Sol. $x \approx 1{,}82729$)

11. Calcule
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$
(Sol. $\dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$)

12. Halle una primitiva de la función $f(x) = e^{3t}$.
(Sol. $\frac{1}{3}e^{3t}$)

13. Halle una primitiva de la función $\dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$.
(Sol. $\ln(x^2 + 2x + 2) + \arctan(x + 1)$)

14. Halle el área de la región limitada por las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = x$.
(Sol. $\dfrac{1}{6} \approx 0{,}16667$)

15. Considere las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Halle $A + B$ y $2B - A$.
(Sol. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 11 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.)

16. Halle el determinante de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$
(Sol. -18)

17. Halle la inversa de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$
(Sol. $\dfrac{1}{42}\begin{pmatrix} 20 & -15 & -11 \\ 8 & -6 & 4 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.)

18. Halle el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Sol. 2)

19. Halle el valor de k para que el rango de la siguiente matriz sea 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & k \end{pmatrix}.$$

(Sol. $k = 5$)

20. Halle el polinomio característico de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Sol. $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 6$)

21. Discuta y resuelva el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 3x & -y & +4z & = 5, \\ 2x & -2y & +z & = 1, \\ -4x & +8y & +3z & = 5. \end{array} \right.$$

(Sol. $x = x$ (parámetro), $y = \frac{1}{7} + \frac{5}{7}x$, $z = \frac{9}{7} - \frac{4}{7}x$. Compatible indeterminado.)