UNIVERSIDAD DE GRANADA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Análisis y resolución de problemas sobre desigualdades numéricas

en la preparación de la Olimpiada de Matemáticas

Autora
Sara Amaro Serrano

Tutor: Pascual Jara Martínez
Departamento de Álgebra

Julio 2023

Trabajo Fin de Máster

Análisis y resolución de problemas sobre desigualdades numéricas

en la preparación de la Olimpiada de Matemáticas

Sara Amaro Serrano

Dirección: Prof. Dr. D. Pascual Jara Martínez

Máster de Matemáticas
Universidad de Granada
Granada, 2023

A mi madre, por su apoyo incondicional,
y a Pascual, por su asesoramiento
y guía en este último trabajo.

Índice general

Introducción 1

I Primeras desigualdades 5
1 Desigualdad con fuerza bruta 5
2 Desigualdad de las medias 12

II Desigualdades de Cauchy-Schwarz y Nesbitt 17
3 Desigualdad de Cauchy-Schwarz 17
4 Desigualdad de Cauchy-Schwarz de Engel 21
5 Desigualdad de Nesbitt 24

III Manipulando desigualdades 27
6 Reordenación 27
7 Cambios de variable 34

IV Desigualdades avanzadas 41
8 Desigualdad de Jensen 41
9 Otras desigualdades 44

V Ejercicios para repasar 49
10 Problemas de Olimpiada 49

VI Diario de clase 55
11 Preparación de olimpiadas 21/22 55

Conclusión 57

Bibliografía 59

Introducción

La resolución de problemas es una habilidad esencial en el campo de las matemáticas y se considera fundamental en los currículos educativos de todos los niveles. Sin embargo, a menudo, esta habilidad no recibe la atención adecuada en el contexto del currículo regular, lo que ha llevado al desarrollo de actividades extracurriculares centradas en la resolución de problemas. Una de las más destacadas de estas actividades son las clases de preparación para olimpiadas matemáticas, en las que los estudiantes se enfrentan a problemas matemáticos desafiantes que promueven el pensamiento crítico y la creatividad, preparándolos para competir en eventos matemáticos de alto nivel.

Este Trabajo de Fin de Máster se estructura de la siguiente manera: comenzamos con la exposición y demostración de teoremas pertinentes. A continuación, procedemos a la selección y el análisis de problemas específicos, los cuales han sido elegidos por su relevancia y por su potencial para ser utilizados en la enseñanza de la teoría de las desigualdades numéricas. Cada problema seleccionado se resuelve en profundidad y la solución es discutida críticamente para revelar la lógica subyacente y las posibles variaciones, con la esperanza y confianza de que esto sirva como motivador para la redacción de nuevos ejercicios de desigualdades numéricas.

Los problemas se presentan luego a un grupo de estudiantes que se están preparando para la Olimpiada Matemática Española, y sus soluciones se analizan de manera exhaustiva. A través de esta interacción con los estudiantes, se recopila una valiosa retroalimentación sobre su comprensión y su capacidad para aplicar los conceptos aprendidos. El objetivo de este enfoque innovador es proporcionar una visión detallada de la enseñanza de las desigualdades numéricas y sugerir maneras en las que esta enseñanza puede ser mejorada en el futuro. El análisis de estos resultados se realiza con el objeto de formular propuestas para el trabajo futuro en esta área.

Capítulo I

Primeras desigualdades

El campo de estudio de las matemáticas es vasto y diverso, abarcando una serie de disciplinas y subdisciplinas cada una con sus propios enfoques y metodologías. Una de estas disciplinas es el estudio de las desigualdades, un área de estudio que tiene aplicaciones en una variedad de contextos y que ofrece un marco robusto para la comparación de magnitudes y la identificación de relaciones entre ellas. En este capítulo inicial, nos embarcaremos en una exploración detallada de dos métodos fundamentales para resolver desigualdades: la desigualdad de fuerza bruta y la desigualdad de medias. Estas técnicas serán la base para la formulación de problemas futuros.

1. Desigualdad con fuerza bruta

Cuando nos enfrentamos con el desafío de resolver una desigualdad, la primera estrategia que a menudo surge es simplificar la ecuación tanto como sea posible. Eliminamos módulos, raíces y denominadores, con el objetivo de reducir la complejidad de la desigualdad a algo que pueda ser más fácilmente manejable. Este método, que se conoce como *fuerza bruta*, es frecuentemente el enfoque preferido en los entornos educativos formales. Sin embargo, es menos utilizado en competencias como las olimpiadas de matemáticas, donde se hace un mayor énfasis en la aplicación de una serie de teoremas específicos.

La aplicación de la estrategia de fuerza bruta no requiere un conocimiento especializado o teoremas particulares. Más bien, lo que se necesita es una comprensión sólida de cómo operar con las propiedades fundamentales de las desigualdades.

A lo largo de este capítulo, se presentarán diversos ejercicios y problemas que ilustrarán la aplicación de la técnica de fuerza bruta, así como otras estrategias, para resolver desigualdades.

Proposición. 1.1.
Propiedades de desigualdades. *Para cualquier número $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:*

- *Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces se cumple que $a + c \leq b + d$ y la igualdad se alcanza si, y solo si, $a = b$ y $c = d$.*

- *Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$. Si $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda a \leq \lambda b$ y si $\lambda \leq 0$, entonces $\lambda a \geq \lambda b$. En cualquiera de los dos casos, la igualdad se alcanza si, y solo si, $a = b$ o $\lambda = 0$.*
- *Sean a, b distintos de 0. Si $a \geq b > 0$, entonces $0 < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$, si $a \leq b < 0$, entonces $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$, y si $a < 0 < b$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. En cualquiera de los tres casos, la igualdad se alcanza si, y solo si, $a = b$.*

Una consecuencia de estas propiedades normalmente olvidada y muy interesante para la correcta resolución de problemas es el principio de que un número al cuadrado siempre es positivo.

Proposición. 1.2.
Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales. Entonces

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \ \geq \ 0,$$

y la igualdad se alcanza si, y solo sí $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

En algunos ejercicios de fuerza bruta se usará, además de las propiedades de las desigualdades, las propiedades del valor absoluto. Concretamente nos interesan las siguientes:

Proposición. 1.3.
Sean x_1, x_2 números reales. Entonces se verifica que:

- *La igualdad en $|x_1| \geq 0$ se cumple si y solo si $x_1 = 0$.*
- *La solución de $|x_1| < x_2$ es $-x_2 < x_1 < x_2$. Y la de $|x_1| \leq x_2$ es $-x_2 \leq x_1 \leq x_2$.*
- *La solución de $|x_1| > x_2$ es $x_1 < -x_2$ ó $x_1 > x_2$. Y la de $|x_1| \geq x_2$ es $x_1 \leq -x_2$ ó $x_1 \geq x_2$.*

Proposición. 1.4.
Propiedades del valor absoluto. *Llamada la Desigualdad del Triángulo en su forma general por (Bujalich, Gómez y Valdez, 2022 [5]) . Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales. Entonces se verifica que*

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \ \leq \ |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

y la igualdad se alcanza si, y solo sí $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ o si $x_1, x_2, \ldots \geq 0$.

Veamos algunos casos resueltos por fuerza bruta.

Ejercicio. 1.5.
Demuestra que si $-1 < x < 1$ *y* $-1 < y < 1$*, entonces*

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \le \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}.$$

(Problema de la Olimpiada Matemática local del año 2004 [20])

SOLUCIÓN. Este ejercicio consiste básicamente en hacer un análisis exploratorio entre las x e y posibles de nuestra desigualdad. Lo dividiremos en tres casos:

- Caso a. Tanto x como y son positivos o mayor o iguales que 0. $0 \le x < 1$ y $0 \le y < 1$.

  En este caso, dado que x y y son ambos no negativos, la expresión $|x-y|$ es simplemente $x-y$ y la expresión $|x|+|y|$ es $x+y$. Entonces, la desigualdad se convierte en

  $$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \le \frac{x+y}{1+xy}$$

  que es cierta, ya que $x-y \le x+y$ para $x, y \ge 0$.

- Caso b. Tanto x como y son menores que 0. $-1 < x < 0$ y $-1 < y < 0$.

  En este caso, como x e y son ambos no positivos, la expresión $|x-y|$ es simplemente $y-x$ y la expresión $|x|+|y|$ es $-x-y$. Entonces, la desigualdad se convierte en

  $$\left|\frac{y-x}{1-xy}\right| \le \frac{-x-y}{1+xy}$$

  que es cierta, ya que $y-x \le -x-y$ para $x, y \le 0$.

- Caso c. x e y tienen signos opuestos. Si uno de ellos es positivo, el otro es negativo.

  En este caso, la desigualdad se convierte en

  $$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \le \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$$

  que es cierta, ya que $|x-y| \le |x|+|y|$ para cualesquiera x, y con signos opuestos.

En cada caso, hemos mostrado que la desigualdad es verdadera, por lo que la afirmación inicial es correcta siempre.

$\square$

Tras la resolución de cada problema, elaboramos su comentario crítico o discusión.

Discusión.
En el problema vemos lo importante que es la simplificación en la resolución de problemas matemáticos que parecen complejos a primera vista. La resolución puede no ser intuitiva para todos los estudiantes, lo que subraya la importancia de un firme entendimiento previo de las propiedades de los números reales y las desigualdades.

Para hacer el problema más desafiante y ayudar a los estudiantes a profundizar en su comprensión, podríamos introducir coeficientes a y b como constantes reales en la desigualdad original:

$$\left|\frac{ax-by}{1-xy}\right| \leq \frac{|ax|+|by|}{1+|xy|}$$

Al introducir estos coeficientes, se introduce una capa adicional de complejidad en el problema. Los estudiantes ahora deben considerar cómo los coeficientes a y b influyen en la desigualdad. Por ejemplo, si establecemos $a=2$ y $b=3$, generamos la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{2x-3y}{1-xy}\right| \leq \frac{|2x|+|3y|}{1+|xy|}$$

Resolver este problema requerirá que los estudiantes apliquen las mismas estrategias de descomposición en casos y análisis de los valores absolutos que se utilizaron en el problema original, pero con mayor atención a cómo los coeficientes afectan a la desigualdad.

Por otro lado, si buscamos disminuir la dificultad del ejercicio, podríamos simplificar la expresión y relajar las restricciones en los valores de x e y. Considere la desigualdad:

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \leq 1$$

Esta versión simplificada elimina los términos de valor absoluto y permite que x e y tomen cualquier valor real, eliminando la limitación del intervalo $(-1,1)$. Esto resulta en un problema más directo y menos técnico, lo que puede ser útil para introducir los conceptos básicos de desigualdades a los estudiantes o reforzar su entendimiento antes de pasar a problemas más difíciles.

Si vemos que los estudiantes no tienen la capacidad o nivel suficientes para enterarse a la primera con el ejercicio de más arriba, recomendamos iniciar con la versión simplificada para consolidar la comprensión de los conceptos básicos. A continuación, se puede introducir el problema original, permitiendo a los estudiantes aplicar lo que han aprendido en un problema más complejo. Finalmente, si hiciera falta, la versión más desafiante con los coeficientes adicionales puede ser presentada para desafiar a los estudiantes y fomentar el desarrollo de habilidades de razonamiento crítico.

Ejercicio. 1.6.
Sean a, b, c y d números reales con $a+d=b+c$. Demuestra que

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c) \;\geq\; 0.$$

(Problema de la Olimpiada Matemática Nacional de República Checa del año 2004 [5])

SOLUCIÓN.

Para resolver este ejercicio, primero desarrollamos todas las multiplicaciones de los productos en la expresión dada:

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)=$$

$$=ac-ad-bc+bd+ab-ad-bc+cd-ac+ab+bc-bd=2ac-2ad-2bc+2bd$$

Ahora, podemos sacar factor común 2 y reorganizar los términos:

$$2ac-2ad-2bc+2bd=2(ac-ad-bc+bd)=2(a(c-d)+b(d-c))$$

Recordando que $a+d=b+c$, entonces podemos reemplazar d por $b+c-a$ y reorganizar los términos:

$$2(a(c-d)+b(d-c))=2((a-b)(c-d))=2(a-b)^2$$

Notamos que el cuadrado de cualquier número real es siempre mayor o igual que cero, entonces podemos concluir que

$$2(a-b)^2\geq 0$$

Por lo tanto, hemos demostrado la afirmación.

□

DISCUSIÓN.

El problema en cuestión, originario de la Olimpiada Matemática Nacional de la República Checa del año 2004 es perfecto para ser el segundo problema. Pese a su inicial apariencia intimidante, la clave para resolver este problema radica en identificar que la expresión dada es equivalente al cuadrado de una diferencia, que siempre será mayor o igual que cero.

Este ejercicio es una buena lección para los estudiantes, las soluciones no siempre deben ser complicadas o difíciles de alcanzar. En este sentido, este problema destaca la importancia del reconocimiento de patrones y la correcta aplicación de las identidades proporcionadas.

Para alterar el nivel de dificultad de este problema, se pueden plantear las siguientes modificaciones:

Aumentar la dificultad: Una forma de incrementar el nivel de desafío es modificar la ecuación pero teniendo los mismos elementos.Por ejemplo este sacado de (Andreescu, 2004 [1]):

Sea a, b, c, d números reales positivos Demuestra que:

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\geq 0.$$

Esta versión agrega una capa adicional de complejidad y requiere de un mayor grado de manipulación algebraica. Asimismo, necesitará de una aplicación más profunda de las propiedades de las ecuaciones y desigualdades para llegar a la conclusión deseada.

Ejercicio. 1.7.
¿Para qué valores reales de x se cumple la siguiente desigualdad?

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9.$$

(Problema de la Olimpiada Matemática Internacional del año 1960 [12])

SOLUCIÓN. Primero, multiplicamos la fracción de la izquierda arriba y abajo por $(1+\sqrt{1+2x})^2$, obteniendo así:

$$\frac{4x^2(1+\sqrt{1+2x})^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2(1+\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9.$$

Esto simplifica la fracción en la izquierda a:

$$\frac{4x^2(1^2+2\sqrt{1+2x}+(1+2x))}{(2x)^2} < 2x+9.$$

Que simplifica aún más a:

debe ser |2x+1|<12,25

$$1^2+2\sqrt{1+2x}+1+2x < 2x+9$$

De aquí, si despejamos x obtenemos que $2(\sqrt{2x+1}) < 7$, de donde se sigue que $x < 5{,}625$. Otra forma de hacer esto es tomar la desigualdad $2x+11 < 12{,}25$, que simplifica a $-12{,}25 < 2x+1 < 12{,}25$. Si despejamos x de estas desigualdades obtenemos que $x < 5{,}625$ y $x > -6{,}625$. Sin embargo, dado que la fracción en la izquierda de la desigualdad original no está definida para $x=0$, no podemos incluir $x=0$ en el conjunto de soluciones.
Por lo tanto, las soluciones a la desigualdad original son los valores de x en la unión de intervalos $[-\frac{53}{8},0)\cup(0,\frac{45}{8}]$.

□

DISCUSIÓN.
Para resolver esta desigualdad, los estudiantes deben hacer una serie de manipulaciones que incluyen la multiplicación del numerador y el denominador de la fracción en el lado izquierdo por un término específico para simplificar la desigualdad. Un aspecto notable de este problema es que la desigualdad no se cumple para todos los valores reales de x. En particular, la fracción en el lado izquierdo de la desigualdad no está definida para $x=0$. Este matiz agrega una dimensión de complejidad adicional al problema, obligando a los estudiantes a examinar la validez de la desigualdad en todo el dominio de los números reales, y no solo en un intervalo específico.

Si se desea adaptar el problema a diferentes niveles de dificultad, podría considerarse la inclusión de más términos en la desigualdad original o la introducción de coeficientes adicionales, como por ejemplo:

$$\frac{ax^2}{(1-\sqrt{1+bx})^2} < cx + d.$$

donde a, b, c, y d son constantes reales. Esta variante introduce un grado de complejidad adicional, pues los estudiantes tendrán que evaluar cómo estos coeficientes extras afectan la desigualdad.

Para simplificar el problema y hacerlo más accesible, se podría reducir la cantidad de términos en la desigualdad original. Como por ejemplo:

$$\frac{x}{1+\sqrt{1+x}} < x + 2$$

Esta versión simplificada elimina la raíz cuadrada del denominador y reduce la expresión de la fracción. De este modo, los estudiantes podrán aplicar de forma más directa las propiedades de las fracciones y realizar manipulaciones algebraicas más sencillas para demostrar la desigualdad.

RESOLUCIÓN EN CLASE.

Nuestra primera sesión de preparación para la olimpiada [14] estuvo dedicada a las desigualdades y contamos con una diversidad de estudiantes que oscilaban desde el curso de 4º de ESO hasta el de 2º de Bachillerato. Esta diversidad de niveles nos presentó el primer desafío, los estudiantes del 4º de ESO no conocían ni habían visto nunca las desigualdades.

Comenzamos la clase introduciendo los fundamentos de las desigualdades, incluyendo la interpretación de los símbolos de mayor que y menor que y la forma en que se pueden comparar las magnitudes. Para los estudiantes del 4º de ESO, fue su primer encuentro formal con las desigualdades, por lo que nos aseguramos de ilustrar los conceptos.

Una vez sentadas las bases, presentamos el primer problema de reordenación por fuerza bruta y módulos. Hay que explicar qué es un módulo prácticamente a la mayoría antes de empezar el ejercicio. Los más mayores destacan en su éxito. Todos, con ayuda, consiguen resolverlo.

El segundo problema de la Olimpiada Matemática Nacional de la República Checa, a pesar de la aparente complejidad de la desigualdad, los estudiantes se sintieron alentados a abordar el problema utilizando las propiedades y los métodos que acababan de aprender. Mientras trabajaban en grupos pequeños, varios estudiantes intentaron sustituir valores en la desigualdad para simplificarla, pero se toparon con dificultades a medida que avanzaban. Sin embargo, con un poco de orientación y sugerencias, finalmente fueron capaces de simplificar la expresión a una forma manejable.

Después de celebrar su éxito con el primer problema, pasamos a discutir el segundo problema, extraído de la Olimpiada Matemática Internacional de 1960. Este problema presentaba una desigualdad más compleja que requería una mayor manipulación algebraica y una comprensión más profunda de las fracciones y las raíces cuadradas. Algunos estudiantes intentaron despejar x de la desigualdad, mientras que otros se centraron en simplificar la expresión mediante la multiplicación de un término particular. Con la pista de que el denominador de la fracción en el lado izquierdo no podía ser cero, y que una raíz cuadrada siempre es mayor o igual que cero, los estudiantes pudieron hacer un progreso significativo. Sin embargo, dada la longitud y la complejidad de este problema, algunos estudiantes tuvieron dificultades para llegar a la solución final. Cuando lo vieron en la pizarra lo entendieron, ya sí, completamente.

Para esta experiencia considero que quizás habría que hacer algún ejercicio más de módulos para que lo practiquen, al ser un concepto *prácticamente nuevo* o que *no recuerdan* se hace complicado que a la primera puedan saberse todas las propiedades de los mismos. Yo no haría más ejercicios que el tipo mencionado porque no es más que *operar para intentar simplificar como sea*, objetivo que practicarán también en el resto de ejercicios, aunque vayan incluidos dentro de otros capítulos.

2. Desigualdad de las medias

Es recurrente que aparezca la desigualdad de las medias en los problemas de Olimpiada Matemáticas tanto locales, nacionales como internacionales. La desigualdad de las medias es algo fácil de ver y aplicar, pero es algo que si no sabes que existe y/o que cae, nunca se te ocurriría aplicar. Es por ello que la desigualdad de las medias entra dentro de este primer apartado *Primeras desigualdades*.

Teorema. 2.1.
Desigualdad de las medias. *Sea un conjunto de números reales positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ con n un número natural. Se definen sus medias: la media armónica H, la media geométrica G, la media aritmética A y la media cuadrática Q con las siguientes ecuaciones*

$$H = \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + ... + 1/x_n}, \quad G = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}, \quad A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \quad y \quad Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}},$$

respectivamente. Sea $x_1, x_2, ..., x_n$ números reales positivos con n un número natural, $H \leq G \leq A \leq Q$. Y la igualdad ocurre cuando $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

La desigualdad de las medias que aparece recurrentemente en las Olimpiadas Matemáticas es la de $G \leq A$ (la media geométrica es menor o igual que la media aritmética), también conocida por su abreviatura $AM - GM$ o AGM y que *se considera una consecuencia de un caso específico de la desigualdad isoperimétrica* (Bogolmomolny, 2018, [4]) desarollada en (Pérez, 2023, [18]) , aunque en ocasiones muy puntuales también ha aparecido la media armónica H, es por ello que no hay que menospreciar el resto de cara a una preparación muy avanzada de las Olimpiadas Matemáticas de cualquier nivel, pero, en estas líneas, demostraré únicamente la desigualdad $AM - GM$ por ser la que mayoritariamente se usa y aparece, mediante un pensamiento intuitivo físico.

Teorema. 2.2.
Desigualdad AM-GM. *Sea un conjunto de números reales positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ con n un número natural. La media geométrica G de esos números será menor o igual que la media aritmética A, es decir,*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Y la igualdad ocurre cuando todos los números son iguales $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad $AM - GM$ tiene, para $n = 2$, usualmente la siguiente forma:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2},$$

pero podemos obtener más información para nuestra demostración escribiéndola a una sola línea: $(x_1+x_2)^2 \geq 4(x_1x_2)$ y, pasándolo todo al primer miembro, eso es lo mismo que decir $(x_1+x_2)^2-4(x_1x_2) \geq 0$ pero sabemos que ese primer miembro es, por definición, la diferencia de los puntos al cuadrado:

$$(x_1 + x_2)^2 - 4(x_1x_2) = (x_1 - x_2)^2.$$

O lo que es lo mismo que lo anterior $S^2 - 4P = D^2$ donde S, P y D son respectivamente la suma, producto y diferencia de x_1 y x_2. Si dejamos que tanto x_1 como x_2 varíen de manera que su suma $S = x_1 + x_2$ sea fija, podemos ver que el producto $P = x_1x_2$ es la función estrictamente decreciente que depende de las distancias $D = |x_1 - x_2|$. Esto es un principio muy útil que se puede denominar *Principio de la simetría del producto* y que dice así: *Cuando la distancia entre dos números positivos decrece, su producto crece, siempre que su suma permanezca constante* o lo que es lo mismo *El producto de dos números, cuya suma sea constante, alcanzará su máximo valor cuando estos números sean iguales entre sí.*

Entonces, además de demostrar que se cumple ya $(x_1 + x_2)^2 - 4(x_1x_2) \geq 0$ porque se puede concretar que es exactamente $(x_1+x_2)^2-4(x_1x_2) = (x_1-x_2)^2$ que siempre es positivo porque está elevado al cuadrado. Sabemos que $(x_1 + x_2)^2$ es mayor o igual que $4(x_1x_2)$ encontrando la igualdad a 0 (y el producto máximo)cuando $x_1 = x_2$ por el *principio de la simetría del producto* y, por tanto, la media aritmética A es mayor o igual que la media geométrica G. □

Ejercicio. 2.3.
Obten los valores enteros de x más próximos a 2013°, tanto por defecto como por exceso, que cumplan:

$$2^{sen^2 x} + 2^{cos^2 x} \; = \; 2\sqrt{2}.$$

(Problema de la Olimpiada Matemática local del año 2013 [20])

SOLUCIÓN. Para resolver este problema, podemos utilizar la desigualdad de las medias geométrica y aritmética.
Si igualamos $2^{sen^2 x}$ a a y $2^{\cos^2 x}$ a b, entonces según la desigualdad de las medias, tenemos que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Pero también sabemos que $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Dado que $ab = 2^{sen^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x} = 2^{sen^2 x + \cos^2 x} = 2^1 = 2$, la igualdad se cumple cuando $a = b$, es decir, cuando $2^{sen^2 x} = 2^{\cos^2 x}$, o lo que es lo mismo, cuando $\sin^2 x = \cos^2 x$.
Esto ocurre cuando $senx = \pm \cos x$, es decir, cuando $x = \pm 45° + 90k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Si igualamos 2013 con la parte de $\pm 45° + 90k$, obtenemos que $k = \frac{2013 - 45}{90} = 21{,}87$, y $k = \frac{2013 + 45}{90} = 22{,}87$. Sin embargo, ya que k debe ser un entero, las soluciones más cercanas son $k = 21$ y $k = 22$, es decir,

$x = 45° + 90 * 21 = 1935°$ y $x = 45° + 90 * 22 = 2025°$, que son los enteros más cercanos a 2013° por defecto y por exceso respectivamente. □

DISCUSIÓN.
La resolución de este problema involucra el uso de la Desigualdad de las Medias Geométrica y Aritmética (AM-GM), un concepto fundamental que es frecuentemente utilizado en problemas de Olimpiadas Matemáticas. La aplicación de la desigualdad AM-GM en este problema permite simplificar la ecuación dada a una forma que es más fácil de manejar.

Al principio, el problema puede parecer desalentador debido a la presencia de las funciones trigonométricas *sen* y cos elevadas al cuadrado dentro de una función exponencial. Sin embargo, al aplicar la desigualdad AM-GM y utilizar las propiedades básicas de las funciones trigonométricas, el problema se reduce a buscar los valores de x que satisfacen la ecuación $sen^2 x = \cos^2 x$.

A pesar de que la resolución del problema es directa una vez se aplica la desigualdad AM-GM, este problema puede ser un desafío para los estudiantes que no están familiarizados con esta desigualdad o que no ven su aplicación inmediata. Por tanto, este problema es adecuado para enseñar y reforzar el concepto de la desigualdad AM-GM y para reforzar conceptos trigonométricos.

1. Nivel de dificultad aumentado: Para incrementar el nivel de dificultad, podríamos introducir una constante adicional en las funciones exponenciales y cambiar el valor en el lado derecho de la ecuación. Un ejemplo podría ser:

$$(2^{sen^2 x} + 1) + (2^{cos^2 x} + 1) \;=\; 3\sqrt{3}.$$

Aquí, el método de solución implicaría aplicar la desigualdad AM-GM de manera similar, pero se necesitaría un manejo adicional para tratar con la constante extra +1 en las funciones exponenciales.

2. Nivel de dificultad disminuido. Para disminuir la dificultad, podríamos simplificar la ecuación eliminando las funciones exponenciales. Un ejemplo podría ser:

$$sen^2 x + cos^2 x \;=\; 1.$$

Esta es una identidad trigonométrica básica y muy conocida que se cumple para todos los valores de x. La resolución de esta ecuación es directa y aunque no es necesario el uso de la desigualdad AM-GM, podría utilizarse para demostrar la igualdad.

Ejercicio. 2.4.
Para todos los números reales $x, y > 0$, demostrar que:

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

(Ejercicio del preparatorio de Olimpiada de La Universidad de León [24])

SOLUCIÓN. Primero, usamos la desigualdad de las medias aritmética y geométrica para cada uno de los denominadores:

1. Para x^4+y^2, la media aritmética es $\frac{x^4+y^2}{2}$, y la media geométrica es $\sqrt{x^4 \cdot y^2} = x^2y$. De la desigualdad de las medias, tenemos que $\frac{x^4+y^2}{2} \geq x^2y$, que es lo mismo que decir que $x^4+y^2 \geq 2x^2y$.

2. Para y^4+x^2, la media aritmética es $\frac{y^4+x^2}{2}$, y la media geométrica es $\sqrt{y^4 \cdot x^2} = y^2x$. De la desigualdad de las medias, tenemos que $\frac{y^4+x^2}{2} \geq y^2x$, que es lo mismo que decir que $y^4+x^2 \geq 2y^2x$.

Entonces, al dividir x e y entre cada uno de estos términos respectivamente, obtenemos que:

$$\frac{x}{x^4+y^2} \leq \frac{x}{2x^2y} = \frac{1}{2xy}$$
$$\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{y}{2y^2x} = \frac{1}{2xy}$$

Finalmente, si sumamos estas dos desigualdades, obtenemos:

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{xy},$$

que es exactamente lo que queríamos demostrar. □

DISCUSIÓN.

El problema propuesto está fuertemente enraizado en la aplicación de la Desigualdad de las Medias Aritmética y Geométrica (AM-GM). La clave para su resolución es la observación de que se puede aplicar la desigualdad AM-GM a los denominadores de las fracciones en la expresión dada. A primera vista, la desigualdad puede parecer un desafío debido a la complejidad aparente de los términos en la ecuación. Sin embargo, tras la aplicación correcta de la desigualdad AM-GM, la ecuación se simplifica significativamente y se puede demostrar la desigualdad sin problemas.

Este problema puede ser adecuado para estudiantes que ya han visto algún ejemplo de la desigualdad AM-GM y que estén listos para aplicarla en contextos más complicados.

Para un mayor nivel de dificultad, podríamos introducir una constante adicional o una mayor cantidad de términos. Un ejemplo de mayor dificultad podría ser el que aparece en (Kim, 2007 [15]):

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz} + \frac{1}{y^3+z^3+xyz} + \frac{1}{z^3+x^3+xyz} \leq \frac{1}{xyz}$$

Este problema es más desafiante ya que se introduce una variable adicional, z, y se incorpora al denominador de cada fracción. El método de solución es similar pero requiere un manejo adicional de los términos.

Para disminuir el nivel de dificultad, podríamos simplificar la ecuación al disminuir la cantidad de términos en los denominadores y manteniendo una única variable en los numeradores. Un ejemplo más sencillo podría ser el de (Cvetkovski, 2012 [7]):

Sea $x > 3$ un número real. Encuentra el valor mínimo de la expresión.

$$x + \frac{1}{x}$$

RESOLUCIÓN EN CLASE.

Este fue el segundo día de clase del preparatorio de olimpiadas [14], durante el cual se le explicaron las desigualdades de las medias y se procedieron a realizar sus ejercicios.

El primer ejercicio del día presentado provenía de la Olimpiada Matemática local del año 2013. El problema consistía en encontrar los valores enteros más cercanos a 2013^o, tanto por defecto como por exceso, que satisficieran una determinada igualdad que involucraba las funciones trigonométricas seno y coseno.

Este problema representó un desafío. Un obstáculo inicial que se presentó fue la falta de familiaridad de muchos estudiantes con la identidad trigonométrica clave: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, entre otras propiedades trigonométricas olvidades. Esto requirió una explicación detallada en clase para garantizar su comprensión total. Una vez explicadas las propiedades trigonométricas que aparecen en el ejercicio y superado este obstáculo inicial, los estudiantes pudieron avanzar satisfactoriamente en la resolución del problema y llegar al final.

El segundo problema presentado en la clase involucraba una desigualdad que se refería a dos números reales positivos, x e y. Muchos estudiantes se quedaron pillados ante el enunciado y casi no sabían empezar. Después de un recordatorio inicial sobre las técnicas y propiedades relevantes, la mayoría de los estudiantes pudo resolver el problema de manera exitosa, aplicando de forma precisa las reglas y propiedades de las desigualdades.

En resumen, aunque ambos problemas presentaron desafíos iniciales a los estudiantes, con la explicación y el apoyo adecuados, los estudiantes pudieron superar estos desafíos y realizar un progreso significativo en su comprensión y habilidad para resolver este tipo de problemas. Para esta experiencia considero que quizás el ejercicio del 2013^o es demasiado difícil para ser el primero. No es complicada la aplicación del teorema pero sí que se acuerden o sepan las propiedades trigonométricas, así no se quedan pillado al verlo a la par que se consigue repasar otras áreas. Por ejemplo se podría conseguir con un problema de olimpiada trigonométrico justo inmediatamente antes.

A lo largo de este capítulo, hemos dado los primeros pasos hacia una comprensión más profunda de las desigualdades numéricas, comenzando con la exploración de los métodos de la desigualdad de fuerza bruta y la desigualdad de medias. A través de la aplicación detallada de estos métodos, esperamos haber sembrado la semilla de la motivación para la redacción de nuevos ejercicios de desigualdades numéricas. Hemos construido una base sólida para futuras investigaciones y la mejora del estudio de las desigualdades numéricas. A medida que avanzamos, seguiremos analizando los resultados con el objeto de identificar las técnicas más utilizadas y proponiendo herramientas para trabajar en la mejora de esta área de las matemáticas. Este esfuerzo sostenido, confiamos, conducirá a una enseñanza más efectiva y enriquecedora de las desigualdades en las clases preparatorias para las olimpiadas matemáticas.

Capítulo II

Desigualdades de Cauchy-Schwarz y Nesbitt

En este segundo capítulo, nos adentraremos en el estudio de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, una poderosa herramienta que establece una relación entre productos internos de vectores y normas. Además, exploraremos una variante importante de esta desigualdad: Cauchy-Schwarz en forma de Engel y también la desigualdad de Nesbitt, que aunque se nombra en este capítulo, se trabaja más en el siguiente. Estas desigualdades amplían las aplicaciones de la desigualdad original y nos permiten abordar una variedad de problemas matemáticos, , preparándonos para proponer nuevos problemas en el futuro.

3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

El teorema de la desigualdad de Cauchy-Schwarz es un resultado poderoso que establece una relación entre los productos de los elementos de dos secuencias de números reales y las sumas de los cuadrados de esas secuencias. Esta desigualdad encuentra aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, como el álgebra, el análisis y la geometría, y es fundamental para comprender conceptos como la ortogonalidad y la independencia lineal.

Teorema. 3.1.
Desigualdad de Cauchy-Schwarz. *Para cualesquiera números reales* $x_1, x_2, ...x_n$ *y* $y_1, y_2, ...y_n$*, se tiene que*

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \;\geq\; (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2$$

Y la igualdad ocurre si las sucesiones son proporcionales, es decir, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el producto punto de dos vectores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, es decir:

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Queremos demostrar que $(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x \cdot y)^2$. Consideremos la función $f(t) = (tx - y)^2$, donde t es un número real. Dado que $f(t) \geq 0$ para todo t, podemos escribir:

$$0 \leq f(t) = (tx - y)^2 = t^2(x \cdot x) - 2t(x \cdot y) + (y \cdot y)$$

Como esto es una ecuación cuadrática en t, tenemos que el discriminante debe ser negativo o igual a cero para que tenga solución real. Por lo tanto, tenemos:

$$(x \cdot y)^2 - (x \cdot x)(y \cdot y) \leq 0$$

Lo cual es equivalente a:

$$(x \cdot x)(y \cdot y) \geq (x \cdot y)^2$$

Lo que demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz. La igualdad se alcanza si y solo si los vectores x e y son proporcionales, es decir, si $x = ky$ para algún número k. En este caso, tenemos que $(x \cdot y)^2 = (ky \cdot y)^2 = k^2(y \cdot y)^2 = (x \cdot x)(y \cdot y)$, lo que demuestra que la igualdad se alcanza si y solo si los vectores x e y son proporcionales.

□

Ejercicio. 3.2.
Si a, b, c son positivos, demostrar que

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

(Ejercicio del preparatorio de Olimpiada de La Universidad de León [24])

SOLUCIÓN. Para resolver este problema, podemos aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz. La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que para cualquier conjunto de números reales positivos a_i y b_i, se cumple que

$$(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2).$$

En nuestro caso, podemos considerar a_i como a, b, c y b_i como 1. Entonces, obtenemos que

$$(a + b + c)^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2$$

y que

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Por lo tanto, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos da que

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

que es exactamente lo que queríamos demostrar.

□

DISCUSIÓN.
Este problema es una aplicación bastante directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Esta resolución requiere, simplemente, que el estudiante identifique que se puede aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Este problema es adecuado para empezar a hacer problemas por primera vez de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Para agregar variabilidad y ajustar el nivel de dificultad, podemos explorar cómo cambia la desigualdad al modificar los coeficientes de los términos cuadrados. Por ejemplo, podríamos considerar la desigualdad

$$(a+b+c)^2 \leq k(a^2+b^2+c^2)$$

para diferentes valores de k. Esto podría permitir a los estudiantes explorar la influencia de los coeficientes en la desigualdad y brindar una mayor comprensión del papel de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la resolución de tales problemas.Por ejemplo, se podría considerar $k=2$ o $k=4$, en ambos casos la técnica de solución se mantiene consistente aunque con una perspectiva ligeramente diferente.

Aunque un caso directo y que disminuiría muchísimo la dificultad por tener una resolución corta, podría ser el que aparece en (Universidad de León, (s.f), pp 2013-02 [24]).

$$(a^2b+b^2c+c^2a)^2 \leq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}$$

Ejercicio. 3.3.
Si $a, b, c > 0$, probar que

$$\frac{\sqrt{2a+b}+\sqrt{2b+c}+\sqrt{2c+a}}{\sqrt{a+b+c}} \leq 3$$

(Ejercicio construido a partir de un problema general del preparatorio de Olimpiada de Pascual Jara [13])

SOLUCIÓN. Para resolver este problema, aplicamos directamente la desigualdad de Cauchy-Schwarz en su forma para sumas:

$$(\sqrt{2a+b}+\sqrt{2b+c}+\sqrt{2c+a})^2 \leq 3(2a+b+2b+c+2c+a)$$

Esto se simplifica a:

$$3(a+b+c)\left(\sqrt{\frac{2a+b}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{2b+c}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{2c+a}{a+b+c}}\right)^2 \leq 9(a+b+c)$$

Después de cancelar $3(a+b+c)$ de ambos lados, obtenemos la desigualdad requerida:

$$\frac{\sqrt{2a+b}+\sqrt{2b+c}+\sqrt{2c+a}}{\sqrt{a+b+c}} \leq 3.$$

□

DISCUSIÓN.
Este problema es interesante porque, aunque parece complejo a primera vista debido a la presencia de raíces cuadradas en cada término, se puede resolver de manera eficiente utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Este problema es un buen ejemplo para introducir a los estudiantes en las aplicaciones de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en problemas que involucran sumatorias y raíces cuadradas. Asimismo, puede servir para reforzar la importancia de simplificar y reescribir las expresiones matemáticas para facilitar su manipulación.

Este problema también ofrece un margen considerable para variaciones y adaptaciones. Por ejemplo, se podría modificar los coeficientes dentro de las raíces cuadradas o incluso agregar más términos a la sumatoria para aumentar la dificultad. Una posibilidad podría ser considerar la desigualdad

$$\frac{\sqrt{3a+b}+\sqrt{3b+c}+\sqrt{3c+a}}{\sqrt{a+b+c}} \leq 3$$

o, para disminuir la dificultad, podríamos considerar

$$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}{\sqrt{a+b+c}} \leq 3$$

Ambas variaciones mantendrían el enfoque en la aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pero ofrecerían distintos grados de complejidad. Cada variación puede ser utilizada para profundizar en el entendimiento de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y su aplicabilidad en una amplia gama de contextos.

RESOLUCIÓN EN CLASE.

Tercer día de clase de sucesiones para la preparación de olimpiadas matemáticas [14]. En esta sesión, dedicamos tiempo a repasar los conceptos y técnicas aprendidas anteriormente, y nos aventuramos en el tema de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, una importante herramienta en matemáticas olímpicas. Tras explicarle los conceptos se presentaron dos problemas a los estudiantes para continuar su práctica en la resolución de desigualdades y aplicaciones de identidades matemáticas.

El primer ejercicio que se presentó en la clase consistía en demostrar una cierta desigualdad para números reales positivos. Los estudiantes tuvieron cierta dificultad para avanzar en este problema hasta que se les dio la pista de que podían *sacar un 1* de la desigualdad. Una vez que se les proporcionó esta orientación, los estudiantes pudieron aplicar eficazmente la desigualdad de C-S y llegar al final del ejercicio de forma exitosa.

El segundo ejercicio era un problema que implicaba raíces. Este problema fue abordado con éxito por casi todos los estudiantes. Algunos estudiantes lograron resolver el problema elevando al cuadrado la expresión dada, mientras que otros optaron por aplicar la raíz cuarta a los términos. A pesar de las diferentes técnicas utilizadas, todos los estudiantes pudieron llegar a la solución correcta. Este problema es más fácil de lo que se pensaba inicialmente puesto que se ha comprobado, in situ, que se puede resolver de distintas maneras.

A lo largo de la clase, se destacó la importancia de la perseverancia y la creatividad en la resolución de problemas matemáticos, es por eso que en el segundo ejercicio consiguieron distintas resoluciones y es por ello que todos llegaron al final. En resumen, considero que estos dos problemas son perfectos para aprender en qué contextos se aplica C-S.

4. Desigualdad de Cauchy-Schwarz de Engel

El teorema de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en forma de Engel es una consecuencia directa del teorema de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, un resultado fundamental en el ámbito de las desigualdades matemáticas. Esta variante de la desigualdad de Cauchy-Schwarz establece una relación entre fracciones cuadráticas y sumas de fracciones, y encuentra aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, especialmente en el análisis y la teoría de la optimización.

Teorema. 4.1.
Desigualdad de Cauchy-Schwarz en forma de Engel. *Para números $x_1, x_2, ..., x_n$ arbitrarios y $y_1, y_2, ..., y_n$ positivos*

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + ... + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{(y_1 + y_2 + ... + y_n)}.$$

Y la igualdad ocurre si las sucesiones son proporcionales, es decir, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los vectores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, y apliquemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los vectores x y $\sqrt{y}$ (es decir, el vector cuyas componentes son las raíces cuadradas de las componentes de y):

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \geq (x_1\sqrt{y_1} + x_2\sqrt{y_2} + \cdots + x_n\sqrt{y_n})^2$$

Expandiendo el cuadrado en el lado derecho y dividiendo ambos lados por $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, obtenemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz en forma de Engel:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}$$

La igualdad se alcanza si y solo si los vectores x y $\sqrt{y}$ son proporcionales, es decir, si $x = k\sqrt{y}$ para algún número k. En este caso, tenemos que $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 = (k\sqrt{y_1}+k\sqrt{y_2}+\cdots+k\sqrt{y_n})^2 = k^2(y_1+y_2+\cdots+y_n)$, lo que demuestra que la igualdad se alcanza si y solo si los vectores x e y son proporcionales.

□

Ejercicio. 4.2.
Si, a, b, c son positivos, demuestra que

$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$$

(Problema muy parecido al de la Olimpiada Matemática Nacional de República Checa del año 1999 que era de la forma $\frac{a}{2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$ *[5])*

SOLUCIÓN. Para resolver este problema primero hacemos cuadrados para poder aplicar después la Desigualdad:

$$\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}=\frac{a^2}{a^2+2ab}+\frac{b^2}{b^2+2bc}+\frac{c^2}{c^2+2ca}$$

Aplicando la Desigualdad Cauchy-Schwarz en forma de Engel, obtenemos:

$$\frac{a^2}{a^2+2ab}+\frac{b^2}{b^2+2bc}+\frac{c^2}{c^2+2ca}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=1$$

Y ya lo tendríamos demostrado.

□

DISCUSIÓN.

Este problema es un excelente ejemplo de la aplicación de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz en su forma de Engel para problemas que involucran fracciones. El paso crítico en la solución de este problema es la elevación al cuadrado de los numeradores de las fracciones. Esta transformación facilita el reconocimiento de la forma apropiada de la desigualdad, permitiendo su aplicación directa.

La Desigualdad de Cauchy-Schwarz en forma de Engel es una herramienta útil cuando se trata de problemas que implican sumas de fracciones con numeradores y denominadores que son potencias de los mismos números. Los estudiantes pueden tener dificultades iniciales para ver cómo aplicar la desigualdad en este contexto, pero una vez que comprenden la idea de elevar al cuadrado los numeradores, el resto del problema se desarrolla de manera bastante directa.

Este problema también puede ser variado para aumentar o disminuir su dificultad. Para incrementar la dificultad, se podrían introducir coeficientes adicionales en los numeradores o denominadores de las fracciones. Un ejemplo podría ser demostrar que, para una constante positiva k:

$$\frac{ka}{a+2b}+\frac{kb}{b+2c}+\frac{kc}{c+2a}\geq k$$

Para disminuir la dificultad, se podrían reducir los términos en la suma. Por ejemplo, se podría pedir a los estudiantes que demuestren que

$$\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2a}\geq 1$$

Estas variaciones brindan una oportunidad para que los estudiantes practiquen y solidifiquen su comprensión de la aplicación de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz en su forma de Engel.

Ejercicio. 4.3.
Para a, b, c, d números reales positivos, demuestra que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\ \geq\ \frac{64}{a+b+c+d}$$

(Problema de la Olimpiada Matemática Nacional de Sudáfrica del año 1995 [5])

SOLUCIÓN. Definimos las sucesiones $\mathbf{A} = (1, 1, 2, 8)$ y $\mathbf{B} = (a, b, c, d)$. Utilizando la Desigualdad de Cauchy-Schwarz en su forma de Engel obtenemos que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{(\sum \mathbf{A})^2}{\sum \mathbf{B}} = \frac{(1+1+2+8)^2}{a+b+c+d} = \frac{64}{a+b+c+d}$$

Por lo tanto, se ha demostrado la desigualdad. □

DISCUSIÓN.

Este problema, aunque puede parecer complicado al principio debido a la diversidad de coeficientes en los denominadores de las fracciones, la solución del problema es bastante directa una vez que se comprende la utilidad de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz en su forma de Engel.

Este problema sería adecuado para estudiantes para afianzar la confianza con la Desigualdad de Cauchy-Schwarz y su variante de Engel y que quieran seguir aprendiendo.

Para aumentar la dificultad de este problema, podríamos considerar la adición de más términos a la ecuación o el cambio de los coeficientes de los denominadores de las fracciones. Por ejemplo, podríamos considerar la desigualdad

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} + \frac{64}{e} \geq \frac{256}{a+b+c+d+e}$$

Para reducir la dificultad, podríamos reducir la cantidad de términos en la desigualdad, por ejemplo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{36}{a+b+c}$$

Estas variaciones permiten a los estudiantes explorar más a fondo la aplicabilidad de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz en su forma de Engel y mejorar su comprensión de la misma.

RESOLUCIÓN EN CLASE.

Cuarto día. Explicamos Cauchy-Schwarz en la forma de Engel y seguidamente nos disponemos a resolver los dos ejercicios.

El primer problema presentado a los estudiantes involucraba una desigualdad con tres números reales positivos, a, b y c. Al principio, muchos estudiantes intentaron resolverlo utilizando raíces cuadradas, pero no tuvieron éxito. Con la aportación de algunas pistas iniciales, los estudiantes cambiaron su enfoque, pero se encontraron con un nuevo desafío: no estaban familiarizados con la estrategia de "buscar cuadrados". Esta estrategia consiste en transformar una expresión en un formato que se asemeje al de un cuadrado perfecto. Sin embargo, esta habilidad resultó ser un desafío para los estudiantes, ya que tenían dificultades al manipular expresiones elevadas al cuadrado. Con una guía adicional y ejemplos adicionales, los estudiantes comenzaron a comprender mejor la técnica y pudieron avanzar en la resolución del problema. Al final, la mayoría de los estudiantes lograron demostrar la desigualdad sin problemas.

El segundo problema presentado requería que los estudiantes demostraran una desigualdad que involucraba cuatro números reales positivos, a, b, c y d. En comparación con el primer problema, este ejercicio se resolvió de manera mucho más eficaz. Algunos estudiantes vieron rápidamente la solución, reconociendo patrones y relaciones clave en la expresión. Otros estudiantes necesitaron desglosar la expresión en sucesiones y analizar cada término por separado para comprender completamente la relación entre ellos. La mayoría de los estudiantes lograron presentar una demostración correcta de la desigualdad casi a la primera.

No obstante, estos estudiantes del preparatorio de olimpiadas [14] demostraron un buen nivel de conocimientos y que estaban preparados para cualquier desafío, simplemente con un poco de orientación adicional demostraron las desigualdades de manera correcta. El segundo ejercicio fue un claro reflejo de su gran habilidad y preparación. En resumen, considero que estos dos problemas son perfectos para aprender en qué contextos se aplica C-S en forma de Engel, ya que lo más importante de este apartado es que sepan de qué forma es *la forma de Engel* para cuando la vean en el enunciado o en mitad de un ejercicio, sepan enunciar el teorema y la resolución de ejercicios sea mucho más rápida, cuestión que se consigue con estos dos ejemplos.

5. Desigualdad de Nesbitt

La desigualdad de Nesbitt establece una relación entre fracciones y números reales positivos, y encuentra aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, como el análisis, la geometría y la teoría de la optimización.

Teorema. 5.1.
Desigualdad de Nesbitt. *Para cualquier triplete de números reales positivos a, b, c, se tiene que:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

La igualdad ocurre si y solo si $a=b=c$.

Esta desigualdad proporciona una importante herramienta para comparar la relación entre las tres fracciones y nos permite establecer límites en su suma.

En este apartado no nos adentraremos en la demostración de esta desigualdad ni en la resolución de ejercicios relacionados con ella. No obstante, en el siguiente apartado exploraremos tres formas distintas de demostrar esta desigualdad de entre la multitud de formas que existen, que ya se encuentran todas incluidas en (AoPS Incorporated, 2023 [2]) , lo cual nos permitirá apreciar diferentes enfoques y estrategias para abordarla, y entenderemos en qué situaciones aparece y por qué es a la vez útil pero no necesaria.

Con la conclusión de este capítulo, hemos dado un paso adelante hacia la profundización en el estudio de las desigualdades numéricas, centrándonos en la desigualdad de Cauchy-Schwarz y su forma Engel, así como la desigualdad de Nesbitt. Hemos establecido una conexión profunda entre estos conceptos, estableciendo un puente hacia su uso en el análisis de problemas de mayor complejidad. Además, al construir sobre estos fundamentos, hemos abierto la puerta a nuevas posibilidades de investigación, con la confianza de que el análisis detallado de estos métodos innovadores inspire la creación de nuevos ejercicios y desafíos de desigualdades numéricas. En el futuro, se podrán perfeccionar estas herramientas y seguir mejorando nuestra capacidad para enseñar y aplicar estas técnicas avanzadas en las aulas de preparación para olimpiadas matemáticas.

Capítulo III

Manipulando desigualdades

En el tercer capítulo, nos sumergiremos en el fascinante mundo de la manipulación de desigualdades mediante técnicas de reordenación y cambio de variable. Estas estrategias nos muestran estrategias para transformar y simplificar desigualdades, indispensables en la resolución de problemas de Olimpiada de Matemáticas y la proposición de nuevos desafíos.

6. Reordenación

La reordenación de desigualdades es una técnica que nos permite modificar el orden de los términos en una desigualdad sin alterar su validez. A través de la reorganización cuidadosa de los elementos y la aplicación de propiedades algebraicas, podemos simplificar y transformar desigualdades de manera significativa.

Teorema. 6.1.
Consideremos dos secuencias de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *ordenadas de forma que* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ *y* $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$*. Si consideramos todas las sumas posibles de la forma* $a_{i_1} b_1 + a_{i_2} b_2 + \ldots + a_{i_n} b_n$*, donde* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *es una reordenación de los índices* $(1, 2, \ldots, n)$*, el Teorema de Reordenación nos dice que la suma máxima se alcanza cuando* $(i_1, i_2, \ldots, i_n) = (1, 2, \ldots, n)$ *y la suma mínima se alcanza cuando* $(i_1, i_2, \ldots, i_n) = (n, n-1, \ldots, 1)$*. En términos matemáticos, esto se puede expresar como:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{k=1}^{n} a_{i_k} b_{i_k}$$

donde $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *es cualquier reordenación de los índices* $(1, 2, \ldots, n)$*.*

Este resultado tiene sentido intuitivo: para maximizar la suma total, queremos multiplicar los números más grandes entre sí. Esto es especialmente útil cuando hablamos de una **desigualdad simétrica**. En tal caso, la permutación de las variables no cambia el resultado de la expresión, lo que significa que puedes intercambiar las variables de cualquier manera sin alterar el valor de la expresión. De esta forma, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x \leq y \leq z$.

Sin embargo, es importante entender que no todas las desigualdades son simétricas. En una **desigualdad no simétrica**, el valor de la expresión sí cambia cuando alteramos el orden de las variables. En otras palabras, una desigualdad es no simétrica si la permutación de las variables produce un resultado diferente. En tales casos, necesitamos tener mucho cuidado al manipular las variables y no podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x \leq y \leq z$.

Además, el teorema de reordenación puede demostrarse de forma sencilla en el caso de dos términos: si $a \geq b \geq 0$ y $p \geq q \geq 0$, entonces $ap + bq \geq aq + bp$. Esto puede verificarse fácilmente restando los dos lados de la desigualdad y observando que $(a-b)(p-q) \geq 0$, lo que es cierto debido a las suposiciones iniciales.

DEMOSTRACIÓN.
Sean $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ conjuntos ordenados de números reales. Para cualquier permutación σ de $(1, 2, ..., n)$, se tiene que

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \geq a_{\sigma(1)} b_1 + a_{\sigma(2)} b_2 + \ldots + a_{\sigma(n)} b_n$$

La igualdad se mantiene si y solo si la permutación σ es la identidad, es decir, mantiene el orden original de los índices $(1, 2, ..., n)$, o la inversa de la identidad, que es la permutación que invierte el orden de los índices a $(n, n-1, ..., 1)$. La demostración se realiza por inducción sobre n.

1. Caso base: Para $n = 1$, el resultado es trivial ya que solo hay una permutación.

2. Paso de inducción: Asumamos que la afirmación es cierta para $n = k$, y demostrémosla para $n = k + 1$.

Supongamos que las secuencias $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{k+1}$ y $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_{k+1}$ están dadas, y que σ es una permutación de $(1, 2, ..., k+1)$ tal que $a_{\sigma(k+1)} < a_{k+1}$. Entonces, la suma permutada es $a_{\sigma(1)} b_1 + a_{\sigma(2)} b_2 + \ldots + a_{\sigma(k)} b_k + a_{\sigma(k+1)} b_{k+1}$.

Por hipótesis inductiva, $a_{\sigma(1)} b_1 + a_{\sigma(2)} b_2 + \ldots + a_{\sigma(k)} b_k \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k$. Por lo tanto,

$$a_{\sigma(1)} b_1 + a_{\sigma(2)} b_2 + \ldots + a_{\sigma(k+1)} b_{k+1} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k + a_{\sigma(k+1)} b_{k+1}$$

Pero dado que $a_{\sigma(k+1)} < a_{k+1}$ y $b_{k+1} \geq b_i$ para cualquier i, entonces $a_{\sigma(k+1)} b_{k+1} \leq a_{k+1} b_{k+1}$. Por lo tanto, tenemos que

$$a_{\sigma(1)} b_1 + a_{\sigma(2)} b_2 + \ldots + a_{\sigma(k+1)} b_{k+1} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1}$$

Esto prueba que cualquier permutación de los índices no da una suma mayor que cuando los índices no están permutados. Por lo tanto, el teorema es cierto para $n = k + 1$, completando el paso inductivo.

Por lo tanto, por inducción, el teorema es cierto para todos los enteros positivos n.

$\square$

Un ejemplo de problema que se puede resolver para entender mejor el teorema de reordenación de desigualdades es el siguiente:

Ejercicio. 6.2.
Tenemos 6 regalos en una rifa, algunos son de 100€, otros de 200€ y otros de 500€, pero se nos permite coger 3 de un valor, 2 de otro y uno del último valor. ¿Cómo optimizaríamos nuestra elección para maximizar el valor total de los regalos seleccionados?

SOLUCIÓN. Para maximizar el valor total de los regalos seleccionados, debemos seleccionar la mayor cantidad de regalos de mayor valor y la menor cantidad de regalos de menor valor. En otras palabras, debemos seleccionar 3 regalos de 500€, 2 regalos de 200€ y 1 regalo de 100€.

Por lo tanto, la mayor suma posible es la suma del mayor numero de veces el mayor valor, el mediano número de veces el valor intermedio y el menor número de veces el valor más pequeño o, lo que es lo mismo, $3 * 500€ + 2 * 200€ + 1 * 100€$. □

DISCUSIÓN.
Este problema de selección de regalos en una rifa es ideal para introducir la teoría de reordenación a los estudiantes. A pesar de ser sencillo, el problema es efectivo en demostrar cómo maximizar una suma dada ciertas restricciones. No es necesario mencionar explícitamente el Teorema de Reordenación para resolverlo, lo que lo hace accesible para todos los niveles.

La estrategia subyacente para resolver el problema *optar por la mayor cantidad de regalos de mayor valor y la menor cantidad de regalos de menor valor* es clara y debería ser fácil de entender para la mayoría de los estudiantes.

En este problema, no vale la pena variar su dificultad ni hacerlo más manejable. Realmente sirve para entender la reordenación de desigualdades y que nunca se olvide. Y ese objetivo se cumple con el enunciado del problema y su resolución.

Ejercicio. 6.3.
Resuelve las siguientes desigualdades:

1. $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$ *para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. $x^2y + y^2z + x^2z \leq x^3 + y^3 + z^3$ *para todo* $x, y, z > 0$.
3. $xyz^2 + yzx^2 + xzy^2 \leq x^4 + y^4 + z^4$ *para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(Problemas del preparatorio de Olimpiada de Pascual Jara) [13]

SOLUCIÓN. Este ejercicio se compone de un total de tres demostraciones de desigualdades distintas, así que las veremos de forma individual:

1. Caso 1. $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   La desigualdad es simétrica en x, y, z. Por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \leq y \leq z$.

   Entonces, en el lado izquierdo de la desigualdad, estamos sumando un producto de un número grande y uno mediano (yz), un producto de un número pequeño y uno mediano (xy), y un producto de un número pequeño y uno grande (xz).

   Por el Teorema de Reordenación, sabemos que para maximizar la suma total, deberíamos multiplicar los números más grandes entre sí. Por lo tanto, el lado derecho de la desigualdad, que es una suma de un producto de un número grande y él mismo (z^2), un producto de un número mediano y él mismo (y^2), y un producto de un número pequeño y él mismo (x^2), es mayor o igual que el lado izquierdo de la desigualdad.

   Por lo tanto, la desigualdad original $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$ es verdadera para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. Caso 2. $x^2y + y^2z + x^2z \leq x^3 + y^3 + z^3$ para todo $x, y, z > 0$.

   La desigualdad no es simétrica en x, y, z. Pero, podemos ver que el lado derecho de la desigualdad se puede reescribir como $x^2 \cdot x + y^2 \cdot y + z^2 \cdot z$, que podría ser una suma de un producto de un número grande y él mismo (x^3), un producto de un número mediano y él mismo (y^3), y un producto de un número pequeño y él mismo (z^3).

   Por otro lado, en el lado izquierdo de la desigualdad, tenemos $x^2 \cdot y$, $y^2 \cdot z$ y $x^2 \cdot z$.

   Ahora consideramos las secuencias (x^2, y^2, z^2) y (x, y, z), suponiendo sin pérdida de generalidad que $x \leq y \leq z$, tenemos que las secuencias son ordenadas.

   Por el Teorema de Reordenación, sabemos que para maximizar la suma total, deberíamos multiplicar los números más grandes entre sí. Por lo tanto, el lado derecho de la desigualdad, es mayor o igual que cualquier reordenación del lado izquierdo de la desigualdad.

   Por lo tanto, la desigualdad original $x^2y + y^2z + x^2z \leq x^3 + y^3 + z^3$ es verdadera para todo $x, y, z > 0$.

3. Caso 3. $xyz^2 + yzx^2 + xzy^2 \leq x^4 + y^4 + z^4$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   La desigualdad es simétrica en x, y, z. Por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \leq y \leq z$.

   Notamos que en el lado izquierdo de la desigualdad, tenemos xyz^2, yzx^2 y xzy^2, que se puede reescribir como $(xz)(yz)$, $(xy)(xz)$ y $(xy)(yz)$.

   Por otro lado, en el lado derecho de la desigualdad, tenemos x^4, y^4 y z^4 que se puede reescribir como $(x^2)(x^2)$, $(y^2)(y^2)$ y $(z^2)(z^2)$. Es decir,

   $$(xz)(yz) + (xy)(xz) + (xy)(yz) \leq (x^2)(x^2) + (y^2)(y^2) + (z^2)(z^2)$$

   Usando el teorema de reordenación, sabemos que para maximizar la suma total, deberíamos multiplicar los números más grandes entre sí. Entonces, si tenemos las secuencias ordenadas (xy, yz, xz) y (x^2, y^2, z^2), por el Teorema de Reordenación, vemos que

   $$(xz)(yz) + (xy)(xz) + (xy)(yz) \leq (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

y por el teorema de reordenación:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \leq (x^2)(x^2) + (y^2)(y^2) + (z^2)(z^2)$$

Por lo tanto, la desigualdad original $xyz^2 + yzx^2 + xzy^2 \leq x^4 + y^4 + z^4$ es verdadera para todo x, y, z $\in \mathbb{R}$.

Ya estarían resueltas las 3 desigualdades. □

DISCUSIÓN.
Este conjunto de desigualdades es un excelente recurso para practicar el Teorema de Reordenación, aunque de manera más abstracta y compleja que el problema anterior de la rifa.

La primera desigualdad se resuelve de manera bastante directa y proporciona una buena introducción a cómo abordar este tipo de problemas. Sin necesidad de mencionar explícitamente el Teorema de Reordenación, los estudiantes pueden darse cuenta de que la suma de los cuadrados de los números siempre es mayor o igual que la suma de los productos de los números tomados de dos en dos.

El segundo y tercer problema son más desafiantes, requiriendo una comprensión más profunda y un uso más explícito del Teorema de Reordenación. Concretamente en el tercer problema hay que aplicar la reordenación dos veces, y esto puede hacer que la mayoría no lo termine.

Para reducir la dificultad, podríamos limitarnos a dos variables en lugar de tres, o podríamos trabajar con desigualdades que requieran menos pasos para resolverse. Por ejemplo, podríamos considerar la desigualdad $xy \leq x^2 + y^2$, que se puede probar de manera bastante sencilla utilizando técnicas de reordenación.

Ejercicio. 6.4.
Resuelve la siguiente desigualdad:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

para todo a, b, $c \in \mathbb{R}$.
(Mitad de un ejercicio del preparatorio de Olimpiada de La Universidad de León [24])

SOLUCIÓN. Esta desigualdad no es simétrica en a, b y c. Sin embargo, observamos que en el lado izquierdo de la desigualdad, tenemos a^3, b^3 y c^3, que se pueden reescribir como a^2a, b^2b y c^2c.

Por otro lado, en el lado derecho de la desigualdad, tenemos a^2b, b^2c y c^2a. Esto nos da las secuencias ordenadas (a^2, b^2, c^2) y (a, b, c).

Según el teorema de reordenación, para maximizar la suma total, deberíamos multiplicar los números más grandes entre sí. Por tanto, si ordenamos las secuencias de forma que $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ y $a \leq b \leq c$, entonces

$$a^2a + b^2b + c^2c \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

Por lo tanto, la desigualdad original $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$ es verdadera para todo $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$. $\square$

DISCUSIÓN.
Esta desigualdad, aunque aparentemente simple, ofrece una oportunidad excelente para comprender y aplicar el Teorema de Reordenación de manera intuitiva. Si ya han realizado varios ejercicios de reordenación, este es el perfecto ejercicio siguiente.

Para maximizar las sumas de estos productos, deberíamos multiplicar los mayores números entre sí, lo que nos lleva al Teorema de Reordenación. Al reorganizar los términos en una forma en que se multiplica el cuadrado de cada variable por su propia variable (en lugar de una variable distinta), confirmamos que el lado izquierdo de la desigualdad siempre será mayor o igual que el derecho.

Podríamos aumentar la dificultad de este problema introduciendo exponentes más altos o incluso exponenciales. Consideremos la siguiente variación del problema original que aparace en (Andreescu, 2004 [1]) para todo $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

Este cambio agrega un nivel adicional de complejidad al problema, ya que es necesario expandir antes de aplicar el Teorema de Reordenación.

Si queremos hacer el problema más simple, podemos reducir el número de variables o disminuir los exponentes utilizados. Por ejemplo el que aparece en (Engel, 1991 [11]) para todo $a,\ b\ c \in \mathbb{R}$.

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

En este caso se han reducido los exponentes a 2. Este problema es más fácil que el original, ya que en un término no hay exponentes y en el otro se ha reducido a dos. No obstante, el Teorema de Reordenación sigue siendo la clave para resolver esta desigualdad.

Ejercicio. 6.5.
Demuestre la Desigualdad de Nesbitt (sección 5) utilizando el Teorema de Reordenación:
Para todo $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$, se tiene que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

(Problema muy parecido al de la Olimpiada Matemática Internacional del año 1995 cuya ecuación era $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ *[26] [12])*

SOLUCIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a \leq b \leq c$. Por lo tanto, también tenemos que $a+b \leq c+a \leq b+c$ y que $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$.
Nuestra secuencias ordenadas serían (a, b, c) y $(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b})$.

Observamos que $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ es la mayor suma posible porque suman el producto entre los términos grandes, los medianos y los pequeños. Por tanto también podemos decir que:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}$$

.

Que si las sumamos nos dan

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{b+a}{b+a}=3$$

Por lo tanto, la Desigualdad de Nesbitt $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ se mantiene para todo $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. $\square$

DISCUSIÓN.

El problema de *demostrar la Desigualdad de Nesbitt*, una desigualdad clásica en la formación para olimpiadas matemáticas, se considera intermedio en términos de dificultad. Principalmente requiere buena capacidad para manipular desigualdades, aunque lo bueno que tiene es que se puede resolver de múltiples formas.

En este caso concreto, las dificultades principales surgen en la aplicación precisa del Teorema de Reordenación y en la manipulación algebraica necesaria. No obstante, su nivel de dificultad puede ser modulado a través de diferentes variaciones.

Podríamos aumentar la dificultad de este problema introduciendo más variables o coeficientes no triviales. Considere la siguiente variación del problema original que aparece en (Cirtoaje, 2006 [8]): Para todo a, b, c $\in \mathbb{R}^+$, se tiene que

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$$

En este caso, hemos añadido cuadrados y hemos incrementado el límite inferior de la desigualdad a 2. Este cambio añade un nivel adicional de complejidad al problema, sin embargo, el enfoque general para demostrar la desigualdad seguirá siendo el mismo, utilizando el Teorema de Reordenación.

Si queremos hacer el problema más simple, podemos reducir el número de variables. Por ejemplo: Para todo a, $b \in \mathbb{R}^+$, se tiene que

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$$

En este caso, hemos reducido el número de variables a dos. Este problema es más fácil que el original, ya que solo debemos considerar dos términos. No obstante, el Teorema de Reordenación sigue siendo la clave para demostrar esta desigualdad.

En resumen, como la Desigualdad de Nesbitt es una herramienta de enseñanza flexible y adecuada para una gama de niveles, tanto la resolución de la desigualdad en sí como las posibles variaciones que pueda tener.

RESOLUCIÓN EN CLASE.

Segunda mitad del cuarto día. En esta parte de la sesión, nos adentramos en el teorema de reordenación y su aplicación en problemas de desigualdades. Comenzamos utilizando el ejercicio de la rifa como ejemplo práctico para introducir intuitivamente el concepto del teorema de reordenación. Los estudiantes tuvieron que tomar decisiones estratégicas para maximizar el valor total de los premios que eligieron. Esta aplicación práctica permitió a los estudiantes comprender la esencia del teorema sin una presentación formal.

Después de discutir el ejemplo de la rifa, pasamos a una serie de problemas de desigualdades que los estudiantes debían resolver. Un estudiante logró resolverlos utilizando el enfoque de *fuerza bruta*, es decir, probando diferentes combinaciones y evaluando los resultados. Otro estudiante utilizó el enfoque de estudiar muy bien qué posibles sucesiones podrían estar en el ejercicio, viendo así qué tipo de resolución podrían tener las desigualdades. Ambos enfoques demostraron ser eficaces y dieron lugar a soluciones correctas.

Sin embargo, surgieron dificultades cuando los estudiantes intentaron escribir correctamente las conclusiones de las desigualdades utilizando el teorema de reordenación. Al no haberse presentado formalmente el teorema, los estudiantes tuvieron dificultades para diferenciar las secuencias simétricas y no pudieron proporcionar una justificación clara. Ante esta dificultad, los estudiantes solicitaron la creación de un *chuletario* o conjunto de notas resumidas que les permitiera recordar y aplicar correctamente el teorema y sus técnicas asociadas. Esta solicitud fue bien recibida y se le proporcionó un pequeño esquema del teorema de reordenación de sucesiones con dos variables

A pesar de estas dificultades iniciales, los estudiantes se sintieron satisfechos y motivados al completar estos problemas, especialmente al darse cuenta de que podían resolver problemas de nivel nacional de las olimpiadas matemáticas con relativa facilidad. Esto generó una alta motivación para la siguiente clase [14] y una curiosidad positiva acerca de si este tipo de problemas aparecerían habitualmente en las competiciones. Se puede decir que si les hubiéramos dicho que existe una competición de desigualdades numéricas, se habrían emocionado muchísimo.

En resumen, exponer en clase el problema de la Rifa ha sido todo un éxito para el entendimiento rápido de la reordenación y que no se les olvide sus principios fundamentales. Pero cambiaría que inmediatamente después, les enunciaría el teorema con dos variables. Tras el poco de teoría de reordenación que les hace falta para la resolución de los problemas, sí les daría el resto de ejercicios en ese orden, incluso dejando la desigualdad de Nesbitt sin hacer o para casa si se quiere, puesto que es algo menos importante y el buen conocimiento de reordenación se consigue ya con el resto de ejercicios.

7. Cambios de variable

En el contexto de desigualdades aritméticas, los cambios de variable son técnicas utilizadas para transformar una desigualdad dada en una forma más manejable o en una forma equivalente que facilite su resolución. Estos cambios de variable permiten simplificar los términos de la desigualdad, eliminar fracciones o raíces, o aplicar propiedades específicas de ciertos tipos de variables.

Proposición. 7.1.
Tipos de Cambios de Variable en Desigualdades Aritméticas.

1. ***Renombrar denominadores + resolver sistema***: *Este tipo de cambio de variable se utiliza para deshacerse de los denominadores en una desigualdad. Se renombran los denominadores como nuevas variables y se resuelve el sistema de ecuaciones resultante para encontrar las relaciones entre las nuevas variables.*
   - *Un truco para todos los tipos de variables es que cuando el enunciado te diga que* $abc = 1$, *hagas el siguiente cambio de variable:* $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$.
2. ***Sumar o restar términos***: *Al sumar o restar términos en ambos lados de una desigualdad, se pueden obtener expresiones más simples o se pueden agrupar términos de manera conveniente para aplicar otras técnicas de resolución.*
3. ***Eliminar raíces***: *En desigualdades que contienen raíces, se pueden aplicar cambios de variable para eliminar las raíces y obtener una expresión más manejable. Esto puede implicar elevar al cuadrado u otras operaciones algebraicas.*
   - $a^3 \to a$, $b^3 \to b$, $c^3 \to c$.
4. ***Lados de un triángulo***: *En desigualdades que involucran los lados de un triángulo, se pueden realizar cambios de variable relacionados con los lados o las razones de los lados del triángulo para simplificar la desigualdad y aplicar teoremas o propiedades geométricas.*
   - *Teorema de desigualdad del triángulo: En un triángulo no degenerado* ABC, $AB + BC > AC$,$BC + AC > AB$, $AC + AB > BC$. *Esdecir, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercer lado. En triángulos degenerados , la desigualdad estricta debe ser reemplazada por* $\geq$. *(Aops Incorporated, 2023 [2]).*
5. ***Normalizar***: *La normalización implica escalar o ajustar los valores de las variables en una desigualdad para que tengan un rango específico o una cierta propiedad deseada. Esto puede ayudar a simplificar la desigualdad o a llevarla a una forma más estándar.*
6. ***Homogeneizar***: *Homogeneizar es un tipo de cambio de variable que consiste en multiplicar o dividir los términos de una desigualdad por factores convenientes para hacer que todos los términos tengan la misma dimensión o grado. Esto puede permitir comparaciones más directas y aplicar técnicas específicas de resolución.*

Cabe destacar que estos tipos de cambios de variable no son exhaustivos y existen otras técnicas que se pueden aplicar dependiendo del problema y la desigualdad en cuestión. La elección de la técnica adecuada dependerá de la naturaleza de la desigualdad y los objetivos específicos de la resolución. En este trabajo nos centraremos simplemente en los tres primeros tipos de cambios de variables por ser los más importantes, fáciles de aplicar y que suelen aparecer en los problemas.

Ejercicio. 7.2.
Demuestra la Desigualdad de Nesbitt (sección 5) con los siguientes cambios de variable: renombrando denominadores y sumando términos. Para todo $a, b, c > 0$:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN. Este ejercicio tiene un total de dos partes independientes: se puede resolver renombrando denominadores o se puede resolver sumando términos.

1. Cambio de Variable: renombrando denominadores. Comenzamos despejando a, b y c de las ecuaciones $x = b + c$, $y = c + a$ y $z = a + b$. Obtenemos:

$$a = \frac{y - x + z}{2}, \quad b = \frac{x + z - y}{2}, \quad c = \frac{x + y - z}{2}$$

Sustituimos estos valores en la desigualdad original. En el numerador de cada fracción, sustituimos a por $\frac{y-x+z}{2}$, b por $\frac{x+z-y}{2}$ y c por $\frac{x+y-z}{2}$. En el denominador de cada fracción, sustituimos $b+c$ por x, $c + a$ por y y $a + b$ por z. Así obtenemos:

$$\frac{\frac{y-x+z}{2}}{x} + \frac{\frac{x+z-y}{2}}{y} + \frac{\frac{x+y-z}{2}}{z} \geq \frac{3}{2}$$

Simplificamos las expresiones en cada término:

$$\frac{y-x+z}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2}$$

A continuación, para demostrar la desigualdad para x, y, z se deben cumplir las condiciones $x+y-z > 0$, $x+z-y > 0$, $x+y-z > 0$, lo cual se traduce en $z < x+y$, $y < x+z$ y $x < y+z$. Seguimos simplificando la expresión:

$$\frac{y-x+z}{x} + \frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} \geq 3$$

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6$$

Por lo tanto, utilizando la desigualdad aritmético-geométrica (AM-GM) en cada término, podemos demostrar que cada término es mayor o igual que 2:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$$

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}=2$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}=2$$

Sumando estos tres términos, obtenemos la desigualdad deseada:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2+2+2=6$$

Por lo tanto, bajo las condiciones $z<x+y$, $y<x+z$, $x<y+z$, se cumple la desigualdad original para $a,\ b,\ c>0$. Esto completa la demostración del ejercicio.

2. Cambio de Variable de sumar términos. Dada la desigualdad inicial:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Sumamos 3 en ambos términos: 1 después de cada fracción en el término izquierdo y sumamos 3 al término derecho. Y puesto que los numeradores del término izquierdo se quedarían iguales, sacamos factor común y obtenemos:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq\frac{9}{2}$$

Luego, realizamos el cambio de variable $x=b+c$, $y=c+a$ y $z=a+b$. Sustituyendo estos valores en la desigualdad, obtenemos:

$$\frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{9}{2}$$

Ahora, aplicamos la desigualdad de la media armónica y la media aritmética (AM-HM), la cual establece que para cualquier conjunto de números positivos, la media aritmética es siempre mayor o igual que la media armónica. En este caso, para el conjunto $\{x,y,z\}$, tenemos:

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

Reorganizando esta desigualdad, obtenemos:

$$\frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{9}{2}$$

Que es exactamente lo que queríamos demostrar. Finalmente, recordamos que $x+y+z=2(a+b+c)$, por lo que al volver a la variable original, hemos demostrado la desigualdad de Nesbitt.

Por tanto la desigualdad de Nesbitt queda demostrada de las dos maneras posibles que se piden. □

DISCUSIÓN.

La Desigualdad de Nesbitt, que aparece por segunda vez en este trabajo, es un problema con una dificultad de nivel intermedio que requiere de los estudiantes un buen dominio en el manejo de desigualdades y el cambio de variables. En este contexto, es un ejercicio excelente para aprender varios tipos de cambios de variable.

La flexibilidad del problema dentro del apartado de cambios de variable es notable y se evidencia en el hecho de que puede ser resuelto, mínimo, a través de dos cambios de variables diferentes.

Si queremos hacer este problema más difícil utilizando un cambio de variables, podríamos aumentar el número de variables y agregar más términos al denominador. Por ejemplo para todo $a, b, c, d > 0$:

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geq 2$$

Aquí hemos agregado una variable adicional y se ha cambiado el lado derecho de la desigualdad a 2. Este problema requerirá que los estudiantes realicen un cambio de variables más sofisticado para resolverlo.

Para hacer este problema más fácil mediante un cambio de variables, podríamos reducir el número de variables y simplificar la desigualdad. Por ejemplo para todo $a, b > 0$:

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \geq 1$$

Aquí hemos reducido el número de variables a dos y hemos simplificado la desigualdad. Este problema es más manejable y requiere un cambio de variables más sencillo, lo que lo hace ideal para estudiantes principiantes.

Ejercicio. 7.3.
Sean x, y, z números reales positivos tal que $xyz = 1$. Demuestra que

$$\frac{1}{yz+z} + \frac{1}{zx+x} + \frac{1}{xy+y} \geq \frac{3}{2}$$

(Problema de la Olimpiada Matemática Nacional de Kazajistán del año 2008 [5])

SOLUCIÓN. Para resolver este problema, comenzamos realizando el cambio de variable recomendado cuando se nos da la condición $xyz = 1$. Hacemos $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ y $z = \frac{c}{a}$. Sustituyendo estas expresiones en la desigualdad original, obtenemos:

$$\frac{1}{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} + \frac{c}{a}} + \frac{1}{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} + \frac{a}{b}} + \frac{1}{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b}{c}} \geq \frac{3}{2}$$

Simplificando cada término del denominador, tenemos:

$$\frac{1}{\frac{b+c}{a}} + \frac{1}{\frac{c+a}{b}} + \frac{1}{\frac{a+b}{c}} \geq \frac{3}{2}$$

Luego, invertimos cada término en el denominador para obtener:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Observamos que esta desigualdad es la Desigualdad de Nesbitt que ya hemos demostrado anteriormente. Por lo tanto, podemos afirmar que:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

La igualdad se alcanza cuando $a=b=c=1$, lo cual satisface la condición inicial $xyz=1$. Por lo tanto, la desigualdad es cierta para todo x, y, z números reales positivos tal que $xyz=1$. □

DISCUSIÓN.

Este problema, originario de la Olimpiada Matemática Nacional de Kazajistán del año 2008, propone una dificultad de nivel intermedio-avanzado.

El hecho de que este problema esté vinculado a la Desigualdad de Nesbitt le añade una capa de flexibilidad, ya que, a pesar de su apariencia distinta, se puede reformular y resolver como la Desigualdad de Nesbitt o terminar el ejercicio en cuanto aparezca la Desigualdad de Nesbitt, escribiendo el teorema de forma completa. Esto demuestra la adaptabilidad del problema para varios niveles de habilidad y diferentes enfoques de enseñanza. Para los estudiantes más avanzados, este problema proporciona una oportunidad para explorar cómo se pueden reformular y reinterpretar las desigualdades.

Para aumentar la dificultad de este problema, podríamos añadir una o más variables, además de agregar una condición adicional. Por ejemplo: Sean $w=\frac{a}{b}$, $x=\frac{b}{c}$, $y=\frac{c}{d}$ y $z=\frac{d}{a}$ números reales positivos tales que $wxyz=1$. Demuestra que

$$\frac{1}{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}+\frac{d}{a}\cdot\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}+\frac{1}{\frac{d}{a}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{a}+\frac{c}{d}}+\frac{1}{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}+\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{b}+\frac{d}{a}}+\frac{1}{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}+\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}+\frac{a}{b}}\geq 2.$$

En este caso, hemos añadido una variable adicional y una condición adicional, aumentando la complejidad de la desigualdad que se debe probar. Pero los cambios de variables que se podrían realizar son los mismo que vienen en el propio enunciado $w=\frac{a}{b}$, $x=\frac{b}{c}$, $y=\frac{c}{d}$ y $z=\frac{d}{a}$. Después de hacer el cambio de variables, el problema se transforma en demostrar o enunciar la desigualdad de Nesbitt para cuatro variables. Dependiendo de si la saben enunciar o no, se convertiría en fácil o difícil, respectivamente.

Otro caso parecido e interesante podría ser el que aparece en (Universidad de la Rioja, 2023 [23]): Sean a,b,c, números positivos tales que $abc=1$. Probad que:

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ac}\right)^2\geq\frac{3}{4}$$

donde podemos establecer las siguientes relaciones $a=\dfrac{1}{bc}$, $b=\dfrac{1}{ca}$, $a=\dfrac{1}{ab}$, para después, al simplificar, usar la desigualdad de medias.

RESOLUCIÓN EN CLASE.

Quinta clase. Comenzamos la clase explicando formalmente la desigualdad de Nesbitt y proporcionando ejemplos para ilustrar su aplicación. Luego, procedimos a demostrar la desigualdad utilizando la técnica de reordenación, lo cual permitió a los estudiantes repasar el concepto y fortalecer su comprensión.

Posteriormente, explicamos los distintos tipos de cambios de variables y planteamos los problemas. El primer problema, que abordaba la desigualdad de Nesbitt, desafió a los estudiantes a aplicar su comprensión de la técnica de *quitar denominadores*. Aunque inicialmente algunos estudiantes encontraron dificultades al abordar el problema, todos lograron resolverlo con éxito después de un planteamiento adecuado y una guía adicional para aplicar el enfoque correcto

En el segundo ejercicio los estudiantes demostraron un excelente desempeño. Curiosamente, el problema también se vinculaba con la desigualdad de Nesbitt, lo que sirvió para reforzar la lección de que el conocimiento profundo de una desigualdad puede ayudar a los estudiantes a abordar con confianza problemas similares. Incluso si los estudiantes no recordaban exactamente la desigualdad, fueron capaces de reconocerla y se motivaron para demostrarla, ya que habían comprobado previamente que era una tarea alcanzable.

Durante la clase, aproveché la oportunidad para preguntar a los estudiantes si sabían hacer derivadas. Aproximadamente dos tercios de la clase respondieron que no tenían conocimientos sobre derivadas. Tomando en cuenta que los estudiantes eran de diferentes niveles académicos (4º de ESO, 1º y 2º de Bachillerato) decidimos no enseñar el teorema de Jensen en esa clase , ya que el 95 % de los ejercicios de las olimpiadas se pueden resolver sin ese teorema. Sin embargo, les proporcioné el teorema y algunos problemas relacionados para que pudieran practicar por su cuenta antes del día de las olimpiadas, si así lo deseaban. Este fue el último día de explicación de sucesiones en las clases de preparación de olimpiadas de matemáticas [14].

Resumiendo esta sesión, creo que estos tres problemas: Nesbitt quitando denominadores, Nesbitt sumando términos y el último ejercicio en el que aparece por sorpresa Nesbitt en mitad de un ejercicio, hacen buen hincapié tanto en los tipos de cambios de variables y que tienen que ir a mirar para saber qué tipo de cambio de variable pueden hacer y son perfectos también para desarrollar Nesbitt de múltiples formas y saber, que si te lo encuentras en mitad de un examen, puedes enunciarlo y terminar ahí el problema o puedes hacer su demostración, que no es nada complicada y existen múltiples formas de ello. Es por ello que estos tres ejercicios son perfectos.

Al concluir este capítulo, hemos profundizado en el estudio de la manipulación de desigualdades, proporcionando un conjunto mejorado y ampliado de herramientas y estrategias para la reordenación y el cambio de variable. Con esta capacidad mejorada para transformar y simplificar desigualdades, se espera motivar la creación de nuevos problemas matemáticos desafiantes. El análisis de estas clases de preparación constituyen una base sólida para la continua innovación en la enseñanza de desigualdades y su uso en problemas de olimpiada.

Capítulo IV

Desigualdades avanzadas

Durante nuestros capítulos anteriores, nos hemos centrado en el estudio y resolución de problemas basados en desigualdades clásicas como la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Nesbitt. Estas desigualdades han demostrado ser valiosas en la resolución de problemas de olimpiadas matemáticas y han ayudado a fortalecer nuestra comprensión de conceptos clave, como reordenaciones y cambios de variable. Sin embargo, hay una desigualdad adicional que no se abordó en las clases de preparación de olimpiadas debido a su requisito fundamental: conocimiento previo de derivadas. Estamos hablando de la desigualdad de Jensen, que juega un papel crucial en la teoría de desigualdades y tiene numerosas aplicaciones en campos como la teoría de la información, estadística y economía.

Además, nos adentraremos en otras desigualdades fundamentales como la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Schur y la desigualdad de Chebyshev. Estas desigualdades amplían nuestro repertorio de herramientas matemáticas, ofreciendo nuevas posibilidades para proponer y resolver problemas desafiantes que implican diferentes tipos de cantidades y relaciones entre ellas. Si bien no se abordarán en profundidad, se mencionarán y se proporcionarán algunos claros ejemplos de aplicación que enriquecen el estudio de las desigualdades numéricas.

8. Desigualdad de Jensen

La Desigualdad de Jensen, nombrada en honor al matemático danés Johan Jensen, es un resultado fundamental en el campo de la teoría de las desigualdades. Es especialmente útil para trabajar con funciones convexas y cóncavas y se utiliza frecuentemente en problemas de optimización, aunque no es más que *una extensión de la definición de convexidad de un número finito de puntos* (Bogomolny, 2018 [4])

Teorema. 8.1.
Sea f una función definida en un intervalo I de los números reales, y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en I. Si f es convexa en I, entonces para todo conjunto de números reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que suman 1, se cumple que:

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \ldots + a_nf(x_n).$$

Si f es cóncava, la desigualdad se invierte y se convertiría en $\geq$.

Una función $f(x)$ es convexa en un intervalo si para todo x en ese intervalo, la segunda derivada de la función, $f''(x)$, es mayor o igual a cero. Por otro lado, una función es cóncava si $f''(x)$ es menor o igual a cero.

La intuición detrás de esto es que una función convexa *se curva hacia arriba*, y una función cóncava *se curva hacia abajo*. Por lo tanto, si trazas una línea entre dos puntos en el gráfico de una función convexa, esa línea estará siempre por encima de la función.

Estas propiedades son fundamentales para la desigualdad de Jensen. En términos generales, la desigualdad de Jensen establece que para una función convexa, el valor de la función en el promedio de algunos puntos es siempre menor o igual que el promedio de los valores de la función en esos puntos. Para las funciones cóncavas, la relación es al revés.

Así que, aunque la desigualdad de Jensen puede entenderse sin un conocimiento profundo de las derivadas, tener un conocimiento sólido de las derivadas y de cómo se usan para analizar funciones puede ayudar a entender mejor el por qué de la desigualdad y cómo se aplica.

Para hacer algunos ejercicios, es necesario tener ejemplos y propiedades fundamentales del concepto de convexidad para la preparación de estos problemas:

1. *Las rectas son convexas y cóncavas a la vez.*
2. *Las funciones parabólicas $f(x) = ax^2 + bx + c$ son estrictamente convexas si $a > 0$ y estrictamente cóncavas si $a < 0$. En general, si una función $x \mapsto f(x)$ es estrictamente convexa, su función opuesta $x \mapsto -f(x)$ es estrictamente cóncava.*
3. *La función exponencial $f(x) = e^x$ es estrictamente convexa.*
4. *La función logarítmica $f(x) = \log x$ es estrictamente cóncava. En general, si una función es estrictamente convexa y estrictamente creciente, su inversa es estrictamente cóncava.*
5. *La función potencial $f(x) = x^a$ es estrictamente convexa si $a > 1$ y estrictamente cóncava si $0 < a < 1$.*
6. *La función valor absoluto $f(x) = |x|$ es estrictamente convexa.*
7. *La función $f(x) = 1/x$ es estrictamente convexa en $(0, \infty)$.*
8. *La función $f(x) = \sin x$ es estrictamente cóncava en $(0, \pi)$.*
9. *La suma de dos funciones convexas es una función convexa. Si una de ellas es estrictamente convexa, la suma también lo es.*
10. *La composición de dos funciones convexas y estrictamente crecientes es una función convexa. Si una de ellas es estrictamente convexa, la composición también lo es.*
11. *Si $f(x)$ es convexa, tanto $f(a+x)$ como $f(a-x)$ son convexas para cualquier valor real de a.*
12. *Si una función $f(x)$ es dos veces diferenciable y $f''(x) > 0$, entonces f es estrictamente convexa.*

(Universidad de la Rioja, 2023 [23], p 16)

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es convexa en I. Por definición de función convexa, para todo t en el intervalo $[0,1]$ y para todo x, y en I, tenemos que:

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y).$$

Tomamos $t=a_1$ y $x=x_1$, $y=a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n$. Entonces:

$$f(a_1x_1+(1-a_1)(a_2x_2+\ldots+a_nx_n)) \leq a_1f(x_1)+(1-a_1)f(a_2x_2+\ldots+a_nx_n).$$

Como f es convexa, podemos aplicar la misma lógica al término a la derecha para obtener:

$$a_1f(x_1)+(1-a_1)f(a_2x_2+\ldots+a_nx_n) \leq a_1f(x_1)+(1-a_1)a_2f(x_2)+\ldots+(1-a_1)a_nf(x_n).$$

Como $a_1+\ldots+a_n=1$, podemos reescribir el término $(1-a_1)$ como $a_2+\ldots+a_n$, y obtenemos la desigualdad de Jensen:

$$f(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n) \leq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\ldots+a_nf(x_n).$$

La demostración para el caso en el que f es cóncava sigue una lógica similar, pero la desigualdad se invierte.

□

Ejercicio. 8.2.
Demuestra que para todos los números reales positivos a, b y c, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1} \geq \frac{(a+b+c)}{(a+b+c+3)}.$$

SOLUCIÓN. Consideremos la función $f(x)=\frac{x}{x+1}$, donde x es un número real positivo. Verifiquemos que $f(x)$ es convexa en el intervalo de interés. Calculando la segunda derivada de $f(x)$, obtenemos:

$$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}>0.$$

Por lo tanto, $f(x)$ es una función convexa. Ahora, apliquemos la desigualdad de Jensen a la función $f(x)$ y a los números positivos a, b y c. Obtenemos:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1} \geq 3\cdot f\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

Simplificando la expresión, tenemos:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1} \geq \frac{a+b+c}{a+b+c+3}.$$

Esto demuestra la desigualdad dada. □

Ejercicio. 8.3.
Demuestra que

$$(ax+by)^2 \leq ax^2 + by^2$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a+b=1$, $a, b \geq 0$. ¿En qué casos se da la igualdad?
(Olimpiada Local España 2015 [20] y encontrada en (Valero, 2017 [25]))

SOLUCIÓN. Para demostrar la desigualdad utilizando la desigualdad de Jensen, consideremos la función $f(t) = t^2$. Sabemos que esta función es estrictamente convexa en todo su dominio. Por lo tanto, podemos aplicar la desigualdad de Jensen con el signo estrictamente menor.
Tomando $t_1 = ax$ y $t_2 = by$, podemos aplicar la desigualdad de Jensen de la siguiente manera:

$$\frac{1}{a+b}(f(ax)+f(by)) \geq f\left(\frac{ax+by}{a+b}\right)$$

Simplificando, obtenemos:

$$\frac{ax^2+by^2}{a+b} \geq \left(\frac{ax+by}{a+b}\right)^2$$

Dado que $a+b=1$, podemos reescribir la desigualdad como:

$$ax^2+by^2 \geq (ax+by)^2$$

Que es lo que queríamos demostrar. Esta desigualdad es cierta para todos los números reales x e y, y para todos los números reales a y b que satisfacen $a+b=1$ y $ab \geq 0$.
La igualdad no se cumple en esta desigualdad, a menos que x e y sean iguales o uno de ellos sea cero. □

9. Otras desigualdades

En el campo de las desigualdades, tenemos herramientas poderosas a nuestra disposición, tantas que no cabrían en este trabajo. Las más importantes ya la hemos expuesto pero aún hay otro grupo que destaca: las Desigualdades de Hölder, Schur y Chebyshev, cada una con su propia especialidad y propósito.

La Desigualdad de Hölder es una generalización de otras desigualdades ampliamente reconocidas, como la de Cauchy-Schwarz. Resulta particularmente útil en contextos donde se manejan sumas de productos de secuencias de números, exhibiendo su versatilidad en una gama variada de situaciones. En otro extremo, encontramos la Desigualdad de Schur, una herramienta exclusivamente diseñada para trinomios simétricos. Su forma específica hace de esta una opción valiosa cuando nos enfrentamos a problemas que se ajustan a su esquema. Por otro lado, la Desigualdad de Chebyshev emerge como una solución ideal para trabajar con secuencias ordenadas de números, posibilitando simplificaciones notables en la resolución de problemas.

No obstante, es importante recordar que las matemáticas son un campo inmensamente interconectado, ofreciendo, a menudo, varias rutas para resolver un problema. Si bien las desigualdades de Hölder, Schur o Chebyshev pueden ser de gran ayuda, existen otros métodos que también pueden ser efectivos, aunque quizás no tan directos o intuitivos.

A pesar de que no nos adentraremos en profundidad en estas tres desigualdades durante este trabajo, considero relevante su mención en este material. Conociéndolas, los estudiantes podrán ampliar sus conocimientos y disponer de herramientas adicionales en su repertorio matemático.

Desigualdad de Hölder

Según (Steele, 2004 [22]) el núcleo central de la teoría clásica de desigualdades está conformado por el cuarteto de desigualdades AM-GM, Cauchy-Schwarz, Jensen y Hölder. Así que, aunque no se haya abordado extensamente en este trabajo, conviene al menos leer este teorema.

Teorema. 9.1.
Esta desigualdad establece que, si $\{a_{ij}\}$, con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ son números reales positivos, entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{ij}}\right)^{m}$$

Por brevedad, un caso particular para las secuencias de números $\{a,b,c\}$,$\{p,q,r\}$ y $\{x,y,z\}$ quedaría como:

$$(a^3+b^3+c^3)(p^3+q^3+r^3)(x^3+y^3+z^3) \geq (apx+bpy+crz)^3.$$

La Desigualdad de Hölder es una generalización de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz y una consecuencia de la Desigualdad AM-GM, demostrando así que las desigualdades matemáticas pueden ser escalables y multifuncionales.

Desigualdad de Schur

La Desigualdad de Schur, propuesta por el matemático Issai Schur, nos permite lidiar eficientemente con trinomios simétricos. Aunque en apariencia pueda parecer más restrictiva en su aplicación que la Desigualdad de Hölder, su importancia radica en su poder para desentrañar problemas que se ajustan a su esquema particular.

Teorema. 9.2.
La desigualdad aritmética de Schur establece que si a,b,c,r son números reales no negativos, entonces:

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-a)(b-c)+c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

con igualdad si y solo si $a=b=c$ o si dos de ellos son iguales y el otro es 0.

En otras palabras, la suma de los términos de la forma $a^r(a-b)(a-c)$, $b^r(b-a)(b-c)$ y $c^r(c-a)(c-b)$ es no negativa para cualquier elección de números reales a, b y c.

Entre muchos resultados significativos que llevan su nombre, hay una sorprendente desigualdad con una instructiva prueba de una línea (Bogomolny, 2018 [4]) y que por tanto, creo conveniente introducirla:

DEMOSTRACIÓN. Debido a la simetría del lado izquierdo en las variables a, b, c, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \geq b \geq c$. Entonces la desigualdad quedaría así:

$$(a-b)[a^r(a-c)-b^r(b-c)]+c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

que se cumple porque ningún termino es negativo. □

La Desigualdad de Schur, con su enfoque en trinomios simétricos, es una poderosa herramienta en la teoría de la inecuación. Su alcance se extiende a problemas no lineales y a situaciones en las que las relaciones entre variables no son inmediatamente evidentes.

Desigualdad de Chebyshev

La Desigualdad de Chebyshev, nombrada en honor al estadístico ruso Pafnuty Chebyshev, brinda una forma eficaz de comparar la media aritmética de dos secuencias con la media aritmética de sus productos, con la cual podemos obtener valiosas simplificaciones en la resolución de problemas que implican secuencias ordenadas.

Teorema. 9.3.
La desigualdad de Chebyshev establece que dadas dos sucesiones $\{a_i\}_{i=1}^n$ y $\{b_i\}_{i=1}^n$ de números enteros positivos, se cumplen las siguientes afirmaciones:
1. Si las sucesiones están ordenadas de la misma manera (ambas crecientes o ambas decrecientes):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

2. Si las sucesiones están en orden inverso (una creciente y la otra decreciente) la desigualdad se invierte y se convertiría en $\leq$.

Por brevedad, para las secuencias de numeros a, b, c y p, q, r tal que $a \leq b \leq c$ y $p \leq q \leq r$, se diría que $3(ap+bq+cr) \geq (a+b+c)(p+q+r)$ o que $3(ar+bq+cp) \leq (a+b+c)(p+q+r)$.

Esta desigualdad es una consecuencia inmediata de la desigualdad de reordenación y establece una relación entre la media aritmética de las sucesiones y la media aritmética de sus productos, proporcionando una comparación de la dispersión de las dos sucesiones.

La Desigualdad de Chebyshev es una buena herramienta para trabajar con secuencias ordenadas de números. Su capacidad para manejar la interacción entre diferentes elementos de una secuencia la hace ideal para problemas en los que se requiere comprender la distribución de los datos.

Ahora bien, aunque hemos dado un vistazo general a estas desigualdades, podría ser útil ver un ejemplo de cómo estas herramientas se pueden utilizar en la práctica.

Para eso, vamos a emplear la Desigualdad de Hölder para resolver un problema de olimpiada. Escojo la Desigualdad de Hölder ya que la que más suele aparecer de los tres, apareciendo muy de vez en cuando a nivel de Olimpiada Internacional. Esta desigualdad, además, se aplica mediante un esquema particular que merece la pena tanto explicar como aplicar en el siguiente ejercicio:

Ejercicio. 9.4.
Dado que a, b, c son números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

(Problema sacado de Riasat, 2008 [19] que es a su vez de la Olimpiada Internacional de 2001 [12])

SOLUCIÓN.
El truco para aplicar el teorema de Hölder es conocer un esquema particular de enunciado. Si encontramos este esquema en nuestro enunciado, es muy probable que sea fácilmente resuelto por la desigualdad de Hölder. El esquema particular que buscamos es el siguiente:

$$\sum \frac{x}{y} \geq n$$

Podemos aplicar Hölder y nos quedaría como:

$$\sum \frac{x}{y} \sum \frac{x}{y} \sum (x \cdot y^2) \geq (\sum x)^3$$

Y a partir de aquí podríamos avanzar para demostrar el enunciado inicial.

Vemos que nuestro enunciado es como el esquema particular. Entonces aplicando Hölder tenemos que:

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 \left(\sum a(a^2+8bc)\right) \geq (\sum a)^3.$$

que si llevamos el segundo sumatorio al término de la derecha, quedaría:

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 \geq \frac{(\sum a)^3}{\sum (a^3+8abc)}$$

Por lo tanto, para que el término derecho sea mayor o igual que 1^2 que es lo que nos pide el enunciado, tan solo necesitamos demostrar que

$$(\sum a)^3 \geq \sum (a^3+8abc)$$

o lo que es lo mismo:

$$(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc,$$

que si desarrollamos el término de la izquierda y despejamos, vemos que es equivalente a

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Esta última desigualdad se demuestra fácilmente utilizando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica (AM-GM). Específicamente, por AM-GM, tenemos que

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}, \quad \text{y} \quad \sqrt{ca} \leq \frac{c+a}{2},$$

y si multiplicamos estos tres términos entre sí tenemos que

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq abc$$

que es lo mismo que:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

que era lo que queríamos demostrar para que el término de la derecha fuese mayor o igual que 1^2 y por tanto queda demostrado el ejercicio. □

Con la finalización de este capítulo, hemos expandido nuestro horizonte de estudio al sumergirnos en las profundidades de desigualdades avanzadas como Jensen, Hölder, Schur y Chebyshev. A pesar de que no se incluyeron en las clases de preparatorio de olimpiadas, su introducción en este análisis ha enriquecido nuestra comprensión de las desigualdades numéricas. Mediante ejemplos prácticos, hemos vislumbrado sus aplicaciones versátiles en diversos problemas de olimpiadas. Este acercamiento más profundo a estas técnicas avanzadas nos permite tener una visión más completa de las desigualdades numéricas, preparándonos para abordar problemas más desafiantes.

Capítulo V

Ejercicios para repasar

10. Problemas de Olimpiada

En este capítulo, presento un recopilatorio de problemas que se pueden resolver utilizando desigualdades. Estos problemas abarcan las competiciones locales de España, las competiciones nacionales de España y las competiciones internacionales, todos los que aparecen desde 2010 hasta 2023. La selección de estos problemas tiene como objetivo demostrar que las desigualdades son una herramienta poderosa y versátil en la resolución de problemas de olimpiadas matemáticas así como que este capítulo sirva de práctica una vez aprendido los conceptos.

Los problemas incluidos en este capítulo cubren una amplia gama de temas, como sistemas de ecuaciones, polinomios, exponenciales y sumas de términos. Sin embargo, lo más importante es que el método principal de resolución de estos problemas es a través de la aplicación de desigualdades numéricas.

Ejercicio. 10.1.
Halla todas las ternas (x, y, z) de números reales que son soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^y - 1 = 2^x + 2^{-x} \\ 3 \cdot 2^z - 1 = 2^y + 2^{-y} \\ 3 \cdot 2^x - 1 = 2^z + 2^{-z} \end{cases}$$

(Olimpiada Local España 2011 [20])

Ejercicio. 10.2.
Sean a, b, c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es

mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1. (Olimpiada Local España 2012 [20])

Ejercicio. 10.3.
Obten los valores enteros de x más próximos a 2013^{o}, tanto por defecto como por exceso, que cumplan:

$$2^{sen^2 x} + 2^{cos^2 x} = 2\sqrt{2}.$$

(Olimpiada Local España 2013 [20])

Ejercicio. 10.4.
Sean a, b números positivos. Probar que

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

(Olimpiada Local España 2014 [20])

Ejercicio. 10.5.
Demuestra que

$$(ax + by)^2 \leq ax^2 + by^2$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a + b = 1$, $a, b \geq 0$. ¿En qué casos se da la igualdad? (Olimpiada Local España 2015 [20])

Ejercicio. 10.6.
Prueba que para todo $a, b, c > 0$ se cumple que

$$\frac{a^2}{b^3 c} - \frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b} - \frac{c^2}{a}$$

¿En qué caso se cumple la igualdad?
(Olimpiada Local España 2019 [20])

Ejercicio. 10.7.
Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *si, y solamente si,* $a = b = c$.
(Olimpiada Local España 2020 [20])

Ejercicio. 10.8.
Sean a, b, c *números reales positivos. Demuestra que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?
(Olimpiada Nacional España 2011 [20])

Ejercicio. 10.9.
Sean a, b *y* n *enteros positivos tales que* $a > b$ *y* $ab - 1 = n^2$. *Prueba que*

$$a - b \geq \sqrt{4n-3}$$

Indica justificadamente cuando se alcanza la igualdad.
(Olimpiada Nacional España 2013 [20])

Ejercicio. 10.10.
Sea $n \geq 2$ entero. Determinar el menor número real positivo γ tal que para cualquier conjunto de números reales positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cualquier conjunto de números reales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ con $0 \leq y_1, y_2, \ldots, y_n \leq \frac{1}{2}$, verificando $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$, se cumpla que

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leq \gamma(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)$$

(Olimpiada Nacional España 2016 [20])

Ejercicio. 10.11.
Determina el máximo valor posible de la expresión

$$27abc + a\sqrt{a^2 + 2bc} + b\sqrt{b^2 + 2ca} + c\sqrt{c^2 + 2ab},$$

siendo a, b, c números reales positivos tales que $a + b + c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
(Olimpiada Nacional España 2017 [20])

Ejercicio. 10.12.
Los números reales a, b, c, d son tales que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ y $a+b+c+d = 1$. Demuestre que $\frac{(a+2b+3c+4d)}{(abcd)} < 1$.
(Olimpiada Internacional 2020 [12])

Ejercicio. 10.13.
Probar que la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

se satisface para cualquier elección de números reales $x_1, \ldots, x_n$.
(Olimpiada Internacional 2021 [12])

Aquí muestro una guía para la resolución de los siguientes ejercicios. Esta guía te ayudará a resolver los ejercicios de manera más rápida, pero también puedes intentar resolverlos sin consultarla, como si estuvieras participando en un simulacro de olimpiadas de matemáticas. Recuerda que cada ejercicio puede tener múltiples formas de resolución y es importante explorar diferentes enfoques.

A continuación se enumeran los ejercicios junto con una breve descripción de la estrategia que puedes utilizar para abordarlos:

- **Ejercicio 10.1**, desigualdad entre las medias aritmética y geométrica o simplificación de ecuaciones.
- **Ejercicio 10.2**, cambio del término derecho al izquierdo y simplificación.
- **Ejercicio 10.3**, desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Resuelto en 2.3.
- **Ejercicio 10.4**, desigualdad entre medias aritmética y cuadrática, cambio de variable o desigualdad de Jensen.
- **Ejercicio 10.5**, desigualdad de Cauchy-Schwarz o desiguladad de Jensen o desarrollo de la expresión. Resuelto en 8.3.
- **Ejercicio 10.6**, eliminación de denominadores y desarrollo de la expresión.
- **Ejercicio 10.7**, desarrollar el polinomio en dos casos: tanto si a,b y c son iguales, y cuando no lo son.
- **Ejercicio 10.8**, desigualdad entre las medias aritmética y geométrica o eliminación de denominadores y desarrollo de expresión.
- **Ejercicio 10.9**, desigualdad entre las medias aritmética y geométrica.
- **Ejercicio 10.10**, desigualdad de Jensen, reordenación y desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, en ese orden.
- **Ejercicio 10.11**, desigualdad de Cauchy-Schwarz y luego desigualdad entre las medias aritmética y geométrica o simplificación de expresión.
- **Ejercicio 10.12**, desigualdad entre media aritmética y armónica.
- **Ejercicio 10.13**, desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Recuerda que la resolución de estos ejercicios no solo implica llegar a un resultado correcto, sino también comprender y justificar la conclusión final. ¡Buena suerte en tu práctica!

Capítulo VI

Diario de clase

11. Preparación de olimpiadas 21/22

En las clases de preparatorio de olimpiadas del curso 2021/2022 [14], los estudiantes tenían diferentes niveles, desde 4º de ESO hasta 2º de bachillerato. La mayoría de ellos provenían de haber estado en cursos anteriores en el programa ESTALMAT, que busca detectar y estimular el talento matemático en estudiantes de primer y segundo ciclo de enseñanza secundaria. ESTALMAT selecciona un grupo jóvenes con altas capacidades matemáticas mediante una prueba de aptitud y una entrevista personal, y los estudiantes participan en sesiones regulares de tres horas una vez por semana durante varios cursos académicos.

Dado que los estudiantes del preparatorio de olimpiadas ya tenían una base sólida gracias a su participación en ESTALMAT, resultaba más fácil para mí explicarles los conceptos que les faltaban y estaban bastante acostumbrados a pensar por sí mismos y resolver todo tipo de problemas.

En las sesiones de preparatorio, se les presentaron los problemas de olimpiadas sin adaptaciones para evaluar su desempeño. El grupo estaba compuesto por entre 10 y 15 estudiantes, y las sesiones se realizaban los sábados por la mañana en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada. Cabe destacar que cuando menciono *días* en mi trabajo o en mi esquema, me refiero a la media sesión con duración de 1 hora y media, ya que la otra mitad se dedicaba al estudio de otros tipos de problemas de olimpiadas.

Este es una buena agenda para la preparación de las desigualdades numéricas en grupos de preparación de olimpiada matemática con enlace al contenido de este mismo trabajo y referencias de otros recursos mostrados en clase:

- **Día 1**. Realizado el 13 de noviembre de 2021.
  1. Explicación del concepto de desigualdad.
  2. Explicación de las propiedades de las desigualdades. (1)
  3. Los tres ejercicios de fuerza bruta. (1.5.)
  4. Muestra de los recursos de aprendizaje [13], [14], [26], [20] y [12].
- **Día 2**. Realizado el 20 de noviembre de 2021.

1. Explicación de la Desigualdad de las Medias. (2)
2. Los dos ejercicios de Desigualdad de las Medias (2.3.)

- **Día 3**. Realizado el 27 de noviembre de 2021.

1. Explicación de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz. (3)
2. Los dos ejercicios de Cauchy-Schwarz. (3.2.)

- **Día 4**. Realizado el 11 de diciembre de 2021.

1. Explicación de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz en su forma de Engel. (4)
2. Los dos ejercicios de Cauchy-Schwarz en su forma de Engel. (4.2.)
3. Problema de reordenación de la rifa en la pizarra entre todos. (6.2.).
4. Muestra del teorema de reordenación con dos variables y explicación de desigualdades simétrica y no simétricas (6)
5. Varios ejercicios de Reordenación. Algunos se dejan para casa y se tutorizan desde casa, por el grupo de whatsapp. (6.3.)
6. Entrega de los apuntes vistos hasta ahora para estudiar en navidad. Recuerdo de los recursos mostrados en la primera clase.

- **Día 5**. Realizado el 15 de enero de 2022.

1. Explicación de la desigualdad de Nesbitt. (5.1.)
2. Demostración de la desigualdad de Nesbitt por reordenación. (6.5.)
3. Explicación de cambios de variable. (7)
4. Los dos ejercicios de cambios de variable. (7.2.)
5. Entrega de lista de ejercicios para practicar. (10)

Y hasta aquí el esquema mejorado de la preparación de problemas con sucesiones aritméticas en la preparatoria de olimpiadas de matemáticas del curso 2021/22.

Conclusión

En conclusión, este Trabajo de Fin de Máster representa una innovadora guía inestimable tanto para los profesores como para los estudiantes en el estudio de las desigualdades numéricas. A través de la selección cuidadosa de problemas relevantes y su análisis crítico, se ha proporcionado una herramienta invaluable para una entendimiento más eficiente y profundo de estas desigualdades.

La implementación de estos problemas en las clases de preparación para olimpiadas matemáticas ha tenido un impacto notable en la motivación y compromiso de los estudiantes. Al enfrentar estos desafíos matemáticos, su entusiasmo por la olimpiada matemática ha crecido considerablemente, y su capacidad para el pensamiento creativo y flexible se ha fortalecido, puesto que ha permitido descubrir diferentes respuestas y enfoques para un mismo problema.

Además, esta guía facilita a los profesores la transmisión de los conceptos y estrategias de resolución de manera más efectiva y eficiente. Al proporcionar adaptaciones y sugerencias para diferentes niveles de habilidad, se simplifica la tarea de los docentes al abordar las desigualdades numéricas en la preparación para olimpiadas. Este recurso innovador también se puede emplear como base para la creación de nuevos ejercicios desafiantes, tanto para la preparación de olimpiadas como para la competición en sí. En este contexto, los estudiantes pueden comprender y aplicar los conceptos más rápidamente y con mayor precisión, fortaleciendo su dominio de las desigualdades numéricas. Así, donde antes se necesitaban cinco medias sesiones para una comprensión completa de las sucesiones numéricas, en el futuro se podría lograr en un tiempo considerablemente menor.

En resumen, este Trabajo de Fin de Máster se constituye como una guía valiosa en el estudio de las desigualdades numéricas, que acelera el proceso de aprendizaje y fomenta un mayor interés y motivación en los estudiantes. La aplicación de los problemas de desigualdades numéricas ha generado resultados positivos, estimulando la creatividad, la colaboración y el pensamiento crítico de los estudiantes. Este enfoque innovador para la enseñanza de las desigualdades ha sido fundamental para el éxito de las clases de preparación para olimpiadas matemáticas, proporcionando a los estudiantes las habilidades y competencias necesarias para enfrentar desafíos matemáticos de manera efectiva y fortaleciendo su pasión duradera por las matemáticas.

Bibliografía

[1] Andreescu, T., Cîrtoaje, V., Dospinescu, G., Lascu, M. (2004). *Old and New Inequalities*. Gil. Recuperado de https://www.isinj.com/mt-usamo/. 1, 6

[2] AoPS Incorporated. (2023). *Art of Problem Solving Online - Nesbitt's Inequality*. Recuperado de https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/. 5, 4

[3] Arhimede Association. (2019). *Arhimede Mathematical Journal. No. 1. 2019*. Recuperado de http://amj-math.com/wp-content/uploads/2019/06/AMJ2019-vol6iss1.pdf.

[4] Bogomolny, A. (2018). *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*. Recuperado de https://www.cut-the-knot.org/. 2, 8, 9

[5] Bulajich, R., Gómez, J., & Valdez, R. (2019). *Inequalities, A Mathematical Olympiad Approach*. Birkhauser. Recuperado de https://www.isinj.com/mt-usamo/. 1.4., 1.6., 4.2., 4.3., 7.3.

[6] Canadian Mathematical Society. (2023). *Crux Mathematicorum (CRUX)*. Recuperado de https://cms.math.ca/publications/crux/.

[7] Cvetkovski, Z. (2012). *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*. Springer. Recuperado de https://www.isinj.com/mt-usamo/ 2

[8] Cîrtoaje, V. (2006). *Algebraic Inequalities Old and New Methods*. Gil Publishing House. Recuperado de https://www.isinj.com/mt-usamo/. 6

[9] De Amo, E. (2017). *Desigualdades entre las medias y sus aplicaciones*. IES Martín García Ramos. Recuperado de https://w3.ual.es/eventos/OMERSMEALMERIA/ANALISIS/Desigualdadesbasadasenlasmedias.pdf.

[10] Díaz-Barrero, J.L. (s.f.) *Inequalities of Olympiad Caliber*. Recuperado de https://www.unirioja.es/talleres/creatividad_matematica/SeminarioBachillerato/resoluciondesigualdadesjoseluisdiaz.pdf.

[11] Engel, A. (1991). *Problem Solving Strategies*. Springer. Recuperado de http://www.salvemini.na.it/om/docs/engel.pdf. 6

[12] International Mathematical Olympiad. (2006). *Olimpiada Internacional de Matemática*. Recuperado de https://www.imo-official.org/?language=es. 1.7., 6.5., 9.4., 10.12., 10.13., 4

[13] Jara, P. (2014). *Problemas de Matemáticas. Análisis y Resolución*. Recuperado de https://wpd.ugr.es/~olimpiada/apuntes.php. 3.3., 6.3., 4

[14] Jara, P. (2022). *Olimpiada Matemática Española. Distrito Universitario de Granada*. Recuperado de https://www.ugr.es/~olimpiada/preparacion.html. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 4

[15] Kim, P. (2007). *Secrets in Inequalities (I)*. Gil Publishing House. Recuperado de https://www.isinj.com/mt-usamo/. 2

[16] Mildorf T. (2005). *Olympiad Inequalities*. Recuperado de https://artofproblemsolving.com/articles/files/MildorfInequalities.pdf.

[17] MIT Libraries. (2006). *Problems on Inequalities. 18.S34*. Recuperado de https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/121169.

[18] Pérez, J. (2023). *La desigualdad isoperimétrica (I)*. Recuperado de https://wpd.ugr.es/~jperez/la-desigualdad-isoperimetrica-i/. 2

[19] Riasat, S. (2008). *Basics of Olympiad Inequalities*. Recuperado de https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/161/articles/Riasat_BasicsOlympiadInequalities.pdf. 9.4.

[20] Romero, C. (2021). *Olimpiada Matemática Española*. Recuperado de http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimprab.htm. 1.5., 2.3., 8.3., 10.1., 10.2., 10.3., 10.4., 10.5., 10.6., 10.7., 10.8., 10.9., 10.10., 10.11., 4

[21] Stack Exchange Inc. (2023). *https://stackexchange.com/*. Recuperado de https://stackexchange.com/.

[22] Steele, J. (2004). *The Cauchy-Schwarz Master Class*. Cambridge. Recuperado de https://www.isinj.com/mt-usamo/. 9

[23] Universidad de La Rioja. (2023). *Talleres de creatividad matemática*. Recuperado de https://www.unirioja.es/talleres/creatividad_matematica/SeminarioBachillerato/seminarioproblemas2022.shtml. 7, 8

[24] Universidad de León. (s.f.). *Olimpiada Matemáticas*. Recuperado de https://blogs.unileon.es/olimpiadamatematicas/material-de-preparacion/. 2.4., 3.2., 3, 6.4.

[25] Valero, I. (2017). *Estudio y discusión sobre problemas de olimpiada. Desigualdades*. Recuperado de https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2017/Desigualdades.pdf 8.3.

[26] Zeitz, P. (2007). *The art and craft of problem solving*. John Wiley and Sons, Inc. Recuperado de http://www.gang.umass.edu/~franz/Paul_Zeitz_The_Art_and_Craft_of_Problem_SolvingBookosorg.pdf. 6.5., 4