# Invariantes en la resolución de problemas

José Félix Sánchez Martínez

Máster en Matemáticas

Universidad de Granada

Granada. 2017

Trabajo Fin de Máster

# Invariantes en la resolución de problemas

José Félix Sánchez Martínez

Dirección: Prof. Dr. D. Pascual Jara Martínez

Máster de Matemáticas
Universidad de Granada
Granada, 2017

# Índice general

# Introducción

A la hora de abordar un problema es importante extraer la información clave que aportan, pues puede haber información de más que no sea útil; por tanto, una de las dificultades con la que nos encontramos es la de entender el enunciado y el planteamiento del problema.
Podemos encontrar diferentes métodos para resolver los problemas que se nos plantean, entre éstos encontramos la reducción al absurdo, el principio de inducción, el principio del palomar, el principio extremal, etc. La estrategia idónea a seguir consistirá en simplificar el problema para detectar aspectos que permanecen, esto es, son invariantes. Esta técnica de resolución de problemas es la basada en invariantes.

El concepto de invariante es muy general y variado; puede ser un cierto elemento que permanece fijo, un número y en general una propiedad. Habitualmente en los textos se trata de invariantes aritméticos; en este texto queremos mostrar que hay muchas otras propiedades a las que podemos considerar como invariantes y que es de interés explorarlas y aplicarlas a la resolución de problemas.

La utilidad de los invariantes queda de manifiesto en el siguiente razonamiento. Sean $A$ y $B$ dos estados. Cuando tenemos un razonamiento lógico que nos lleva de $A$ a $B$ entonces el estado $B$ es consecuencia de $A$. Pero ¿qué ocurre cuando no disponemos de este razonamiento? Puede ser que $B$ sea una consecuencia de $A$ y puede que no lo sea. Para probar que $B$ no es una consecuencia de $A$ tendremos que encontrar un ejemplo que verifique $A$ y no verifique $B$; es en la búsqueda de este ejemplo en la que los invariantes juegan un papel fundamental si consideramos un invariante como una propiedad que se verifica tanto en el estado $A$ como en el estado $B$; se trataría pues de encontrar un ejemplo que verifique la propiedad en $A$ y no en $B$.

Al plantear la resolución de un problema tenemos que hacerlo mediante la construcción de un sistema con varios estados y buscar propiedades que sean invariantes para ellas; después solo tendremos que aplicar las transformaciones necesarias para pasar de uno a otro y comprobar si la propiedad elegida se mantiene o no invariantes.

De modo que cuando planteamos la resolución mediante un sistema de estados y transformaciones entre ellos tendremos que atender, entre otras, a las siguientes cuestiones:

- Dados dos estados es posible llegar de uno a otro mediante la conveniente transformación.
- Encontrar todos los estados finales alcanzables.
- ¿Existe convergencia hacia un estado final?
- ¿Hay periodicidad?
- y otras

Para responder a cualquiera de estas preguntas, es útil recurrir a los invariantes.

Un ejemplo de invariante se obtiene cuando para cada estado existen funciones que toman siempre valores en un determinado rango; podemos llamar invariante a cada una de estas funciones.

Ejemplo aritmético:
**Algoritmo de Euclides.** Dados $a$ y $b$ enteros positivos, con $a < b$, por el algoritmo de la división se tiene $a = bq_1 + r_1$, con $0 \leq r_1 < b$, y por tanto $mcd(a, b) = mcd(b, r_1)$.

Repitiendo el algoritmo de la división:

$$
\begin{gathered}
b = r_1 q_2 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2 q_3 + r_3,\ 0 \leq r_3 < r_2 \\
\ldots \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n,\ 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = r_n q_{n+1}
\end{gathered}
$$

Así sucesivamente, al ser $0 \leq \cdots \leq r_3 \leq r_2 \leq r_1 \leq b$, llegamos a que el último resto es cero. Por lo tanto:

$$mcd(a, b) = mcd(b, r_1) = mcd(r_1, r_2) = \cdots = mcd(r_n, 0) = r_n$$

El último resto distinto de cero, es el $mcd$ buscado. En este proceso el $mcd$ es un invariante.
La condición $mcd(a, b) = mcd(r_k, r_{k-1})$ es el invariante del algoritmo.

Ejemplo geométrico.
**Potencia de un punto respecto de una circunferencia.** Dado un punto fijo $P$, una circunferencia fija $\Gamma$, sean $A$ y $B$ los puntos de corte de una recta secante a $\Gamma$ que pasa por $P$. La potencia de $P$ respecto de $\Gamma$ es el producto $PA \cdot PB$.
El teorema de la potencia del punto respecto de una circunferencia afirma que la potencia es independiente de la secante elegida, esto es, si $A'$ y $B'$ son puntos de corte de otra secante, entonces $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$. Por tanto, la cantidad $PA \cdot PB$ es invariante.

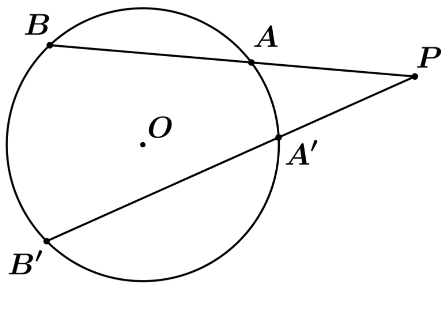


Figura 1:

Ejemplo combinatorio.
Dado un tetraedro regular, cada una de sus caras puede colorearse de blanco o de rojo. ¿De cuántas formas puede colorearse el tetraedro?
Este problema puede ser objeto de estudio para otras figuras geométricas tales como el cubo y puede estudiarse en cualquier dimensión.
Resolución:
Sean los colores $a$ y $b$, hay un total de $2^4 = 16$ coloraciones (hay repeticiones) si permitimos relaciones:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a a a a | b a a a | a b b b | b b b a |
| a a a b | a a b b | b a b a | b b a b |
| a a b a | a b a b | b a a b | b a b b |
| a b a a | a b b a | b b a a | b b b b |

Las coloraciones distinguibles serán:
Un solo color, hay 2 forma de colorearlo:

- Todo el tetraedro pintado con cada color, esto es, a a a a y b b b b.

Dos colores, hay $2+1$ formas de colorearlo:

- Si el tetraedro tiene tres caras de un color y la cara restante de otro, tenemos 2 posibilidades para las tres caras que son iguales y 1 para la restante, luego hay $2 \times 1 = 2$ coloraciones.
- Si el tetraedro tiene dos caras de un color y dos caras de otro, tenemos 2 posibilidades para las dos primeras caras que son iguales y 1 para la otras dos, pero la mitad son simétricas por rotación, luego hay $\frac{2\times 1}{2} = 1$ coloración distinguible.

Luego en total hay 5 coloraciones distinguibles. Por ejemplo:

a a a a   a a b b   a b b b   b a a a   b b b b

Este problema lo abordaremos en la sección de combinatoria de la forma en que lo hemos resuelto y también desde el punto de vita de la teoría de grupos, aplicando el Teorema de Polya-Burnside. (Problema 3.9.)

Esta memoria se organiza en bloques atendiendo a la naturaleza principal de cada uno de los problemas tratados: aritmética, geométrica, combinatoria, juegos, y finaliza con un listado de problemas que han aparecido en algunas olimpiadas matemáticas.

# Invariantes

Debido a la naturaleza multidisciplinar de los temas tratados no parece viable establecer una teoría general de invariantes, sino que ésta hay que buscarla en cada una de las disciplinas o técnicas que vayamos usando. Como consecuencia el método usado será exponer ejemplos en los que el uso de invariantes es útil para la resolución del problema propuesto.

Vamos entonces a proceder a la resolución de una serie de problemas por bloques para mostrar ejemplos invariantes. Como se ha indicado, se tratará de buscar un elemento del problema que no cambie en cada uno de los pasos del problema, con lo que podremos demostrar que ciertas situaciones son imposibles o incluso llegaremos a resolver el problema.

Es conveniente señalar que en cada problema puede o no aparecer un invariante que nos aproxime a la solución. Conviene señalar que no hay que ser dogmático, pues a veces el buscar invariantes es contraproducente pues un estudio distinto puede llevarnos más fácilmente a la solución buscada.

# 1. Bloque de aritmética

En este primer bloque trataremos problemas empleando invariantes aritméticos.

**Problema. 1.1.**
*En el alfabeto ABBA hay solo dos letras, $A$ y $B$. Además, la lengua satisface las siguientes propiedades:*
*(1) Si se eliminan dos letras seguidas AB de cualquier palabra, el significado de la palabra no varía.*
*(2) Si añadimos la combinación BA o AABB en cualquier lugar de una palabra su significado no varía.*

*¿Podemos afirmar que las palabras ABB y BAA tienen el mismo significado?*

SOLUCIÓN. Tengamos en cuenta que para cualquier operación permitida (eliminar o añadir combinaciones de letras) el número de letras $A$ es igual al número de letras $B$. Esto quiere decir que la diferencia entre el número de letras A y B es constante, por tanto es invariante. Veamos un ejemplo:
$B \sim BBA \sim BAABBBA \sim BABBA$
En todas estas palabras la cantidad de letras $B$ es una más que las de la letra $A$. Pues bien, la diferencia en la palabra $ABB$ es $-1$, y en palabra $BAA$ es 1. Esto quiere decir que de la palabra $ABB$ no podemos obtener la palabra $BAA$ usando las operaciones permitidas y por ende no podemos afirmar que sean sinónimas. □

¿Cuántas palabras con distinto significado hay de longitud mínima $1, 2, 3, \ldots$ en este alfabeto?
De longitud 1 están las palabras $A$ y $B$, ambas con distinto significado.
De longitud 2 encontramos $AA$, $AB$, $BA$ y $BB$. En este caso $AB$ y $BA$ están relacionadas: $AB \sim ABBA \sim BA$. Luego hay 3 palabras de longitud 2 con distinto significado: $AA$, $AB$ y $BB$.
De longitud 3 encontramos $AAA$, $AAB$, $ABA$, $BAA$, $ABB$, $BAB$, $BBA$, $BBB$. En este caso $ABA \sim A \sim AAB$ y $ABA \sim BAABA \sim BAA$, luego $ABA \sim A \sim AAB \sim BAA$, análogamente $BAB \sim B \sim BBA \sim ABB$. Luego hay 4 palabras de longitud 3 con distinto significado: $AAA$, $AAB$, $ABB$ y $BBB$; como $AAB \sim A$ y $ABB \sim B$ queda $AAA$, $A$, $B$, $BBB$.
De longitud 4 encontramos:
$AAAA$
$AAAB \sim AA \sim AABA \sim BAAA \sim ABAA$
$AABB \sim AB \sim ABBA \sim BABA \sim ABAB \sim BBAA \sim BAAB$
$ABBB \sim BB \sim BBBA \sim BABB \sim BBAB$
$BBBB$
Sea $|A|$ el número de $A$ que contiene una palabra y $|B|$ el número de $B$ que contiene un palabra. Observamos que las palabras con igual significado siempre tienen el mismo valor $|A| - |B|$. Por tanto, para conocer cuantas palabras con distinto significado hay de una longitud dada basta con estudiar el valor $|A| - |B|$. El representante de éstas será el que tenga menor longitud (menor número de letras) y esté relacionado con dichas palabras. Cualquier palabra de una longitud $n \geq 3$ conteniendo la sílaba $AB$ o $BA$ es equivalente a otra de longitud menor, y por tanto tendrá un representante de menor longitud.
Así, siguiendo el valor $|A| - |B|$, de longitud 1 hay 2 palabras, de longitud 2 hay 3 palabras, y de longitud 3 o superior hay 2 palabras para cada longitud. Los representantes serán los que solo contengan un solo tipo de letra $A$ o $B$ y la palabra de longitud 2 $AB$.

Con este problema se muestra la idea principal de un invariante que definimos anteriormente. Se parte de ciertos objetos junto con una serie de operaciones permitidas y la cuestión a tratar es si se puede obtener un objeto a partir de otro utilizando estas operaciones.
Para dar respuesta a esta cuestión se construye una cantidad que no cambie con las operaciones dadas, esto es, un invariante. Si el valor del invariante no es el mismo para dos objetos deseados, entonces no podremos obtener un objeto a partir de otro.

**Problema. 1.2.**
*Se tienen escritos los números* $1, 2, \ldots, 100$. *Se permite tachar dos de los números* $a$ *y* $b$ *y añadir el valor* $a + b$. *Se continúa con esta operación hasta que solo queda un número escrito. ¿Cuál es ese número?*

SOLUCIÓN. Resolver este problema repitiendo la operación descrita con los 100 números seria largo y tedioso. Con este problema se pretende mostrar la utilidad de los invariantes. Dado que la operación consiste en sustituir dos números cualesquiera por su suma, observamos que en realidad el procedimiento consiste simplemente en ir sumando los números sin importar el orden en el que los elijamos. Con cada operación nos vamos quedando con un elemento menos en la lista. Por tanto, la suma $N$ de los números no cambia. Inicialmente $N = 1 + 2 + \cdots + 100$, ¿cuál es el resultado?
Llegados a este punto es interesante conocer cómo se obtiene la suma de los $n$ primeros números naturales. Si queremos obtener la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, procedemos como sigue:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & \text{S} & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & \text{(n-2)} & + & \text{(n-1)} & + & \text{n} \\
+ & \text{S} & = & \text{n} & + & \text{(n-1)} & + & \text{(n-2)} & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & \text{2S} & = & \text{(n+1)} & + & \text{(n+1)} & + & \text{(n+1)} & + & \cdots & + & \text{(n+1)} & + & \text{(n+1)} & + & \text{(n+1)}
\end{array}$$

De aquí obtenemos que $2S = n(n+1)$, entonces $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Esta fórmula fue descubierta por Gauss con tan solo 10 años para la suma de los 100 primeros naturales.
Por tanto, aplicándolo a nuestra suma, inicialmente $N = 1 + 2 + \cdots + 100 = \dfrac{100 \cdot 101}{2} = 5050$ y como al final debe tener ese mismo valor, el número resultante es 5050. □

**Problema. 1.3.**
*Se tienen los números* $1, 2, \ldots, 20$ *escritos en fila. Se permite tachar dos de los números* $a$ *y* $b$ *y añadir el valor* $a + b - 1$. *¿Qué número queda después de 19 operaciones? ¿Dicho número dependerá del orden en que elijamos los números?*

SOLUCIÓN. Observamos que la suma $S$ de los números escritos no es un invariante, puesto que en cada operación disminuye en uno. Sin embargo, dado que en cada operación $S$ disminuye en uno, si llamamos $N$ a la cantidad de números escritos, tenemos que $N$ también disminuye en uno en cada operación. Por tanto,

tomado $T = S - N$, tenemos que $T$ es invariante, veámoslo:
Partimos de que antes de aplicar la operación permitida sobre los números $a$ y $b$ tenemos $T = S' + a + b - N$, y al aplicar dicha operación nos queda $T = S' + (a + b - 1) - (N - 1) = S' + a + b - N$, por tanto hemos comprobado que $T$ no cambia. Inicialmente $T = (1 + 2 + \cdots + 19 + 20) - 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} - 20 = 190$ y tras aplicar la operación 19 veces quedará un solo número $x$ escrito, luego $T = x - 1 = 190$. Por tanto, el último número es 191. Como hemos demostrado que $T$ no varía para cualquiera dos números $a$ y $b$ sobre los que apliquemos la operación, tenemos que el resultado, 191, no dependerá del orden en que elijamos los números. □

Si en este mismo problema, en vez de sustituir $a$ y $b$ por $a + b - 1$ los cambiamos por $ab + a + b$, ¿qué número queda?
En el problema original podíamos haber hallado la solución sin necesidad de buscar el invariante, haciendo un simple cálculo:
Dado que inicialmente la suma es $S = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$ y se hacen 19 pasos, el número buscado es $210 - 19 = 191$.
Sin embargo, con esta nueva transformación llegar a la solución no será tan sencillo, por lo que será necesario calcular el invariante.
En esta ocasión, basta darse cuenta de que $ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$. Si además de estos dos números tomamos un tercer número $c$ tenemos $(a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1$. A la vista de esto podemos tomar como invariante $P$ la cantidad obtenida al incrementar cada número en una unidad y multiplicar los resultados. Como inicialmente $P = (1 + 1)(2 + 1) \dots (19 + 1)(20 + 1) = 21!$, tras 19 operaciones quedará un número $x$ tal que $x + 1 = 21!$, luego $x = 21! - 1$.

Veamos algunos ejemplos de la vida real a los que podemos aplicar los resultados anteriores.

**Problema. 1.4.**
*Hay seis árboles dispuestos en fila, a 10 metros de distancia cada uno del siguiente. Sobre cada árbol hay situado un pájaro. Si un pájaro vuela de un árbol hasta otro, entonces, al mismo tiempo, otro pájaro vuela a otro árbol a la misma distancia pero en dirección opuesta. ¿Es posible que en algún momento todos los pájaros se encuentren sobre un mismo árbol? ¿Qué ocurrirá si tomamos siete árboles y siete pájaros en vez de seis?*

SOLUCIÓN. Dado que hay 6 árboles en fila y un pájaro sobre cada árbol, podemos asociar a cada pájaro un número, en concreto a cada pájaro le asignamos la distancia con el primero de 0 a 5. Como candidato a invariante tomamos la suma inicial $I = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Dicha suma efectivamente es un invariante puesto que si un pájaro vuela $k$ árboles, el otro vuela los mismos $k$ pero en sentido inverso, por lo que la suma no varía. Para que todos los pájaros estén posados en un mismo árbol tienen que ocurrir que $I$ sea múltiplo de 6, pero $I = 15 \neq 6 \cdot d$, por lo tanto deducimos que nunca podrán llegar a estar todos en el mismo árbol.
Consideremos ahora el caso en que tenemos siete árboles y siete pájaros. Tomamos el mismo invariante que en el apartado anterior, pues estamos bajo las mismas condiciones solo que ahora la suma inicial será $I = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Al igual que antes, para que todos los pájaros estén posados en un mismo árbol, tiene que ocurrir que $I$ sea múltiplo de 7, como $I = 21 = 7 \cdot 3$ tenemos que sí es posible que los siete pájaros estén posados sobre un mismo árbol. □

A la vista de lo desarrollado en este problema, vemos que en el primer caso no existe solución y sin embargo en el segundo sí existe, por lo que podemos preguntarnos si habrá alguna condición general para que haya o no solución. Para ello, vamos a estudiar el siguiente problema con un $n$ cualquiera:

**Problema. 1.5.**
*Hay n árboles dispuestos en fila, a 10 metros de distancia cada uno del siguiente. Sobre cada árbol hay situado un pájaro. Si un pájaro vuela de un árbol hasta otro, entonces, al mismo tiempo, otro pájaro vuela a otro árbol a la misma distancia pero en dirección opuesta. Justificar que es posible que en algún momento todos los pájaros se encuentren sobre un mismo árbol si, y sólo si, n es impar.*

SOLUCIÓN. Como los árboles distan 10 metros cada uno del siguiente, los situamos sobre el eje de coordenadas comenzando en el origen a distancia de 1 entre cada árbol puesto que el problema es equivalente.
Consideramos la suma de las distancias de cada pájaro con respecto del primer árbol. En el caso inicial la suma es $S = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$, supongamos que se mueve un pájaro del árbol $i$ una distancia $k$, entonces habrá otro pájaro situado en el árbol $j$ que se mueve una distancia $-k$, por lo que la suma quedará $S = 0+1+2+\cdots+i+k+\cdots+j-k+\cdots+(n-1) = 0+1+2+\cdots+(n-1)$, por tanto la suma es invariante. En el caso en que consiguiésemos que todos los pájaros estuviesen en el mismo árbol, la suma de las distancias de los pájaros con el primer árbol debe ser múltiplo del número de árboles $n$, es decir, $S = \dfrac{n\cdot(n-1)}{2} = n\cdot d$ con $d \in \mathbb{N}$.

- $n$ es par si, y solo si,
  $n-1$ es impar y tenemos $S = \dfrac{n\cdot(n-1)}{2} = n\cdot d$ con $d \in \mathbb{N}$; pero $\dfrac{n-1}{2} \notin \mathbb{N}$ por tanto
  $S$ no es múltiplo de $n$ y no es posible.
- $n$ es impar si, y solo si,
  $n-1$ es par y tenemos $S = \dfrac{n\cdot(n-1)}{2} = n\cdot d$ con $d \in \mathbb{N}$; $\dfrac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$ por tanto
  $S$ es múltiplo de $n$ y es posible.

Por lo tanto, solo puede suceder que todos los pájaros se encuentren en el mismo árbol si $n$ es impar. Si todos los pájaros se encuentran en el mismo árbol, entonces la suma $S$ es múltiplo de $n$, por lo que el número de árboles es impar. □

**Problema. 1.6.**
*Dado el par* $(a,b)$ *con* $a,b \in \mathbb{N}$, *se permite pasar al par* $(a,b-a)$ *si* $a<b$ *o al par* $(a-b,b)$ *si* $a>b$. *¿A partir del par* $(47685, 20184)$ *se puede llegar al par* $(1,1)$*?*

SOLUCIÓN. Observamos que la operación permitida se parece mucho a una propiedad del máximo común divisor, luego cuando $a<b$ entonces $mcd(a,b) = mcd(a,b-a)$ y cuando $a>b$ entonces $mcd(a,b) =$

$mcd(a-b,b)$. Por tanto el máximo común divisor del par $(a,b)$ es un invariante. Dado que nos pedían $(a,b) = (47685, 20184)$, tenemos $mcd(47685, 20184) = 3$ y sin embargo $mcd(1,1) = 1$ por tanto no podemos llegar al par $(1,1)$. □

A continuación clasificamos algunos problemas en función del invariante utilizado en la resolución.

## 1.1. Paridad

Los enteros se dividen en dos clases por su paridad: par e impar. Los números pares son divisibles por 2, pero los impares no. Téngase en cuenta que el cero es par. Propiedades:

- La paridad de una suma de un conjunto de enteros es impar si y solo si el número de elementos impares es impar.
- La paridad de un producto de un conjunto de enteros es impar si y solo si no hay elementos pares en el conjunto.

**Problema. 1.7.**
*Disponemos de once cifras escritas en línea: seis ceros y cinco unos. Realizamos las siguientes operaciones diez veces: tomamos dos cifras y se sustituyen por un cero si son iguales o por un uno si son distintas. ¿Cuál es la cifra resultante?*

SOLUCIÓN. Las operaciones pueden realizarse de diferentes formas, pero hay algo que no cambia, tras cada operación la suma de las cifras es siempre impar. Observamos que no importa el orden en el que estén las cifras inicialmente, pues la suma de éstas es cinco: un número impar. Veamos qué ocurre en cada operación. Llamamos $S$ a la suma de las cifras iniciales, entonces tras la primera operación ocurrirá $i$), $ii$) o $iii$):

$i$) Al sustituir un cero y un uno por un uno, la suma no varía.
$ii$) Al sustituir dos ceros por un cero, la suma no varía.
$iii$) Al sustituir dos unos por un cero, la nueva suma es $S-2$.

Por tanto, la suma disminuye en 0 o en 2. Como la suma inicial era cinco, impar, tras diez operaciones solo quedará un numero impar y por tanto es uno. En este problema hemos visto que el invariante es la paridad de la suma de las cifras.
Con esto vemos que algunos problemas de paridad son un tipo especial de problemas de invariantes. □

Otro problema muy similar a este es el siguiente:

**Problema. 1.8.**
*En una mesa hay 9 monedas, 4 de ellas con la cruz hacia arriba y 5 con la cara hacia arriba. Se permite dar la vuelta a dos monedas cualesquiera a la vez. ¿Es posible llegar a tener, mediante sucesivos movimientos permitidos, todas las monedas con la cruz hacia arriba? ¿Y dejar todas las monedas con la cara hacia arriba?*

SOLUCIÓN. Dado que el movimiento permitido consiste en girar dos monedas a la vez, ocurrirá que:

- Giramos dos monedas que muestran cara, entonces las cruces aumentan en dos y las caras disminuyen en dos.
- Giramos dos monedas que muestran cruz, entonces las cruces disminuyen en dos y las caras aumentan en dos.
- Giramos una moneda que muestra cara y otra que muestra cruz, entonces el número de ambas permanece igual.

Luego tanto la paridad del número de caras como de cruces hacia arriba es invariante, puesto que varían de la forma $2k$, con $k$ natural. El número de monedas que muestran cara inicialmente es impar, por tanto nunca podremos llegar a que todas las monedas muestren la cruz, ya que en ese caso el número de monedas que muestran cara sería par. Para contestar a la segunda pregunta basta con girar dos de las seis monedas que muestran la cruz y finalmente giramos las últimas dos monedas que muestran cruz. Por lo que efectivamente podremos dejar todas las monedas mostrando la cara. □

**Problema. 1.9.**
*Tenemos escritos en una fila los números* $1,2,\dots,2017$*. Se permite tachar cualesquiera dos números y reemplazarlos por su diferencia. ¿Se puede llegar con esta operación a que todos los números de la lista sean cero?*

SOLUCIÓN. Dado que llevar a cabo detalladamente el proceso es inabarcable, procedemos a la búsqueda de un invariante. Para ello tomamos la suma inicial $S = 1+2+\cdots+2017 = \dfrac{2017\cdot 2018}{2} = 2017\cdot 1009$ observando que dicha suma es impar. Por otro lado, vemos que $a+b-|a-b| = \begin{cases} \text{a+b-a+b=2b} & \text{si } a > b \\ \text{a+b+a-b=2a} & \text{si } a < b \end{cases}$

Por tanto el invariante a tomar será la paridad de la suma, puesto que la disminución siempre es par. Como teníamos que la suma inicial $S$ era impar, vemos que nunca se puede llegar a cero, porque entonces la suma sería par. □

Un problema muy similar a este es el siguiente:

**Problema. 1.10.**
*Tenemos escritos los números* $1,2,\dots,2018$*. Si elegimos dos números* $a$ *y* $b$ *de entre la lista de números anterior y los sustituimos por* $|a-b|$*. Pruébese que, repitiendo este proceso, al final se obtiene un número que es impar.*

SOLUCIÓN. Observamos que la suma $S$ de los números escritos no es un invariante, puesto que en cada operación disminuye. Sin embargo, si vemos cuanto disminuye obtendremos el invariante:
Consideramos $a+b-|a-b| = \begin{cases} \text{a+b-a+b=2b} & \text{si } a > b \\ \text{a+b+a-b=2a} & \text{si } a < b \end{cases}$

Vemos entonces que el invariante a tomar será la paridad de la suma, puesto que la disminución siempre es par. Inicialmente la suma vale $S = 1+2+\cdots+2018 = \dfrac{2018(2019)}{2} = 1009\cdot 2019$, que es impar. Por lo tanto el valor final será impar. $\square$

**Problema. 1.11.**
*Consideremos un círculo dividido en seis sectores y sobre cada sector hay colocada una ficha. Si solo se permite elegir dos fichas cualesquiera y moverlas a sectores adyacentes. ¿Es posible, repitiendo esta operación, acabar con todas las fichas en el mismo sector?*

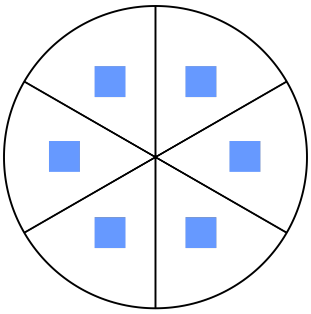

Figura 2:

Solución. Numeramos los sectores del 1 al 6 en el sentido de las agujas del reloj y para cualquier disposición de las fichas del círculo consideramos la suma $S$ de los números de los sectores ocupados por las fichas (contando la multiplicidad). Por tanto sea $S = \sum_1^6 i \cdot a_i$, donde $a_i$ es el número de fichas en el sector $i$, con $i \in \{1, \ldots, 6\}$.

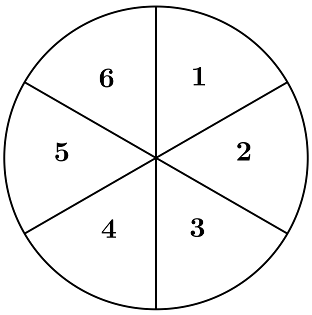


Figura 3:

Si tomamos por ejemplo una disposición de las fichas como la de la figura 4 tenemos que $S = 2+2+4+4+5+6 = 23$.
Cuando cambiamos una ficha a un sector vecino, el sumando correspondiente en la suma $S$ cambia su paridad (de par a impar o de impar a par), de lo que deducimos que si permutamos simultáneamente dos fichas

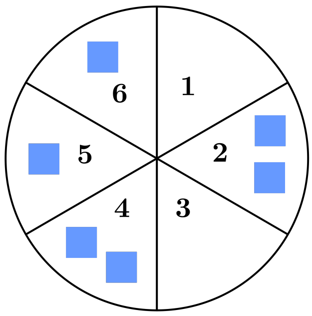


Figura 4:

entonces la paridad de $S$ no cambia, es un invariante.
Como inicialmente teníamos $S = \sum_1^6 i \cdot 1 = \dfrac{6(6+1)}{2} = 21$ impar, si todas las fichas están en un sector $i$, entonces $S = 6 \cdot i$, que es par. Por tanto no podemos pasar de la posición inicial a una posición en la cuál todas las fichas estén en el mismo sector. □

**Problema. 1.12.**
*Tenemos un juego que consta de 9 luces situadas en un tablero $3 \times 3$ que pueden iluminarse en blanco o azul, de tal forma que si se aprieta una luz del borde cambian de color ella y las vecinas, y apretando la luz central cambiad de color el resto de luces menos ella. Si inicialmente están todas las luces en blanco, ¿se puede llegar a tener todas las luces de color azul?*

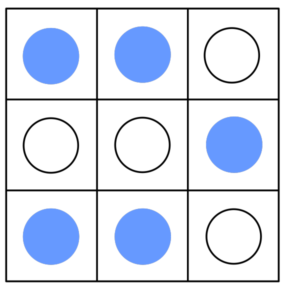

Figura 5:

SOLUCIÓN. Observamos que en cada pulsación ocurrirá $i$), $ii$) o $iii$):

$i$) Al pulsar una luz situada en una esquina cambian de color cuatro luces.

$ii$) Al pulsar una luz situada en el centro de un lateral cambian de color seis luces.

$iii$) Al pulsar la luz central cambiarán de color ocho luces.

Podemos asociar el 0 al color azul y el 1 al color blanco para facilitar la resolución. De esta forma, vemos que la paridad del número de luces blancas es un invariante, y si partimos de nueve luces de este color, nunca podremos llegar a tener cero luces blancas.

Resolución mediante órbitas.
Tenemos nueve transformaciones $\sigma_i$, $i = 1, \ldots, 9$ cada una produce el cambio señalado en el enunciado. Todo esto teniendo en cuenta la asignación de la figura 6.

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** |
| **4** | **5** | **6** |
| **7** | **8** | **9** |

Figura 6:

Cada transformación es invertible y la composición de dos de ellas es una tercera, no necesariamente es una de las $\sigma_i$.
La composición de las $\sigma_i$ es conmutativa.

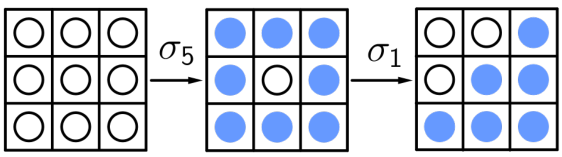


Figura 7:

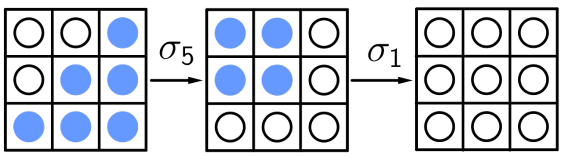


Figura 8:

Como consecuencia $\sigma_1\sigma_5\sigma_1\sigma_5 = 1$ y como son de orden 2 se tiene $\sigma_1\sigma_5 = \sigma_5\sigma_1$.
Tenemos $\sigma_2\sigma_5\sigma_2\sigma_5 = 1$ y por tanto $\sigma_2\sigma_5 = \sigma_5\sigma_2$ (figuras 9 y 10).
Para las otras se hace igual $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_9 = \sigma_9\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_6 = \sigma_6\sigma_1$, $\sigma_2\sigma_6 = \sigma_6\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_8 = \sigma_8\sigma_2$.
El resto se tiene por simetría. Para la conmutación tenemos que tener en cuenta que las casillas que están en $\sigma_i$ y no en $\sigma_j$ se mueven 2 veces, luego quedan como al inicio; lo mismo pasa con las que están en $\sigma_j$ que no están en $\sigma_i$. Las que están en $\sigma_i$ y $\sigma_j$ cambian 4 veces.

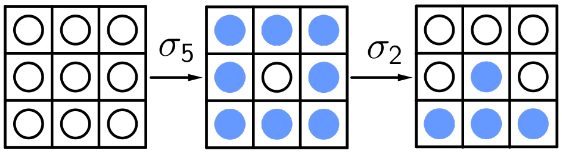


Figura 9:

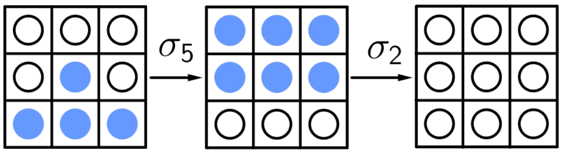


Figura 10:

Tenemos en total $\sigma_1^{e_1}\sigma_2^{e_2}\ldots\sigma_9^{e_9}$ donde $e_i \in \{0,1\}$. Por tanto tenemos $2^9$ composiciones diferentes. Se trata de ver cuando se tienen dos iguales con diferentes exponentes. Cada $\sigma_i$ produce un cambio de un número par de casillas, por tanto, como partimos de 9 y solo podemos cambiar un número par, no podremos pasar de una posición con todas las luces blancas a otra con todas las luces azules; tenemos por tanto al menos dos órbitas. ¿Existe alguna mas? Veamos que podemos cambiar dos casillas cualesquiera. En cada caso partimos del tablero con las 9 luces en blanco:

(I) La figura 11 se obtiene mediante las transformaciones $\sigma_2\sigma_1\sigma_3$.
(II) La figura 12 se obtiene mediante las transformaciones $\sigma_8\sigma_7\sigma_9\sigma_2\sigma_1\sigma_3$.
(III) La figura 13 se obtiene mediante las transformaciones $\sigma_7\sigma_4$.
(IV) La figura 14 se obtiene mediante las transformaciones $\sigma_4\sigma_7\sigma_2\sigma_3$.
(V) La figura 15 se obtiene mediante las transformaciones $\sigma_7\sigma_8\sigma_9\sigma_3\sigma_2\sigma_4$.
(VI) La figura 16 se obtiene mediante las transformaciones $\sigma_9\sigma_6\sigma_7\sigma_4$.
(VII) La figura 17 se obtiene mediante las transformaciones $\sigma_6\sigma_4\sigma_8\sigma_9\sigma_2\sigma_1$.

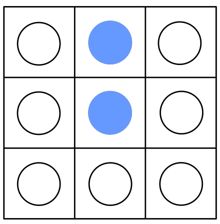

Figura 11:

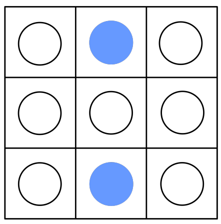

Figura 12:

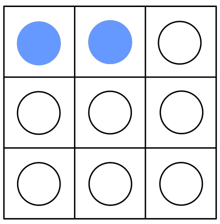

Figura 13:

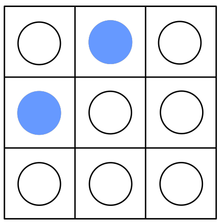

Figura 14:

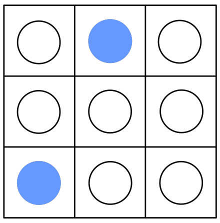

Figura 15:

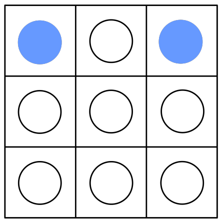

Figura 16:

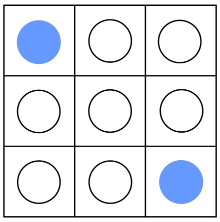

Figura 17:

Nótese que $\sigma_4$ no se ha utilizado al tratar el caso de dos casillas. Como podemos cambiar dos cualesquiera, tenemos el resultado: toda configuración con un número par de luces azules se puede alcanzar mediante las transformaciones $\sigma_i$.

Como consecuencia tenemos exactamente dos órbitas para la acción de $<\sigma_i/i=1,\cdots,9>$ sobre el tablero y tenemos una composición no trivial $\sigma_1^{e_1}\sigma_2^{e_2}\ldots\sigma_9^{e_9}$ igual a la identidad (no trivial significa que no todos los exponentes $e_i$ son nulos). □

**Problema. 1.13.**

*Sobre cada casilla de un tablero* $8\times 8$ *tenemos colocada una moneda. Una de las monedas tiene la cara hacia arriba y el resto la cruz. Si solo se permite darle la vuelta a todas las monedas de una misma fila o columna, ¿es posible llegar a que todas las monedas muestren la cara, o todas muestren la cruz?*

Solución. Vamos a estudiar si podríamos conseguir que todas fuesen cara, para conseguir que todas fuesen cruz sería el proceso inverso.

Tomamos el valor de cada moneda como $\begin{cases} 0 & \text{si muestra cruz (X)} \\ 1 & \text{si muestra cara (C)} \end{cases}$

Consideramos la suma total de los valores de las monedas, así, al inicio, antes de realizar cualquier cambio la suma es $S=1$. En el caso de que consiguiésemos que todas las monedas mostrasen cara, la suma valdría $S=64$. Vamos a distinguir casos por filas, que es análogo a hacerlo por columnas:

*i*) Si hay 0 C y 8 X en una fila, al darle la vuelta a las monedas de la fila quedan 8 C y 0 X, la diferencia es par. ($|8-0|=8$)

*ii*) Si hay 1 C y 7 X en una fila (como en la posición inicial), al darle la vuelta a las monedas de la fila quedan 7 C y 1 X, la diferencia es par. ($|7-1|=6$)

$$\text{Inicialmente partiríamos de } \begin{cases} 1 & \text{cara} \\ 63 & \text{cruces} \end{cases} \Rightarrow \text{quedan} \begin{cases} 7 & \text{caras } (+6) \\ 57 & \text{cruces } (-6) \end{cases}$$

*iii*) Si hay 2 C y 6 X en una fila, al darle la vuelta a las monedas de la fila quedan 6 C y 2 X, la diferencia es par. ($|6-2|=4$)

*iv*) Si hay 3 C y 5 X en una fila, al darle la vuelta a las monedas de la fila quedan 5 C y 3 X, la diferencia es par. ($|5-3|=2$)

*v*) Si hay 4 C y 4 X en una fila, al darle la vuelta a las monedas de la fila quedan 4 C y 4 X, la diferencia es par. ($|4-4|=0$)

Si hay 5 C y 3 X, 6 C y 2 X, 7 C y 1 X ó 8 C y 0 X, entonces estaríamos en los casos *iv*), *iii*), *ii*) y *i*) respectivamente.
En conclusión, tenemos que siempre va a haber un cambio par de C a X y viceversa al dar la vuelta a las monedas de una fila o columna.
Inicialmente $S=1$, que es impar, y como al dar la vuelta a las monedas por filas o columnas siempre se va a sumar un número par, la suma $S$ es siempre impar, entonces la paridad de la suma es un invariante. Por tanto nunca vamos a poder obtener $S=64$. En consecuencia no es posible que todas las monedas muestren cara o cruz. □

Si en el problema anterior consideramos un tablero $3 \times 3$, ¿que ocurre?
Si consideramos ahora un tablero $3 \times 3$, nos damos cuenta de que nunca vamos a poder alterar solo una moneda de una esquina mediante cambios por filas o columnas sin alterar otra moneda de otra esquina.
Por ejemplo, ver la figura 18:

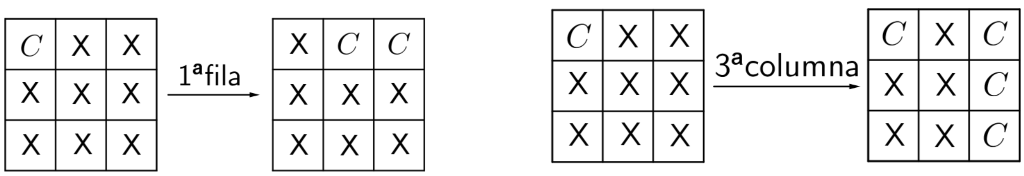


Figura 18:

Por tanto la paridad del número de caras en las esquinas es un invariante, entonces siempre vamos a tener en las esquinas 1 C y 3 X ó 3 C y 1 X.

## 1.2. Aritmética modular

Aunque la paridad es muy útil, no todos los problemas pueden ser resueltos con esta propiedad. Por tanto, necesitamos recurrir a otras propiedades que también permanezcan invariantes, este es el caso de los restos módulo $n$, con $n$ entero positivo. Curiosamente el concepto de congruencia fue introducido por Gauss en su obra *Disquisitiones Arithmeticae*. Muchos problemas de cálculo con enteros muy grandes pueden reducirse a problemas equivalentes usando enteros pequeños mediante el uso de las congruencias, en concreto los restos módulo $n$. Anteriormente hemos hablado sobre la paridad, que es el caso particular de restos módulo 2.
Definición: Sea $n$ un entero positivo, y $a, b$ dos números enteros. Se dice que $a$ y $b$ son congruentes módulo $n$ si $n$ divide a $a-b$. Se notará $a \equiv b (\text{mod } n)$, esto es,

$$a \equiv b(\text{mod } n) \Leftrightarrow m | a - b$$

**Problema. 1.14.**
*En la Isla de Croma hay camaleones de tres colores, a saber, 13 rojos, 15 verdes y 17 marrones. Cuando dos camaleones de diferente color se encuentran, ambos cambian al tercer color. ¿Es posible que después de un tiempo todos los camaleones sean del mismo color?*

SOLUCIÓN. Al abordar este problema, el primer invariante al que podemos acudir para intentar resolver el problema es la suma total de camaleones, $S = 45$. Sin embargo, si se ha utilizado este invariante para encontrar la solución vemos que no llegamos a nada, tras lo cual procederemos a buscar otro invariante que nos permita resolver el problema. El invariante que buscamos dependerá del número de camaleones de cada color, por lo que si llamamos $r$ al número de camaleones de color rojo, $v$ al de color verde y $m$ al de color marrón, el invariante dependerá de la terna $(r, v, m)$. En el caso inicial, antes de que los camaleones se crucen, tenemos $r = 13$, $v = 15$ y $m = 17$. Por otro lado, si dos camaleones de distinto colo se cruzan, tendremos:

- Se cruzan uno rojo y otro verde: $(r-1, v-1, m+2)$
- Se cruzan uno rojo y otro marrón: $(r-1, v+2, m-1)$
- Se cruzan uno verde y otro marrón: $(r+2, v-1, m-1)$

Considerando ahora la diferencia entre el número de camaleones rojos y verdes (podríamos hacer cualquier otra combinación de colores), tenemos según el color del cruce:

- Se cruzan uno rojo y otro verde: $(r-1)-(v-1) = r-v$
- Se cruzan uno rojo y otro marrón: $(r-1)-(v+2) = r-v-3$
- Se cruzan uno verde y otro marrón: $(r+2)-(v-1) = r-v+3$

Vemos que tomando solo la diferencia no es un invariante, pero si lo es tomándola módulo 3.
En el caso en que todos los camaleones llegaran a ser del mismo color debería ocurrir que la diferencia entre los camaleones rojos y verdes fuera: 0 si todos son marrones, 45 si todos son rojos y $-45$ si todos son verdes, es decir, $r - v \equiv 0(\text{mod } 3)$. Pero inicialmente teníamos $r - v = 13 - 15 = -2 \equiv 1(\text{mod } 3)$. Por tanto nunca se

va a dar el caso en que todos sean del mismo color ya que la diferencia siempre va a ser 1 ó 2 módulo 3 en función de la combinación de colores que tomemos y nunca va a llegar a ser 0. □

**Problema. 1.15.**
*Sea $n \geq 4$. Cada uno de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ toma el valor 1 o $-1$ y verifican que*

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$$

*Probar que $n$ es múltiplo de 4.*

SOLUCIÓN. Partimos de que los $a_i$ van tomando los valores 1 y $-1$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Observamos que cada $a_i$ aparece exactamente en cuatro productos, luego al cambiar de signo un $a_i$ cambian de signo los cuatro términos de $S$ en que aparece. Analizamos en la siguiente tabla el incremento al cambiar de signo un $a_i$.

| Antes | Después | Incremento |
|---|---|---|
| $+ + + +$ | $- - - -$ | $-8$ |
| $+ + + -$ | $- - - +$ | $-4$ |
| $+ + - -$ | $- - + +$ | 0 |
| $+ - - -$ | $- + + +$ | $+4$ |
| $- - - -$ | $+ + + +$ | $+8$ |

Por otro lado, puesto que al cambiar de signo cualquier $a_i$ cambian de signo 4 términos a la vez, tenemos que $S$ módulo 4 es un invariante.

Hechas estas consideraciones podemos ya dar solución al problema: al cambiar el signo de cualquier $a_i$ cambiará el signo de exactamente cuatro de los términos en $S$, luego a $S$ se sumará 8, 4 , 0, $-4$, o $-8$. Podemos partir de que los $a_i$ son inicialmente $-1$ y van cambiando de uno en uno el signo hasta llegar a ser todos 1, luego en el estado final $S = n$, entonces $S \equiv n (\text{mod } 4)$. Además inicialmente $S = 0$, así, $0 \equiv n (\text{mod } 4)$, por tanto $n$ es múltiplo de 4. □

**Problema. 1.16. (Shortlist IMO-1984)**
*Prueba que el producto de cinco números enteros positivos consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.*

SOLUCIÓN. Sea $a_1a_2a_3a_4a_5$ el producto de cinco números enteros positivos formando un cuadrado perfecto. Entre uno de estos $a_i$ hay un $a_m$ de forma que $2 \nmid a_m$, $3 \nmid a_m$ y es primo relativo con los otros cuatro números, luego $a_m$ es un cuadrado.
Se tiene entonces que $a_m \equiv 1, 5 (\text{mod } 6)$ y como es un cuadrado $a_m \equiv 1 (\text{mod } 6)$. Si $a_m = p_1^2 \ldots p_n^2$ con $p \geq 5$, dichos $p_j$ son primos impares, luego $p_j^2 \equiv 1 (\text{mod } 4)$, por tanto $a_m \equiv 1 (\text{mod } 4)$. De hecho para cada primo $p_j$ se tiene $p_j \equiv 1, 5 (\text{mod } 6)$, luego $p_j = 6k \pm 1$, y tenemos $p_j^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12k(3k \pm 1) + 1 \equiv 1 (\text{mod } 24)$, pues $k(3k \pm 1)$ es siempre par.

Dado que $a_m \equiv 1 (\text{mod } 6)$, los posibles restos módulo 6 son $0, 1, 2, 3, 4$. Ninguno de los números módulo 6 con resto $-1$ es uno de los cinco números consecutivos ya que no es un cuadrado.

Así, los cinco números serán $12k(3k \pm 1), 12k(3k \pm 1) + 1, 12k(3k \pm 1) + 2, 12k(3k \pm 1) + 3, 12k(3k \pm 1) + 4$. Podemos llevar a cabo con los $a_i$, $i = 1, 3, 4, 5$ el argumento sobre primos $p \geq 5$, obteniendo que cada $a_i$ es de la forma $2^{s_i} 3^{t_i} p_{i,1}^2 \cdots p_{i,n_i}^2$, con $p_{i,j} \geq 5$. Como $a_1 \equiv 0 (\text{mod } 24)$, se tiene $s = s_1 \geq 3$ y $t = t_1 \geq 1$. Tenemos entonces:

$$a_1 = 2^s 3^t p_{1,1}^2 \cdots p_{1,n_1}^2$$
$$a_3 = 2^s 3^t p_{1,1}^2 \cdots p_{1,n_1}^2 + 2 = 2(2^{s-1} 3^t p_{1,1}^2 \cdots p_{1,n_1}^2 + 1)$$
$$a_5 = 2^s 3^t p_{1,1}^2 \cdots p_{1,n_1}^2 + 4 = 2^2(2^{s-2} 3^t p_{1,1}^2 \cdots p_{1,n_1}^2 + 1)$$

Por tanto el exponente de 2 en $a_5$ es igual a 2. Respecto a los exponentes de 3 vemos que sólo aparecen en $a_1$ y en $a_4$, luego $a_5$ es un cuadrado perfecto; pero esto no es posible puesto que $a_5 = a_2 + 3$, y no existen dos cuadrados perfectos que se diferencien en 3 unidades salvo 1 y 4, lo que obligaría a que $a_1 = 0$.

$\square$

**Problema. 1.17. (Longlisted IMO-1985)**
*Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos tales que $a_1 | 2^{a_2} - 1$, $a_2 | 2^{a_3} - 1$, $\ldots$, $a_n | 2^{a_1} - 1$. Prueba que se tiene $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.*

Solución. Dado $a$ un entero positivo y $p$ un primo tal que $p | 2^a - 1$, ($p$ será impar), se tiene $2^a \equiv 1 (\text{mod } p)$. Por el Pequeño teorema de Fermat $2^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$, entonces $2^d \equiv 1 (\text{mod } p)$, siendo $d = \text{m.c.d.}\{a, p-1\}$. Si $d = 1$, entonces $2 \equiv 1 (\text{mod } p)$, lo que es imposible, por tanto $1 < d < p$, y existe un entero primo positivo $q$ tal que $q < p$ y $q | d$; en particular $q | a$. Si $a | 2^b - 1$, entonces $q | 2^b - 1$, por lo que $q \neq 2$.

Tomando $a = a_n$, si $p | 2^{a_n} - 1$, existe un primo $p_1 < p$ tal que $p_1 | a_n$, y $p_1 | 2^{a_1} - 1$; y existe un primo $p_2 < p_1$ tal que $p_2 | a_1$, y $p_2 | 2^{a_2} - 1$; de este forma, llegamos a que existe una cadena estrictamente descendente de primos $p_n < p_{n-1} < \cdots < p_1 < p$ tales que $p_i | 2^{a_i} - 1$.

Si tomamos $p$ el menor factor primo positivo de $2^{a_n} - 1$, llegamos a que $p_n < p$ también es un factor primo de $2^{a_n} - 1$, lo que es una contradicción.

$\square$

## 2. Bloque de geometría

En esta sección trataremos problemas de geometría, en los que emplearemos propiedades geométricas invariantes de cara a resolver los problemas planteados.

**Problema. 2.1.**
*Dado el triángulo $\triangle ABC$, probar que* Área$(ABC) = \frac{1}{2} CA \cdot AB \cdot \text{sen}(\alpha)$, *con* $\alpha = \measuredangle BAC$.

SOLUCIÓN. Comenzamos trazando la altura $h$ desde el vértice $C$, que cortará a lado $AB$ en el punto $C'$.

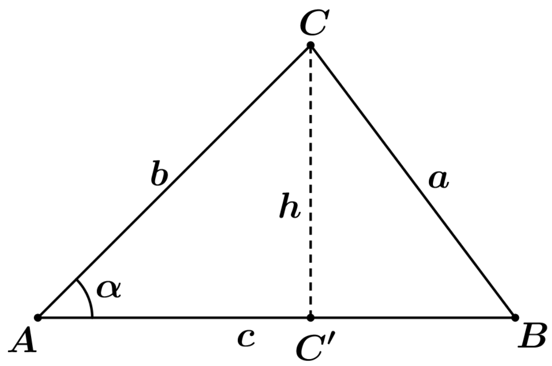


Figura 19:

Aplicando la fórmula del área del triángulo tenemos Área$(ABC) = \frac{c \cdot h}{2}$ y por otro lado $\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{b}$, luego despejando $h$ llegamos a Área$(ABC) = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2} CA \cdot AB \cdot \text{sen}(\alpha)$. □

**Problema. 2.2.**
*Dado un cuadrilátero convexo $ABCD$, sea $P$ el punto de corte de las diagonales, probar que* Área$(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \text{sen}(\alpha)$, *con* $\alpha = \measuredangle APB$.

SOLUCIÓN. Consideramos en el cuadrilátero $ABCD$ los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$. Para ambos triángulos tomamos las alturas desde los vértices $B$ y $D$, por lo que cortarán a la diagonal $AC$ en los puntos $B'$ y $C'$ respectivamente. Además, $\measuredangle APB = \measuredangle CPD = \alpha$ puesto que son opuestos por el vértice.

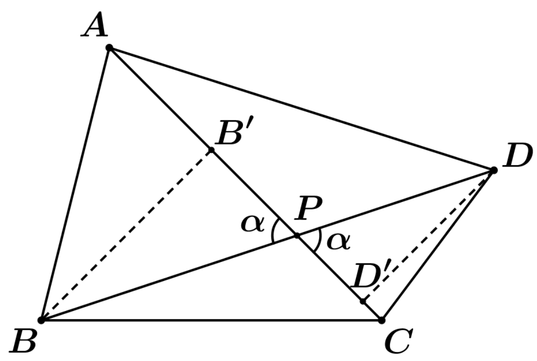


Figura 20:

Como hemos descompuesto el cuadrilátero en dos triángulos, tenemos que

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(CDA) = \frac{1}{2}AC \cdot BB' + \frac{1}{2}AC \cdot DD'$$

Podemos sustituir la igualdad del problema 2.1. o como $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{BB'}{BP}$ y $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{DD'}{DP}$ llegamos a

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2}AC \cdot BP \cdot \text{sen}(\alpha) + \frac{1}{2}AC \cdot DP \cdot \text{sen}(\alpha) = \frac{AC(BP+DP)\cdot \text{sen}(\alpha)}{2} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \text{sen}(\alpha)$$

□

**Problema. 2.3.**
*¿Pueden dos bisectrices en un triángulo ser perpendiculares?*

SOLUCIÓN. Supongamos que tenemos un triángulo $\triangle ABC$ en el que dos de sus bisectrices $A$ y $B$ son perpendiculares y llamemos $\alpha$ y $\beta$ a sus ángulos respectivamente. Estas dos bisectrices concurrirán en un punto $D$, por tanto el triángulo $\triangle ADB$ tiene un ángulo recto en $D$. Por otro lado, el ángulo del triángulo $\triangle ADB$ en $A$ es $\frac{\alpha}{2}$ y en $B$ es $\frac{\beta}{2}$. Como para todo triángulo se verifica siempre que la suma de sus ángulos es 180º, al ser $\triangle ADB$ un triángulo rectángulo, entonces $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 90 = 180$, luego $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90$ lo que implicaría que $\alpha + \beta = 180$. Por tanto dos bisectrices en un triángulo no pueden ser perpendiculares. □

**Problema. 2.4.**
*Se consideran dos cuadriláteros convexos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ cuyos lados correspondientes son iguales. Probar que si $\measuredangle A > \measuredangle A'$, entonces $\measuredangle B < \measuredangle B'$, $\measuredangle C > \measuredangle C'$ y $\measuredangle D < \measuredangle D'$.*

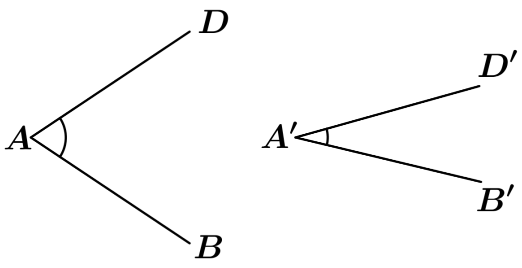


Figura 21:

SOLUCIÓN. Como $\measuredangle A > \measuredangle A'$, $0 < A' < A < 180^o$ y los lados correspondientes son iguales, tenemos que $BD > B'D'$, donde $BD$ es una diagonal del cuadrilátero $ABCD$ y $B'D'$ es una diagonal de $A'B'C'D'$.
Por lo tanto $\measuredangle C > \measuredangle C'$.
Si partiendo de $\measuredangle A > \measuredangle A'$ y de que los lados correspondientes son iguales ocurriera que $\measuredangle B > \measuredangle B'$ y $\measuredangle D > \measuredangle D'$ entonces no se cumpliría que la suma de los ángulos del cuadrilátero $ABCD$ o $A'B'C'D'$ es $360^o$. □

**Problema. 2.5.**
*La relación de tres ángulos consecutivos en un cuadrilátero inscrito es* $2:3:4$. *Encuentra sus valores.*

SOLUCIÓN. Dado que los tres ángulos son consecutivos, tenemos que los ángulos con la relación $2:4$ tienen que sumar $180^o$ puesto que son opuestos, entonces llamando $x$ el primer ángulo de los tres consecutivos tenemos que $x + 2x = 180$; $3x = 180$; $x = 60$. Luego el primero de los ángulos consecutivos es $60^o$, el siguiente es $\frac{3\cdot 60}{2} = 90^o$ y el tercero es $2 \cdot 60 = 120^o$. □

**Problema. 2.6.**
*Dado un punto interior cualquiera $P$ en un triángulo equilátero, ¿la suma de las distancias de $P$ a cada uno de los tres lados es igual al doble de la altura del triángulo?*

SOLUCIÓN. Comenzamos uniendo $P$ con cada uno de los vértices, por lo que tendremos tres triángulos $\triangle APB$, $\triangle BPC$ y $\triangle CPA$. Tenemos así que la suma de las áreas de estos tres triángulos es igual a la suma del triángulo $\triangle ABC$.
Sean $PN$, $PL$ y $PM$ perpendiculares a los lados de $\triangle ABC$ donde lo cortan las alturas de sus triángulos respectivos. Por otro lado, la altura del triángulo $\triangle ABC$ es $h$. Por tanto tenemos:

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(APB) + \text{Área}(BPC) + \text{Área}(CPA)$$

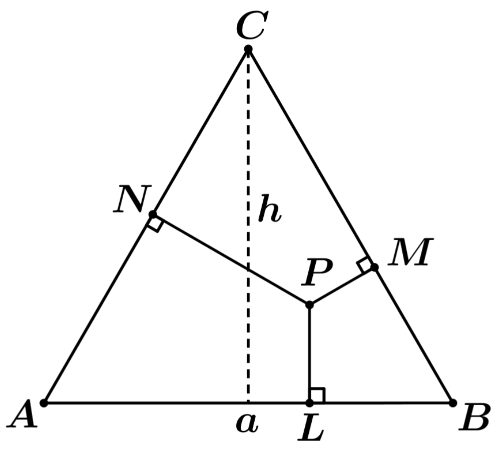


Figura 22:

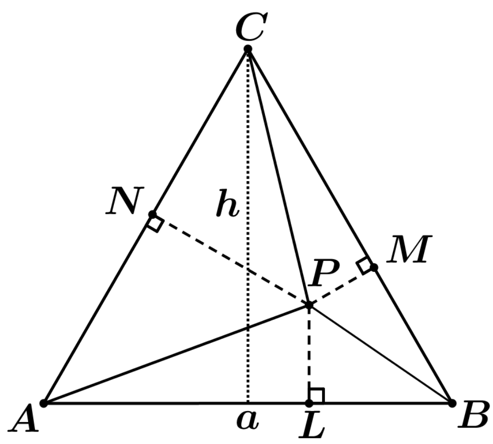


Figura 23:

Además, como todos los lados son iguales, aplicamos la fórmula del área de un triángulo:

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot PN}{2} + \frac{a \cdot PL}{2} + \frac{a \cdot PM}{2}$$

Y multiplicando por $\frac{2}{a}$ queda:

$$h = PN + PL + PM$$

Por tanto, la altura del triángulo es igual a la suma de las distancias de $P$ a cada uno de los tres lados (y es constante, ya que la altura es constante). Luego la respuesta al problema es negativa. $\square$

**Problema. 2.7. (Teorema de Ceva)**
*Sea el triángulo $\triangle ABC$. Las cevianas $AD$, $BE$, $CF$ son concurrentes si y solo si*

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}=1$$

SOLUCIÓN. Para la resolución del problema recurrimos al siguiente invariante:

$$\text{Si} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ entonces} \quad \frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$$

Ya que tomando $a=\lambda b$ y $c=\lambda d$ y sustituyendo tenemos:

$$\frac{\lambda b}{b}=\frac{\lambda d}{d}, \quad \frac{\lambda b+\lambda d}{\lambda b-\lambda d}=\frac{b+d}{b-d}, \text{ luego} \quad \frac{\lambda b+d}{b-d}=\frac{b+d}{b-d}$$

En concreto tomaremos las igualdades

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}\left(=\frac{c}{d}\right)$$

que se verifica sin más que sustituir de nuevo $a=\lambda b$ y $c=\lambda d$.

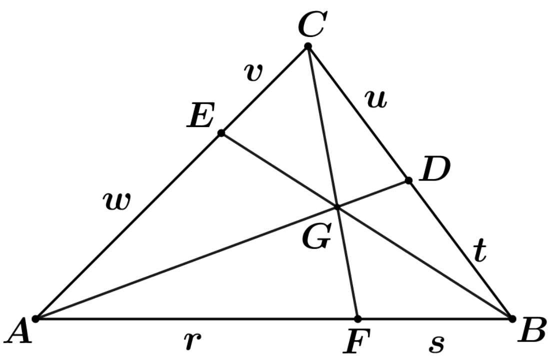


Figura 24:

Suponemos que las cevianas concurren en $G$, luego

$$\frac{AF}{FB}=\frac{r}{s}=\frac{r+v+w}{s+t+u}=\frac{v+w}{t+u}$$

$$\frac{BD}{DC}=\frac{t}{u}=\frac{r+s+t}{u+v+w}=\frac{r+s}{v+w}$$

$$\frac{CE}{EA}=\frac{v}{w}=\frac{t+u+v}{r+s+w}=\frac{t+u}{r+s}$$

Luego

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = \frac{v+w}{t+u}\frac{r+s}{v+w}\frac{t+u}{r+s} = 1$$

Veamos la otra implicación:
Partimos de que $D$, $E$ y $F$ verifican las condiciones del enunciado y suponemos que $AD$ y $BE$ se cortan en $G$. Suponemos también que el segmento $CG$ corta al segmento $AB$ en $F'$. Por tanto $\dfrac{AF'}{F'B} = \dfrac{AF}{FB}$, luego $F' = F$ y el segmento $CF$ concurre con los segmentos $AD$ y $BE$. □

**Problema. 2.8.**
*En cualquier paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de los lados.*

SOLUCIÓN.

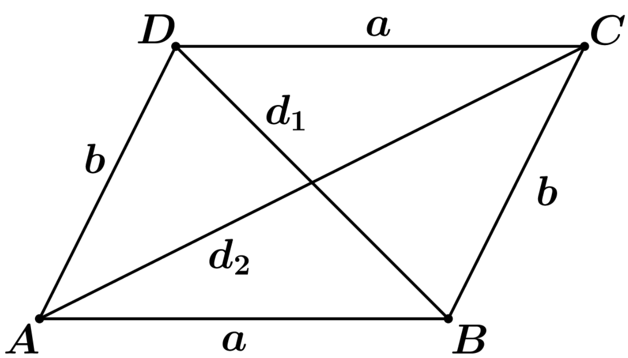


Figura 25:

Veamos que efectivamente se verifica que

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Para la resolución del problema recurrimos al Teorema del coseno. Consideramos el triángulo $\triangle ABD$, entonces aplicando el Teorema del coseno queda

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\hat{A})$$

Aplicando el Teorema del coseno al triángulo $\triangle ABC$ obtenemos

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\hat{B})$$

Ahora, como Â y B̂ son suplementarios, $\hat{A}+\hat{B}=\pi$, luego $\cos(\hat{A}) = -\cos(\hat{B})$. Sustituyendo en las ecuaciones tenemos:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\hat{A})$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\hat{A})$$

Sumando

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$$

□

**Problema. 2.9. (Teorema de Apolonio (Teorema de la mediana))**
*Para todo triángulo, la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera es igual a la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente.*

SOLUCIÓN. Partimos de un triángulo como el de la figura 26.

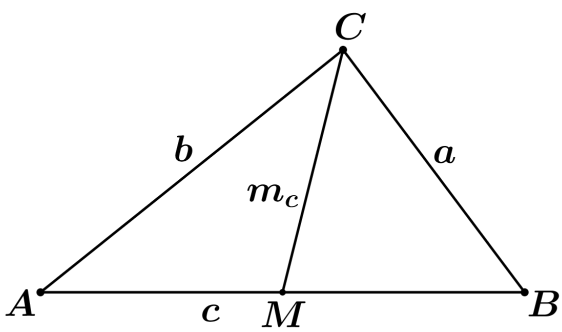


Figura 26:

Llamamos $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $m_c$a la mediana desde el vértice $C$ y $M$ al punto medio del segmento $AB$. Para la resolución del problema utilizamos el problema 2.8., por lo que a partir del triángulo anterior formamos el cuadrilátero como el de la figura 27, donde $C'$ es el simétrico de $C$ respecto del punto $M$.

Tenemos entonces

$$c^2 + (2m_c)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

y dividiendo por 2 queda:

$$\frac{c^2 + 2m_c^2}{2} = a^2 + b^2$$

□

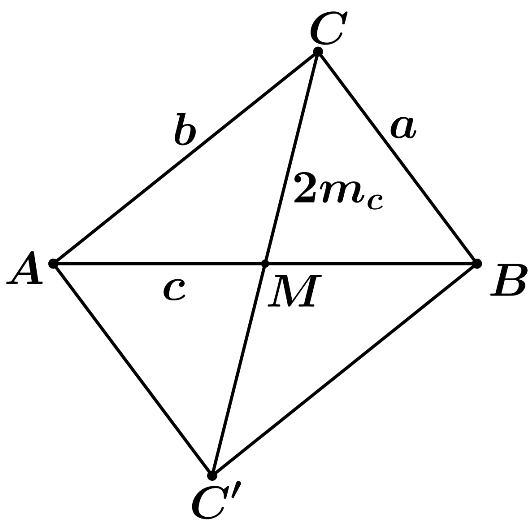


Figura 27:

**Problema. 2.10. (Teorema de Ptolomeo)**
*Dado un cuadrilátero convexo inscrito $ABCD$, probar que*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

SOLUCIÓN. Consideremos un punto $P$ en la diagonal $AC$ de forma que $\measuredangle PBC = \measuredangle ABD = \alpha$

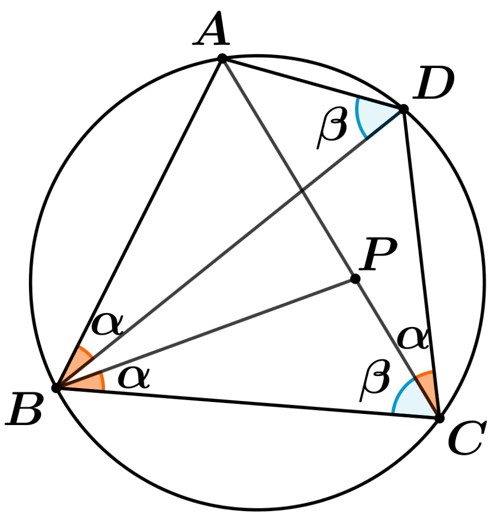


Figura 28:

Los triángulos $\triangle PBC$ y $\triangle ABD$ son semejantes puesto que también se tiene que $\measuredangle PCB = \measuredangle ADB = \beta$ por ser

$ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Luego tenemos que

$$PC = \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

Razonando de igual forma se tiene que los triángulos $\triangle ABP$ y $\triangle CBD$ son semejantes, entonces de nuevo

$$AP = \frac{AB \cdot CD}{BD}$$

Sumando ahora ambas igualdades obtenemos que

$$AP + PC = AC = \frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD},$$

con esto llegamos a que

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

□

Nota: El recíproco del Teorema también es cierto, esto es: dado un cuadrilátero, si el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos entonces el cuadrilátero es convexo inscrito (cíclico).

**Problema. 2.11.**
*Se considera un rectángulo y en tres de sus vértices hay tres tortugas. Cada tortuga, por turnos, avanza sobre la línea recta que es paralela a la recta que determinan las otras dos tortugas. ¿Puede ocurrir que las tortugas se sitúen en los puntos medios de tres lados del rectángulo?*

SOLUCIÓN. Consideramos el rectángulo $ABCD$ de la figura 29.

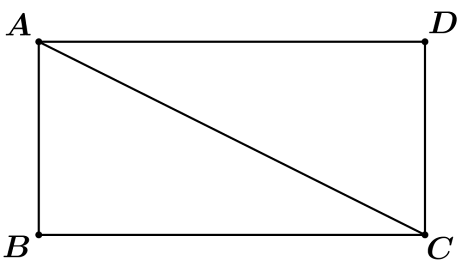


Figura 29:

Inicialmente las tortugas están situadas en los vértices $A$, $B$ y $C$.
Puesto que el único movimiento posible de cualquier tortuga consiste en avanzar en linea recta paralela a la recta que determinan los otras dos tortugas, el área que forman inicialmente las tres tortugas no varía. Esto

se debe a que dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BCE$ con $AE$ paralelo a $BC$, entonces las áreas de $\triangle ABC$ y de $\triangle BCE$ son iguales.
Como independientemente de la tortuga que se mueva el área del triángulo que forman las tres es invariante, el triángulo que forman en la posición inicial y el que formen en la posición final tiene que tener igual área. Veamos lo que sucede con el triángulo de los puntos medios:

Llamamos $P$, $Q$ y $R$ a los puntos medios de los lados $DA$, $AB$ y $CD$ respectivamente (se resuelve de forma análoga tomando el triángulo con otra combinación de los puntos medios $P$, $Q$, $R$ y $S$). Entonces el área del triángulo $\triangle PQR$ es menor que la mitad del rectángulo, de hecho su área es la cuarta parte del área de $ABCD$, veámoslo:

El área del triángulo $\triangle PQR$ es la mitad del área del rectángulo $AQRD$, y a su vez, el área del rectángulo $AQRD$ es la mitad del área del rectángulo $ABCD$, luego $\text{Área}(PQR) = \dfrac{\text{Área}(ABCD)}{4}$, mientras que $\text{Área}(ABC) = \dfrac{\text{Área}(ABCD)}{2}$.

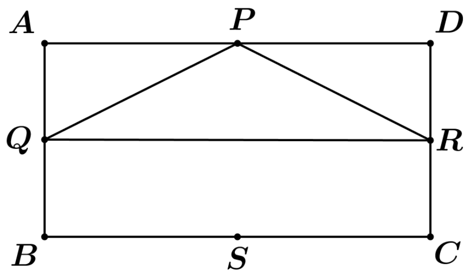


Figura 30:

Por tanto las tortugas no pueden situarse en tres de los puntos medios del rectángulo. □

**Problema. 2.12.**
*Se considera un rectángulo y un punto $P$ interior. La distancia de $P$ a tres de los vértices del rectángulo es conocida. Hallar la distancia de P al cuarto vértice.*

SOLUCIÓN. Representemos el rectángulo y el punto P (veamos por ejemplo la figura 31).
Ahora, nos fijamos en que con el punto $P$ se generan 8 triángulos rectángulos en el rectángulo (ver figura 32).

Tomando los triángulos rectángulos $\triangle AA'P$, $\triangle A'BP$, $\triangle CC'P$ y $\triangle C'DP$ y aplicando el Teorema de Pitágoras a cada uno queda

$$\left.\begin{array}{l} AA'^2 + A'P^2 = PA^2 \\ BA'^2 + A'P^2 = PB^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A'P^2 = PA^2 - AA'^2 \\ A'P^2 = PB^2 - BA'^2 \end{array}\right\} \Rightarrow PA^2 - AA'^2 = PB^2 - BA'^2$$

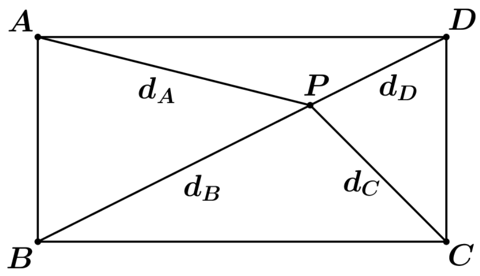


Figura 31:

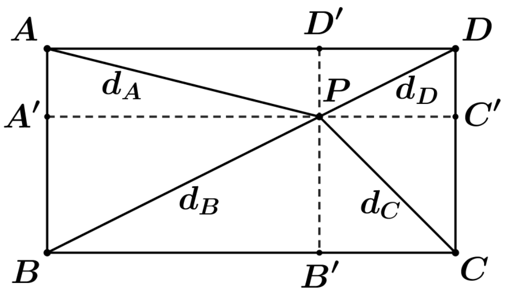


Figura 32:

$$\left.\begin{array}{l} CC'^2 + C'P^2 = PC^2 \\ DC'^2 + C'P^2 = PD^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C'P^2 = PC^2 - CC'^2 \\ C'P^2 = PD^2 - DC'^2 \end{array}\right\} \Rightarrow PC^2 - CC'^2 = PD^2 - DC'^2.$$

Sumando nos queda:

$$PA^2 - AA'^2 + PC^2 - CC'^2 = PB^2 - BA'^2 + PD^2 - DC'^2$$

Además, dado que los lados $AB$ y $CD$ son paralelos, tenemos $AA' = DC'$ y $CC' = BA'$, luego:

$$PA^2 - AA'^2 + PC^2 - CC'^2 = PB^2 - CC'^2 + PD^2 - AA'^2$$

por lo que llegamos a la relación

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

Llamamos $PA = d_A$, $PB = d_B$, $PC = d_C$ y $PD = d_D$.
Por tanto, el invariante es la igualdad entre las sumas de cuadrados de las distancias a dos vértices opuestos del rectángulo, esto es, $d_A^2 + d_C^2 = d_B^2 + d_D^2$. De aquí podemos hallar la distancia de $P$ a un vértice conociendo las otras tres distancias sin más que despejar. □

# 3. Bloque de combinatoria

Otro tipo de problemas que podemos encontrarnos son aquellos en que tenemos que contar o enumerar configuraciones al combinar un número finito de elementos. La combinatoria abarca esta clase de problemas.

## 3.1. Coloraciones

Un tipo particular de invariante es la *coloración*. La coloración está muy relacionada con la aritmética modular y la paridad, sin embargo, la ventaja respecto a estos es que no se restringe solo a las propiedades algebraicas de los enteros.

**Problema. 3.1.**
*Se considera un tablero de ajedrez* $8 \times 8$ *al que se le han quitado la esquina superior izquierda y la esquina inferior derecha. ¿Es posible recubrirlo con fichas de tamaño* $1 \times 2$*?*

SOLUCIÓN. Partimos del tablero $8 \times 8 = 64$ al que se le quitan 2 casillas, luego el tablero tiene en total 62 casillas. Coloreamos el tablero con dos colores blanco y negro, tal y como aparece en la figura 33. Cada ficha

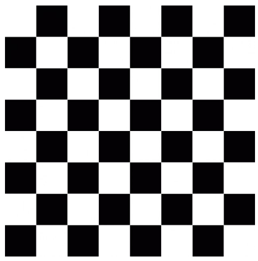

Figura 33:

$1 \times 2$ cubre exactamente una casilla de color negro y otra de color blanco, luego con las casillas se recubren 31 casillas blancas y 31 casillas negras ya que $\frac{62}{2} = 31$. Sin embargo el tablero tienen 32 casillas negras y 30 casillas blancas. Por tanto no es posible recubrir el tablero con fichas de tamaño $1 \times 2$. □

**Problema. 3.2.**
*En el ajedrez indio, que se juega sobre un tablero* $10 \times 10$*, existe una pieza especial llamada el camello, que se mueve de manera parecida al caballo del ajedrez, pero desplazándose tres casillas en una dirección, y a continuación una casilla en la dirección perpendicular. ¿Es posible mover un camello desde una casilla hasta otra contigua?*

SOLUCIÓN. Considerando el tablero $10 \times 10$ con la misma coloración que el ajedrez se observa que el camello siempre avanza sobre casillas del mismo color, y dado que las casillas contiguas a una dada son siempre del color opuesto llegamos a la conclusión de que nunca podrá alcanzar dicha posición. □

**Problema. 3.3.**
*Probar que un tablero* $10 \times 10$ *no puede recubrirse con piezas cuya forma es como la pieza de la figura 34.*

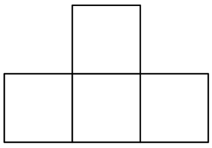

Figura 34:

SOLUCIÓN. Consideramos el tablero $10 \times 10$ con la misma coloración que el ajedrez, con casillas blancas y negras. En este caso la pieza cubre 3 casillas de un color y 1 del otro color, por lo que podemos distinguir dos casos:
Tipo $A$: $3B + 1N$
Tipo $B$: $1B + 3N$

Luego

| | B | N |
|---|---|---|
| x de tipo A | 3x | x |
| 25-x de tipo B | 25-x | 3(25-x) |
| | 25+2x | |

Además, hay 100 casillas en el tablero de las cuales 50 son de color blanco y las otras 50 son de color negro, luego $25 + 2x = 50$; $2x = 25$; $x = 12'5$, por tanto no se puede recubrir el tablero con piezas de la forma indicada. □

**Problema. 3.4.**
*Probar que un tablero* $4 \times 9$ *no puede recubrirse con piezas cuya forma es como la pieza de la figura 35.*

SOLUCIÓN. El tablero cuenta con un total de $4 \cdot 9 = 36$ casillas, luego se necesitan $36 : 4 = 9$ piezas para recubrirlo sin solapamientos.
Coloreamos el tablero $4 \times 9$ con los colores 1, 2, 3, 4 de la forma en que aparece en la figura 36.

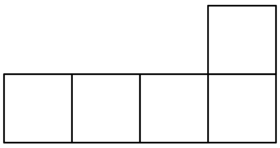

Figura 35:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 |

Figura 36:

Observamos que las fichas pueden cubrir el tablero de dos formas:
$A$: 3 casillas pares y 1 impar
$B$: 1 casilla par y 3 impares
Además, el tablero tiene igual número de casillas pares (18) que de casillas impares (18), luego para cubrirlo entero se deben colocar el mismo número de piezas del tipo $A$ y del tipo $B$. Sin embargo hay un total de 9 piezas, por tanto no podemos tener el mismo número de piezas de tipo $A$ y de tipo $B$. □

**Problema. 3.5.**
*¿Puede recubrirse un tablero* $102 \times 102$ *con piezas* $1 \times 4$ *como la de la figura 37?*

Solución. Partimos del tablero $102 \cdot 102 = 10404$. Si aplicamos la coloración como en el tablero de ajedrez veremos que no llegamos a nada, puesto que la pieza ocupa 2 casillas blancas y 2 negras y el tablero tiene 5202 casillas blancas y 5202 casillas blancas ya que $10404 : 2 = 5202$.
Pero cuando aplicamos una coloración con 4 colores como la de la figura 38 podemos entonces dar respuesta al problema. En esta coloración a cada color le asignamos un número.

Ahora cada ficha tapa una casilla de cada color, en total tapa 2061 casillas de cada color ya que $10404 : 4 = 2601$. Sin embargo, en esta coloración, analizando las dos últimas filas y columnas tenemos:
Sin la intersección de las dos últimas filas y columnas hay el mismo número de casillas de cada color, pero con

Figura 37:

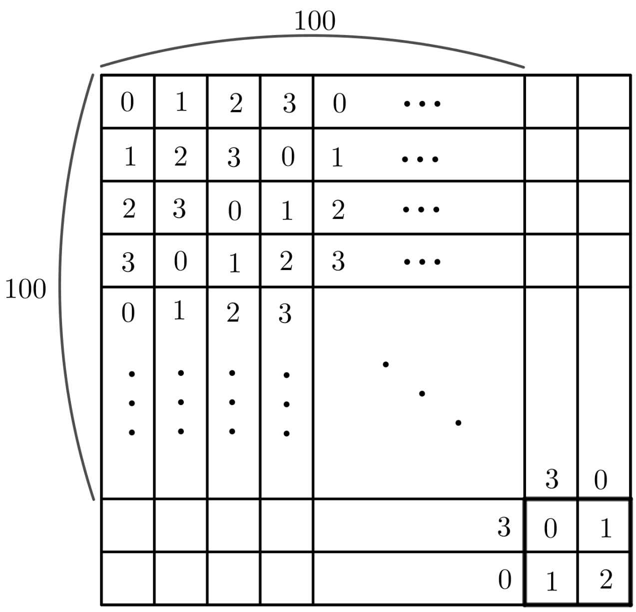

Figura 38:

la intersección tenemos que en vez de haber una casilla de cada color, el colo 1 se repite y el 3 no aparece, por tanto tenemos que realmente hay:
2601 casillas del color 0
2602 casillas del color 1
2601 casillas del color 2
2600 casillas del color 3
Por tanto no es posible recubrir el tablero con estas piezas. □

**Problema. 3.6.**
*Probar que un tablero de ajedrez no puede ser recubierto sin solaparse con 15 piezas de tamaño* $1 \times 4$ *y una pieza como la de la derecha en la figura 39.*

SOLUCIÓN. Coloreamos el tablero $8 \times 8$ con dos colores como en la figura 40.

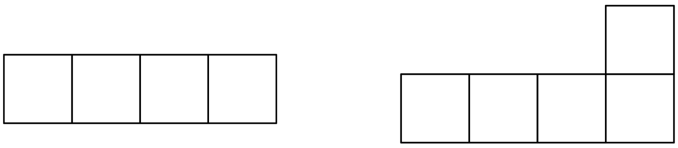

Figura 39:

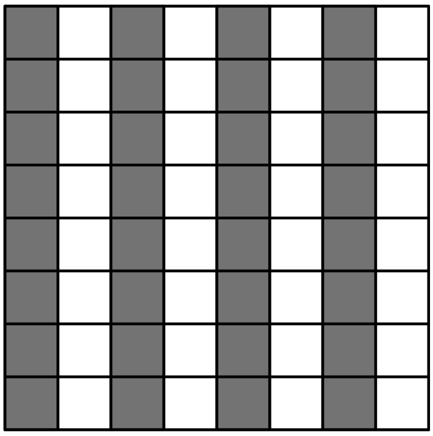

Figura 40:

El tablero consta de $8 \times 8 = 64$ casillas, entonces $\dfrac{64}{2} = 32$, por lo que hay 32 casillas de cada color (blanco y negro).
Cada ficha como la de la izquierda de la figura 39 ocupará una de las tres opciones:

*i*) 4 casillas negras

*ii*) 4 casillas blancas

*iii*) 2 casillas negras y 2 casillas blancas

Por tanto, ocupará un número par de casillas de cada color.
Cada ficha como la de la derecha de la figura 39 ocupará una de las dos opciones:

*i*) 1 casilla negra y 3 casillas blancas

*ii*) 3 casillas negras y 1 casilla blanca

Por tanto, ocupará un número impar de casillas de cada color.
Fijándonos en las casillas blancas (se razona igual con las negras), tenemos que las 15 piezas ocuparán un número par de casillas blancas (pues es la suma de números pares). Si sumamos ésto a las casillas blancas ocupadas por la única ficha del otro tipo (como ocupa un número impar) tenemos que la suma total de casillas blancas es impar, pero teníamos que el tablero tienen 32 casillas blancas. $\square$

**Problema. 3.7.**
*¿Es posible hacer pasar a un caballo de ajedrez por todas las casillas de un tablero rectangular de tamaño $4 \times N$, de manera que pase por cada casilla una única vez y vuelva de regreso al cuadrado inicial?*

SOLUCIÓN. Llamamos recorrido al hecho de hacer pasar al caballo de ajedrez por todas las casillas del tablero una única vez y que vuelva de regreso a la casilla inicial.
Coloreamos el tablero $4 \times N$ con cuatro colores distintos 0, 1, 2, 3 de la forma en que aparece en la figura 41.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | $\cdots$ |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | $\cdots$ |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | $\cdots$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | $\cdots$ |

Figura 41:

No nos preocupamos por como termina el patrón a la derecha, pues el número de columnas va a ser irrelevante en la justificación.
Supongamos que para un valor de $n$, en el tablero $4 \times n$ puede hacerse el recorrido con el caballo de ajedrez. Observamos que si el caballo está situado en una casilla de color 0, entonces solo puede moverse a otra casilla de color 2, por lo que cuando un caballo visita una casilla de color 0 mientras que realiza el recorrido, el caballo debe haber venido de una casilla de color 2 y debe ir a otra casilla de color 2 para continuar el recorrido. Además, puesto que hay un número igual de casillas de color 0 y de casillas de color 2, cuando un caballo se mueve de una casilla de color 0 a una casilla de color 2, no puede pasar de una casilla de color 2 a una de color 3, pues el caballo tendría que volver finalmente a otra casilla de color 2 antes de poder regresar a una casilla de color 0.
Tenemos pues, que el caballo tiene que evitar las casillas de color 1 y 3 con el fin de visitar todas las casillas de color 0. Por tanto, no es posible que el caballo pase por todas las casillas del tablero una única vez y vuelva de regreso al cuadrado inicial. □

**Problema. 3.8.**
*¿De cuantas formas se puede colorear los vértices del grafo de un tetraedro $n$ dimensional utilizando $n+1$ colores?*

*Un grafo $G$ es un colección finita no vacía de vértices $V$ y una colección de aristas $A$ junto con una aplicación que a cada arista le asocia dos vértices, de forma que dicha arista une dichos vértices. Una coloración en los vértices del grafo con un conjunto de colores $S$ es una correspondencia tal que a cada vértice del grafo se le asigna un color de $S$ de manera que dos vértices adyacentes (unidos por una arista) no pueden recibir el mismo color.*

SOLUCIÓN. Para obtener las coloraciones de los vértices del grafo comenzamos observando que ocurre en dimensiones pequeñas para el tetraedro:

Si $n = 2$, tenemos una arista uniendo dos vértices $A$ y $B$.
El número mínimo de colores que podemos emplear para colorear este grafo es 2. Si los colores son $a$ y $b$ y asociamos el color $a$ al vértice $A$, al vértice $B$ no le queda más remedio que asignarle el color $b$, luego solo hay una forma de colorearlo.
Con 3 colores ($a$, $b$ y $c$) hay 2 formas de colorearlo, a saber, si el vértice $A$ lo fijamos con el color $a$, para el vértice $B$ nos queda uno de los otros dos colores, por lo que tenemos $2 \cdot 1 = 2 = 2!$ formas de colorearlo.

Si $n = 3$, tenemos un triángulo, luego hay 3 aristas uniendo tres vértices $A$, $B$ y $C$.
El número mínimo de colores que podemos emplear para colorear este grafo es 3. Si los colores son $a$, $b$ y $c$ y asociamos el color $a$ al vértice $A$ y al vértice $B$ el color $b$, al vértice $C$ no le queda más remedio que asignarle el color $c$, luego solo hay una forma de colorearlo.
Con 4 colores ($a$, $b$, $c$ y $d$) hay 6 formas de colorearlo, a saber, si el vértice $A$ lo fijamos con el color $a$, para el vértice $B$ nos queda uno de los otros tres colores y para el vértice $C$ quedan dos colores, por lo que tenemos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = 3!$ formas de colorearlo.

Si $n = 4$, tenemos un tetraedro, luego hay 10 aristas uniendo cuatro vértices $A$, $B$, $C$ y $D$.
El número mínimo de colores que podemos emplear para colorear este grafo es 4. Si los colores son $a$, $b$, $c$ y $d$ y asociamos el color $a$ al vértice $A$, al vértice $B$ el color $b$ y al vértice $C$ el color $c$, al vértice $D$ no le queda más remedio que asignarle el color $d$, luego solo hay una forma de colorearlo.
Con 5 colores ($a$, $b$, $c$, $d$ y $e$) hay 24 formas de colorearlo, a saber, si el vértice $A$ lo fijamos con el color $a$, para el vértice $B$ nos queda uno de los otros cuatro colores, para el vértice $C$ quedan tres colores y para el vértice $D$ quedan dos colores, por lo que tenemos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 = 4!$ formas de colorearlo.

Nos damos cuenta de que para el tetraedro $t$-dimensional, utilizando $t+1$ colores hay $t!$ formas de colorearlo. En dimensión $n$ el tetraedro tendrá $n$ vértices. Por lo que el número mínimo de colores que podemos emplear para colorear el grafo es $n$, con lo que obtenemos solo una forma de colorearlo. Con $n+1$ colores hay $n!$ formas de colorearlo. □

**Problema. 3.9.**
*Estudiar de cuantas formas puede colorearse las caras de un tetraedro utilizando de* 1 *a* 4 *colores, sin considerar las coloraciones equivalentes. (Dos coloraciones son equivalentes si existe una rotación del tetraedro en el espacio que haga coincidir ambas coloraciones)*

SOLUCIÓN. Mostremos dos formas para resolver el problema.
Primera forma.
Describimos explícitamente las coloraciones.
Utilizando 1 color (a) hay una coloración posible: a a a a

Utilizando 2 colores (a y b) hay un total de $2^4 = 16$ coloraciones (hay repeticiones) si permitimos relaciones:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a a a a | b a a a | a b b b | b b b a |
| a a a b | a a b b | b a b a | b b a b |
| a a b a | a b a b | b a a b | b a b b |
| a b a a | a b b a | b b a a | b b b b |

Las coloraciones distinguibles serán:
Un solo color, hay 2 forma de colorearlo:

- Todo el tetraedro pintado con cada color, esto es, a a a a y b b b b.

Dos colores, hay $2 + 1$ formas de colorearlo:

- Si el tetraedro tiene tres caras de un color y la cara restante de otro, tenemos 2 posibilidades para las tres caras que son iguales y 1 para la restante, luego hay $2 \cdot 1 = 2$ coloraciones.
- Si el tetraedro tiene dos caras de un color y dos caras de otro, tenemos 2 posibilidades para las dos primeras caras que son iguales y 1 para la otras dos, pero la mitad son simétricas por rotación, luego hay $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ coloración distinguible.

Luego en total hay 5 coloraciones distinguibles.

a a a a    a a b b    a b b b    b a a a    b b b b

Utilizando 3 colores (a, b y c) hay un total de $3^4 = 81$ coloraciones con repetición, describimos directamente las coloraciones distinguibles:
Un solo color, hay 3 formas de colorearlo:

- Todo el tetraedro pintado con cada color.

Dos colores, hay $6 + 3$ formas de colorearlo:

- Si el tetraedro tiene tres caras de un color y la cara restante de otro, tenemos 3 posibilidades para las tres caras que son iguales y 2 para la restante, luego hay $3 \cdot 2 = 6$ coloraciones.

- Si el tetraedro tiene dos caras de un color y dos caras de otro, tenemos 3 posibilidades para las dos primeras caras que son iguales y 2 para la otras dos, pero la mitad son simétricas por rotación, luego hay $\frac{3\cdot 2}{2} = 3$ coloraciones distinguibles.

Tres colores, hay 3 formas de colorearlo:

- Dos caras de un color, otra cara de otro y otra cara de otro color, tenemos 3 posibilidades para las dos caras que son iguales, 2 para la primera cara de otro color y 1 para la segunda cara de otro color, pero la mitad son simétricas por rotación, luego hay $\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2} = 3$ coloraciones distinguibles.

Luego en total hay 15 coloraciones distinguibles.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a a a a | b b b b | a a c c | c b b b |
| a a b b | a a b c | a c c c | b c c c |
| a b b b | a b b c | c a a a | c c c c |
| b a a a | a b c c | b b c c | |

Utilizando 4 colores (a, b, c y d) hay un total de $4^4 = 256$ coloraciones con repetición, describimos directamente las coloraciones distinguibles:
Un solo color, hay 4 formas de colorearlo:

- Todo el tetraedro pintado con cada color.

Dos colores, hay $12 + 6$ formas de colorearlo:

- Si el tetraedro tiene tres caras de un color y la cara restante de otro, tenemos 4 posibilidades para las tres caras que son iguales y 3 para la restante, luego hay $4 \cdot 3 = 12$ coloraciones.

- Si el tetraedro tiene dos caras de un color y dos caras de otro, tenemos 4 posibilidades para las dos primeras caras que son iguales y 3 para la otras dos, pero la mitad son simétricas por rotación, luego hay $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ coloraciones distinguibles.

Tres colores, hay 12 formas de colorearlo:

- Dos caras de un color, otra cara de otro y otra cara de otro color, tenemos 4 posibilidades para las dos caras que son iguales, 3 para la primera cara de otro color y 2 para la segunda cara de otro color, pero la mitad son simétricas por rotación, luego hay $\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2} = 12$ coloraciones distinguibles.

Cuatro colores, hay 2 formas de colorearlo:

- Solo hay 2 coloraciones que no son simétricas.

Luego en total hay 36 coloraciones distinguibles.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a a a a | a b b c | a a b d | a c c d | b c c c | b c d d |
| a a a b | a b c c | a a c d | a c d d | c c c c | b d d d |
| a a b b | a a c c | a b b d | a d d d | b b b d | c c c d |
| a b b b | a c c c | a b c d | b b b b | b b d d | c c d d |
| a a a c | a a a d | a b d c | b b b c | b b c d | c d d d |
| a a b c | a a d d | a b d d | b b c c | b c c d | d d d d |

Segunda forma.
Para la resolución del problema, comenzamos introduciendo las siguientes nociones de teoría de grupos finitos: Sea $G$ un grupo actuando sobre un conjunto $X$; en $X$ definimos la relación $R_G$ mediante:

$$xR_G y \text{ si existe } g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x$$

Cada clase de equivalencia para la relación $R_G$ se llama una órbita de la acción. Para un elemento $x \in X$, la órbita de $x$ se presenta por:

$$\mathrm{Orb}_G(x) = \{g \cdot x \in X : g \in G\}$$

El conjunto de todas las órbitas se representa por $X/G$.

Sea $G$ un grupo actuando sobre un conjunto $X$, para cada elemento $x \in X$ consideramos el conjunto de los elementos de $G$ que dejan fijo a $x$. Definimos el estabilizador de $x \in X$ como el subgrupo de G

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Teorema de Polya-Burnside.
Sea el grupo finito $G$ actuando sobre un conjunto $X$. Para cada $g \in G$, sea $c(g) = |\{x \in X : g \cdot x = x\}|$ y sea $R_G$ la relación de equivalencia en $X$. Entonces

$$|G||X/G| = \sum_{g \in G} c(g)$$

Vamos ahora a proceder con la resolución.
El conjunto $X$ es el número total de coloraciones usando $n$ colores del conjunto de las cuatro caras de un tetraedro, luego $|X| = n^4$. Por tanto aquí estamos considerando $n^4$ formas de colorear con repetición.
Al aplicar una rotación de $G$ a las coloraciones en $X$, recuperamos todas las coloraciones posibles pero en un orden distinto. Todas las posibles coloraciones sin repetición serán las órbitas para la acción de $G$ sobre $X$.

Para dar solución al problema recurrimos al Teorema de Polya-Burnside, pues $G$ es finito, por tanto debemos contar el número de coloraciones invariantes para cada rotación, sumar dichos números y dividir por el número de rotaciones.

$G$ es el grupo de rotaciones del tetraedro, que es isomorfo al grupo alternado $A_4$, luego $|G| = 12$.

Comenzamos analizando los 12 elementos de $G$:

- 1 es la identidad.

- 8 rotaciones de ángulo $2\pi/3$ en cualquier dirección sobe un eje que pasa por un vértice y el centro de la cara opuesta. De igual forma podríamos rotar con ángulo $4\pi/3$. Como hay 4 vértices, de aquí tenemos ocho elementos del grupo.

- 3 rotaciones de ángulo $\pi$ alrededor de un eje que pasa por el punto medio de una arista, el centro del tetraedro y el punto medio de la arista opuesta. Como hay 6 aristas, tenemos 3 pares de aristas, que nos dan los últimos tres elementos de $G$.

Ahora analicemos casos para los distintos colores empleados:
Con 1 color: $|X| = 1^4 = 1$ coloración.

Con 2 colores:
Desarrollamos cada caso:

- Una rotación $g$ de $2\pi/3$ alrededor de un eje que pasa por un vértice $v$: para que la coloración sea invariante bajo esta rotación debe ocurrir que las tres caras adyacentes a $v$ sean del mismo color y la otra cara pueda ser cualquier color; esto es, las caras están divididas en dos órbitas, una que consta de dichas tres caras adyacentes a $v$ y otra que consta de la cara restante. El número de coloraciones invariantes es $c(g) = 2 \cdot 2 = 4$, y como son 8 rotaciones tenemos $8 \cdot 4 = 32$.

- Una rotación $g$ de $\pi$ alrededor de un eje a través de dos aristas opuestas, $k$ y $l$: aquí también hay dos órbitas, las dos caras que se encuentran en cada una de las dos aristas $k$ y $l$ deben ser del mismo color, luego tenemos dos órbitas. Tenemos entonces que hay $c(g) = 2 \cdot 2 = 4$ coloraciones invariantes, y como son 3 rotaciones tenemos $3 \cdot 4 = 12$.

- La identidad: cada cara es una órbita separada, todas las $c(g) = |X| = 2^4 = 16$ coloraciones son invariantes, $1 \cdot 16 = 16$.

Por tanto, aplicando Teorema de Polya-Burnside hay $|X/G| = \dfrac{8 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 16}{12} = \dfrac{60}{12} = 5$ órbitas (coloraciones distinguibles).

Con 3 colores:
Desarrollamos cada caso de forma análoga:

- Una rotación $g$ de $2\pi/3$ alrededor de un eje que pasa por un vértice. El número de coloraciones invariantes es $c(g) = 3 \cdot 3 = 9$, y como son 8 rotaciones tenemos $8 \cdot 9 = 72$.

- Una rotación $g$ de $\pi$ alrededor de un eje a través de dos aristas opuestas. El número de coloraciones invariantes es $c(g) = 3 \cdot 3 = 9$, y como son 3 rotaciones tenemos $3 \cdot 9 = 27$.

- La identidad: $c(g) = |X| = 3^4 = 81$.

Por tanto, hay $|X/G| = \dfrac{8 \cdot 9 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 81}{12} = \dfrac{180}{12} = 15$ coloraciones distinguibles.

Con 4 colores:
Desarrollamos cada caso:

- Una rotación $g$ de $2\pi/3$ alrededor de un eje que pasa por un vértice. El número de coloraciones invariantes es $c(g) = 4 \cdot 4 = 16$, y como son 8 rotaciones tenemos $8 \cdot 16 = 128$.

- Una rotación $g$ de $\pi$ alrededor de un eje a través de dos aristas opuestas. El número de coloraciones invariantes es $c(g) = 4 \cdot 4 = 16$, y como son 3 rotaciones tenemos $3 \cdot 16 = 48$.

- La identidad: $= |X| = 4^4 = 256$.

Por tanto, hay $|X/G| = \dfrac{8 \cdot 16 + 3 \cdot 16 + 1 \cdot 256}{12} = \dfrac{243}{12} = 36$ coloraciones distinguibles.

En general, para colorear las caras de un tetraedro con $n$ colores, el número de órbitas (coloraciones distinguibles) es $|X/G| = \dfrac{8 \cdot n^2 + 3 \cdot n^2 + n^4}{12} = \dfrac{11 \cdot n^2 + n^4}{12}$. □

El análisis llevado a cabo para el caso concreto del tetraedro en tres dimensiones, en el que se han estudiado las coloraciones de las caras, es equivalente a estudiar las coloraciones de los vértices.

Estudiemos el caso del tetraedro regular 2-dimensional (triángulo equilátero) coloreando los vértices tal y como hemos hecho en el problema anterior para.

Triángulo equilátero en dimensión 2:
El conjunto $X$ es el número total de coloraciones usando $n$ colores del conjunto de los tres vértices de un triángulo equilátero, luego $|X| = n^3$. Por tanto aquí estamos considerando $n^3$ formas de colorear con repetición. Todas las posibles coloraciones sin repetición serán las órbitas para la acción de $G$ sobre $X$, donde $G$ es el grupo de rotaciones del triángulo equilátero, que es isomorfo al grupo alternado $D_3$, luego $|G| = 6$.
Comenzamos analizando los 6 elementos de $G$:

- 1 es la identidad.
- 2 rotaciones de ángulo $2\pi/3$ alrededor de un eje perpendicular al triángulo y que pasa por su centro. De igual forma podríamos rotar con ángulo $4\pi/3$. Obtenemos así dos elementos de $G$.
- 3 rotaciones de ángulo $\pi$ alrededor de un eje desde el vértice hasta el punto medio de la arista opuesta. Hay 3 aristas, que nos dan los últimos tres elementos de $G$.

Ahora analicemos casos para los distintos colores empleados:
Con 1 color: $|X| = 1^3 = 1$ coloración.

Con 2 colores:
Desarrollamos cada caso:

- Una rotación $g$ de $2\pi/3$ alrededor de un eje perpendicular al triángulo. Hay 1 órbita. El número de coloraciones invariantes es $1 \cdot 2 = 2$, y como son 2 rotaciones tenemos $2 \cdot 2 = 4$.
- Una rotación $g$ de $\pi$ alrededor de un eje desde el vértice hasta el punto medio de la arista opuesta. Hay 2 órbitas. Tenemos entonces que hay $2 \cdot 2 = 4$ coloraciones invariantes, y como son 3 rotaciones tenemos $3 \cdot 4 = 12$.
- La identidad: todas las $c(g) = |X| = 2^3 = 8$ coloraciones son invariantes, $1 \cdot 8 = 8$.

Por tanto, aplicando Teorema de Polya-Burnside hay $|X/G| = \dfrac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 8}{12} = \dfrac{24}{6} = 4$ coloraciones distinguibles.

Con 3 colores:
Desarrollamos cada caso de forma análoga:

- Una rotación $g$ de $2\pi/3$ alrededor de un eje perpendicular al triángulo. El número de coloraciones invariantes es $c(g) = 1 \cdot 3 = 3$, y como son 2 rotaciones tenemos $2 \cdot 3 = 6$.
- Una rotación $g$ de $\pi$ alrededor de un eje desde el vértice hasta el punto medio de la arista opuesta. Tenemos entonces que hay $c(g) = 3 \cdot 3 = 9$ coloraciones invariantes, y como son 3 rotaciones tenemos $3 \cdot 9 = 27$.
- La identidad: $c(g) = |X| = 3^3 = 27$.

Por tanto, hay $|X/G| = \dfrac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 27}{6} = \dfrac{60}{6} = 10$ coloraciones distinguibles.

Con 4 colores:
Desarrollamos cada caso de forma análoga:

- Una rotación $g$ de $2\pi/3$ alrededor de un eje perpendicular al triángulo. El número de coloraciones invariantes es $c(g) = 1 \cdot 4 = 4$, y como son 2 rotaciones tenemos $2 \cdot 4 = 8$.
- Una rotación $g$ de $\pi$ alrededor de un eje desde el vértice hasta el punto medio de la arista opuesta. Tenemos entonces que hay $c(g) = 4 \cdot 4 = 16$ coloraciones invariantes, y como son 3 rotaciones tenemos $3 \cdot 16 = 48$.
- La identidad: $c(g) = |X| = 4^3 = 64$.

Por tanto, hay $|X/G| = \dfrac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 16 + 1 \cdot 64}{6} = \dfrac{120}{6} = 20$ coloraciones distinguibles.

En general, para colorear los vértices de un triángulo equilátero con $n$ colores, el número de órbitas (coloraciones distinguibles) es $|X/G| = \dfrac{2 \cdot n + 3 \cdot n^2 + 1 \cdot n^3}{6}$.

Pasamos ahora a analizar la composición del tetraedro en una dimensión dada. La tabla 1 muestra los elementos de que se compone el tetraedro en las distintas dimensiones: el número de vértices (V), aristas (caras de dimensión 1, $C_1$), triángulos (caras de dimensión 2, $C_2$), tetraedros (caras de dimensión 3, $C_3$), hipertetraedros (caras de dimensión 4, $C_4$), etc.

| Tetraedro \ Elementos | $V$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $\cdots$ | $C_t$ | $\cdots$ | $C_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1D$ | 2 | 1 | | | | | | | |
| $2D$ | 3 | 3 | 1 | | | | | | |
| $3D$ | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | |
| $4D$ | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | |
| $\cdots$ | | | | | | | | | |
| $nD$ | $\binom{n+1}{1}$ | $\binom{n+1}{2}$ | $\binom{n+1}{3}$ | $\binom{n+1}{4}$ | $\binom{n+1}{5}$ | $\cdots$ | $\binom{n+1}{t}$ | $\cdots$ | $\binom{n+1}{n+1}$ |

Tabla 1: Tabla tetraedro.

Observamos que la tabla 1 del tetraedro es el triángulo de Pascal al que le falta la columna de unos, que se obtiene al tomar la dimensión 0, luego llegamos a la tabla 2.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0D | 1 | | | | | | $\sum = 2^1$ |
| 1D | 1 | 2 | 1 | | | | $\sum = 2^2$ |
| 2D | 1 | 3 | 3 | 1 | | | $\sum = 2^3$ |
| 3D | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | $\sum = 2^4$ |
| 4D | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | $\sum = 2^5$ |

Tabla 2: Tabla.

Recordemos la fórmula de Euler para poliedros convexos.
En un poliedro convexo con $C$ caras, $A$ aristas y $V$ vértices se cumple que:

$$V - A + C = 2$$

Si lo aplicamos al tetraedro en dimensión 3 tenemos que efectivamente se verifica $4 - 6 + 4 = 2$. Intentemos deducir la fórmula en dimensión 4, para ello analizamos el caso del tetraedro en dimensión 3 empleando la fórmula de Euler y la fórmula de Newton:

$$1 + V + A + C + 1 = 2^4 = 16$$

Y llamando $C_i$ a las caras de dimensión $i$:

$$1 + C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 2^4 = 16$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = (1+1)^4 = 16$$

También se obtiene:

$$\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = (1-1)^4 = 0$$

$$1 - C_0 + C_1 - C_2 + C_3 = 0$$

$$1 - V + A - C + 1 = 0$$

Esto es, $\quad 1 + A + 1 = V + C; A + 2 = V + C \quad$ y $\quad 1 + C_1 + C_3 = C_0 + C_2$

Realizamos este mismo procedimiento en dimensión 4:

$$\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5} = (1-1)^5 = 0$$

$$1 + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = \binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5}$$

$$1 + C_1 + C_3 = C_0 + C_2 + C_4$$

$$C_1 + C_3 = C_0 + C_2$$

Con lo que hemos obtenido la fórmula de Euler para dimensión 4, $C_0 - C_1 + C_2 - C_3 = 0$.

## 4. Bloque de juegos

El principio de invarianza es útil de cara a aplicarlo en problemas en los que encontramos estados o situaciones cambiantes, como puede ser mover fichas, la repetición de operaciones matemáticas sobre ciertas cantidades numéricas, cambiar un cierto elemento por otro,..., buscando así las características que permanecen invariantes. Si observamos y descubrimos esto facilitaremos la búsqueda de la solución, e incluso, en ciertos casos llegaremos a resolver el problema.
Por tanto este principio es aplicable a juegos, los cuáles cuentan con un estado inicial, una secuencia de pasos legales y uno o varios estados finales. El estado de un juego puede ser diferente en función de las jugadas ejecutadas por los jugadores.
En esta sección se analizan estrategias ganadoras para algunos juegos de uno o dos jugadores.

**Problema. 4.1.**
*Dos jugadores colocan de forma alternativa monedas sobre un tablero de ajedrez de* $644 \times 644$ *casillas. Gana el primer jugador que consiga poner una moneda que forme, con otras tres monedas del tablero, los vértices de un rectángulo de lados paralelos a los bordes del tablero. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora?*

SOLUCIÓN. El segundo jugador tiene una estrategia ganadora. Desde el comienzo del juego, siempre que el primer jugador coloque una ficha a continuación el segundo jugador debe limitarse a colocar una ficha en la misma columna en que colocó el primer jugador su ficha. Ningún jugador deberá colocar una ficha en una fila en que ya hubiera otra ficha, pues si en algún momento uno de los dos jugadores lo hiciese, el oponente ganará el juego al formar un rectángulo de lados paralelos a los bordes del tablero. Así, siguiendo esta estrategia, en cada turno se van reduciendo en dos las filas en las que se puede colocar una ficha. Por lo que continuando de esta mantera, tras un total de 644 turnos consecutivos se llegará a una situación en que no se podrá colocar una ficha en ninguna fila, pues sino el jugador que lo hiciera perdería. En esta situación es el primer jugador el que debe colocar su ficha, pues es su turno, pero da igual donde coloque su ficha pues en el turno del segundo jugador, este último ganará la partida al formar un rectángulo de la forma pedida. □

**Problema. 4.2.**
*Dado el tablero de la figura 42, se tiene el siguiente juego de dos jugadores. El primer jugador parte de la casilla de salida y avanza por el tablero. En su turno cada jugador puede hacer una marca en una casilla situada:*

- *inmediatamente debajo*
- *inmediatamente a la izquierda*
- *inmediatamente en diagonal debajo y a la izquierda*

*de la última marca hecha por su oponente. Gana el primer jugador que consiga llegar a la meta. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora?*

SOLUCIÓN. Para encontrar la estrategia ganadora, llevaremos a cabo un estudio de casos empezando por el

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | *Salida* |
| | | | | | |
| *Meta* | | | | | |

Figura 42:

final, esto es, cuando el juego ya está acabado y retrocederemos hasta llegar a la situación de partida.
Dado que el primer jugador que llegue a la meta es el ganador, notaremos con una $G$ a la casilla desde la cuál un jugador puede ganar el juego desplazándose adecuadamente, esto es, tiene una estrategia ganadora.
Notaremos por $P$ a las casillas desde las cuales un jugador perderá el juego (siempre que el jugador contrario no se equivoque).
Como hemos dicho partimos con el juego ya acabado, luego para poder llegar a la casilla de la meta, según las reglas del juego, debíamos (estar situados en una de las siguientes)/(de venir de una de las siguientes) casillas:

- la casilla de inmediatamente encima
- la casilla de inmediatamente a la derecha
- la casilla de inmediatamente diagonal encima a la derecha

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | *Salida* |
| $G$ | $G$ | | | | |
| *Meta* | $G$ | | | | |

Figura 43:

Por tanto cualquiera de estas tres casillas es ganadora, pues desde cualquiera de ellas se gana el juego, luego tenemos la situación de la figura 43.

Continuamos analizando las casillas previas desde las que se puede acceder a estas tres casillas estudiadas, pues dependiendo de la casilla de donde provenga un jugador ganará o perderá.
Una casilla $P$ desde la que al mover se pierde la partida es aquella en la cual el siguiente jugador comenzará moviendo desde una casilla ganadora, luego tenemos la figura 44.

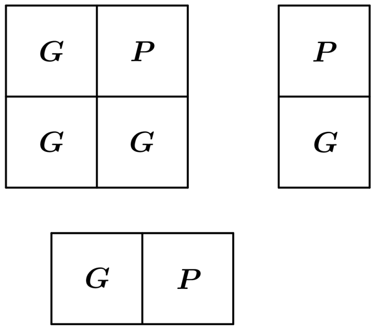


Figura 44:

Una casilla será ganadora ($G$) siempre que alguna de las casillas inmediatamente a la izquierda, de debajo o de debajo a la izquierda (diagonal) sea perdedora ($P$), esto es, los casos de la figura 45.

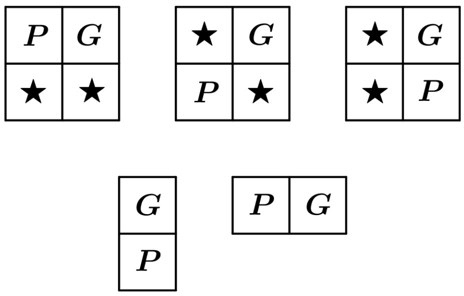


Figura 45:

Con estas consideraciones, a partir de la figura 43 obtenemos la figura 46, pues solo se puede avanzar a una casilla desde la que el contrincante gana.

A su vez, a partir de esta figura 46 podemos seguir completando el tablero como en la figura 47.

Estas nuevas casillas que hemos rellenado se deben a que un jugador tiene la opción de mover a una casilla con la $P$ desde la que el contrincante perderá, pues solo podría mover a una casilla ganadora.

Vemos que cada jugador tiene que conseguir que el contrincante mueva siempre desde una posición perdedora, así, el jugador que quiera ganar tiene que mover a una posición perdedora puesto que desde ahí el contrincante perderá independientemente de donde mueva.

Luego siguiendo las consideraciones anteriores llegamos a la figura 48.

La casilla con la $P$ se debe a que desde ahí solo se puede mover a una casilla ganadora; las dos nuevas casillas $G$ se deben a que desde ellas uno puede desplazarse a otra casilla con $P$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | | | | | $Salida$ |
| $G$ | $G$ | | | | |
| $Meta$ | $G$ | $P$ | | | |

Figura 46:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $G$ | | | | $Salida$ |
| $G$ | $G$ | $G$ | | | |
| $Meta$ | $G$ | $P$ | | | |

Figura 47:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $G$ | $P$ | | | $Salida$ |
| $G$ | $G$ | $G$ | $G$ | | |
| $Meta$ | $G$ | $P$ | $G$ | | |

Figura 48:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $G$ | $P$ | $G$ | $P$ | $Salida$ $G$ |
| $G$ | $G$ | $G$ | $G$ | $G$ | $G$ |
| $Meta$ | $G$ | $P$ | $G$ | $P$ | $G$ |

Figura 49:

De esta forma continuamos cubriendo el tablero hacia atrás hasta llegar a la casilla de inicio, de tal manera que se obtiene la figura 49.

Por tanto tenemos que el primer jugador es el que cuenta con la estrategia ganadora, pues parte de una casilla ganadora $G$ y tiene la opción de dirigir el juego a una casilla $P$ desde la que comenzará el contrincante. □

¿Qué ocurrirá en un tablero $3 \times 5$?

En este caso el que cuenta con la estrategia ganadora es el segundo jugador, basta seguir el análisis realizado en el problema para darse cuenta de que al inicio el primer jugador solo puede moverse a una casilla con la $G$, por lo que el segundo jugador partirá desde esta casilla ganadora.

Este juego también puede hacerse de forma inversa, quien llegue a la meta pierde, en este caso su estrategia es completamente distinta.

**Problema. 4.3.**
*Se propone el siguiente juego. Dos jugadores deben conseguir una moneda colocada en el extremo final de una hilera de 99 clips colocados sobre una mesa. Cada jugador, por turnos, debe coger entre uno y cuatro clips, de tal forma que el primer jugador que coja la moneda es el ganador (la moneda entra dentro del contador de clips que se pueden coger en un turno). ¿Hay una estrategia ganadora para alguno de los jugadores?*

Solución. Comenzamos analizando casos simples para extrapolar lo que ocurre cuando tenemos los 99 clips y la moneda. Cuando hay entre 1 y 3 clips más la moneda el primer jugador ganará en su primera jugada. Si hay 4 clips más la moneda gana el segundo jugador, pues independientemente del número de clips que coja el primero, siempre siguiendo las reglas, el segundo llegará a la moneda en su primera jugada. Ahora, si hay 5 clips más la moneda, el primer jugador gana en su segundo turno siempre que coja un solo clip. Si hay 6 o 7 clips más la moneda de nuevo gana el primer jugador sin más que coger 2 o 3 clips en su primera jugada respectivamente. Cuando se tienen 8 clips más la moneda vuele a tener la estrategia ganadora el segundo jugador. Sea $k$ el número de objetos (clips más moneda) sobre la mesa, en el análisis realizado, cuando $k$ toma los valores $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$ el primer jugador cuenta con la estrategia ganadora, y si $k = 5, 10$ es el segundo jugador el que tiene la estrategia ganadora. Luego vemos que cuando $k$ es múltiplo de 5, el segundo jugador tiene la estrategia ganadora, para ello, cuando el primer jugador coja $c$ clips, el segundo debe coger $5 - c$. De esta forma siempre se cogerán en cada ronda 5 objetos. Dado que hay un total de 100 objetos, que es múltiplo de 5, el segundo jugador es el que tiene la estrategia ganadora. □

**Problema. 4.4.**
*Dado el tablero de la figura 50, se tiene el siguiente juego de solitario. Hay 32 bolas en total, cada una colocada en cada hueco (circunferencia) excepto en el central. Siempre que dos huecos contiguos vertical u horizontalmente estén ocupados y que el siguiente hueco en esa misma línea esté vacío, una bola salta sobre la otra cayendo sobre el hueco vacío y la bola saltada se retira del tablero. El objetivo consiste en dejar solo una bola sobre el tablero. ¿Es posible que al final del juego la última bola acabe en el hueco central, que inicialmente estaba vacío? ¿Sobre que huecos puede acabar la bola al final del juego?*

Solución.

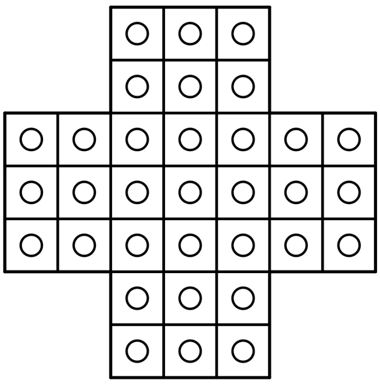

Figura 50:

Veamos que sí es posible que al final del juego la bola acabe en el hueco central, esto lo llevaremos a cabo buscando una serie de movimientos que concluyan en la posición deseada. Para ello numeramos las casillas del tablero como si de una matriz $7 \times 7$ se tratase (teniendo en cuenta que las 4 casillas de los extremos laterales superior e inferior no aparecen). Cada hueco (circunferencia) sobre el que se colocan las bolas está situado sobre una casilla, por tanto podemos trabajar sobre las casillas en lugar de sobre los huecos, obteniendo la figura 51.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 13 | 14 | 15 | | |
| | | 23 | 24 | 25 | | |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 |
| | | 63 | 64 | 65 | | |
| | | 73 | 74 | 75 | | |

Figura 51:

El salto de una bola de una casilla a otra lo notamos por casilla inicial-casilla final, por ejemplo $13-15$ será el salto de una bola desde la casilla 13 a la casilla 15 sobre otra bola situada en la casilla 14. Una serie de movimientos que nos permite acabar con una sola bola en la casilla central es la siguiente:
Comenzamos en la casilla 24, y avanzamos de la siguiente forma: $24-44$, $36-34$, $15-35$, $34-36$, $37-35$, $57-37$, $32-34$, $34-36$, $37-35$, $13-15$, $45-25$, $15-35$, $56-36$, $36-34$, $52-32$, $31-33$, $34-32$, $51-31$, $31-33$, $65-45$, $63-65$, $75-55$, $45-65$, $73-75$, $75-55$, $43-63$, $55-53$, $63-43$, $44-42$, $23-43$, $42-44$.
Por tanto es posible que al final del juego la última bola acabe en el hueco central 44.

Observemos que si en el último movimiento en vez de realizar el salto $42-44$ hacemos el salto $43-41$, la última bola estará colocada en la casilla 41, luego al menos la bola puede terminar en las casillas 41 y 44. De hecho, nos damos cuenta que aplicando una simetría rotacional a la serie de movimientos llevada a cabo anteriormente la bola puede terminar también en las casillas 14, 47 y 74.
Para justificar esto coloreamos el tablero con 3 colores en diagonal: blanco ($B$), gris ($G$) y negro ($N$); obteniendo la figura 52.

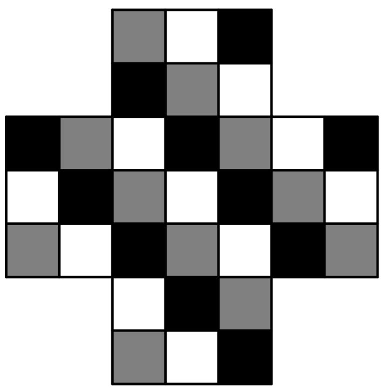

Figura 52:

Vemos que hay 11 casillas de cada color e inicialmente están ocupadas 10 blancas, 11 grises y 11 negras. Observamos también que con cada salto se ve afectada exactamente una casilla de cada color. Dos casillas quedan vacías y la casilla que estaba hueca queda ocupada por la bola, luego el número de casillas de cada color en cada movimiento aumenta o disminuye en 1, en concreto dos disminuyen y una aumenta.
Así, la paridad de cada color cambia con cada salto, sin embargo al disminuir dos casillas y aumentar otra, si teníamos que dos colores tenían número impar de casillas cada uno y el otro color un número par, ahora tendremos dos colores con un número de casillas par cada uno y el otro color un número impar. Luego la paridad entre ellas se mantiene, pues si inicialmente dos colores, por ejemplo $B$ y $G$ tenían la misma paridad, tras el salto siguen teniendo la misma paridad; de igual forma si $B$ y $G$ tenían distinta paridad, tras el salto siguen teniendo distinta paridad.
Por tanto, en la posición final donde solo queda una bola sobre el tablero ocurrirá una de estas tres opciones:

- $B = 1$, $G = 0$ y $N = 0$
- $B = 0$, $G = 1$ y $N = 0$
- $B = 0$, $G = 0$ y $N = 1$

Pero dado que inicialmente las casillas $G$ y $N$ tenían la misma paridad y $B$ era de paridad opuesta, tras cada movimiento $G$ y $N$ deben seguir teniendo igual paridad. Luego la única opción posible es $B = 1$, $G = 0$ y $N = 0$, por tanto la última bola debe acabar en una casilla de color blanca.

De forma análoga, al desarrollar este mismo argumento sobre el tablero simétrico (figura 53), llegamos a que de nuevo la última bola debe acabar en una casilla de color blanca. Así, concluimos que las únicas casillas que acabarán ocupadas serán 44, 14, 41, 47 o 74 vistos en la figura 51. □

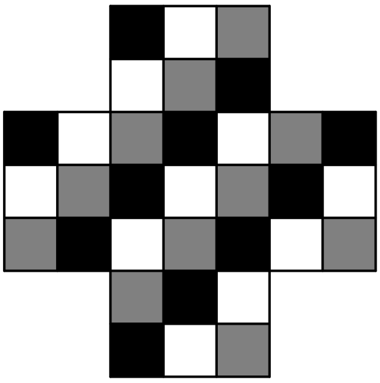

Figura 53:

**Problema. 4.5.**
*En una mesa hay tres montones de clips. El primero de ellos tiene* 35 *clips, es segundo* 55*, y el tercero,* 60*. Dos personas van a jugar a un juego que consiste en que en cada turno un jugador selecciona uno de los tres montones y lo separa en dos montones más pequeños, independientemente del número de clips que queden*

*en cada montón. Pierde el jugador que no pueda hacer más divisiones. ¿Qué jugador tiene una estrategia ganadora?*

SOLUCIÓN. Observamos que en el juego, durante el proceso en que se van dividiendo los tres montones iniciales, en cada turno el número de montones aumenta en uno. Por tanto en cada turno cambia la paridad del número de montones, pues en un turno pasa de ser impar a par y al siguiente turno de par a impar. Dado que al acabar el juego habrá un total de 150 montones con un clip en cada uno de ellos, la estrategia ganadora es la que tenga los 150 montones. Como 150 es par e inicialmente había 3 montones, es el primer jugador el que tiene la estrategia ganadora, pues en su primer turno pasa de un número impar de montones a uno par, luego en su última jugada pasará de 149 (impar) a 150 (par). Así, habrá un total de $150-3=147$ jugadas. En realidad vemos que en este juego solo hay una estrategia ganadora, si es que podemos llamarlo estrategia, que es empezar jugando en primer lugar.

De este análisis deducimos que siempre que haya $m$ montones iniciales con $n_1, n_2, \ldots, n_m$ clips cada uno, ocurrirá que:

- si $m$ es impar y $\sum_{k=1}^{k=m} n_k$ es impar, ganará el juego el segundo jugador.
- si $m$ es impar y $\sum_{k=1}^{k=m} n_k$ es par, ganará el juego el primer jugador.
- si $m$ es par y $\sum_{k=1}^{k=m} n_k$ es impar, ganará el juego el primer jugador.
- si $m$ es par y $\sum_{k=1}^{k=m} n_k$ es par, ganará el juego el segundo jugador.

□

## 5. Olimpiada local

En esta sección trataremos problemas correspondientes a la fase local de la Olimpiada Matemática Española.

**Problema. 5.1. (2004)**
*En un tablero de damas* ($8 \times 8$)*, colocamos las* 24 *fichas del juego de modo que llenen las* 3 *filas de arriba. Podemos cambiar la posición de las fichas según el siguiente criterio: una ficha puede saltar por encima de otra a un hueco libre, ya sea horizontal (a izquierda o derecha), vertical (hacia arriba o hacia abajo) o diagonalmente. ¿Podemos lograr colocar todas las fichas en las 3 filas de abajo?*

SOLUCIÓN. Comenzamos numerando el tablero como en la figura 54.
Cuando llevamos a cabo un movimiento permitido vemos que las fichas situadas en una fila impar se mueven

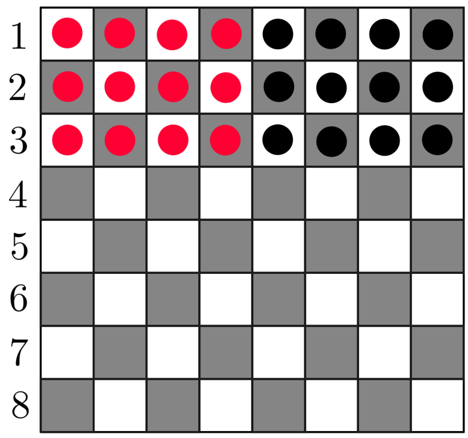


Figura 54:

siempre a una fila impar, y de igual manera una ficha situada en una fila par se moverá a una fila par. Inicialmente las fichas están colocadas en dos filas impares (1 y 3) y en una fila par (2). Sin embargo, la posición final deseada implica que las fichas deben ocupar una fila impar (7) y dos filas pares (6 y 8), pero esto no puede ocurrir aplicando los movimientos permitidos, luego no es posible colocar todas las fichas en las 3 filas de abajo. □

**Problema. 5.2. (2005)**
*Cuatro bolas negras y cinco bolas blancas se colocan, en orden arbitrario, alrededor de una circunferencia. Si dos bolas consecutivas son del mismo color, se inserta una nueva bola negra entre ellas. En caso contrario, se inserta una nueva bola blanca. Se retiran las bolas negras y blancas previas a la inserción.*
*Repitiendo el proceso, ¿es posible obtener nueve bolas blancas?*

SOLUCIÓN. Comenzamos dando los siguientes valores:
$\begin{cases} 1 & \text{si la bola es negra} \\ -1 & \text{si la bola es blanca} \end{cases}$
Multiplicando, si dos bolas consecutivas son del mismo color obtenemos el valor 1 y si son distintas el valor $-1$. Llamamos $a_i$, $i = 1, 2, \ldots, 9$ a cada bola, y consideramos el producto de éstas $P = \prod_{i=1}^{9} a_i$. El proceso comienza con cuatro bolas negras y cinco bolas blancas; vemos que independientemente de como se coloquen las bolas, a partir de la primera simulación $P$ va a ser siempre el producto de un número impar de $1's$ y de un número par de $-1's$, luego a partir de la primera repetición del proceso $P = 1$ siempre. Por tanto nunca vamos a poder obtener 9 bolas blancas, ya que significaría que $P = -1$, hecho que solo ocurre antes de iniciar el proceso.

□

**Problema. 5.3. (2006)**
*En el sótano del castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 720 llaves.*

SOLUCIÓN. De los 7 gnomos, 3 cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras, luego el número mínimo de llaves de cada cerradura es 5, pues sino al elegir 3 gnomos se puede dar el caso de que ninguno tenga la llave de una cerradura concreta.
Por otro lado se tiene que hay 12 cerraduras en cada una de las 12 puertas, por tanto el total de cerraduras es $12 \cdot 12 = 144$.
Luego entre todos los gnomos tienen por lo menos $5 \cdot 144 = 720$ llaves. □

**Problema. 5.4. (2010)**
*Sea $I_n$ el conjunto de los $n$ primeros números naturales impares. Por ejemplo: $I_3 = \{1, 3, 5\}$, $I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, etc.*
*¿Para qué números $n$ el conjunto $I_n$ se puede descomponer en dos partes (disjuntas) de forma que coincidan las sumas de los números en cada una de ellas?*

SOLUCIÓN. Desarrollemos los primeros conjuntos para observar que ocurre:
$I_1 = \{1\}$, que no se puede descomponer
$I_2 = \{1, 3\}$, que no se puede descomponer
$I_3 = \{1, 3, 5\}$, que no se puede descomponer
$I_4 = \{1, 3, 5, 7\}$, que puede descomponerse en $\{1, 7\}$ y $\{3, 5\}$
$I_5 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, que no se puede descomponer
$I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, que puede descomponerse en $\{1, 3, 5, 9\}$ y $\{7, 11\}$
$I_7 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, que no se puede descomponer

$I_8 = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$, que puede descomponerse en $\{1,5,11,15\}$ y $\{3,7,9,13\}$ o en $\{1,7,9,15\}$ y $\{3,5,11,13\}$
Por tanto parece que solo si $n$ es par distinto de 2, $I_n$ se puede descomponer en dos partes disjuntas de forma que coincidan las sumas de los números en cada una de ellas, pues se cumple que para $n$ par la suma de todos los números de $I_n$ es par.
Nos fijamos en $I_4$, que es el primero de los $I_n$ que puede descomponerse, de cara a mostrar lo afirmado. Tenemos que $\{2k+1, 2k+3, 2k+5, 2k+7\}$ con $k = 0,1,2,\ldots$ puede descomponerse, luego $I_{k+4}$ se podrá descomponer si $I_k$ también puede descomponerse, ya que

$$I_{k+4} = I_k \cup \{2k+1, 2k+3, 2k+5, 2k+7\}$$

Por otro lado, si $D_1 \cup D_2$ es una descomposición de $I_{2k}$, tenemos que $D_1 \cup \{2k+1, 2k+7\}$ y $D_2 \cup \{2k+3, 2k+5\}$ es una descomposición de $I_{2k+4}$.
Dado que tanto $I_4$ como $I_6$ pueden descomponerse, tenemos que $I_n$ puede descomponerse para $n$ par mayor que 2. $\square$

**Problema. 5.5. (2010)**
*Dado el polinomio $P(X) = X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X^1 + \square$, en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.*
*Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.*

SOLUCIÓN. Veamos una estrategia a seguir:
El primer jugador empieza el juego colocando un $-1$ en el cuadrado que representa el término independiente, así, las raíces enteras del polinomio solo puedan ser 1 o $-1$. Para mayor simplicidad notaremos por $a_i$, $i = 0,1,2,3$ a los coeficientes de las casillas sin rellenar, por lo que atendiendo a la estrategia inicial tenemos $a_0 = -1$, luego el polinomio será:

$$P(X) = X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X - 1$$

Tenemos pues que:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Si 1 es raíz, entonces obtenemos } 1 + a_3 + a_2 + a_1 - 1 = 0;\ a_3 + a_2 + a_1 = 0 \\ \bullet \text{ Si } -1 \text{ es raíz, entonces obtenemos } 1 - a_3 + a_2 - a_1 - 1 = 0;\ -a_3 + a_2 - a_1 = 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Llegados a este punto hay que distinguir dos casos: que las raíces sean distintas o que sean dobles.

I. Caso raíces simples:
Si las raíces son distintas el primer jugador gana el juego con la primera jugada que hemos realizado ya que, atendiendo a los cálculos que acabamos de realizar, para cualesquiera valores $a_i \neq 0$ con $i = 1,2,3$, al sumar en (1) obtenemos $2a_2 = 0$; $a_2 = 0$, pero esto no puede ocurrir pues por las reglas del juego los enteros deben

ser no nulos.

II. Caso raíces dobles:
En este caso el primer jugador gana el juego tras su segundo turno, veámoslo:
Si $-1$ es raíz doble, entonces derivando el polinomio obtenemos $P'(X) = 4X^3 + 3a_3X^2 + 2a_2X + a_1$ y sustituyendo la raíz queda $-4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0$. Además, de (1) tenemos $-a_3 + a_2 - a_1 = 0$, luego debemos resolver el sistema
$$\begin{cases} -4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0 \\ -a_3 + a_2 - a_1 = 0 \end{cases}$$
Sumando ambas ecuaciones queda $-4 + 2a_3 - a_2 = 0$; $a_2 = -4 + 2a_3$.
Sustituyendo $a_2 = -4 + 2a_3$ en la segunda ecuación queda $-a_3 - 4 + 2a_3 - a_1 = 0$; $a_1 = -4 + a_3$.

Si 1 es raíz doble, entonces sustituyendo la raíz en $P'(X)$ queda $4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0$ y de (1) tenemos $a_3 + a_2 + a_1 = 0$, luego debemos resolver el sistema
$$\begin{cases} 4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ a_3 + a_2 + a_1 = 0 \end{cases}$$
Restando ambas ecuaciones queda $4 + 2a_3 + a_2 = 0$; $a_2 = -4 - 2a_3$.
Sustituyendo $a_2 = -4 - 2a_3$ en la segunda ecuación queda $a_3 - 4 - 2a_3 + a_1 = 0$; $a_1 = 4 + a_3$.

Ahora le toca al segundo jugador, que al sustituir en $P(X) = X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X - 1$ tendrá las siguientes posibilidades:

$i)$ Colocar un número entero no nulo en la posición $a_3$, por lo que a continuación el primer jugador solo debe colocar en $a_2$ un entero que no verifique $a_2 = -4 + 2a_3$ ni $a_2 = -4 - 2a_3$, así, el polinomio no tendrá dos raíces enteras.

$ii)$ Colocar un número entero no nulo en la posición $a_2$, en cuyo caso en el siguiente turno el primer jugador solo debe colocar en $a_3$ un entero que no verifique $a_2 = -4 + 2a_3$ ni $a_2 = -4 - 2a_3$, así, el polinomio no tendrá dos raíces enteras.

$iii)$ Colocar un número entero no nulo en la posición $a_1$, por lo que el primer jugador solo debe colocar en $a_3$ un entero que no verifique $a_1 = -4 + a_3$ ni $a_1 = 4 + a_3$, así, el polinomio no tendrá dos raíces enteras.

□

**Problema. 5.6. (2010)**
*Supongamos que tenemos un tablero con dieciséis casillas dispuestas en cuatro filas y cuatro columnas.*

(a) *Prueba que se pueden colocar siete fichas, nunca dos en la misma casilla, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera, siempre quede alguna ficha sin eliminar.*

(b) *Prueba que si se colocan seis fichas, nunca dos en la misma casilla, siempre se puede eliminar dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas.*

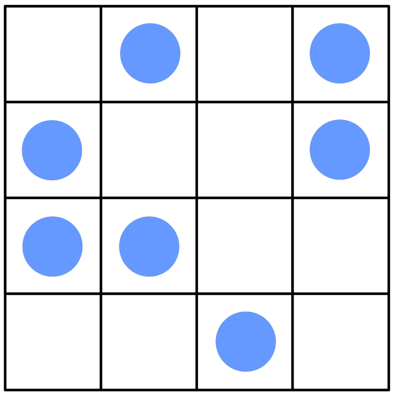

Figura 55:

Solución. (a) Una posibles solución es la de la figura 55.

(b) Para probar que siempre pueden eliminarse todas las fichas bajo estas condiciones basta con aplicar el siguiente procedimiento:

*i*) Partimos de un tablero $4 \times 4$ en el que hay colocadas 6 fichas, luego por el principio del palomar en una de las filas hay colocadas como mínimo dos fichas, así que dicha fila se elimina.

*ii*) Ya solo hay en el tablero a lo sumo 4 fichas y 3 filas, por tanto eliminamos una fila de manera que solo haya sobre el tablero 2, 1 o ninguna ficha. Si ya no hay fichas sobre el tablero hemos acabado, sino continuamos con el siguiente paso.

*iii*) Nos encontramos que solo quedan en el tablero 1 o 2 fichas. Si solo queda una se elimina la columna en que esté colocada; si quedan dos y están en la misma columna la eliminamos y en ambos casos habremos finalizado. Si hay dos fichas situadas en distintas columnas quitamos una de ellas.

*iv*) Llegados a este punto solo nos quedará a lo sumo una ficha, basta con eliminar la columna en que esté colocada la ficha.

□

**Problema. 5.7. (2010)**
*En un triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ se sabe que la longitud del lado $AB$ es 5, que el área es 18 y que las medianas por $A$ y por $B$ son perpendiculares entre sí.*
*Hallar las longitudes de los lados $BC$ y $AC$.*

Solución.
Las medianas se cortan en el baricentro, dividiendo al triángulo original en 6 triángulos de igual área, por tanto cada triángulo tiene área 3.

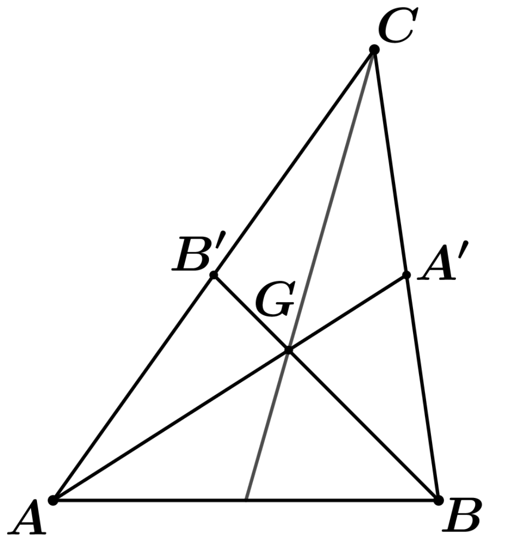


Figura 56:

Además, se verifica que la distancia del baricentro a cada vértice es el doble de la distancia al punto medio del lado opuesto, por lo que si llamamos $x$ a $A'G$ e $y$ a $B'G$, las distancias $AG$ y $BG$ valdrán $2x$ y $2y$ respectivamente.

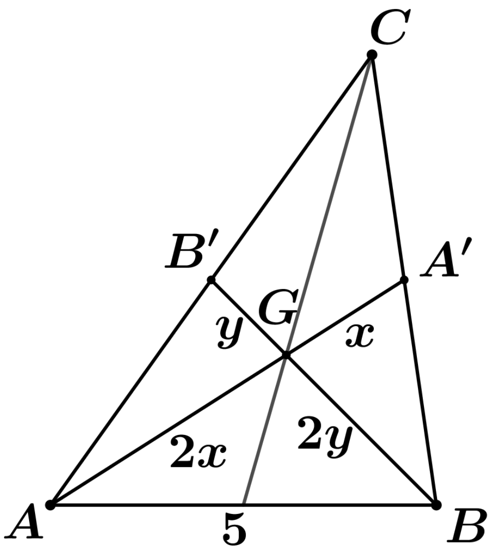


Figura 57:

Por otro lado, aplicando que las medianas $m_A$ y $m_B$ son perpendiculares, tenemos que el área del triángulo $\triangle AGB'$ es Área$(\triangle AGB) = \dfrac{2xy}{2} = xy$ y como cada triángulo tiene área 3 nos queda $xy = 3$.
Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle AGB$ nos queda $25 = 4x^2 + 4y^2$. Al multiplicar por $x^2$ obtenemos $25x^2 = 4x^4 + 4x^2y^2$ y aplicando que $x^2y^2 = 9$ tenemos $25x^2 = 4x^4 + 36$; $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$. De aquí se obtienen dos soluciones: $x^2 = 4$, luego $y^2 = \frac{9}{4}$ y $x^2 = \frac{9}{4}$, luego $y^2 = 4$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle AGB'$ tenemos que $4x^2 + y^2 = AB'^2$ y para el triángulo $\triangle BGA'$ de nuevo, por el Teorema de Pitágoras, $x^2 + 4y^2 = BA'^2$.
Luego sustituyendo la primera solución $x^2 = 4$ e $y^2 = \frac{9}{4}$ obtenemos $AB' = \sqrt{\frac{73}{4}}$ y $BA' = \sqrt{13}$, y como $B'$ y $A'$ son los puntos medios de los segmentos $AC$ y $BC$ respectivamente, concluimos que $AC = 2\sqrt{\frac{73}{4}} = \sqrt{73}$ y $BC = 2\sqrt{13}$. Si sustituimos la segunda solución $x^2 = \frac{9}{4}$ e $y^2 = 4$ obtenemos $AB' = \sqrt{13}$ y $BA' = \sqrt{\frac{73}{4}}$, luego $AC = 2\sqrt{13}$ y $BC = 2\sqrt{\frac{73}{4}} = \sqrt{73}$. □

**Problema. 5.8. (2011)**
*Determinar todos los cuadriláteros convexos $ABCD$ para los que hay un punto interior $P$ que cumple que los cuatro triángulos $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCD$ y $\triangle PDA$ tienen la misma área.*

SOLUCIÓN. Comencemos fijándonos en los triángulos $\triangle PCB$ y $\triangle PCD$ de la figura 58.

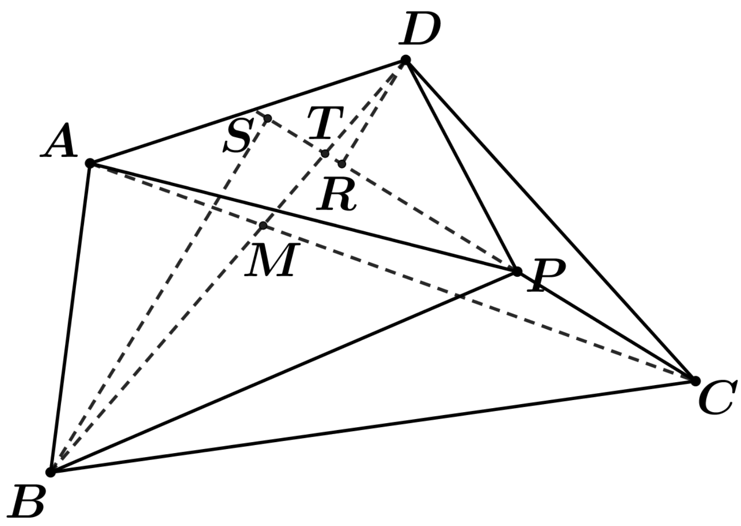


Figura 58:

Ambos tienen como base el segmento $CP$ y alturas $BS$ y $DR$ respectivamente. El área será la misma cuando las alturas sean iguales. Para ello se ha de cumplir que el punto $T$ sea el punto medio de la diagonal $BD$ y el segmento $CP$ deberá pasar por $T$.
De igual forma, tomamos los triángulos $PAB$ y $PAD$, cuya base común es el segmento $AP$. Como antes, tendrán el misma área cuando sus alturas sean iguales y el segmento $AP$ debe pasar por $T$.
De aquí llegamos a que los segmentos $AP$ y $CP$ poseen dos puntos en común, a saber, $P$ y $T$. Por lo que $AP$ y $CP$ están alineados, esto es, forman la diagonal $AC$. Luego las diagonales se han de cortar en el punto medio de una de ellas. Además, de los triángulos de igual área $\triangle PAD$ y $\triangle PCD$ se obtiene que $P$ debe ser el punto medio del segmento $AC$.
Luego los cuadriláteros convexos que cumplen el enunciado son aquellos en que las diagonales se cortan en el punto medio de una de ellas y el punto $P$ es el punto medio de la otra. □

**Problema. 5.9. (2014)**
*Tenemos* 50 *fichas numeradas del* 1 *al* 50*, y hay que colorearlas de rojo o azul. Sabemos que la ficha* 5 *es de color azul. Para la coloración del resto de fichas se siguen las siguientes reglas:*

$a$) *Si la ficha con el número $x$ y la ficha con el número $y$ son de distinto color, entonces la ficha con el número $|x-y|$ se pinta de rojo.*

$b$) *Si la ficha con el número $x$ y la ficha con el número $y$ son de distinto color y $x \cdot y$ es un número entre* 1 *y* 50 *(incluyendo ambos), entonces la ficha con el número $x \cdot y$ se pinta de azul.*

*Determinar cuántas coloraciones distintas se pueden realizar en el conjunto de fichas.*

SOLUCIÓN. Utilizaremos como invariante el hecho de que si dos números se diferencian en 5 entonces ambos tienen el mismo color ya que, si no tuvieran igual color, tendríamos que por $a$) su diferencia sería de color rojo. Sin embargo su diferencia es 5, que es azul.
Así, conociendo los colores de los 4 primeros números hallaremos la solución. Para ello, hacemos li siguiente distinción:

$i$) Si la ficha 1 es de color roja, aplicando $a$) tenemos que $5-1=4$ es rojo. Ahora, si la ficha 2 es roja, entonces por $a$), $5-2=3$ también es roja. Para ver que no pueden ser de color azul, basta suponer que 3 es azul, entonces $3-1=2$, luego 2 es roja por $a$). Pero entonces $5-2=3$ y de nuevo por $a$) tenemos que 3 es roja. Contradicción con el supuesto de que 3 era azul, luego tanto 2 como 3 son rojas.
Tenemos entonces que 1, 2, 3 y 4 son rojas, al igual que ocurre con las demás fichas que no son múltiplo de 5.

$ii$) Si la ficha 1 es de color azul, entonces aplicando $b$) se tiene que todas las fichas son azules ya que si la ficha $n$ fuera roja, al aplicar $b$) tendríamos $1 \cdot n = n$ debería de ser azul, contradicción con el supuesto de que $n$ era roja.

Concluimos entonces que solo puede haber dos coloraciones, o todas las fichas son rojas menos los múltiplos de 5, que son azules o todas las fichas son azules.

□

**Problema. 5.10. (2015)**
*Sea un triángulo $\triangle ABC$ tal que $AB = AC$ y $M, N$ son los puntos medios de $AB, AC$ respectivamente. Sea $L$ un punto verificando que $\measuredangle MBL = \measuredangle MCL = 90^o$. Probar que $LN$ es perpendicular a $BC$.*

SOLUCIÓN.
Comenzamos tomando el triángulo rectángulo $\triangle MBL$. El punto medio de la hipotenusa $ML$ es el circuncentro del triángulo rectángulo, veámoslo:

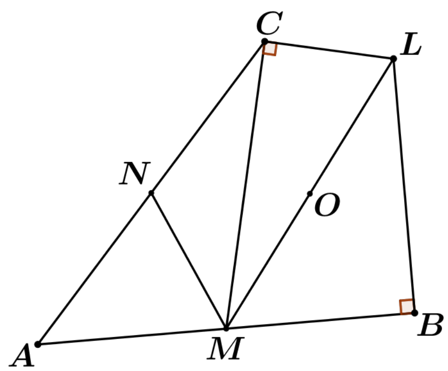


Figura 59:

Trazamos la mediatriz del segmento $AB$, que interesecará al lado $AB$ en el punto $D$ y a la hipotenusa $ML$ en el punto $O$. Ahora, los triángulos $\triangle ODL$ y $\triangle MBL$ son semejantes puesto que ambos son rectos y comparten ángulo en $B$. Se verifica entonces que $\frac{LD}{LB} = \frac{1}{2}$ y $\frac{LD}{LB} = \frac{LO}{LM}$, luego $\frac{LM}{2} = LO$, por tanto $O$ es el punto medio de la hipotenusa $ML$. Por estar $O$ en la mediatriz de $BL$, equidista de $L$ y $B$, luego $OL = OB$ y $OL = OM$, entonces también tenemos $OM = OB$, por tanto $O$ es el circuncentro del triángulo $\triangle MBL$.

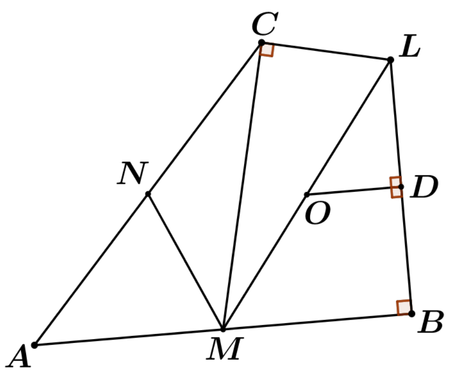


Figura 60:

Hemos llegado a que $O$ es el circuncentro de $MBL$, entonces $OM = OB = OL$. Análogamente llegamos a que $O$ es el circuncentro del triángulo rectángulo $MCL$, entonces $OM = OC = OL$. De aquí se tiene que $OB = OC$ y en consecuencia $O$ es un punto de la mediatriz $BC$.
Por otro lado, dado que $AC = AB$ se tiene que los triángulos $\triangle AMN$ y $\triangle ABC$ son semejantes, pues además comparten ángulo en $A$. $N$ y $M$ son los puntos medios de $AC$ y $BC$ respectivamente, así, se verifica que la bisectriz del ángulo $A$ es la mediatriz de $MN$ y $BC$, luego $OM = ON$, llegando así a que $OL = OM = ON$, esto es, $O$ es el circuncentro del triángulo $\triangle MNL$.
Puesto que el circuncentro del triángulo $\triangle MNL$ está situado en el punto medio de su hipotenusa, entonces se cumple que el vértice opuesto $\measuredangle MLN = 90^{\circ}$, además, como $MN$ es paralela a $BC$, llegamos a que $LN$ es perpendicular a $BC$. $\square$

# 6. Olimpiada nacional

En esta sección trataremos problemas correspondientes a la fase nacional de la Olimpiada Matemática Española.

**Problema. 6.1. (1998)**
*Determina los valores de $n$ para los que es posible construir un cuadrado de $n \times n$ ensamblando piezas del tipo de la figura 61*

SOLUCIÓN.

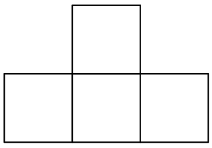

Figura 61:

Tenemos que $n^2$ debe ser múltiplo de 4, luego $n$ ha de ser par. Sin embargo, del problema 3.3. sabemos que aunque $n$ sea par, no tiene por qué poder recubrirse un cuadrado $n \times n$ con dichas piezas.
Utilicemos el razonamiento empleado en la resolución del problema.

Consideramos un tablero $n \times n$ con la misma coloración que el ajedrez, con casillas blancas y negras. En este caso la pieza cubre 3 casillas de un color y 1 del otro color, por lo que podemos distinguir dos casos:
Tipo $A$: $3B + 1N$
Tipo $B$: $1B + 3N$

Luego

| | $B$ | $N$ |
|---|---|---|
| $x$ de tipo $A$ | $3x$ | $x$ |
| $\frac{n^2}{4} - x$ de tipo $B$ | $\frac{n^2}{4} - x$ | $3(\frac{n^2}{4} - x)$ |
| | $\frac{n^2}{4} + 2x$ | |

Además, hay $n^2$ casillas en el tablero de las cuales $\dfrac{n^2}{2}$ son de color blanco y las otras $\dfrac{n^2}{2}$ son de color negro, luego $\dfrac{n^2}{4} + 2x = \dfrac{n^2}{2}$; $2x = \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{n^2}{4}$; $2x = \dfrac{n^2}{4}$; $x = \dfrac{n^2}{8}$, por tanto no se podrá recubrir el tablero con piezas de la forma indicada cuando $\dfrac{n^2}{8}$ no sea un número natural.
Como $n^2$ es par y $n$ también es par, tenemos $n^2 = 4k$ con $k \in \mathbb{N}$, así, nos queda $\dfrac{4k}{8} = \dfrac{k}{2}$. Entonces para poder recubrir el tablero con las piezas indicadas, $\dfrac{k}{2}$ ha de ser un número natural, por tanto $k$ ha de ser par, $k = 2m$

con $m \in \mathbb{N}$.
Tenemos $n^2 = 4k$ y $k = 2m$, luego $n^2 = 4 \cdot 2m = 8m$; $n = 4\sqrt{m}$ y aquí, para que $n$ sea un número natural, $\sqrt{m}$ ha de ser natural ($m$ debe ser cuadrado perfecto).
Por tanto, es posible construir un cuadrado $n \times n$ con las piezas indicadas siempre que $n$ sea de la forma $n = 4m$ con $m \in \mathbb{N}$. □

**Problema. 6.2. (1999)**
*Sobre un tablero en forma de triángulo equilátero como se indica en la figura 62 se juega un solitario.*
*Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada ficha es blanca por un lado, y negra por el otro. Inicialmente, sólo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; el resto de las fichas tiene la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento se retira sólo una ficha negra del tablero y se da la vuelta a cada una de las fichas que ocupan una casilla vecina. Casillas vecinas son las que están unidas por un segmento.*
*Después de varios movimientos ¿será posible quitar todas las fichas del tablero?*

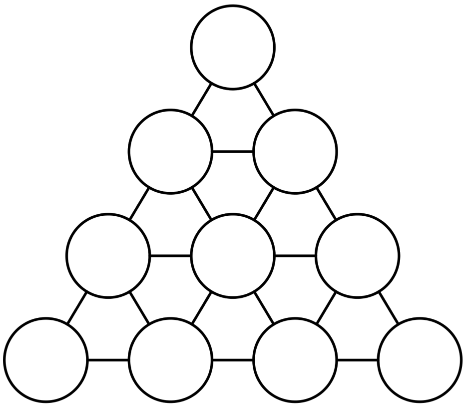

Figura 62:

Solución. Observamos que en el tablero cada casilla está unida por 2, 4 o 6 segmentos con otras casillas, es decir, está unida con un número par de segmentos. En consecuencia, dado que cada vez que damos la vuelta a las fichas vecinas a una ficha negra, esta ficha negra se retira, una última ficha que quede sobre el tablero habrá dado la vuelta un número par de veces. Como inicialmente todas las fichas sobre el tablero eran blancas excepto una que es la que retiramos, quedará una última ficha sobre el tablero blanca, pues esta ficha ha dado la vuelta un número par de veces. Por tanto es imposible quitar todas las fichas del tablero, pues significaría que la última ficha habría dado la vuelta un número impar de veces. □

**Problema. 6.3. (2001)**
*Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla $3 \times 3$.*
*Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas de izquierda a derecha y los tres*

*que se leen en columnas de arriba abajo.*
*¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea* 2001*?*

SOLUCIÓN. Comenzamos colocando los números en una tabla $3 \times 3$ como la figura 63.

| | | |
|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |

Figura 63:

Ahora sumamos:

$$S = a_{11}a_{12}a_{13} + a_{21}a_{22}a_{23} + a_{31}a_{32}a_{33} + a_{11}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{22}a_{32} + a_{13}a_{23}a_{33} =$$

$$= (100a_{11} + 10a_{12} + a_{13}) + (100a_{21} + 10a_{22} + a_{23}) + (100a_{31} + 10a_{32} + a_{33}) + (100a_{11} + 10a_{21} + a_{31}) +$$

$$+ (100a_{12} + 10a_{22} + a_{32}) + (100a_{13} + 10a_{23} + a_{33}) =$$

$$= 100(a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{11}+a_{12}+a_{13}) + 10(a_{12}+a_{22}+a_{32}+a_{21}+a_{22}+a_{23}) + (a_{13}+a_{23}+a_{33}+a_{31}+a_{32}+a_{33}) =$$

$$= 100(2a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{12} + a_{13}) + 10(a_{12} + 2a_{22} + a_{32} + a_{21} + a_{23}) + (a_{13} + a_{23} + 2a_{33} + a_{31} + a_{32})$$

Queremos saber si es posible alguna distribución en que $S$ sea igual a 2001. Si esto fuera posibles obtendríamos que el resto de dividir 2001 por 9 debe ser el mismo que el de dividir por 9 la suma de sus cifras, como hemos separado convenientemente tenemos haciendo módulo 9:

$$(2a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{12} + a_{13}) + (a_{12} + 2a_{22} + a_{32} + a_{21} + a_{23}) + (a_{13} + a_{23} + 2a_{33} + a_{31} + a_{32}) =$$

$$= 2(a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} + a_{33})$$

Y como los $a_{ij}$ con $i, j = 1, 2, 3$ son números del 1 al 9 (sin repetirse) nos queda:

$$2(a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} + a_{33}) = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 2 \cdot 45 = 90$$

Luego $S$ es múltiplo de 9, sin embargo 2001 no es múltiplo de 9, pues $2001 \equiv 3 (\text{mod } 9)$. □

**Problema. 6.4. (2004)**
*Colocamos, formando una circunferencia,* 2004 *fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha con la cara negra hacia arriba, y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos* 2003 *fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba?*

SOLUCIÓN. Analicemos que ocurre cuando damos la vuelta a una ficha negra, hay tres casos:

- Una ficha negra y dos blancas (BNB): las fichas blancas disminuyen en 1 y las negras aumentan en 1.
- Dos fichas negras y una blanca (BNN o NNB): las fichas blancas aumentan en 1 y las negras disminuyen en 1.
- Tres fichas negras (NNN): las fichas blancas aumentan en 3 y las negras disminuyen en 3.

Luego las fichas negras (y blancas) siempre aumentan o disminuyen un número impar de veces.
Ahora, dado que 2004 es múltiplo de 3, tomamos por un lado el conjunto las fichas de los lugares $1, 4, 7, \ldots, 2002$, por otro el de los lugares $2, 5, 8, \ldots, 2003$ y finalmente el de los lugares $3, 6, 9, \ldots, 2004$. Inicialmente había solo una ficha negra, luego teníamos una ficha negra para el primer conjunto y ninguna para los otros dos, y como hemos analizado siempre cambia de color una ficha de cada conjunto, luego en cada conjunto cambia la paridad del número de fichas negras, por lo que nunca podremos llegar a tener cero fichas negras en los tres conjuntos la vez.
Si tuviéramos 2003 y numeramos las fichas del 1 al 2003, donde la ficha 1 es la negra, bastaría con proceder como sigue:
Comenzamos realizando el movimiento permitido con la ficha 1 y seguimos en orden hasta llegar a la ficha 2002, por lo que tendríamos las fichas dispuestas como sigue: $NNNNN \cdots NNBB$; ahora, en orden, aplicamos el movimiento a las fichas $2, 5, 7, \ldots, 1997, 2000$ con lo que llegamos a $BBBBB \cdots BBBB$, donde todas las fichas tienen son blancas. □

**Problema. 6.5. (2011)**
*Consideremos un alfabeto de $n$ letras, con el que formaremos palabras. Diremos que una palabra contiene un palíndromo si un trozo de esa palabra, de más de una letra, se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo, la palabra OLIMPIADAS contiene el palíndromo ADA. Siendo $k$ un entero mayor que* 2*, determina cuántas palabras de longitud $k$ se pueden formar, con nuestro alfabeto de $n$ letras, que no contengan ningún palíndromo de longitud impar.*

SOLUCIÓN. Para la resolución del problema utilizaremos que una palabra contiene un palíndromo de longitud impar si y solo si contiene un palíndromo de longitud 3. Así, bastará con contar las palabras que no tengan un palíndromo de longitud 3. Para ello comenzamos con la primera letra de una palabra, para la que hay $n$ posibilidades. Continuamos con la siguiente letra que cuenta también con $n$ posibilidades. Sin embargo, la tercera letra puede ser cualquiera excepto la que se halla en la primera posición, pues sino tendríamos un palíndromo, de esta forma tendremos $n-1$ posibilidades. Para la cuarta letra ocurre igual que con la tercera, puedes ser cualquiera excepto la que se halla en la posición 2, por lo que tendrá $n-1$ posibilidades. Con la quinta letra ocurre lo mismo, puede ser cualquiera excepto la que se halla en la posición 3, por lo que tendremos $n-1$ posibilidades. Siguiendo de esta forma llegamos a la $k$-ésima letra, que será cualquiera excepto la que se halla en la posición $k-2$, luego tendremos $n-1$ posibilidades. Por tanto, sin tener en cuenta las dos primeras letras tenemos $VR_{n-1,k-2} = (n-1)^{k-2}$, luego en total hay $n^2(n-1)^{k-2}$ palabras sin contener un palíndromo de longitud impar. □

**Problema. 6.6. (2011)**
*Demuestra que en un triángulo se verifica: si $r$ es una recta que pasa por su baricentro y no pasa por ningún vértice, la suma de las distancias a dicha recta de los vértices que quedan en un mismo semiplano es igual a la distancia del tercer vértice a dicha recta.*

SOLUCIÓN.

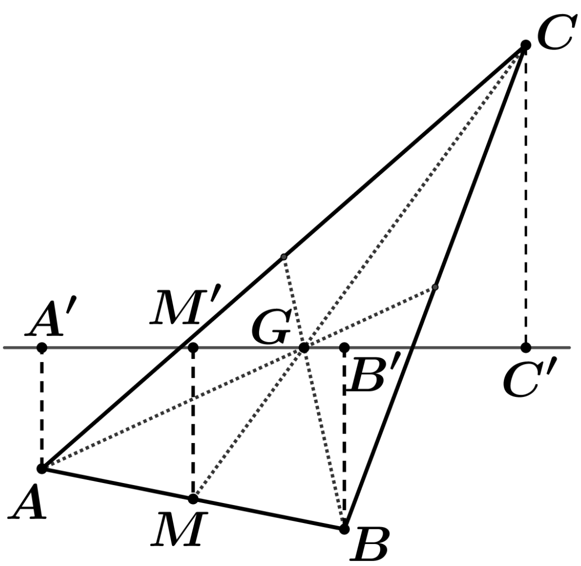


Figura 64:

Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ de la figura 64, donde $G$ es el baricentro y $M$ el punto medio del segmento $AB$. Observemos los triángulos $\triangle GC'C$ y $\triangle GM'M$, en ambos el ángulo en $G$ es el mismos, el segmento $GC$ mide el doble que $GM$ por ser $G$ el baricentro y se tiene que $\cos \measuredangle CGC' = \dfrac{GC'}{GC} = \dfrac{GC'}{2GM}$ y $\cos \measuredangle MGM' = \dfrac{GM'}{GM}$, luego $\dfrac{GC'}{2GM} = \dfrac{GM'}{GM}$ de donde $GC' = 2GM'$. Por tanto ambos triángulos son semejantes con razón de semejanza 2, luego $CC' = 2MM'$.

Por otro lado, el segmento $MM'$ es la paralela media del trapecio $AA'B'B$, luego $MM' = \dfrac{AA' + BB'}{2}$. Así, llegamos a que $CC' = 2MM' = \dfrac{2(AA' + BB')}{2} = AA' + BB'$. □

**Problema. 6.7. (2017)**
*Se dispone de una fila de* 2018 *casillas, numeradas consecutivamente de* 0 *a* 2017*. Inicialmente, hay una ficha colocada en la casilla* 0*. Dos jugadores A y B juegan alternativamente, empezando A, de la siguiente manera: En su turno, cada jugador puede, o bien hacer avanzar la ficha* 53 *casillas, o bien hacer retroceder la ficha* 2 *casillas, sin que en ningún caso se sobrepasen las casillas* 0 *ó* 2017*. Gana el jugador que coloque la ficha en la casilla* 2017*. ¿Cuál de ellos dispone de una estrategia ganadora, y cómo tendría que jugar para asegurarse ganar?*

SOLUCIÓN. El jugador $A$ cuenta con una estrategia ganadora, veámoslo: El jugador $A$ inicia la partida avanzando 53 casillas obligatoriamente,así la ficha se sitúa en la casilla 52. Tras esto, distinguimos dos casos:

- Si $B$ retrocede 2 casillas, $A$ retrocede también 2, por tanto la ficha se sitúa en la casilla 48. A partir de este momento el jugador $A$ deberá hacer el movimiento opuesto al que realice $B$ siguiendo las normas del juego, esto es, si el jugador $B$ retrocede 2 casillas entonces $A$ avanzará la ficha 53 casillas, de igual forma si $B$ avanza 53 casillas entonces $A$ retrocederá la ficha 2 casillas (por lo que la ficha irá avanzando durante este proceso 51 casillas cada vez que $B$ y $A$ jueguen su turno). Este proceso lo repetirá $A$ durante 38 turnos. En este momento la ficha estará situada en la casilla $48+51\cdot 38 = 1986$. Como han ido moviendo primero $B$ y luego $A$, cuando está la ficha en la casilla 1986, es turno de $B$, que obligatoriamente debe retroceder 2 casillas, de hecho $A$ también está obligado a retroceder 2 casillas. Esto ocurre durante 5 turnos completos $BA$. En este instante la ficha se encuentra en la casilla 1966 y le toca a $B$, que debe retroceder 2 casillas obligatoriamente de forma que la ficha se coloca en la casilla 1964, por lo que al avanzar $A$ 53 casillas llega a la casilla 2017 obteniendo la victoria.

- Si por el contrario $B$ avanza 53 casillas, $A$ también avanza 53 casillas, por tanto la ficha se sitúa en la casilla 158. A partir de este momento, de nuevo, el jugador $A$ deberá hacer el movimiento opuesto al que realice $B$ durante 36 turnos completos $BA$, llegando la ficha hasta la casilla $158 + 51 \cdot 36 = 1994$. Ahora es el turno de $B$, que obligatoriamente debe retroceder 2 casillas, de hecho $A$ también está obligado a retroceder 2 casillas. Esto ocurre durante 7 turnos completos $BA$. En este instante la ficha se encuentra, al igual que en el caso anterior, en la casilla 1966 y le toca a $B$, que debe retroceder 2 casillas obligatoriamente de forma que la ficha se coloca en la casilla 1964, por lo que al avanzar $A$ 53 casillas llega a la casilla 2017 obteniendo la victoria.

□

# 7. Olimpiada internacional

Por último, abordaremos algunos problemas propuestos en otros países así como en las olimpiadas internacionales.

**Problema. 7.1. (IMO, 1959)**
*Probar que para cada número entero $n$ la fracción* $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ *no puede reducirse más.*

SOLUCIÓN. Aplicamos el algoritmo de la división euclídea, con $n \in \mathbb{Z}$.

| $i$ | $r$ | $q$ | $u$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $21n+4$ | | 1 | 0 |
| 1 | $14n+3$ | 1 | 0 | 1 |
| 2 | $7n+1$ | 2 | 1 | $-1$ |
| 3 | 1 | $7n+1$ | $-2$ | 3 |

Así, $1 = -2(21n+4)+3(14n+3)$, luego $21n+4$ y $14n+3$ son primos relativos, por tanto $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ es irreducible. □

**Problema. 7.2. (Olimpiada de Bulgaria, 1966)**
*En el triángulo $\triangle ABC$, la bisectriz interior $AL$, la mediana $BM$ y la altura $CE$ son concurrentes. Demostrar que* $tg(A) = \dfrac{\text{sen}(C)}{\cos(B)}$.

SOLUCIÓN. Dibujamos primero la figura para facilitar la interpretación (ver figura 65).
Utilizamos como invariante la relación que nos proporciona el Teorema de Ceva: $\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BL}{LC}\dfrac{CM}{MA} = 1$.
Como $BM$ es la mediana, el lado $CM$ es igual al lado $MA$.
Por otro lado $\dfrac{AC}{LC} = \dfrac{AB}{BL}$, entonces $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BL}{LC}$ y $\dfrac{AB}{\text{sen}(C)} = \dfrac{AC}{\text{sen}(B)}$ entonces $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\text{sen}(C)}{\text{sen}(B)}$. Luego $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BL}{LC} = \dfrac{\text{sen}(C)}{\text{sen}(B)}$.
Finalmente por ser $CE$ altura, $\dfrac{CE}{EA} = tg(A)$, $\dfrac{CE}{BE} = tg(B)$, de donde obtenemos $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{tg(B)}{tg(A)}$ sustituyendo ahora en la relación de Ceva obtenemos $\dfrac{tg(B)}{tg(A)}\cdot\dfrac{\text{sen}(C)}{\text{sen}(A)}\cdot = 1$; $\dfrac{\text{sen}(C)}{\text{sen}(B)}\cdot\dfrac{\text{sen}(B)}{\cos(B)} = tg(A)$; y llegamos a que $tg(A) = \dfrac{\text{sen}(C)}{\cos(B)}$. □

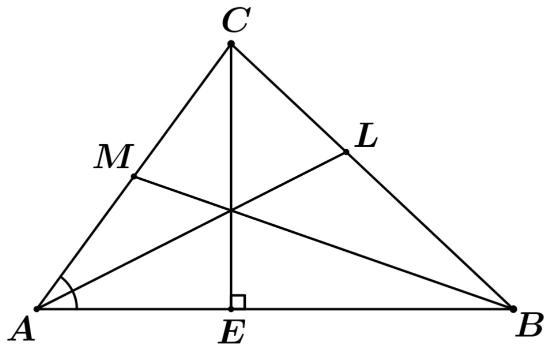


Figura 65:

**Problema. 7.3. (IMO, 1986)**
*A cada vértice de un pentágono regular se le asigna un número entero de tal forma que la suma de los cinco números es positiva. Si $x, y, z$ están en vértices consecutivos e $y < 0$ entonces se permite la siguiente operación: los números $x, y, z$ son reemplazados por $x + y, -y, y + z$. Esta operación se repite siempre que al menos uno de los cinco números sea negativo. Determine si este procedimiento necesariamente finaliza después de un número finito de pasos.*

SOLUCIÓN. Sea $S = x + y + z + u + v > 0$ la suma de los cinco números. Observamos que en cada operación $S$ queda invariante, pues si $y < 0$, entonces $x + y + z = (x + y) + (-y) + (y + z)$, luego $S = x + y + z + u + v = (x + y) + (-y) + (y + z) + u + v$.

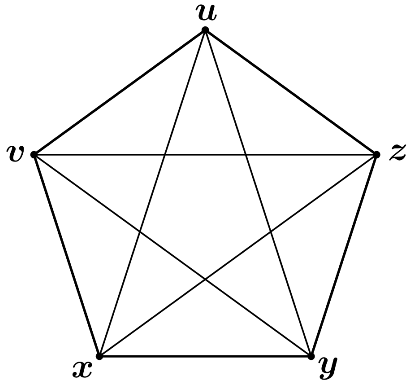


Figura 66:

Consideramos la siguiente cantidad, sumamos el cuadrado de la diferencia de cada dos vértices unidos por las diagonales del pentágono:

$$(x-z)^2+(z-v)^2+(v-y)^2+(y-u)^2+(u-x)^2$$

Al cabo de $n$ operaciones esta cantidad dará como resultado un número natural $p_n$.

$$(x-z)^2+(z-v)^2+(v-y)^2+(y-u)^2+(u-x)^2=p_n$$

Ahora, si hay tres vértices consecutivos $x$, $y$, $z$ e $y<0$, entonces los reemplazamos por $x+y$, $-y$, $y+z$ (los otros casos son análogos), obteniendo así un valor $p_{n+1}$:

$$((x+y)-(y+z))^2+((y+z)-v)^2+(v-(-y))^2+((-y)-u)^2+(u-(x+y))^2=$$

$$=(x-z)^2+((y+z)-v)^2+(v+y)^2+(-y-u)^2+(u-(x+y))^2=p_{n+1}$$

Veamos que relación hay entre $p_n$ y $p_{n+1}$:

$$p_{n+1}-p_n=$$

$$=[(x-z)^2+((y+z)-v)^2+(v+y)^2+(-y-u)^2+(u-(x+y))^2]-[(x-z)^2+(z-v)^2+(v-y)^2+(y-u)^2+(u-x)^2]=$$

$$=((y+z)-v)^2+(v+y)^2+(-y-u)^2+(u-(x+y))^2-[(x-z)^2+(z-v)^2+(v-y)^2+(y-u)^2+(u-x)^2]=$$

$$=(y+z)^2+v^2-2v(y+z)+v^2+y^2+2vy+y^2+u^2+2yu+u^2+(x+y)^2-2u(x+y)-[z^2+v^2-2zv+v^2+y^2-2vy+$$

$$+y^2+u^2-2yu+u^2+x^2-2ux]=$$

$$=y^2+z^2+2zy+v^2-2vy-2vz+v^2+y^2+2vy+y^2+u^2+2yu+u^2+x^2+y^2+2xy-2ux-2uy-z^2-v^2+2zv-v^2-$$

$$-y^2+2vy-y^2-u^2+2yu-u^2-x^2+2ux=$$

$$=2zy+2vy+2yu+2xy+2y^2=$$

$$=2(y^2+xy+zy+uy+vy)=$$

$$=2y(x+y+z+u+v)=2yS$$

Hemos llegado a $p_{n+1}-p_n=2yS<0$ pues $y<0$ y $S>0$.
Así, vemos que la sucesión de naturales $\{p_n\}$ decrece de forma indefinida, pero no es posible puesto que $\{p_n\}$ es una sucesión de enteros positivos. Por tanto la sucesión ha de ser finita, luego el procedimiento necesariamente finaliza después de un número finito de pasos, por tanto tras un número finito de pasos los números de los vértices del pentágono son positivos. □

**Problema. 7.4. (USAMO, 1990)**
*Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo. La circunferencia de diámetro $AB$ corta a la altura $CC'$ y su extensión en los puntos $M$ y $N$, y la circunferencia de diámetro $AC$ corta a la altura $BB'$ y su extensión en los puntos $P$ y $Q$. Demuestra que los puntos $M$, $N$, $P$ y $Q$ se encuentran sobre una circunferencia común.*

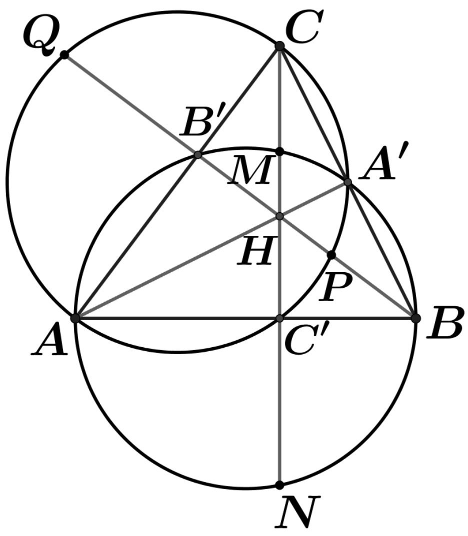


Figura 67:

SOLUCIÓN. Definimos $A'$ como el punto de intersección de la altura desde el vértice $A$ con la base $BC$. De igual forma se definen los puntos $B'$ y $C'$ como la intersección de las alturas con la base $AC$ y $AB$ respectivamente. Con la intersección de estas tres alturas $AA' \cap BB' \cap CC'$ obtenemos el ortocentro $H$. Puesto que $\measuredangle AA'B$ y $\measuredangle AA'C$ son ángulos rectos, tenemos que $A'$ pertenece a las circunferencias de diámetros $AC$ y $BC$.

Ahora usamos el Teorema de la potencia de un punto respecto de una circunferencia que habíamos enunciado en la página . Para ello tomamos el punto $H$ y la circunferencia de diámetro $AB$, obteniendo $AH \cdot A'H = MX \cdot NH$. De la misma forma, aplicamos el teorema con la circunferencia de diámetro $AC$ y el punto $H$, quedando $AH \cdot A'H = PH \cdot QH$. Con estas dos igualdades llegamos a que $MX \cdot NH = PH \cdot QH$, de lo que se deduce que los puntos $M$, $N$, $P$ y $Q$ pertenecen a una misma circunferencia. □

**Problema. 7.5. (OIMU, 1999)**
*En el juego $tetris - 5$ se utilizan cuatro tipos de fichas que tienen una de sus caras pintadas de negro y otra de blanco tal como se muestran en la siguiente figura 68.*
*Las fichas pueden ser colocadas en un tablero cuadriculado de $m \times n$ en cualquier posición siempre y cuando no se superpongan y tengan la cara negra hacia arriba.*

a) *Demostrar que se puede recubrir un tablero de $8 \times 8$ que no contiene sus cuatro esquinas.*

b) *Demostrar que no se puede recubrir un tablero de $1999 \times 2001$ que no contiene a sus cuatro esquinas.*

SOLUCIÓN. $a$) Una posible solución es la figura 69.

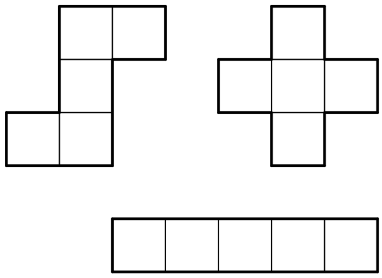

Figura 68:

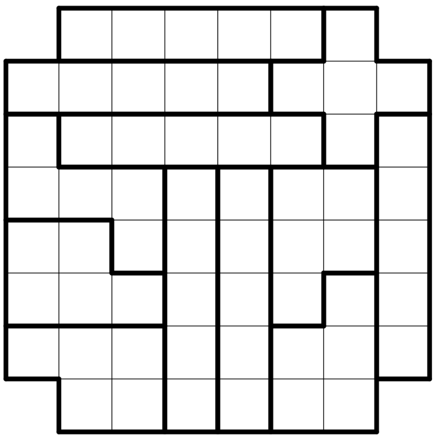

Figura 69:

*b*) La resolución de este segundo apartado del problema sigue un razonamiento similar al problema 3.5.. En este caso, en vez de emplear 4 colores, utilizaremos 5, pues cada pieza tiene exactamente 5 casillas. Los colores los dispondremos sobre el tablero de tal forma que cada pieza tape exactamente 1 casilla de cada color aunque dichas piezas sean rotadas.
Partimos del tablero $1999 \times 2001$ al que se le han quitado las cuatro esquinas.
Sean 0, 1, 2, 3 y 4 los cinco colores de la coloración, dispondremos en orden 0, 1, 2, 3, 4 los colores por columnas, pero por filas no mantendremos ese orden pues sino las piezas no taparían exactamente una casilla de cada color. En la figura 70 se muestra la disposición de estos colores.

En la figura 70 se observa que las casillas tachadas son las esquinas que se le han de quitar al tablero. Es fácil ver que los colores tachados se encuentran precisamente en esas esquinas puesto que:

- El tablero tiene 1999 filas, como estamos empleando una coloración cíclica con 5 colores, y 5 es múltiplo de 2000, la coloración de la fila 1999 es la misma que la de la fila 4.
- El tablero tiene 2001 columnas, como estamos empleando una coloración cíclica con 5 colores, y 5 es múltiplo de 2000, la coloración de la columna 2001 es la misma que la de la columna 1

Partimos del tablero $1999 \times 2001$ al que se le han quitado las cuatro esquinas, luego tenemos un total de

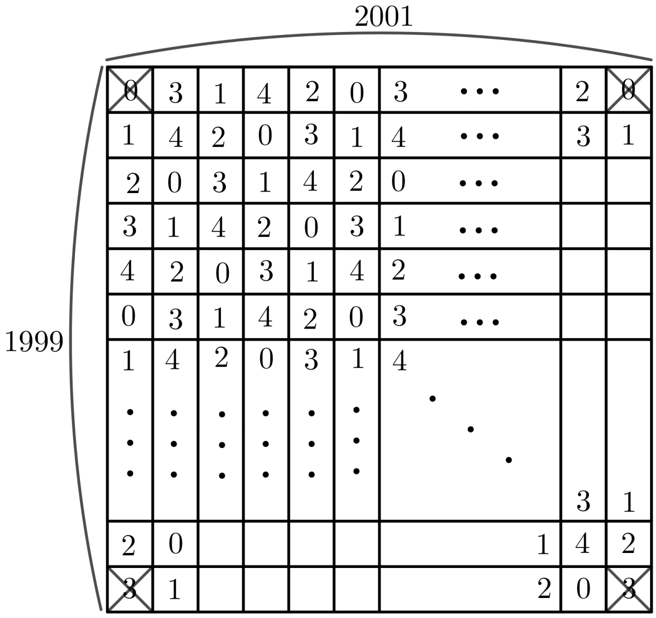


Figura 70:

$1999 \cdot 2001 - 4 = 3999995$ casillas.
El tablero con las cuatro esquinas tiene un total de $1999 \cdot 2001 = 3999999$ casillas. En la coloración expuesta en la figura 70, contando las esquinas, hay 800000 casillas de los colores 0, 1, 2, 3 y 799999 casillas del color 4. Pero al eliminar las 4 esquinas quitamos dos casillas del color 0 y dos casillas del color 3, luego finalmente en el tablero hay:
799998 casillas del color 0
800000 casillas del color 1
800000 casillas del color 2
799999 casillas del color 3
799998 casillas del color 4
Sin embargo cada pieza tapa una casilla de cada color y no pueden superponerse, en total las piezas tapan 799999 casillas de cada color ya que $3999995 : 5 = 799999$.
Por tanto no es posible recubrir el tablero con estas piezas. □

**Problema. 7.6. (OMCC, 2001)**
*Dos jugadores A, B y otras* 2001 *personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.*

SOLUCIÓN. Al inicio del juego hay 2003 personas contando también a los jugadores $A$ y $B$. Dado que están formando un círculo, podemos dividirlo en dos partes; en una de ellas habrá un número par de personas y en la otra un número impar. La estrategia de $A$ consiste en eliminar siempre una persona de la parte donde hay un número par de personas. De esta forma $B$ se encontrará siempre con que en cada parte del círculo hay un número impar de personas. Al ejecutar $B$ su turno siempre le dejará al jugador $A$ una parte donde hay un número par de personas y otra con un número impar. Si $A$ continúa jugado de esta forma $B$ nunca ganará, pues en el turno de $B$ siempre habrá al menos una persona a ambos lados entre $A$ y $B$. Por tanto el juego finalizará con victoria del jugador $A$ en, a lo sumo, 2001 turnos. Esto se debe a que el número inicial de personas es impar, si inicialmente hubiera un número par de personas la estrategia ganadora la tendría el jugador $B$ siguiendo esta misma estrategia. □

**Problema. 7.7. (IMO, 2009)**
*Sea $n$ un entero positivo y sean $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ enteros distintos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, tales que $n$ divide a $a_i(a_{i+1} - 1)$, para $i = 1, \ldots, k-1$. Demostrar que $n$ no divide a $a_k(a_1 - 1)$.*

SOLUCIÓN. Dado que $n$ divide a $a_i(a_{i+1} - 1) = a_i a_{i+1} - a_i$, para $i = 1, \ldots, k-1$ se tiene $a_i a_{i+1} \equiv a_i (\text{mod } n)$.
Tomando $1 < i < k$ y multiplicando la congruencia $a_i a_{i+1} \equiv a_i (\text{mod } n)$ por $a_1, \ldots, a_{i-1}$ obtenemos $a_1 \cdots a_i a_{i+1} \equiv a_1 \cdots a_{i-1} a_i (\text{mod } n)$. Dado que $i = 2, 3, \ldots, k-1$:
Para $i = 2$, $a_1 a_2 a_3 \equiv a_1 a_2 (\text{mod } n)$
Para $i = 3$, $a_1 a_2 a_3 a_4 \equiv a_1 a_2 a_3 (\text{mod } n)$
$\cdots$
Para $i = k-2$, $a_1 \cdots a_{k-2} a_{k-1} \equiv a_1 \cdots a_{k-3} a_{k-2} (\text{mod } n)$
Para $i = k-1$, $a_1 \cdots a_{k-1} a_k \equiv a_1 \cdots a_{k-2} a_{k-1} (\text{mod } n)$
Por tanto obtenemos que $a_1 \cdots a_{k-1} a_k \equiv a_1 a_2 (\text{mod } n)$.
Además, de la congruencia inicial $a_i a_{i+1} \equiv a_i (\text{mod } n)$, para $i = 1$ se tiene $a_1 a_2 \equiv a_1 (\text{mod } n)$.
Por tanto $a_1 \cdots a_{k-1} a_k \equiv a_1 (\text{mod } n)$.
Por otro lado, si $n$ dividiera a $a_k(a_1 - 1)$, equivalentemente $a_k a_1 \equiv a_k (\text{mod } n)$, entonces análogamente obtendríamos $a_1 \cdots a_{k-1} a_k \equiv a_k (\text{mod } n)$.
Uniendo ambos resultados llegamos a que $a_k \equiv a_1 (\text{mod } n)$, pero $a_1, a_k$ son enteros distintos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, luego $n$ no divide a $a_k(a_1 - 1)$. □

# Bibliografía


[1] T. ANDREESCU AND B. ENESCU. *Mathematical Olympiad Treasures*, Birkhäuser, Springer, Second Edition, 2012.

[2] B. AVERBACH AND O. CHEIN. *Problem Solving Through Recreational Mathematics*, Dover publications, Inc., Mineola, New York, 2000.

[3] F. BELLOT Y M.A. LÓPEZ. *Cien problemas de matemáticas*, Universidad de Valladolid, España, 1994.

[4] D. DJUKIC, V. JANKOVIC, I. MATIC AND N. PETROVIC. *The IMO Compendium*, Springer, Second Edition, USA, 1996.

[5] A. ENGEL. *Problem solving strategies*, Edited by K. Bencsáth & P.R. Halmos. Springer, USA, 1998.

[6] D. FOMIN, S. GENKI AND I. ITENBERG. *Mathematical Circles (Russian Experience)*, Translated from the Russian by M. Saul, A.M.S., USA, 1996.

[7] J. JERÓNIMO. *Geometría en Olimpiadas de Matemáticas*. Universidad Autónoma de Guerrero. Obtenido de http://www.matetam.com/sites/default/files/libro_shuyriguin.pdf

[8] L.C. LARSON. *Problem-Solving Through Problems*, Springer-Verlag, USA, 1983.

[9] J.H. NIETO. *Invariantes y problemas de Olimpiadas*. Venezuela. Obtenido de http://www.oei.es/historico/oim/revistaoim/numero53/Invariantes.pdf

[10] J.H. NIETO. *Resolución de Problemas Matemáticos*. Venezuela. Obtenido de https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/09/respropr1.pdf

[11] P. SOBERÓN. *Problem-Solving Methods in Combinatorics*, Birkhäuser, UK, 1996.

[12] J.J. WATKINS. *Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems*, Princeton University Press, USA, 2004.

[13] P. ZEITZ. *The Art and Craft of Problem Solving*, John Wiley & Sons, Inc., Second Edition, University of San Francisco, 2007.

[14] *Sessions de preparació per l'olimpiada matematica*, Soc. Cat. Mat. Barcelona, 2000.

# Refencias Web:

Nota[1]

- https://math.stackexchange.com/
- https://artofproblemsolving.com/
- http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es
- http://www.ugr.es/olimpiada/
- http://www.ugr.es/pjara/
- https://www.imo-official.org/problems
- http://www.unirioja.es/talleres/creatividad_matematica/SeminarioBachillerato/
- https://grupofundamental.wordpress.com/pagina-de-paginas/
- http://institucional.us.es/olimpiada2006/web/
- http://www.ub.edu/arcades/other.html
- http://www.um.es/ome-murcia/
- http://blogs.unileon.es/olimpiadamatematicas/material-de-preparacion/
- http://www.oei.es/historico/oim/revistaoim/historial.htm

[1] Los enlaces son válidos en el formato digital.