ESTALMAT ANDALUCIA ORIENTAL

Geometría en una retícula

Primer curso (17/03/2018)

2017–2018

Ponentes:
Pascual Jara
Luis Merino

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD
FECYT
FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

Resumen

Vamos a estudiar problemas relativos a polígonos simples (aquellos en los que los lados no se cruzan) cuyos vértices son puntos de una retícula (que podemos suponer es la retícula entera). El principal resultado es que podemos calcular, de forma sencilla, el área de un tal polígono; ésta se expresa en función de los puntos de la retícula que son interiores y los que están en la frontera (Teorema de Pick). Como aplicación vamos a estudiar algunos otros problemas aritméticos y geométricos que surgen en una retícula de forma natural.

Introducción

El tratar problemas en una retícula nos enseña la interacción que existe entre diferentes partes de la Matemática. En este caso entre el Álgebra y la Geometría. La teoría que vamos a iniciar tiene aplicaciones a la industria, la economía y otras ramas del saber, pero no es nuestra intención explorar estas aplicaciones, sino, de una forma lúdica aproximarnos a resultados profundos de la teoría y sus aplicaciones.

Hoy no vamos a probar, de forma explícita, los resultados que vamos a ir obteniendo, pero sí vamos a procurar que vosotros deduzcáis los fórmulas más relevantes que van a aparecer. Bueno, en realidad vamos a demostrar un resultado, más bien un Teorema, para incitaros en el uso de técnicas de razonamiento matemático avanzado. Esperamos que no sea demasiado difícil para vosotros.

La retícula es una retícula cuadrada formada por ejes ortogonales (perpendiculares). Echar un vistazo al índice del texto para tener una lista de los problemas que vamos a tratar, y para ver cómo están organizados.

Agradeceríamos al lector que nos facilite sugerencias o comentarios sobre este texto, posibles errores y erratas, y posibles extensiones de la teoría. Para ello puede utilizar la página

`http://www.ugr.es/local/anillos/textos/pick2.htm`

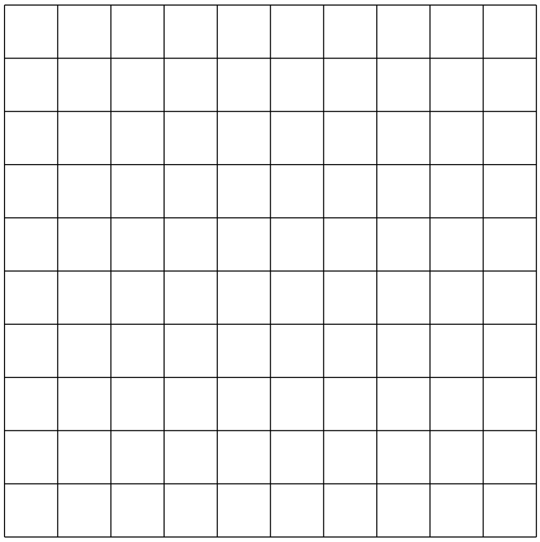
Índice de temas

- Modelización de problemas
- Puzzle de cinco piezas y seis figuras

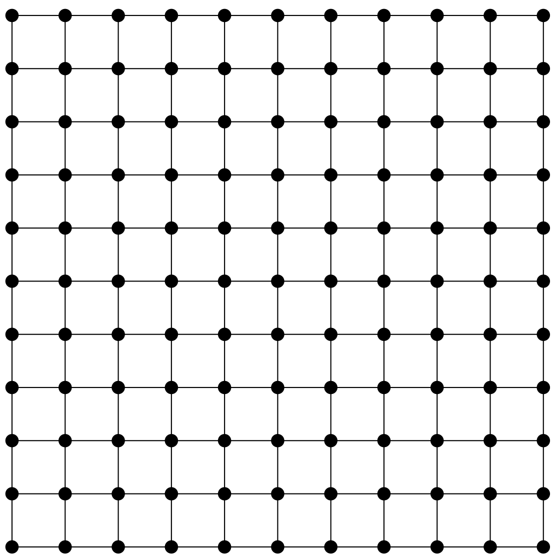
1. ¿Qué es una retícula?

Una **retícula** es la configuración de rectas, horizontales y verticales, que se obtienen en el plano al considerar las rectas horizontales que pasan por los puntos $(0, a)$, con $a \in \mathbb{Z}$ y las rectas verticales que pasan por los puntos $(a, 0)$, con $a \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto una retícula es algo parecido a lo siguiente:

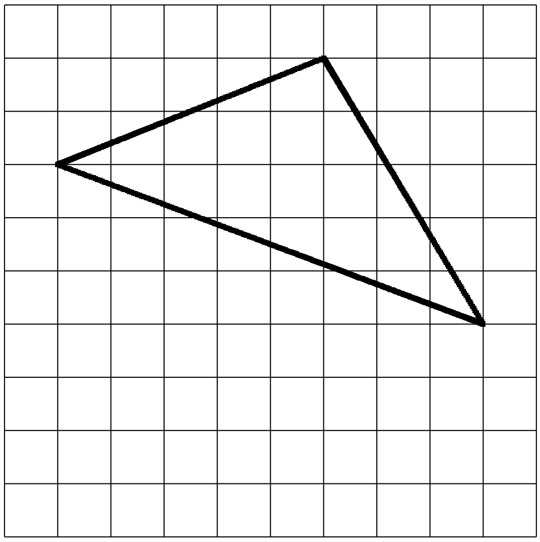


A nosotros nos interesan sólo los puntos de la retícula, los que determinan las intersecciones de estas rectas, esto es, los que aparecen señalados con un circulito negro.



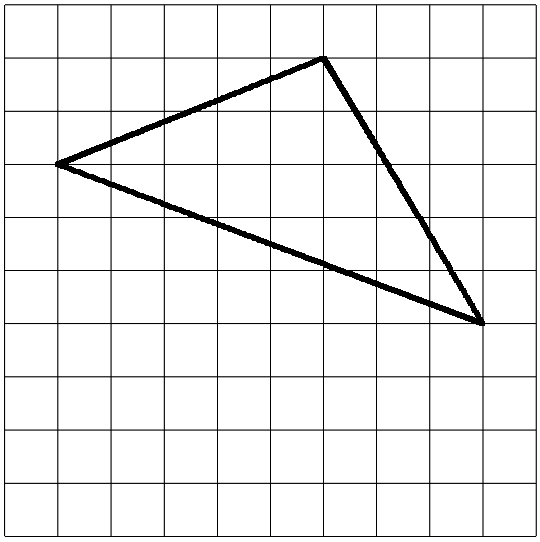
Por razones de estética no vamos a dibujar todos estos circulitos negros, los puntos de la retícula, salvo cuando sea necesario destacar algo con ellos.

Una **figura** en una retícula está delimitada por segmentos que van de un punto de la retícula a otro. Un **polígono reticulado** es un polígono que es una figura en la retícula. Un **triángulo reticulado** es, por ejemplo:

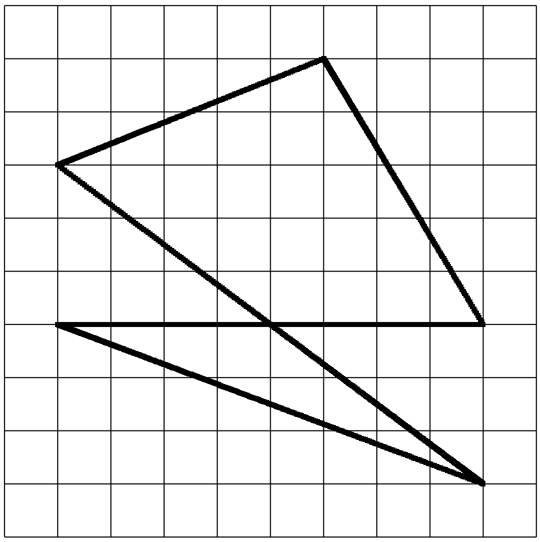


2. Figuras en una retícula

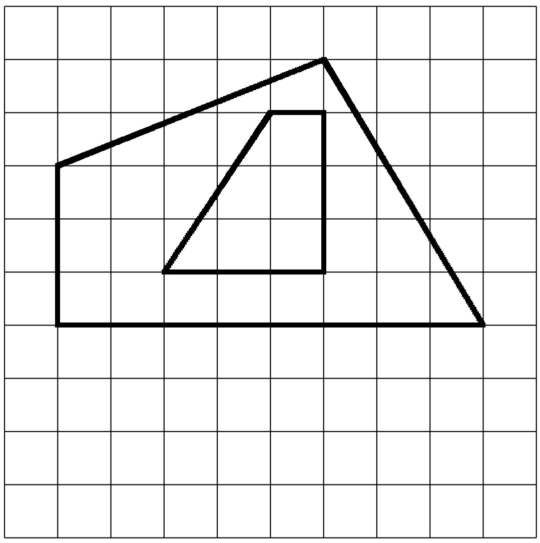
En una retícula un **polígono simple** es aquel en el que no se cortan ni cruzan sus aristas.



Un **polígono compuesto** es aquel en el que se cortan sus aristas en un punto de la retícula.



También vamos a considerar **polígonos con agujeros**, como el que aparece en la figura



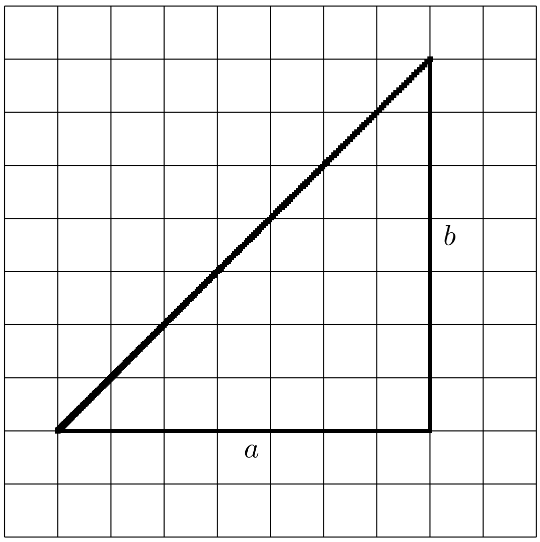
3. Medidas en una retícula

¿Qué medidas podemos hacer en una retícula?, esto es, ¿qué números nos aparecen como distancias entre dos puntos de una retícula?

Una simple aplicación del Teorema de Pitágoras nos dice que los números que nos aparece son aquellos de la forma

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

donde $a, b \in \mathbb{Z}$.



Actividad: Haz una lista de los primeros números que aparecen como distancias entre puntos de la retícula. ¿Echas en falta alguno?

Observa que no es posible obtener el número $\sqrt{3}$, ya que 3 no se puede escribir como la suma de dos cuadrados de números enteros.

Actividad: Estudia los números enteros primos positivos que se pueden escribir como suma de dos cuadrados.

(1) Haz una lista con éstos, y con aquellos que no puede escribir de esta forma.
(2) Escribe en dos columnas unos y otros.
(3) ¿Observas algunas particularidad en los números que aparecen en estas columnas?
(4) ¿En que columnas crees que están los siguientes números primos: 1009, 2003, 3001, 4001, 5003, 5557?

Actividad. Carreras de primos: Existe un problema con números primos; hay infinitos números primos en cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{P}_1 = \{p \mid \ p \text{ es primo y } p = 4k+1, \ k \in \mathbb{N}\} \text{ y}$$
$$\mathcal{P}_3 = \{p \mid \ p \text{ es primo y } p = 4k+3, \ k \in \mathbb{N}\}.$$

(1) ¿Dónde hay más elementos en el primer conjunto o en el segundo?
(2) Considera otros números, distintos a 4, y plantea el mismo problema. En el caso de 6 tenemos también dos posibles conjuntos:

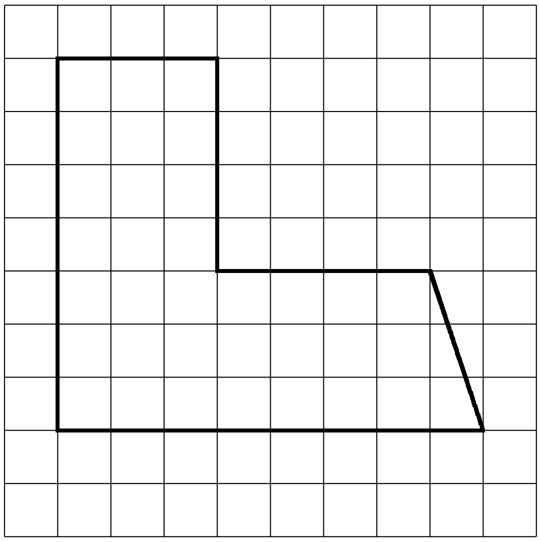
$$\mathcal{P}_i = \{p \mid \ p \text{ es primo y } p = 6k+i, \ k \in \mathbb{N}\} \text{ para } i = 1, 5.$$

(3) En el caso de 7 tenemos seis posibles conjuntos:

$$\mathcal{P}_i = \{p \mid \ p \text{ es primo y } p = 7k+i, \ k \in \mathbb{N}\} \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

(4) ¿Por qué son sólo éstos los conjuntos posibles?
(5) ¿Son todos estos conjuntos infinitos?
(6) ¿Cuáles de ellos son conjuntos infinitos?

Vamos ahora a medir el área de un polígono reticulado simple, por ejemplo el que aparece en la siguiente figura:



Contando cuadrados es fácil ver que el área es: 34,5.

Este número se puede conseguir también contando

- el número I de puntos de la retícula que hay en el interior del polígono y
- el número B de puntos de la retículo que hay en el borde

$$I = 22; \qquad B = 27.$$

En este caso $34{,}5 = 22 + \frac{27}{2} - 1 = 22 + 13{,}5 - 1.$

Ésta es la fórmula (**Fórmula de Pick**)

$$Area = I + \frac{B}{2} - 1,$$

que permite calcular el área de un polígono simple sin mas que contar puntos de la retícula.

Actividad: Comprueba la fórmula anterior en varios ejemplos dibujados poor ti mismo en una retícula.

4. Consecuencias de la Fórmula de Pick

Observa que el área de un polígono simple es siempre un número entero o la mitad de un número entero.

Este resultado tiene mucha consecuencias en la teoría.

Actividad: Trata de responder a la siguiente pregunta: ¿es posible dibujar un triángulo equilátero en una retícula? La respuesta es NO. Averigua por qué.

Es claro que siempre es posible dibujar un cuadrado en una retícula. De hecho hay muchas formas de hacerlo.

Actividad: Calcula los posibles valores de las áreas de un cuadrado reticulado.

Actividad: Tampoco es posible dibujar un pentágono regular en una retícula. Intenta probar este hecho.

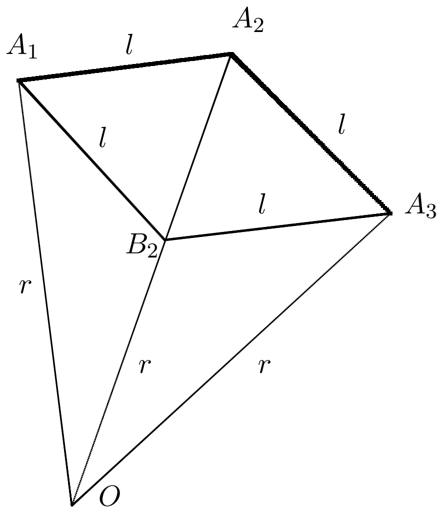
Actividad: Puesto que no se puede dibujar triángulos equiláteros, tampoco se podrá dibujar hexágonos regulares.

Teorema: No es posible dibujar ningún polígono regular de más de seis lados en una reticula.

Basta considerar tres vértices consecutivos: A_1, A_2 y A_3. Con los segmentos $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_2A_3}$ construimos un paralelogramo. Si el cuarto vértices de este paralelogramo es B_2, entonces B_2 es un punto de la retícula.

Además B_2 está sobre la recta que une A_2 y O, el centro del polígono, ya que el segmento $\overline{A_2B_2}$ es una bisectriz del ángulo $\widehat{A_1A_2A_3}$. Si llamamos l a la longitud del lado del polígono y r al radio de la circunferencia circunscrita, tenemos que $l < r$, ya que el número de lados es $n > 6$. En consecuencia el punto B_2 está sobre el segmento $\overline{A_2O}$. Al hacer esto para cada terna de vértices consecutivos resulta que los vértices B_i forman un polígono regular reticulado de área menor que el polígono original.

Repitiendo el proceso se llega a un polígono regular reticulado de área tan pequeña como queramos, lo que es una contradicción.



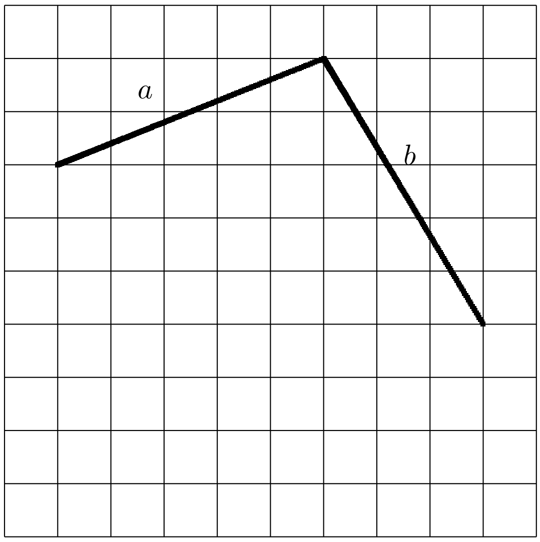
5. Modelización de problemas

Actividad: Estudia el problema de calcular el área de un polígono simple con agujeros.

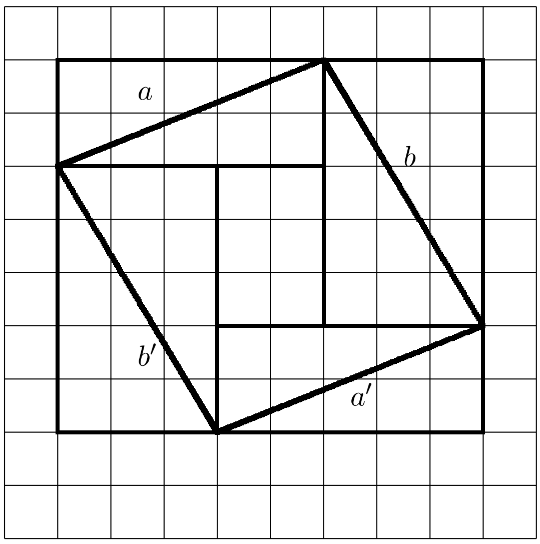
Actividad: Cálculo del área de una figura no reticulada variando el tamaño de la retícula.

Actividad: (Utilizado en la demostración de que no es posible dibujar polígonos regulares de más de seis lados.) Si en una retícula tenemos dos segmentos, no alineados, a y b que tienen un extremo común, entonces el paralelogramo construido a partir de a y b es reticulado; esto es, todos sus vértices son puntos de la retícula.

Dados los segmentos a y b:



Trasladamos b al otro extremo de a y hacemos lo mismo con a.



El resultado es un paralelogramo de lados a, b, a' y b'.

6. Puzzle de cinco piezas y seis figuras

Actividad:

1. Recorta el rectángulo de la Figura (F.1)
2. Con las piezas que has recortado construye las cuatro figuras que aparecen en la Figura (F-2).
3. Observa que el rectángulo de la Figura (F.1) y todas las piezas que aparecen se pueden construir en una retícula. Construye el rectángulo de la Figura (F.1) en una retícula, toma 12 como la longitud de la base 15 como la longitud de la altura.
4. Identifica, en la Figura (F.1), los segmentos que tiene la misma longitud.
5. Determina, y compara entre sí, las longitudes de todos los segmentos que aparecen en la Figura (F.1).
6. Construye en una retícula el *trapecio* que se forma con las cinco piezas del puzzle.
7. Construye en una retícula la *cruz latina* que se forma con las cinco piezas del puzzle.
8. Construye en una retícula el *cuadrado* que se forma con las cinco piezas del puzzle.
9. Construye en una retícula el *triángulo rectángulo* que se forma con las cinco piezas del puzzle.
10. Construye en una retícula el *diamante* (romboide) que se forma con las cinco piezas del puzzle.

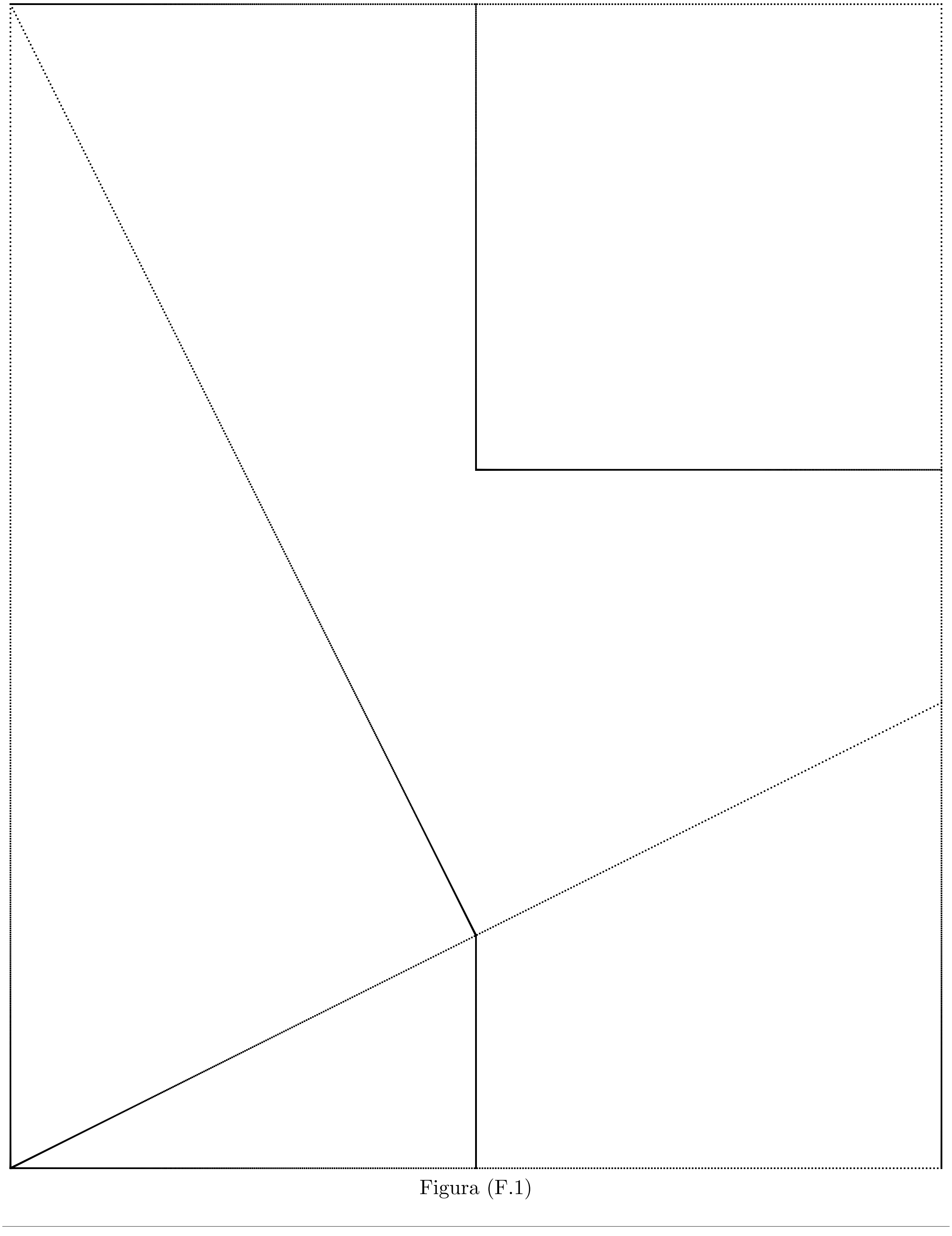


Figura (F.1)

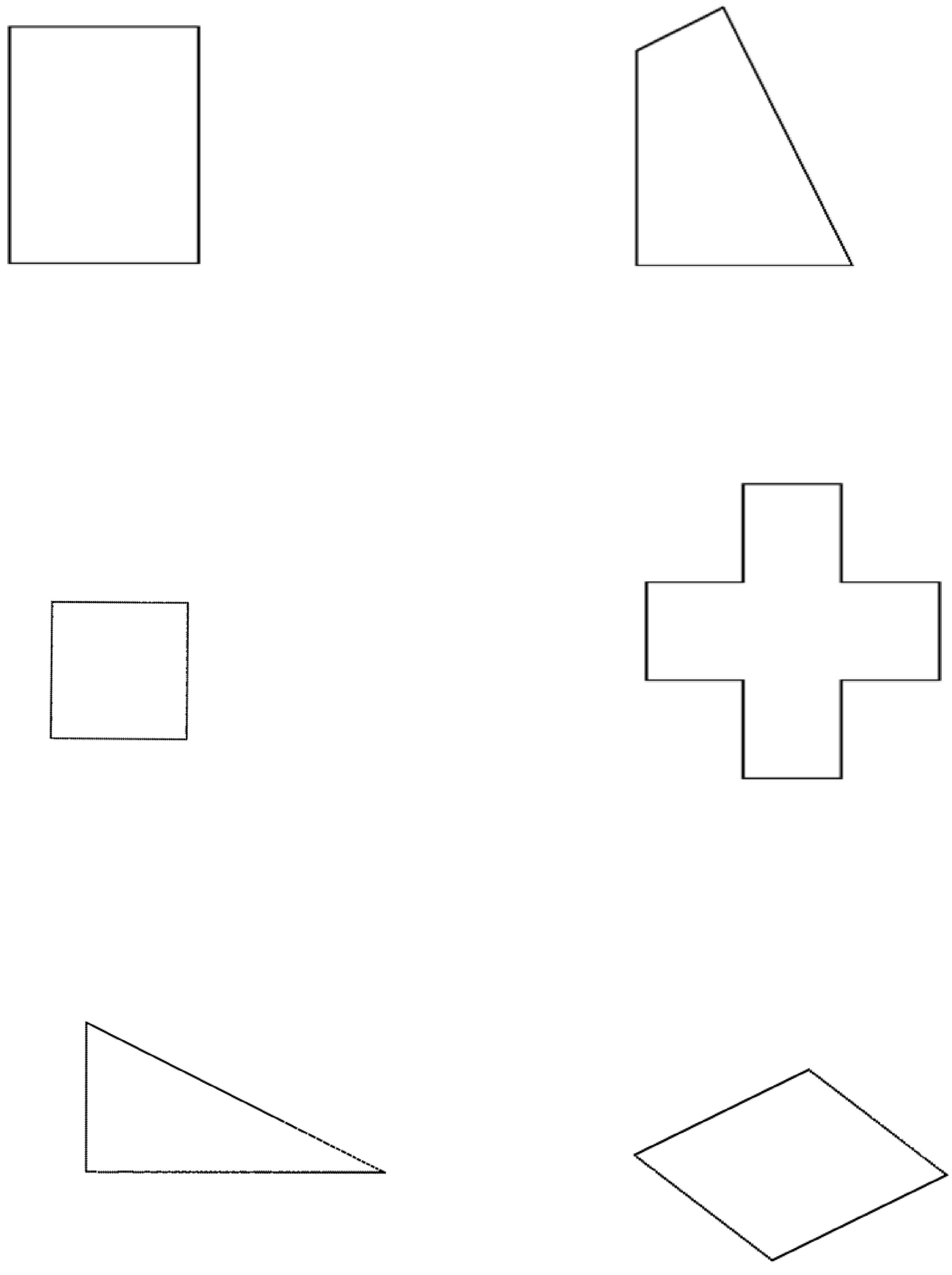


Figura (F.2)

Solución: (La relación es: $b = \sqrt{5}\,a$, y las longitudes de los segmentos son:)

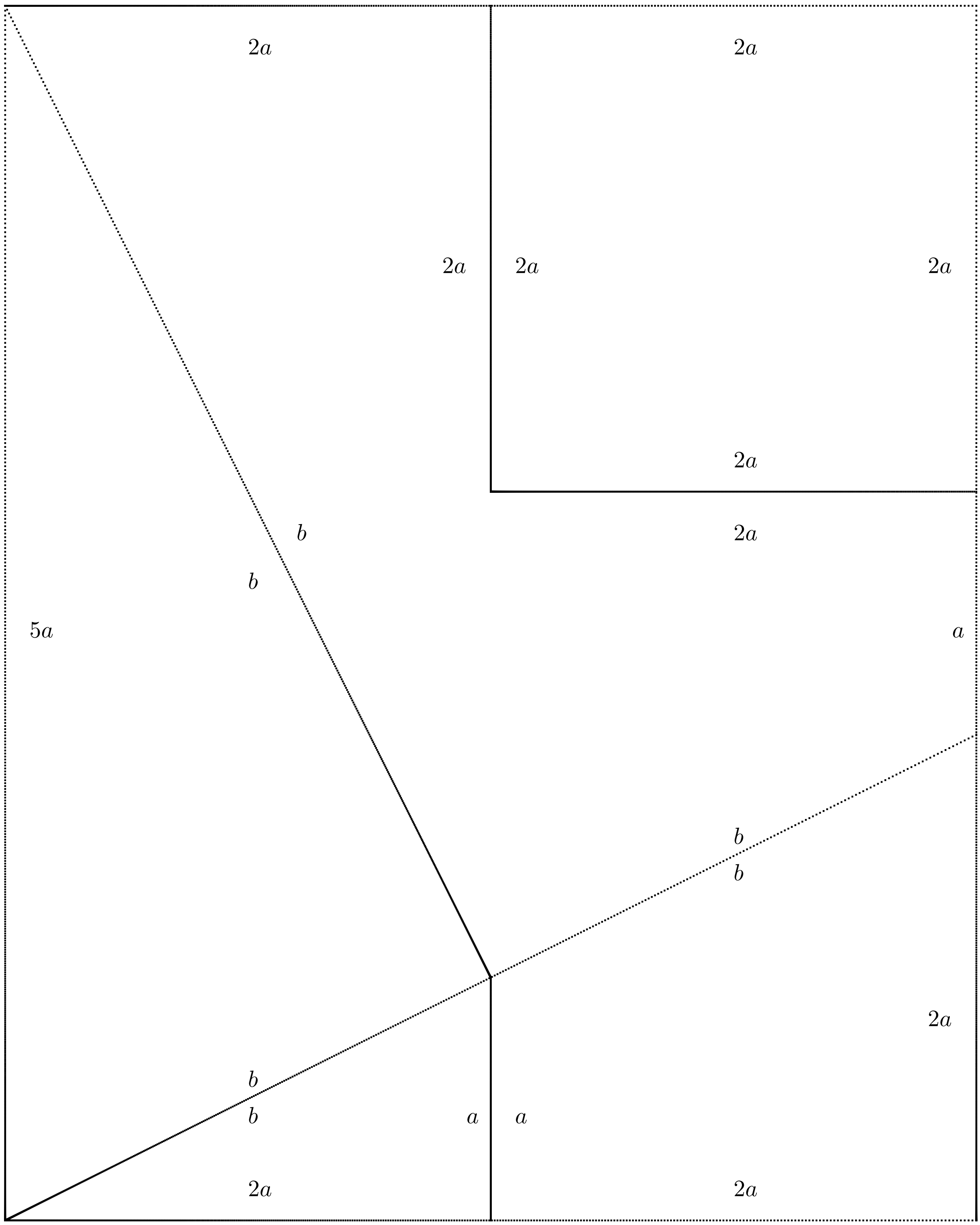


Figura (F.3)

Pascual Jara. Departamento de Álgebra. Universidad de Granada
Luis Merino. Departamento de Álgebra. Universidad de Granada
.