PROBLEMAS Y APLICACIONES DE SUCESIONES RECURRENTES

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER INTERUNIVERSITARIO DE MATEMÁTICAS

Realizado por:

CARLOS CERVERA ZAFRA

Dirigido por:

PASCUAL JARA MARTÍNEZ

UNIVERSIDAD DE GRANADA. CURSO 2016-2017

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN:

El presente Trabajo Fin del Máster Interuniversitario en Matemáticas se marca como objetivo la redacción de un texto en el que se discuten y analicen problemas sobre sucesiones recurrentes, mediante el uso de funciones generatrices, similares a los que normalmente se usan en las competiciones de Olimpiada de Matemáticas.

Pero, ¿qué son las Olimpiadas de Matemáticas?

Según el reglamento de las Olimpiadas Internacionales, estas competiciones son concursos entre jóvenes estudiantes, cuyo objetivo primordial es estimular el estudio de las Matemáticas y el desarrollo de jóvenes talentos en esta Ciencia.

El concurso en sí, consta de tres fases con un nivel de dificultad creciente:

1. Fase de Local: Suele celebrarse al final del primer trimestre en cada Distrito Universitario; consta de dos pruebas escritas en las que se han de resolverse un total de seis problemas. Los participantes son estudiantes de Enseñanzas Medias menores de 19 años que se presentan voluntariamente sin ningún requisito previo. Los tres alumnos que obtienen mejor puntuación pueden acceder a la fase siguiente.

2. Fase Nacional: Suele celebrase en marzo-abril, consta de dos pruebas escritas de tres horas y media de duración cada una, en el transcurso de las cuales, los participantes deben enfrentarse a un total de seis problemas propuestos por un tribunal. Los seis mejores clasificados en esta Fase pueden participar en la fase Internacional y los cuatro primeros participan además en la Olimpiada Iberoamericana.

3. Fase Internacional: Suele celebrase a mediados de julio; consta de dos pruebas escritas de cuatro horas y media de duración cada una, en el transcurso de las cuales, los participantes deben enfrentarse a un total de seis problemas propuestos por un tribunal.

Los problemas de todas las fases no requieren conocimientos muy específicos de Matemáticas, por el contrario se intenta que para resolverlos el alumno deba utilizar su capacidad de raciocinio, su habilidad para enfrentarse a situaciones nuevas y una cierta dosis de organización y adaptación de resultados conocidos a retos nuevos.

Una vez explicado qué son las Olimpiadas de Matemáticas, explicar la distribución del trabajo fin de máster (TFM).

En este TFM se realiza primero un desarrollo teórico, que es necesario para la resolución de los problemas que se trabajarán más adelante, acompañado de algunos ejercicios resueltos, el cual ocupa los 3 primeros bloques de este trabajo. A continuación, se introducen una serie de ejercicios que han aparecido en las distintas olimpiadas de matemáticas, clasificados por su dificultad que está marcada según el tipo de competición. Y finalmente, se detallan algunas de las aplicaciones que pueden tener las funciones generatrices.

SUCESIONES

SUCESIONES (propiedades elementales):

Una sucesión es un conjunto indizado en un subconjunto de números naturales. Por ejemplo:

$$3, 6, 9, 12, 15, \ldots$$

es la sucesión de los múltiplos de 3. El primer elemento es el 3, el segundo el 6, el quinto es el 15 y el elemento que ocupa la posición n será el 3n. Se ve en este ejemplo que lo que se hace es asociar a cada uno de los números naturales 1,2,3,4 ,... un múltiplo de 3, es decir, 3,6,9,12,...

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \ldots & 3n & \ldots \end{array}$$

Por tanto, una sucesión de números no es más que una función definida sobre los números naturales que toma valores enteros, racionales, reales o complejos. La definición formal (tomamos para ejemplo una sucesión de números reales) es la siguiente:

Definición 1: Una <u>sucesión de números reales</u> es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Si $f(n) = a_n$, decimos que a_n es el término n-ésimo de la sucesión. Usualmente escribiremos $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $\{a_n, n \geq 0\}, \{a_n\}_n$ o simplemente $\{a_n\}$, para denotar esta sucesión.

Observación 1 1. En algunos casos consideramos sucesiones que comienzan en uno en lugar de comenzar en cero: $\{a_n, n \geq 1\}$.

2. Aunque la mayoría de sucesiones que veremos serán de números reales, también aparecerán sucesiones de números complejos e incluso de funciones. La definición en cada caso es totalmente análoga.

Definición 2: Sea $\{a_n, n \geq 1\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $\{a_n, n \geq 0\}$ <u>converge</u> a a si para todo real positivo $\mathcal{E}$ existe un entero positivo $N = N(\mathcal{E})$ tal que $|a_n - a| < \mathcal{E}$, siempre que $n \geq N$.

Si $\{a_n, n \geq 0\}$ converge a a escribiremos $a_n \to a$ cuando $n \to \infty$, $lim_{n\to\infty} a_n = a$ ó $\lim\{a_n\}_n = a$ decimos que a es el límite de la sucesión $\{a_n, n \geq 0\}$ y que la sucesión es convergente. Una sucesión que no es convergente es divergente.

Esta idea formaliza la siguiente idea intuitiva: a es el límite de la sucesión (a_n) si a medida que crece el índice n, los elementos a_n de la sucesión están cada vez más próximos al límite a.

Ejemplo 1

1. Sea $a_n = \frac{1}{n}$, para cada $n \geq 1$. Esta sucesión converge a 0 en $\mathbb{R}$: dado $\mathcal{E} > 0$ escogemos $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\mathcal{E})$ tal que $\frac{1}{N} < \mathcal{E}$. Entonces tenemos que para todo $\mathrm{n} \geq \mathrm{N}$

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{N} < \mathcal{E}$$

Gráficamente la convergencia equivale a que, para cualquier $\mathcal{E} > 0$, a partir de un cierto índice N, todos los miembros de la sucesión caigan dentro de una banda de ancho $2\,\mathcal{E}$ centrada en el valor del límite, que en este caso es cero.

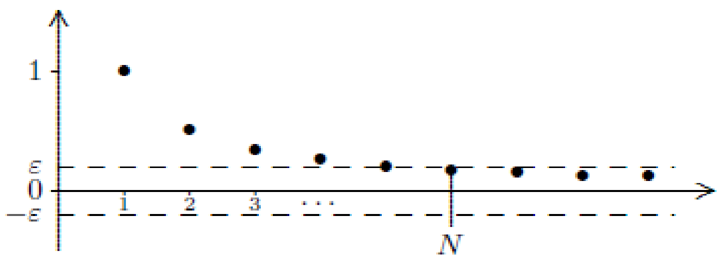

Figura 1: La sucesión 1/n.

2. $a_n = n \; en \; \mathbb{R}$, para cada $n \geq 0$. Esta sucesión es divergente ya que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ y cualquier $\mathcal{E} > 0$ fijo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > a + \mathcal{E}$ y la condición de la definición no se cumple.
3. Consideramos la sucesión $\{a_n\}_n$, donde $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Hemos visto en el primer ejemplo que la sucesión $(\frac{1}{n})$ converge a 0 y por lo tanto nuestra idea intuitiva es que la sucesión $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ debe converger a $1 + 0 = 1$. Veamos a partir de la definición que esto es cierto. Sea $\mathcal{E} > 0$, queremos ver que existe $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\mathcal{E})$ tal que si $\mathrm{n} \geq \mathrm{N}$, $|a_n - 1| < \mathcal{E}$.

$$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{1}{N} < \mathcal{E}$$

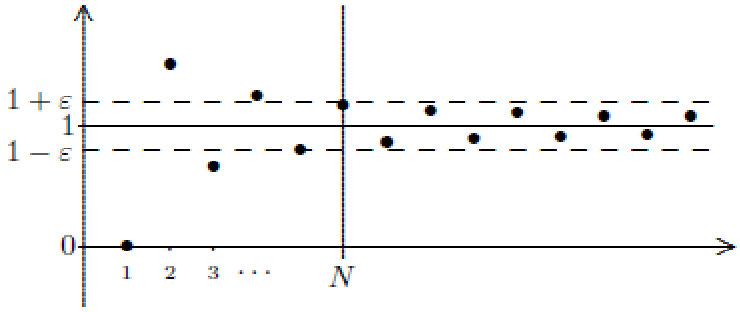

Figura 2: La sucesión $1 + \frac{(-1)^n}{n}$

La noción de sucesión convergente es una de las ideas fundamentales del análisis, a continuación se presentan una colección de propiedades.

TEOREMA 1 (Propiedades)

1. Toda sucesión convergente es *acotada.*
2. El límite de una sucesión convergente es único.
3. $\{a_n\}_n$ converge a a si y sólo si todo entorno de x contiene todos los términos de $\{a_n\}_n$ excepto un número finito de ellos.
4. Si $E \subset \mathbb{R}$ y a es un *punto de acumulación* de E para la cual $lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Supongamos que $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ son sucesiones de números reales y $a_n \to a$, $b_n \to b$ Entonces

5. $\lim\{a_n + b_n\}_n = a + b$
6. Para c $\in \mathbb{R}$, $\lim\{ca_n\}_n = ca$
7. $\lim\{a_n b_n\}_n = ab$
8. $\lim\{a_n/b_n\}_n = a/b \; si \; b \neq 0 \;\; e \;\; b_n \neq 0 \;\; para \, n \in \mathbb{N}$.

Definición 3: Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión en $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, decimos que esta <u>sucesión tiende a infinito</u> o <u>tiene límite infinito</u>, si dado cualquier $c \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si n ≥ N entonces $a_n > c$. Notaremos $a_n \to \infty$ o $lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

De manera análoga diremos que la sucesión tiene límite menos infinito o tiende a menos infinito si dado cualquier $c \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si n ≥ N entonces $a_n < c$. Notaremos $a_n \to -\infty$ o $lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Estas sucesiones son divergentes, es decir, no son convergentes.

No todas las sucesiones que no tienen límite en el sentido que acabamos de describir (finito o infinito), entre ellas están las <u>sucesiones oscilantes</u>.

Ejemplo 2

Sea $a_n = (-1)^n$. Si n es par, $a_n = 1$ mientras que si n es impar, $a_n = -1$; pero ni 1 ni -1 pueden ser límites de esta sucesión. Supongamos que 1 es límite, entonces a partir de un cierto entero N, todos los términos de la sucesión deberían satisfacer $|a_n - 1| < 1/2$. Pero si $n > N$ es impar entonces $|a_n - 1| = |-1-1| = 2 > \frac{1}{2}$, y la sucesión no converge a 1. De manera análoga se demuestra que tampoco converge a -1.

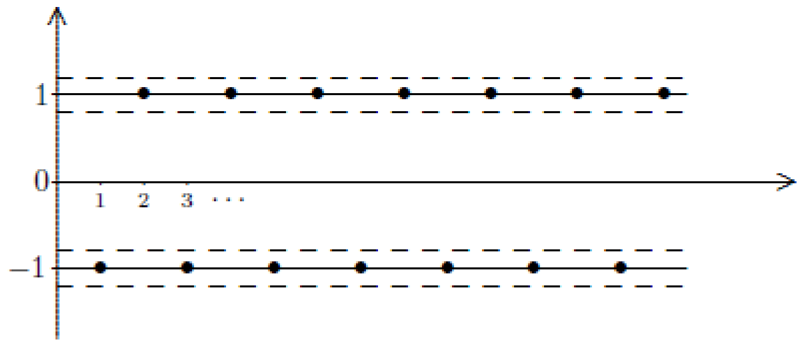

Figura 3: la sucesión $(-1)^n$

TEOREMA 2:

Sea $\{a_n\}_n$una sucesión convergente de números reales con límite a. Si $b \in \mathbb{R}$ es tal que $a_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \leq b$.

Demostración. Supongamos que $a > b$, entonces tomando $h = \frac{a-b}{2} > 0$ *existe* $N_h \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < h$ para todo $n \geq N_h$ y esto implica que:

$$a_n > a - h = a - \frac{1}{2}(a-b) > b + \frac{1}{2}(a-b) > b$$

Lo que contradice la hipótesis.

Corolario 1: Sean $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ sucesiones convergentes de números reales con límites a y b, respectivamente. Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \leq b$.

Corolario 2: Si $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n\ y\ \{c_n\}_n$ son sucesiones de números reales con $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n y $lim\ a_n = lim\ c_n = l$ entonces $\{b_n\}_n$ es convergente y $lim\ b_n = l$.

Definición 4: Si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que la sucesión $\{a_n\}_n$ es creciente. Es útil considerar el crecimiento de la sucesión en un sentido amplio, permitiendo que términos sucesivos sean iguales. Si $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que la sucesión es estrictamente creciente. Si $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que la sucesión es decreciente y si $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que la sucesión es estrictamente decreciente. Decimos además que cualquiera de estas sucesiones es monótona. A continuación se probará que las sucesiones monótonas no pueden ser *oscilantes*.

TEOREMA 3:

Toda sucesión monótona en $\mathbb{R}$ tiene límite en $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Una sucesión monótona en $\mathbb{R}$ converge si, y sólo si, es acotada.

Demostración. Consideramos una sucesión creciente $\{a_n\}_n$ en $\mathbb{R}$: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$ y sea $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $a = \lim a_n$.

Primer caso: $a = \infty$, es decir $\{a_n\}_n$no está acotada superiormente. Por lo tanto, dado $M > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$. Pero la sucesión es creciente y por tanto se cumple que

$$n \geq N \implies a_n \geq a_N > M$$

es decir, $\lim a_n = \infty$

Segundo caso: $a \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > a - \varepsilon$. De nuevo como la sucesión es creciente se cumple que

$$n \geq N \implies a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq M$$

De modo que si $n \geq N$, $d(a_n, a) < \varepsilon$ y concluimos que $\lim a_n = a$.

La demostración para las sucesiones decrecientes es análoga tomando $a = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Corolario 3: Si $\{a_n\}_n$ es una sucesión creciente en $\mathbb{R}$, entonces $lim\ a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si $\{a_n\}_n$es una sucesión decreciente en $\mathbb{R}$, entonces $lim\{a_n\}_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo 3

La sucesión $\{c^n\}_n$ de las potencias naturales de un número real. Un ejemplo útil e importante es el de la sucesión $a_n = c^n$, para $c \in \mathbb{R}$. El comportamiento de esta sucesión cuando $n \to \infty$ depende del valor de c.

1. Si c = 0, $a_n = c^n = 0$ y $lim\{a_n\}_n = 0$.
2. Si c = 1, $a_n = c^n = 1$ y $lim\{a_n\}_n = 0$.
3. Si c = -1, la sucesión es oscilante, ya que sus términos tomarán los valores +1 y -1.
4. Si 0 < c < 1 entonces $1 < c^{-1}$. Sea $l > 0$ *tal que* $c^{-1} = 1 + l$. Entonces
$$0 < a_n = \frac{1}{(1+l)^n} < \frac{1}{1+nl}$$
Se ve fácilmente que cuando $n \to \infty, \frac{1}{1+\text{nl}} \to 0$, por tanto, aplicando el Corolario 1 tenemos que $a_n \to 0$.
5. Si c > 1 la sucesión $a_n = c^n$ es creciente:
$$a_n - a_{n-1} = c^n - c^{n-1} = c^{n-1}(c-1) > 0$$
Por el Corolario 3, $lim\{a_n\}_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Vemos ahora que la sucesión no está acotada. Sea $k = c - 1$ y escribimos $c = 1 + k$. Usando el desarrollo binomial tenemos que:
$$a_n = c^n = (1+k)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^j > 1 + nk$$
Como $k > 0$, la sucesión $(1+k)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada y por lo tanto tampoco lo está $\{a_n\}_n$.
6. Si $c < -1$ entonces $c = -b$, con $b > 1$ y por el apartado anterior $b^n \to \infty$. Por tanto la sucesión $\{b^n\}_n$ toma valores positivos y negativos alternadamente que son cada vez más grandes en valor absoluto, es decir la serie es oscilante y no es acotada.

Definición 5: Una sucesión $\{a_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\mathcal{E} > 0$ hay un entero N tal que $|a_n - a_m| < \mathcal{E}$ *si* $n \geq N, m \geq N$.

Toda sucesión convergente es de Cauchy si: $lim\ a_n = a$ y $\mathcal{E} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ para $n \geq N$. Por lo tanto, si $n \geq N, m \geq N$ se tiene que:
$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \mathcal{E}$$
El recíproco también es cierto y es una propiedad muy importante de los números reales con la distancia, que se conoce como completitud: $\mathbb{R}$ con la distancia usual es completo.

PROGRESIÓN ARITMÉTICA:

Definición 6: Una progresión aritmética es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene sumando al anterior una cantidad fija d, llamada diferencia de la progresión.

- Si $d > 0$ los números cada vez son mayores, se dice que la progresión es creciente.
- Si $d < 0$ los números cada vez son menores, se dice que la progresión es decreciente.

Propiedad 7: En una progresión aritmética cada término es igual al anterior más la diferencia. Por tanto, el término general de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_0 + nd$$

donde a_0 es el primer término y d la diferencia.

Lema 8: En una progresión aritmética finita de n términos, la suma de términos equidistantes de los extremos es constante:

$$a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \cdots = 2a_0 + nd$$

A partir de esta propiedad se obtiene que la suma $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$ de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_0 + a_{n-1})n}{2}$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA:

Definición 9: Una progresión geométrica es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija r, llamada razón de la progresión. Como consecuencia, la razón r se obtiene al hacer el cociente entre dos términos consecutivos:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

Propiedad 10: En una progresión geométrica cada término es igual al anterior por la razón. Observa: $a_1 = a_0 r$, $a_2 = a_1 r = a_0 r^2$, ...

Y siguiendo así sucesivamente, se llega a que el término general de una progresión geométrica cuyo primer término es a_0 y la razón es r es:

$$a_n = a_0 r^n$$

Lema 11: La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r es:

$$S_n = \frac{a_0(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_n - a_0}{r - 1}$$

Definición 12: Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión de números reales. A partir de esta se puede formar otra denominada $\{S_n\}_n$ y definida así:

$$S_1 = a_0$$

$$S_2 = a_0 + a_1$$

$$\dots$$

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$$

Donde se ve, que el n indica el número de los primeros números de la sucesión que se están sumando.

Al par $\{\{a_n\}_n, \{S_n\}_n\}$ se llama <u>serie</u>, y si la sucesión $\{a_n\}_n$ es geométrica se llama <u>serie geométrica</u>.

Propiedad 13: La serie se dice <u>sumable</u> si la sucesión $\{S_n\}_n$ es convergente. En caso de ser sumable y ser $S = \lim S_n$ se suele escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Proposición 14: Si $\{a_n\}_n$ es una progresión geométrica, la serie geométrica asociada es sumable si, y sólo si, $|r| < 1$

<u>Demostración:</u> Hemos visto que $S_n = \frac{a_0(1-r^n)}{1-r}$. Suponemos que $a_0 \neq 0$.

- Si $|r| < 1 \Rightarrow para\ n \to \infty,\ \lim S_n = \frac{a_0}{1-r} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{a_0}{1-r}$
- Si $r > 1 \Rightarrow para\ n \to \infty,\ \lim S_n$ no es finito.
- Si $r \leq 1 \Rightarrow para\ n \to \infty,\ \lim S_n$ no existe
- Si $r = 1 \Rightarrow para\ n \to \infty,\ \lim S_n = \lim(na_0)\ no\ es\ finito.$

Todo esto demuestra la proposición.

EJERCICIOS ELEMENTALES:

Ejercicio 1: Calcula el término general de una progresión aritmética sabiendo que $a_{15} = 63\ y\ a_{29} = 119$.

Resolución: El término general de una progresión aritmética se expresa a partir del primer término y la diferencia. Aplicando la expresión del término general a los términos $a_{15}\ y\ a_{29}$, se obtiene un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (a_0 y d)

$$\left.\begin{matrix} a_{15} = a_0 + (15-1)d = 63 \\ a_{29} = a_0 + (29-1)d = 119 \end{matrix}\right\} operando: \begin{cases} a_0 + 14d = 63 \\ a_0 + 28d = 119 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

Conocidos a_0 y d, el término general queda:

$$a_n = 3 + 4n$$

Ejercicio 2: Halla la suma de los términos de una progresión aritmética en los siguientes casos:

a) De los 22 primeros términos de la progresión: 42, 39, 36, …
b) De los 25 primeros términos de la progresión: 3, 8, 13, …
c) De los 40 primeros términos de la progresión: ½, 5/8, ¾, …

Resolución: Lo que hay que hacer es calcular el término general y luego aplicar la fórmula de la suma a cada una de las progresiones.

a) $d = 39 - 42 = -3$, por lo que $a_n = 42 - 3n$. Como nos piden el término vigésimo segundo, entonces n = 21 y $a_{21} = 42 - 3 \times 21 = -21$. Ahora introducimos la expresión que nos permite hallar la suma de la progresión y sustituimos datos:

$$S_{n+1} = \frac{(a_0 + a_n)(n+1)}{2} \Longrightarrow S_{22} = \frac{(a_0 + a_{21})22}{2} = \frac{(42-21)22}{2} = 231$$

b) d = 8 – 3 = 5, por lo que $a_n = 3 + 5n$. Como nos piden el término 25, entonces n = 24 y $a_{24} = 3 + (5 \times 24) = 123$. Sustituimos datos:

$$S_{n+1} = \frac{(a_0 + a_n)(n+1)}{2} \Longrightarrow S_{25} = \frac{(a_0 + a_{24})25}{2} = \frac{(3+123)25}{2} = 1575$$

c) d $= \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{5-4}{8} = \frac{1}{8}$, por lo que $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}n == \frac{4+n}{8} = \frac{4+n}{8}$. Como nos piden el término 40, entonces n = 39 y $a_{39} = \frac{4+39}{8} = \frac{43}{8}$. Sustituimos datos:

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n)(n+1)}{2} \Rightarrow S_{40} = \frac{(a_1 + a_{39})40}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{43}{8}\right)40}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{43}{8}\right)20$$
$$= \left(\frac{4+43}{8}\right)20 = \frac{235}{2}$$

Ejercicio 3: Halla la suma de todos los números pares comprendidos entre 99 y 1001.

Resolución: Como en los anteriores casos, se usarán las dos expresiones propias de las progresiones aritméticas.

Expresión del término general: $a_n = a_0 + nd$

Expresión de la suma de los n+1 primeros términos: $S_{n+1} = \frac{a_0+a_n}{2}(n+1)$

Se conoce que la diferencia entre los números pares es 2, por tanto $d = 2$. Por otro lado, el primer término $a_0 = 100$ y el último $a_n = 1000$.

Entonces para el término general:

$$a_n = a_0 + nd = 100 + 2n \Rightarrow 900 = 2n \Rightarrow n = \frac{900}{2} = 450; \quad a_{450} = 1000$$

Tenemos que para la suma de los términos es:

$$S_{n+1} = \frac{a_0 + a_n}{2}(n+1) \Rightarrow S_{451} = \frac{(100+1000)451}{2} \Rightarrow S_{451} = 24805$$

Ejercicio 4: El primer término de una progresión aritmética es 3 y el último 39. Si la suma de todos los términos es 210, calcula la diferencia d y el número de términos n.

Resolución: Usando las expresiones de las progresiones aritméticas, tenemos que el primer término es $a_0 = 3$, el último $a_n = 39$, y la suma $S_{n+1} = 210$. Sustituimos dichos valore en la expresión de la suma de los n primeros términos y tenemos que:

$$S_{n+1} = \frac{a_0 + a_n}{2}(n+1) \Rightarrow 210 = \frac{(3+39)(n+1)}{2} \Rightarrow 420 = 42(n+1) \Rightarrow n = 9$$

Obtenemos que la progresión tiene 10 términos.

$$a_n = a_0 + nd \Rightarrow 39 = 3 + 9d \Rightarrow \frac{39-3}{9} = d \Rightarrow d = 4$$

Así que la diferencia entre los términos es 4.

Ejercicio 5: El término 6º de una progresión geométrica es 972 y la razón es 3. Halla el primer término.

Resolución: El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_0 r^n$. Sustituyendo en esta expresión tenemos que:

$$a_n = a_0 r^n \Rightarrow a_5 = a_0 r^5 \Rightarrow 972 = a_0 3^5 \Rightarrow \frac{972}{3^5} = a_0 \Rightarrow a_0 = 4$$

Ejercicio 6: Calcula la razón de la progresión geométrica cuyo primer término es 2/9 y el término 6º es 54.

Resolución: El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_0 r^n$. Sustituyendo tenemos que:

$$a_n = a_0 r^n \Rightarrow a_5 = a_0 r^5 \Rightarrow 54 = \frac{2}{9} r^5 \Rightarrow \frac{54 \times 9}{2} = r^5 \Rightarrow r = 243^{\frac{1}{5}} \Rightarrow r = 3$$

Ejercicio 7: En una progresión geométrica el primer término es 3 y la razón 4. Calcula el término general y la suma de los 5 primeros términos.

Resolución: El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_0 r^n$. Sustituyendo tenemos que:

$$a_n = a_0 r^n \Rightarrow a_n = 3 \times 4^n \Rightarrow a_4 = 3 \times 4^4 \Rightarrow a_4 = 768$$

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica está dada por:

$S_n = \frac{a_n - a_0}{r-1}$ Sustituyendo tenemos que $S_n = \frac{a_{n-1} r - a_0}{r-1} \Rightarrow S_5 = \frac{768 \times 4 - 3}{4-1} \Rightarrow S_5 = 1023$

Ejercicio 8: Halla la suma de los infinitos términos de la progresión dada por 3, 1, 1/3, 1/9,…

Resolución: La progresión es geométrica de razón 1/3. Como r es menos que 1 la expresión de la suma toma la siguiente forma:

$$S_n = \frac{a_{n-1} r - a_0}{r-1} \approx \frac{-a_0}{r-1} = \frac{a_0}{1-r}$$

Sustituyendo los datos en la ecuación anterior tenemos que: $S = \frac{a_0}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{3-1}{3}} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}$

SUCESIONES RECURRENTES

SUCESIONES RECURRENTES:

El concepto de sucesión recurrente es una generalización del concepto de progresión aritmética y geométrica e incluye otros casos como son las sucesiones de cuadrados o cubos, las sucesiones de los coeficientes de la serie formal cociente que se obtiene al dividir dos polinomios cualesquiera, etc.

Definición 1: Se escribirán las sucesiones en la forma

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad o \quad \{u_n\}_n \qquad (1)$$

Si existen números naturales n y k, y números reales o complejos $a_1, a_2, \dots, a_k$ y tales que:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_k u_n \qquad con\, n + k - 1 \geq 0 \qquad (2)$$

Entonces la sucesión (1) se llama <u>sucesión recurrente de orden k</u>, y la ecuación (2) se llama <u>ecuación recurrente de orden k</u>.

Por tanto, toda sucesión recurrente a partir de un determinado término se expresa mediante una misma cantidad k de términos anteriores según la fórmula (2). Se utiliza la palabra “recurrente” porque para determinar el término posterior se debe recurrir a los términos anteriores. Algunos ejemplos de sucesiones recurrentes son:

Ejemplo 1: Progresión geométrica.

Sea $u_0 = a, u_1 = ar, u_2 = ar^2, \dots, u_n = ar^n, \dots$ de donde se obtendría la ecuación:

$$u_{n+1} = u_n r$$

Por tanto tenemos que $k = 1\ y\ a_1 = r$. Es decir, la progresión geométrica es una sucesión recurrente de primer orden.

Ejemplo 2: Progresión aritmética.

Sea $u_0 = a, u_1 = a + d, u_2 = a + 2d, \dots, u_n = a + nd, \dots$ de donde se obtendría la ecuación:

$$u_{n+1} = u_n + d$$

Pero de esta ecuación no se obtiene una relación obvia con la ecuación (2). Por tanto tomando dos valores consecutivos de n y operando con ellos tenemos que:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d \quad y \quad u_{n+1} = u_n + d$$

Y restándolos obtenemos que:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} + u_n$$

Es decir,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

Por tanto $k = 2, a_0 = 2 \ y \ a_1 = -1$, así que las progresiones aritméticas son sucesiones recurrentes de segundo orden.

Ejemplo 3: La sucesión de Fibonacci.

Se considera el mítico problema planteado por Fibonacci, que consiste en determinar el número de conejos en una determinada generación si la población de conejos cumple ciertas condiciones. En concreto, se quiere calcular el número de parejas de conejos adultos, descendentes de una pareja de conejos adultos, al cabo de un año si cada pareja adulta produce mensualmente una pareja nueva, y los recién nacidos alcanzan la madurez tras un mes. Lo que nos interesa en este problema no es el resultado, sino la sucesión cuyos términos determinan el número total de parejas adultas en el momento inicial (u_0), al cabo de un mes (u_1) y en general al cabo de n meses (u_n).

Se ve fácil que $u_0 = 1$. Al cabo de un mes, se sumará una pareja recién nacida, pero el nº de parejas adultas seguirá siendo el mismo, por tanto $u_1 = 1$. Cuando hayan pasado dos meses, la primera pareja pequeña habrá alcanzado la madurez, así que $u_2 = 2$.

Si suponemos que al cabo de n meses el número de parejas adultas es u_n y que u_{n+1} es el número de parejas adultas al cabo de n+1 meses. Por tanto las u_n parejas adultas producirán u_n parejas en el mes n+1, que serán adultas en el mes n+2; a este número hay que sumar el correspondiente al número de parejas adultas que tenemos en el mes n+1. Como consecuencia en el mes n+2 el número de parejas adultas será:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Hemos obtenido así la sucesión

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 8, u_6 = 13, \dots$$

en la que cada término es igual a la suma de los dos anteriores. Esta sucesión es la conocida como <u>sucesión de Fibonacci</u>. La sucesión de Fibonacci es una sucesión recurrente de segundo orden.

Ejemplo 4: Consideramos la siguiente sucesión periódica:

$$(1, 4, 7, 1, 4, 7, 1, 4, 7, 1, 4, 7, \dots)$$

Una definición por recurrencia podría ser:

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = 4, \qquad x_2 = 7, \qquad x_{n+3} = x_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se sabe por tanto que su orden es menor o igual que 3. Si fuese menor o igual que 2, deberían existir a y b complejos tales que la sucesión podría definirse por:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 4 \\ x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por tanto, considerando los términos $x_2,\ x_3\ y\ x_4$ se tendrá que:

$$\begin{cases} 7 = a * 4 + b * 1 \\ 1 = a * 7 + b * 4 \\ 4 = a * 1 + b * 7 \end{cases}$$

Pero este sistema lineal no tiene soluciones, es decir, no existen a y b complejos que cumplan dichas ecuaciones. Por tanto la sucesión es de orden 3.

Ejemplo 5: En este ejemplo vamos a analizar la sucesión de los cuadrados de los números naturales. Para mayor facilidad de entendimiento, vamos a empezar la serie en término uno.

$$u_1 = 1^2, u_2 = 2^2, u_3 = 3^2, u_4 = 4^2, u_5 = 5^2, \dots, u_n = n^2, \dots$$

Así que $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1\ es\ decir, u_{n+1} = \ u_n + 2n + 1$

Aumentando n en uno, tenemos que:

$$u_{n+2} = \ u_{n+1} + 2n + 3$$

Por tanto, operando con estas dos últimas ecuaciones se tiene que:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \ u_{n+1} - \ u_n + 2$$

Es decir,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - \ u_n + 2$$

Si aumentamos n en uno en esta última ecuación, tenemos que:

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - \ u_{n+1} + 2$$

Si operamos con estas últimas dos ecuaciones tenemos que:

$$u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - 3\,u_{n+1} + u_n$$

Es decir,

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3\, u_{n+1} + u_n$$

Por tanto tenemos que la sucesión de los cuadrados de los números naturales es una ecuación recurrente de tercer orden.

RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES:

Definición 2: Una relación de recurrencia de orden k se llama relación de recurrencia lineal cuando la fórmula de recurrencia es lineal:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n) \quad para\ todo\ n \geq k$$

Si $g(n) \equiv 0$, la relación de recurrencia lineal se llama homogénea.

Con $g(n) \not\equiv 0$ se le llamará relación de recurrencia lineal no homogénea.

Dada una relación de recurrencia lineal no homogénea, la relación de recurrencia lineal homogénea asociada a la anterior es

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad para\ todo\ n \geq k$$

Cuando se trata con la relación de recurrencia lineal homogénea asociada, la relación no homogénea de la que procede se suele llamar relación completa.

Para *"resolver"* una sucesión de recurrencia hay que obtener, a partir de la fórmula de recurrencia y las condiciones iniciales, una fórmula $a_n = F(n), n \geq 0$, que proporcione los términos de la sucesión en función de la posición que ocupan.

Caso orden uno:

Resultado 1: La solución de las sucesiones recurrentes lineales de primer orden se realiza por inducción:

$$\begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + g(n), \ \ n \geq 1 \\ a_0 = b_0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a_n = c^n b_0 + \sum_{i=1}^{n} g(i)\ c^{n-i}$$

Caso orden uno:

Resultado 2: Una sucesión recurrente lineal homogénea de segundo orden es

$$\begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}, \ \ n \geq 1 \\ a_0 = b_0\ , a_1 = b_1 \end{cases}$$

Se llama ecuación característica de la recurrencia a la ecuación $x^2 = c_1 x + c_2$, y a sus soluciones se les llama raíces características.

Resultado 3: Propiedades de la ecuación y de las raíces características.

- $x = \alpha$ es raíz característica $\Leftrightarrow a_n = \alpha^n$ es solución de la fórmula de recurrencia.
- Si $x = \alpha$ es una raíz característica doble, entonces $n\alpha^n$ es solución de la fórmula de recurrencia.
- Si x_n e y_n son soluciones de la fórmula de recurrencia, también lo son $x_n + y_n$, y kx_n $para\ todo\ k$.

Resultado 4: Soluciones de las sucesiones recurrentes lineales de 2º orden son:

- Si $\alpha \neq \beta$ entonces son dos raíces características, entonces la solución será

  $a_n = k_1\alpha^n + k_2\beta^n$, donde k_1 y k_2 son las soluciones del sistema

  $$\begin{cases} k_1 + k_2 = b_0 \\ k_1 \propto + k_2\beta = b_1 \end{cases}$$

  Como ejemplo la sucesión de Fibonacci.
- Si $\alpha = \beta$, es decir, α es raíz doble, entonces la solución será

  $a_n = (k_1 + k_2 n)\alpha^n$, donde k_1 y k_2 son las soluciones del sistema

  $$\begin{cases} k_1 = b_0 \\ (k_1 + k_2) \propto = b_1 \end{cases}$$

Un ejemplo sería la sucesión de recurrencia no homogénea:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 5 \cdot 3^n \quad n \geq 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

Cuya solución es: $a_n = (2 + 5n)3^n$

Caso general:

Resultado 6: Para resolver la sucesión recurrente lineal completa de segundo orden

$$(1)\begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + g(n), \quad n \geq 2 \\ a_0 = b_0 \, , a_1 = b_1 \end{cases}$$

se considera la relación homogénea asociada

$$(2) a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

Primero se calculan todas las soluciones de la relación homogénea (2): supongamos que éstas son: $a_n(k_{1,} k_2)$

A continuación se busca una solución particular x_n de la relación completa teniendo en cuenta los diferentes casos posibles:

- Si $g(n)$ es un polinomio de grado p, x_n es un polinomio de grado ≥ p.
- Si $g(n) = cb^n$ y b no es raíz característica, entonces , x_n =kb^n
- Si $g(n) = cb^n$ con b raíz característica simple, entonces , x_n =knb^n
- Si $g(n) = cb^n$ con b raíz característica doble, entonces , x_n =k$n^2 b^n$

Todas las soluciones de la relación completa son de la forma $y_n = a_n(k_{1,} k_2) + x_n$

Para hallar la solución a la sucesión (1) hay que hallar k_1 y k_2 raíces de la ecuación característica para que y_n general verifique las condiciones iniciales.

de la relación completa.

EJERCICIOS RESUELTOS:

Ejercicio 1: Hace 15 años se invirtieron unos ahorros en una cuenta que pagaba 8% de interés anual con pagos trimestrales. Si ahora el saldo de la cuenta es de 7218.27€, ¿Cuál fue la inversión inicial?

Resolución: Sea a_n el capital al cabo del trimestre n, tenemos que $a_n = a_{n-1} + \left(\frac{0.08}{4}\right) a_{n-1}$ es decir, una relación de recurrencia $a_n - 1.02\, a_{n-1} = 0$ que es una geométrica de razón 1.02 y cuya solución general sabemos que es $a_n = c(1.02)^n$.

Por tanto, si al cabo de 15 años (que son 60 trimestres) el saldo es de 7218.27 € , es decir

$$a_n = 7218.27 \text{ €}$$

Podemos calcular la cantidad inicial c, ya que $c = \frac{7218.27}{(1.02)^{60}} = 2200$

Por tanto la inversión inicial fue de $a_0 = 2200$ €

Ejercicio 2: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-3} = 0, \quad n \geq 2, \qquad a_0 = 1, a_1 = 3$$

Resolución:

Buscamos una progresión geométrica $a_n = cr^n$ que verifique la relación de recurrencia:

$$cr^n - 5cr^{n-1} - 6cr^{n-2} = 0$$

Sacamos factor común cr^{n-2} y obtenemos $cr^{n-2}(r^2 - 5r - 6) = 0$

La ecuación característica es $r^2 - 5r - 6 = 0$ cuyas soluciones son 6 y -1.

Entonces tenemos que $a_n = c6^n \; y \; a_n = c(-1)^n$ son soluciones buscadas, como son linealmente independientes, entonces la solución general es $a_n = c_1 6^n + c_2(-1)^n$.

Y ahora para calcular $c_1 \; y \; c_2$ utilizamos que $a_0 = 1 \; y \; a_1 = 3$.

Si $a_0 = 1$ se tiene que $1 = c_1 + c_2$ y si $a_1 = 3$ se tiene que $3 = 6c_1 - 2\, c_2$

Resolviendo el sistema tenemos que $c_1 = \frac{4}{7} \; y \; c_2 = \frac{3}{7}$

De donde obtenemos que la solución general es: b

$$a_n = \frac{4}{7} 6^n + \frac{3}{7}(-1)^n \;\; con \; n \geq 0$$

Ejercicio 3: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$2a_{n+2} - 11a_{n-1} + 5a_n = 0, \quad n \geq 0, \qquad a_0 = 2, a_1 = -8$$

Resolución:

Seguimos el mismo procedimiento que en la anterior, buscamos una progresión geométrica $a_n = cr^n$ que verifique la relación de recurrencia:

$$2cr^{n+2} - 11cr^{n+1} + 5cr^n = 0$$

Sacamos factor común cr^n y obtenemos $cr^n(2r^2 - 11r + 5) = 0$

La ecuación característica es $2r^2 - 11r + 5 = 0$ cuyas soluciones son 5 y $1/2$.

Entonces tenemos que $a_n = c5^n$ y $a_n = c(1/2)^n$ son soluciones buscadas, como son linealmente independientes, entonces la solución general es $a_n = c_1 5^n + c_2(1/2)^n$.

Y ahora para calcular c_1 y c_2 utilizamos que $a_0 = 2$ y $a_1 = -8$.

Si $a_0 = 2$ se tiene que $2 = c_1 + c_2$ y si $a_1 = -8$ se tiene que $-8 = 5c_1 + \frac{1}{2}c_2$

Resolviendo el sistema tenemos que $c_1 = -2$ y $c_2 = 4$

De donde obtenemos que la solución general es:

$$a_n = -2 \times 5^n + 4(1/2)^n \ \ con\, n \geq 0$$

Ejercicio 4: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \qquad a_0 = 7, a_1 = 3$$

Resolución:

Esa sucesión es una sucesión recurrente lineal homogénea de segundo orden. Por tanto la ecuación característica es $3r^2 - 2r - 1 = 0$ cuyas soluciones son 1 y -1/3.

Entonces tenemos que $a_n = c1^n$ y $a_n = c(1/3)^n$ son soluciones buscadas, como son linealmente independientes, entonces la solución general es $a_n = c_1 + c_2(-1/3)^n$.

Y ahora para calcular c_1 y c_2 utilizamos que $a_0 = 7$ y $a_1 = 3$.

Si $a_0 = 7$ se tiene que $7 = c_1 + c_2$ y si $a_1 = 3$ se tiene que $3 = c_1 - \frac{1}{3}c_2$

Resolviendo el sistema tenemos que $c_1 = 4$ y $c_2 = 3$

De donde obtenemos que la solución general es:

$$a_n = 4 + 3(-1/3)^n \ \ con\, n \geq 0$$

Ejercicio 5: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2} + a_n = 0, \quad n \geq 0, \qquad a_0 = 0, a_1 = 3$$

Resolución:

Esa sucesión es una sucesión recurrente lineal homogénea de 2º orden. Por tanto la ecuación característica es $r^2 + 1 = 0$ cuyas soluciones son i , -i.

Donde $i = cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}$; $-i = cos\frac{-\pi}{2} + isen\frac{-\pi}{2}$

Entonces la solución general es $a_n = c_1(i)^n * +c_2(-i)^n$. Utilizando el teorema de de Moivre

$$a_n = c_1(cos\frac{n\pi}{2} + isen\frac{n\pi}{2}) * +c_2(cos\frac{-n\pi}{2} + isen\frac{-n\pi}{2})$$

Así que teniendo en cuenta que cos (-a) =cos(a) y que sen (-a) = - sen(a), tenemos que

$$a_n = c_1(cos\frac{n\pi}{2} + isen\frac{n\pi}{2}) * +c_2(cos\frac{n\pi}{2} - isen\frac{n\pi}{2})$$

Tomando ahora $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = (c_1 - c_2) * i$ la ecuación que nos queda es:

$$a_n = k_1cos\frac{n\pi}{2} + k_2sen\frac{n\pi}{2}$$

Si $a_0 = 0$ se tiene que $0 = k_1$ y si $a_1 = 3$ se tiene que $3 = k_2$.

De donde obtenemos que la solución general es:

$$a_n = 3sen\frac{n\pi}{2} \quad con\ n \geq 0$$

Ejercicio 6: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2} + 4a_n = 0, \quad n \geq 0, \qquad a_0 = a_1 = 1$$

Resolución:

Esa sucesión es una sucesión recurrente lineal homogénea de 2º orden. Por tanto la ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$ cuyas soluciones son 2i, -2i.

Donde $2i = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$; $-2i = 2(cos\frac{-\pi}{2} + isen\frac{-\pi}{2})$

Entonces la solución general es $a_n = c_1(2i)^n + c_2(-2i)^n$. Utilizando el teorema de Moivre

$$a_n = 2^n[c_1\left(cos\frac{n\pi}{2} + isen\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\left(cos\frac{-n\pi}{2} + isen\frac{-n\pi}{2}\right)]$$

Así que teniendo en cuenta que cos (-a) =cos(a) y que sen (-a) = - sen(a), tenemos que

$$a_n = 2^n[c_1\left(cos\frac{n\pi}{2} + isen\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\left(cos\frac{n\pi}{2} - isen\frac{n\pi}{2}\right)]$$

Tomando ahora $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = (c_1 - c_2)i$ la ecuación que nos queda es:

$$a_n = 2^n(k_1cos\frac{n\pi}{2} + k_2sen\frac{n\pi}{2})$$

Si $a_0 = 1$ se tiene que $1 = k_1$ y si $a_1 = 1$ se tiene que $1 = 2k_2\ por\ tanto\ k_2 = \frac{1}{2}$

De donde obtenemos que la solución general es:

$$a_n = 2^n\left(\frac{\cos n\pi}{2} + \frac{1}{2}sen\frac{n\pi}{2}\right)\ con\ n \geq 0$$

Ejercicio 7: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2,\ \ a_0 = 5, a_1 = 12$$

Resolución:

Esa sucesión es una sucesión recurrente lineal homogénea de 2º orden. Por tanto la ecuación característica es $r^2 - 6r + 9 = 0$ cuya solución es 3, que en este caso es solución doble.

Entonces tenemos que la solución general es $a_n = c_1\, 3^n + c_2 n\, 3^n$.

Y ahora para calcular $c_1\ y\ c_2$ utilizamos que $a_0 = 1\ y\ a_1 = 3$.

Si $a_0 = 5$ se tiene que $5 = c_1$ y si $a_1 = 12$ se tiene que $12 = 5 \times 3 + 3\, c_2$ de donde se obtiene que $c_2 = -1$

De donde obtenemos que la solución general es: b

$$a_n = (5 - n)3^n\ \ con\ n \geq 0$$

Ejercicio 8: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2} + 2a_{n-1} + 2a_{n-3} = 0, \quad n \geq 2, \qquad a_0 = 1, a_1 = 3$$

Resolución:

Esa sucesión es una sucesión recurrente lineal homogénea de 2º orden. Por tanto la ecuación característica es $r^2 + 2r + 2 = 0$ cuyas soluciones son -1-i, -1+i.

Donde -1+$i = \sqrt{2}(cos\frac{3\pi}{4} + isen\frac{3\pi}{4})$; $-1 - i = \sqrt{2}(cos\frac{-3\pi}{4} + isen\frac{-3\pi}{4})$

Entonces la solución general es $a_n = c_1(-1 + i)^n + c_2(-1 - i)^n$. Utilizando el teorema de Moivre $a_n = (\sqrt{2})^n[c_1(cos\frac{n3\pi}{4} + isen\frac{n3\pi}{4}) + c_2(cos\frac{-n3\pi}{4} + isen\frac{-n3\pi}{4})]$

Así que teniendo en cuenta que cos (-a) =cos(a) y que sen (-a) = - sen(a), tenemos que

$$a_n = (\sqrt{2})^n[c_1(cos\frac{n3\pi}{4} + isen\frac{n3\pi}{4}) + c_2(cos\frac{n3\pi}{4} - isen\frac{n3\pi}{4})]$$

Tomando ahora $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = (c_1 - c_2)i$ la ecuación que nos queda es:

$$a_n = (\sqrt{2})^n[k_1 cos\frac{n3\pi}{4} + k_2 sen\frac{n3\pi}{4}$$

Si $a_0 = 1$ se tiene que $1 = k_1$ y si $a_1 = 3$ se tiene que $3 = (\sqrt{2})\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k_2\right)$ de donde sacamos que $k_2 = 4$

De donde obtenemos que la solución general es:

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{n3\pi}{4} + 4sen\frac{n3\pi}{4}\right) \ con\ n \geq 0$$

Ejercicio 9: Halla y calcula una relación de recurrencia entre el número de formas posibles de aparcar coches y motos en una fila de n espacios, teniendo en cuenta que:

1) Cada moto ocupa un espacio y cada coche dos
2) Todas las motos y los coches son idénticos
3) Se quieren utilizar todos los espacios.

Resolución: (Nota: Es la sucesión de Fibonacci)

Llamamos a_n al número de estacionar motos y coches en n espacios en las condiciones dadas previamente.

Sea a_n^m el número de los anteriores cuyo último espacio esté ocupado por una moto y a_n^c al número de los anteriores cuyo último espacio esté ocupado por un coche. Es evidente que en el espacio anterior lo ocupa el mismo coche, debido a que un coche ocupa dos espacios por tanto tenemos que $a_n^c = a_{n-2}$, ya que no importa que dos espacios atrás lo ocupe un coche o una moto y por tanto tengo todas las posibilidades que son a_{n-2}.

Por otro lado si supongo que el último espacio de los *n* es una moto, el anterior puede ser una moto o un coche, por lo que se tiene todas las posibilidades en n-1 espacios, es decir $a_n^m = a_{n-1}$. Como $a_n = a_n^m + a_n^c$, es decir, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ para\ n \geq 2\ y\ a_1 = 1$ tenemos que en un espacio solo puede estacionarse una moto, y que $a_2 = 2$ ya que en dos espacios pueden estacionar dos motos o un coche, es decir dos casos. Por tanto es una sucesión de Fibonacci. Sabiendo que la sucesión de Fibonacci para n ≥ 0 es:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Como en este caso particular partimos de $a_1 = 1$ ya que a_0 no nos vale, entonces la sucesión es:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Ejercicio 10: Si $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4\ y\ a_3 = 37$ satisfacen la relación de recurrencia $a_{n+2} + b\ a_{n+1} + c\ a_n = 0,\ \ donde\ n \geq 0$ y b, c son constantes, encuentra a_n.

Resolución: Según la recurrencia se tiene que $a_2 + b \times a_1 + c \times a_0 = 0$, es decir, $4 + b = 0$, entonces $b = -4$. Y según la recurrencia tenemos que $a_3 + ba_2 + ca_1 = 0$, es decir, $37 - 4 \times 4c = 0$ entonces $c = -21$.

Por tanto la ecuación característica de la recurrencia es $r^2 - 4r - 21 = 0$, donde las soluciones son 7 y -3. Por tanto, la solución general es:

$$a_n = c_1 7^n + c_2(-3)^n$$

Como sabemos que $a_0 = 0$, entonces $0 = c_1 + c_2$ y de que $a_1 = 1$ obtenemos que $1 = 7c_1 - 3c_2$. Con estas dos ecuaciones concluimos que $c_1 = \frac{1}{10}$ y $c_2 = -\frac{1}{10}$

Por tanto la solución general es $a_n = \frac{1}{10}(7^n - (-3)^n)$

Ejercicio 11: Dado un alfabeto S que consta de los cuatro caracteres numéricos 1, 2, 3, 4 y los siete caracteres alfabéticos a, b, c, d, e, f, g. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para el número de palabras de longitud n en S, de tal manera que no aparezcan caracteres alfabéticos consecutivos.

Resolución: Dividimos en casos, para ello si los a_n buscados acaban en número, la cantidad de ellos es a_{n-1} ya que el anterior puede ser letra o número por tanto todos los casos de n-1 caracteres. Como tenemos cuatro números, la cantidad total de los que acaban en número será $4a_{n-1}$.

Si en cambio, los a_n buscados acaban en letra, los anteriores han de acabar obligatoriamente en nº. Entonces, los a_n que acaban en una letra de las dadas son todos los casos cuyo carácter anterior es un número, que razonando como anteriormente son 4 a_{n-2} pero como tenemos 7 letras, el total de los acabados en letra será 28 a_{n-2}. Por tanto la relación de recurrencia buscada es:

$$a_n = 4a_{n-1} + 28a_{n-2}$$

De donde sacamos que su ecuación característica es: $r^2 - 4r - 28 = 0$, cuyas soluciones son los números reales: $2 + 4\sqrt{2},\ 2 - 4\sqrt{2}$. Por tanto la solución general será:

$$a_n = c_1\left(2 + 4\sqrt{2}\right)^n + c_2\left(2 - 4\sqrt{2}\right)^n$$

Tomando $a_0 = 1\ y\ a_1 = 11$ tenemos que:

$$1 = c_1 + c_2 \quad y \quad 11 = c_1(2 + 4\sqrt{2}) + c_2(2 - 4\sqrt{2})$$

Y resolviendo este sistema lineal obtenemos que:

$$c_1 = \frac{8 + 9\sqrt{2}}{16} \quad y \quad c_2 = \frac{8 - 9\sqrt{2}}{16}$$

Por tanto la solución general es:

$$a_n = \left(\frac{8 + 9\sqrt{2}}{16}\right)(2 + 4\sqrt{2})^n + \left(\frac{8 - 9\sqrt{2}}{16}\right)(2 - 4\sqrt{2})^n$$

Ejercicio 12: El día 1 de Abril se depositaron 1000€ en una cuenta que paga interés mensualmente a razón de un 6% anual. Al principio de cada mes se realizará un ingreso de 200€. Si se continúa realizando esto durante los próximos 4 años, ¿Cuánto dinero habrá en dicha cuenta al finalizar estos 4 años?

Resolución: Si llamamos a_n al dinero que habrá dicha cuenta a primeros del mes enésimo. Es fácil deducir que:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{0.06}{12} a_{n-1} + 200$$

Es decir tenemos la siguiente relación de recurrencia:

$a_n - 1.005a_{n-1} = 200$ para $n \geq 1$ y $a_0 = 1000.$

Resolvemos esta relación de recurrencia, una solución para la homogénea es $c(1.005)^n$ y se busca una solución del tipo $A(1)^n$ de modo que: $A - 1.005A = 200,$ de donde obtenemos que $A = -400000$. Por tanto la solución general de nuestra relación de recurrencia es:

$$a_n = c(1.005)^n - 40000.$$

Teniendo en cuenta que $a_0 = 1000$, obtenemos:

$$1000 = c - 40000 \quad es\ decir \quad c = 41000$$

Por tanto la solución final es:

$$a_n = 41000(1.005)^n - 40000$$

Para calcular la cantidad de dinero que tendremos dentro de 4 años(48 meses) sustituimos y le restamos los 200 que ese mes aun no los habremos ingresado:

$$a_{48} - 200 = 41000(1.005)^{48} - 40000 - 200 = 11890.05€$$

Ejercicio 13: Una partícula se mueve en dirección horizontal. La distancia que recorre en cada segundo es igual a dos veces la distancia que recorre en el segundo anterior. Si a_n denota la posición de la partícula en el segundo n-ésimo. Encuentra una relación de recurrencia para a_n.

Resolución: Si usamos lo que se dice en el enunciado y a_n denota la posición en el segundo n-ésimo, entonces a_{n-1} será la posición de la partícula en el segundo anterior. Por tanto la distancia recorrida en el segundo n-ésimo será $a_n - a_{n-1}$. Como sabemos que la distancia recorrida es el doble que la recorrida en al segundo anterior, que sería $a_{n-1} - a_{n-2}$, entonces la relación de recurrencia pedida será:

$$a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$$

Ejercicio 14: La siguiente sucesión, cuyo término n-ésimo indica la cantidad máxima de operaciones del algoritmo de Gauss para triangular una matriz de n x n es:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{n+1} = (2n^2 + n) + x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Calcula si esta sucesión es una sucesión recursiva lineal.

Resolución: Consideramos para todo $n \in \mathbb{N}$, los términos $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}\ y\ x_{n+4}$ de la sucesión:

$$x_{n+1} = (2n^2 + n) + x_n$$

$$x_{n+2} = (2n^2 + 5n + 3) + x_{n+1}$$

$$x_{n+3} = (2n^2 + 9n + 10) + x_{n+2}$$

$$x_{n+4} = (2n^2 + 13n + 21) + x_{n+3}$$

Sabemos que $(2n^2 + n), (2n^2 + 5n + 3), (2n^2 + 9n + 10)\ y\ (2n^2 + 13n + 21)$ que aparecen en las igualdades son polinomios en n de grado 2. Pero es conocido que si hay 4 polinomios de grado 2, son dependientes, es decir, existe una combinación lineal no trivial de ellos que da el polinomio 0. Con cuentas llegamos a que:

$$(-1)(2n^2 + n) + 3(2n^2 + 5n + 3) - 3(2n^2 + 9n + 10) + 1(2n^2 + 13n + 21) = 0$$

Y usando la misma combinación lineal en las ecuaciones anteriores miembro a miembro tenemos que:

$$(-1)x_{n+1} + 3x_{n+2} - 3x_{n+3} + x_{n+4} = (-1)x_n + 3x_{n+1} - 3x_{n+2} + x_{n+3}$$

$$\Longrightarrow \qquad x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - 1x_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Es decir, la sucesión está definida por:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 13 \\ x_4 = 34 \\ x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - 1x_n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Es decir, es una recursión lineal de orden menor o igual que cuatro. Podemos probar fácilmente que es de orden 4, suponiendo que sea recursiva lineal de orden menor o igual que 3 y llegando a un absurdo.

Ejercicio 15: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n-2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n) + 7(3^n) \quad n \geq 0, a_0 = 1, 1 - 1 = 4$$

Resolución: Lo primero de todo, es buscar la solución particular para la correspondiente ecuación homogénea, es decir para $a_{n-2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$, para la cual su ecuación característica será: $r^2 - 6r + 9 = 0$ que tiene por raíz doble el 3. Por tanto la solución será:

$$c_1(3^n) + c_2 n(3^n)$$

Ahora buscamos la solución para la ecuación: $a_{n-2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n)$

Probamos con la forma $A(2^n)$, de modo que:

$A(2^{n+2}) - 6A(2^{n+1}) + 9(2^n) = 3(2^n)$, donde, dividiendo por 2^n, tenemos que:

$4A - 12A + 9A = 3$, es decir, $A = 3$.

Y finalmente buscamos una solución para $a_{n-2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 7(3^n)$

Como $c_1(3^n) + c_2 n(3^n)$ era ya solución para la homogénea, vamos a intentarlo con $Bn^2(3^n)$ de modo que: $B(n+2)^2(3^{n+2}) - 6B(n+1)^2(3^{n+1}) + 9Bn^2(3^n) = 7(3^n)$, que dividiendo por 3^n tenemos que: $9B(n+2)^2 - 18B(n+1)^2 + 9Bn^2 = 7$ de donde obtenemos que

$B = \frac{7}{18}$. Por tanto la solución general de la ecuación recurrente será:

$$a_n = c_1(3^n) + c_2 n(3^n) + \frac{7}{18} n^2 3^n + 3 \times 2^n$$

Utilizando que $a_0 = 1 \ y \ a_1 = 4$ tenemos que: $1 = c_1 + 3 \ \Longrightarrow c_1 = -2$ y

$$4 = -2 \times 3 + c_2 3 + \frac{7}{18} \times 3 + 3 \times 2 \ \ \Longrightarrow c_2 = \frac{17}{18}$$

Por tanto la solución de la ecuación general será:

$$a_n = -2(3^n) + \frac{17}{18}n(3^n) + \frac{7}{18}n^2 3^n + 3 \times 2^n = \frac{1}{2}(7n^2 + 17n - 36) \times 3^{n-2} + 3 \times 2^n$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Ejercicio 1: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos creciente. Probar que, si es recursiva lineal, existe una constante C tal que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq C \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 2: Decide cuales de las siguientes sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son recursivas lineales. En caso afirmativo hallar una ecuación de recurrencia y el orden.

1) $a_n = 3^n + n\,3^{n-1}$
2) $a_n = \frac{1}{n}$
3) $a_n = (3^n + n\,3^{n-1})(5^n - n\,5^{n-1})$
4) $a_n = n^2$
5) $a_n = \sum_{1\leq i\leq n} i^3$

Ejercicio 3: Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado k. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$x_n = P(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Es recursiva lineal de orden menor o igual que k+1.

Ejercicio 4:

i) Sean $a_1, \dots, a_k \ \ a \in \mathbb{C}$. Se consideran la siguiente sucesión:

$$\begin{cases} \qquad\qquad x_1, \dots, x_k \\ x_{n+k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i x_{n+i} + a \qquad si\ n \geq 1 \end{cases}$$

Probar que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión recursiva lineal. ¿Qué se puede decir del orden?

ii) Sean $a_1, \dots, a_k \ \ a \in \mathbb{C}\ y\ sea\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva lineal. Probar que la sucesión

$$\begin{cases} y_1 = a_1, \dots, y_k = a_k \\ \quad y_{k+n} = x_n \end{cases} \quad si\ n \geq 1$$

Es recursiva lineal. ¿Qué se puede decir del orden?

Ejercicio 5:

i) Sea $S \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva lineal que $x_i \in S$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Probar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es periódica a partir de cierto término.

ii) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de los dígitos del desarrollo decimal de $\sqrt{2}$ y sea $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Probar que para ningún valor de k existe $f: D^k \to D$ tal que $f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}) = x_{n+k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

FUNCIONES GENERATRICES

FUNCIONES GENERATRICES:

Definición 1: A continuación vamos a asociar funciones a sucesiones infinitas de números

$$f(x) \leftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty}$$

Mediante la siguiente regla:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

La función $f(x)$ la llamaremos <u>función generatriz</u> de los (a_n). Las llamamos "funciones" aunque, a priori puede ser que la serie no converja y no estemos hablando de una función.

Cuando queramos considerar a f como una función para, por ejemplo, evaluar un cierto valor de x, habrá que tener cuidado con las cuestiones de convergencia. Pero, mientras no sea ese el caso, podemos argumentar todo mediante series formales.

El número a_n, que normalmente será la solución a un cierto problema combinatorio, será el coeficiente de x^n en la serie de potencias anterior. Esto lo resumimos con la siguiente notación: $a_n = Coef_n[f(x)]$

<u>Funciones generatrices de una suma conocida</u>

Si se conoce la suma de una función generatriz, es decir, se dispone de una expresión para la función, entonces partimos con una gran ventaja.

Por ejemplo, si tenemos que la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ converge en un cierto intervalo $(-R, R)$ y se conoce la expresión de $f(x)$, entonces se podrá evaluar la función (y también cualquiera de sus derivadas) en valores de x que cumplan $|x| < R$. En particular, se podrá calcular los coeficientes mediante la fórmula de Taylor habitual: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

A continuación vemos algún ejemplo:

Ejemplo 1: Tomamos como primer ejemplo, el ejemplo básico, la suma de la <u>serie geométrica</u>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Este ejemplo sólo tiene sentido si $|x| < 1$. Así que tenemos que $1/(1-x)$ es la función generatriz de la sucesión infinita de unos:

$$\frac{1}{1-x} \leftrightarrow (1)_{n=0}^{\infty}$$

Es decir, con otras palabras, $Coef_n\left[\frac{1}{1-x}\right] = 1$ para $n = 0,1,2,3, \dots$ A partir de ahora esta será la serie de potencias básicas para nosotros.

Ejemplo 2: Otra serie de potencias muy tratada es la que define a la <u>función exponencial</u>, que la podemos expresar de las tres formas que lo estamos haciendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x; \quad e^x \leftrightarrow (\frac{1}{n!})_{n=0}^{\infty}\ ; \quad ó \quad Coef_n[e^x] = \frac{1}{n!} \ \ n \geq 0$$

Se observa que la serie de potencias primera converge para cualquier valor de x.

Ejemplo 3: El caso del <u>teorema del binomio</u> proporciona otro caso muy conocido: Para $m \geq 1$

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{m} x^n$$

En este caso, esta presentación es válida para todo x porque la serie de potencias es un polinomio, pues para $m \geq n$ los coeficientes binómicos serán nulos.

$$(1+x)^m \leftrightarrow \left(\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \dots, \binom{m}{m}, 0, 0, \dots\right)$$

<u>OPERACIONES CON LAS FUNCIONES GENERATRICES:</u>

- Sumar y multiplicar por constantes

Sean dos funciones generatrices $f(x)$ y $g(x)$, asociadas a dos sucesiones de números, (a_n) y (b_n), respectivamente, y sean α y β dos números cualesquiera. Esta primera regla tiene que ver con los coeficientes de la función $\alpha f(x)+\beta g(x)$, donde obtenemos el resultado previsto:

$$f(x) \leftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \text{ y } g(x) \leftrightarrow (b_n)_{n=0}^{\infty} \quad \Longrightarrow \alpha f(x)+\beta g(x) \leftrightarrow (\alpha a_n+\beta b_n)_{n=0}^{\infty}$$

Es decir, al sumar (y/o multiplicar por constantes) funciones generatrices se está sumando (y/o multiplicando por constantes) las sucesiones asociadas. Probar este resultado es trivial.

- Producto de funciones generatrices

Esta siguiente regla considera el producto de dos funciones generatrices $f(x)$ y $g(x)$ asociadas a (a_n) y (b_n) respectivamente. Empezamos con las primeras manipulaciones de este producto:

$$f(x)\cdot g(x)=\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\, x^j\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_k\, b_j\; x^{k+j}$$

Ahora a continuación vamos a tratar de calcular el coeficiente n-ésimo de la serie de potencias $f(x)g(x)$. Se obtendrán términos con x^n cuando los índices k y j sean tales que $k+j=n$. Por tanto cada combinación de estas contribuirá con el producto de $a_j\, b_k$ correspondiente. Así que llamaremos c_n a los coeficientes de $f(x)g(x)$:

$$c_n=\sum_{k+j=n} a_k b_j$$

Es decir, estamos realizando una suma doble, con los índices k y j, pero sólo sumamos aquellos cuya suma vale n. Realizando un pequeño análisis se llega a que:

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$$

Por tanto tendremos que el llamado <u>producto de Cauchy</u> queda así:

$$\begin{cases} f(x) \leftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \\ g(x) \leftrightarrow (b_n)_{n=0}^{\infty} \end{cases} \Longrightarrow f(x)\cdot g(x) \leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty}$$

- Derivar funciones

Dada una función f que genera unos cierto (a_n), ¿Qué función generará la sucesión $(n\, a_n)$? El objetivo es buscar una operación que, aplicada a f, haga que sus coeficientes aparezcan multiplicados por la posición que ocupan. Gracias a la estructura especial que tienen las series de potencias, nos hace pensar que esta operación va a ser la derivación o algo muy similar:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \;\;\Rightarrow\;\; f'^{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

Por tanto tenemos que $f'(x)$ está asociada a la sucesión $(1a\_1, 2\, a\_2, 3\, a\_3, \dots)$ Ya casi tenemos lo buscado, salvo el primer coeficiente, que debería ser $0\, a_0$. Por tanto tenemos que desplazar la sucesión hacia la derecha una posición, por tanto nos quedará así:

$$xf'(x) \leftrightarrow (0\, a_0, 1\, a_1, 2\, a_2, 3\, a_3, \dots) = (n\, a_n)_{n=0}^{\infty}$$

Si ahora queremos obtener la función asociada a la sucesión $(n^2\, a_n)$ utilizamos el mismo argumento que en la anterior pero esta vez aplicado a la función $x\, f'(x)$ (cuyos coeficientes son en este caso $n\, a_n$) tenemos que:

$$x(x\, f'(x))' \leftrightarrow (n^2 a_n)_{n=0}^{\infty}$$

Y así sería sucesivamente, es decir, cada factor x extra en el coeficiente se obtiene repitiendo la operación. Abreviando, llamamos $(x\, d/dx)$ al operador que actúa sobre una función derivándola primero y después multiplicándola por x. Entonces para cada $m \geq 1$

$$f(x) \;\leftrightarrow\; (a_n)_{n=0}^{\infty} \;\;\Rightarrow\;\; \left(x\frac{d}{dx}\right)^m \big(f(x)\big) \leftrightarrow (n^m a_n)_{n=0}^{\infty}$$

Ejemplo 4: ¿Cuál es la función generatriz $f(x)$ de la sucesión de números $(0, 1, 2, 3, \dots)$?

Se conoce que $1/(1-x)$ genera la sucesión $(1, 1, 1, \dots)$ así que solo hay que aplicarle esta última regla para obtener lo que buscamos:

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \;\;\leftrightarrow (0, 1, 2, 3, \dots)$$

Si lo queremos analizar más general, podemos obtener la sucesión de números $(0, d, 2d, 3d, \dots)$ que están en progresión aritmética que empieza en 0 y con diferencia d:

$$\frac{d}{1-x} \;\;\leftrightarrow (d, d, d, d, \dots) \;\;\Rightarrow\;\; \frac{dx}{(1-x)^2} \;\;\leftrightarrow (0, d, 2d, 3d, \dots)$$

Si seguimos analizando, se puede comprobar que la función generatriz de una progresión aritmética general, que empieza en un cierto a y con diferencia d es:

$$\frac{a}{1-x}+\frac{dx}{(1-x)^2}=\frac{a+(d-a)x}{(1-x)^2} \leftrightarrow (a, a+d, a+2d, a+3d, \dots)$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE RECURRENCIA CON FUNCIONES GENERATRICES

Vistas ya algunas de las operaciones que se pueden realizar con las funciones generatrices y vistas las ecuaciones de recurrencia, vamos a tratar de resolver dichas ecuaciones de recurrencia desde el punto de vista de las funciones generatrices.

Para resolverlas seguiremos los siguientes pasos:

- Lo primero será asociar a la sucesión de números en cuestión una función generatriz, por ejemplo $f(x)$.
- A continuación, buscaremos una expresión manejable para $f(x)$. Para esto utilizaremos la información proporcionada, es decir, la ecuación de recurrencia y las condiciones iniciales que nos permitirán obtener una ecuación (algebraica, diferencial, etc.) para $f(x)$. Y tras resolverla obtendremos una fórmula para $f(x)$.
- Finalmente desarrollaremos la función en serie de potencias, para poder obtener una expresión cerrada de los coeficientes ya que lo que nos interesa es la sucesión de números.

Ejercicio 1: Calcular la sucesión de números $\{a_n\}_n$ que verifica que

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \; y \; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n \quad \text{si } n \geq 2.$$

<u>Resolución:</u> (Sucesión de Fibonacci) Lo primero de todo será construir una función f que genere los $\{a_n\}_n$ y traducir la información que tenemos sobre estos números en una ecuación sobre f:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2} + n)\, x^n =$$

$$x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}\, x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n\, x^n$$

$$= x + xf(x) + x^2 f(x) + \left(\frac{1}{(1-x)^2} - x\right)$$

Aquí hemos utilizado que conocemos la función asociada a la sucesión cuyo coeficiente n-ésimo es precisamente n. Ya tenemos la ecuación para f:

$$f(x) = xf(x) + x^2 f(x) + \frac{1}{(1-x)^2}$$

De la cual obtenemos que:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1-x-x^2)}$$

Los coeficientes de esta función son los a_n del enunciado, que se pueden obtener desarrollándola en serie de potencia utilizando fracciones simples.

Este método será útil cuando sepamos sumar (obtener una expresión analítica) la serie o las series de potencias que incluyan a la parte no homogénea. El que la ecuación siga siendo lineal de coeficientes constates nos asegura que el tipo de ecuación que obtendremos para f seguirá siendo algebraica. Es decir, si consideramos otro tipo de ecuaciones como pueden ser las ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes no constantes las complicaciones aumentan considerablemente.

Ejercicio 2: Calcula las sucesiones de números $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ que verifican que para cada $n \geq 1$

$$\begin{cases} a_n = 3\,a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 2\,a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases} \qquad con\ a_0 = 1\ y\ b_0 = 1$$

Resolución:

Lo primero de todo introducimos un par de funciones generatrices asociadas a las sucesiones de dicho ejercicio:

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n \qquad \beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,x^n$$

La primera ecuación, escrita en función de estas dos funciones, es:

$$\alpha(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(3a_{n-1} + b_{n-1})\,x^n = 1 + 3x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\,x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}\,x^{n-1}$$

$$= 1 + 3x\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k + x\sum_{k=0}^{\infty} b_k\,x^k = 1 + x\,\alpha(x) + x\,\beta(x)$$

Actuando de manera análoga con la segunda ecuación obtenemos que las funciones generatrices verificaran:

$$\begin{cases} \propto(x)(1-3x) = 1 + x\,\beta(x) \\ \beta(x)(1-x) = 2x\,\alpha(x) \end{cases}$$

Y resolviendo este sistema tendremos que:

$$\propto(x) = \frac{1-x}{x^2-4x+1} \quad y \quad \beta(x) = \frac{2x}{x^2-4x+1}$$

Finalmente, desarrollando en serie de potencias ambas funciones obtendremos la solución del ejercicio:

$$\propto(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)x^n$$

$$\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)x^n$$

Donde los coeficientes de $\propto(x)\ y\ \beta(x)$ son respectivamente los $a_n\ y\ b_n$ que satisfacen el sistema de ecuaciones descrito inicialmente.

Ejercicio 3: Resuelve la siguiente relación de recurrencia usando las funciones generatrices:

$$a_{n+1} - a_n = 3^n, \quad n \geq 0 \quad y\ a_0 = 1$$

Resolución:

Si f(x) es la función generatriz de la sucesión buscada a_n, es decir:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

Entonces tenemos que: $-x\,f(x) = -a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 + \cdots$

Si ahora sumamos ambas expresiones tenemos que:

$$(1-x)f(x) = 1 + 3^0x + 3^1x^2 + 3^2x^3 + \cdots$$

Y multiplicando ahora por 3 llegamos a que:

$$3(1-x)f(x) = 3 + 3^1x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots = \frac{1}{1-3x} + 2$$

Y sabiendo que:

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3^1x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots$$

Es decir,

$f(x) = \frac{\frac{1}{1-3x}+2}{3(1-x)} = \frac{1-2x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-3x}$ de donde sacamos que:

$$A(1-3x) + B(1-x) = 1 - 2x$$

Haciendo $x = 1$ tengo que $A = \frac{1}{2}\ \ y\ con\ x = \frac{1}{3}\ \ B = 1/2$

Por tanto, el coeficiente de grado $x^n\ de \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-3x}\quad es\quad \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)3^n$

Por tanto, la solución final pedida es:

$$a_n = \frac{1}{2}(1 + 3^n)$$

Ejercicio 4: Resuelve la siguiente relación de recurrencia usando las funciones generatrices:

$$a_{n+1} - a_n = n^2, \quad n \geq 0 \quad y\ a_0 = 1$$

Resolución:

Actuando como en el ejercicio anterior tenemos que:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
$$-x\,f(x) = -a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 + \cdots$$

Por tanto, sumando tenemos que:

$$(1-x)f(x) = 1 + 0^2x + 1^2x^2 + 2^2x^3 + 3^2x^4 + \cdots$$

Así que para conseguir la función generatriz definimos:

$$h(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad entonces:$$

$$h'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}\ por\ tanto, multiplicando\ por\ x:$$

$$x\,h'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\left(x\,h'(x)\right)' = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \cdots = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$x^2\left(x\,h'(x)\right)' = x^2 + 2^2x^3 + 3^2x^4 + 4^2x^5 + \cdots = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}$$

Por tanto, la función generatriz de

$$1 + 0^2x + 1^2x^2 + 2^2x^3 + 3^2x^4 + \cdots = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3} + 1$$

Por tanto tenemos que:

$$f(x) = \frac{\frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3} + 1}{1-x} = \frac{4x^2 - 3x + 1}{(1-x)^4}$$

Y su coeficiente de grado n será:

$$4\binom{-4}{n-2} - 3\binom{-4}{n-1} + \binom{-4}{n} = 4\binom{n+1}{n-2} - 3\binom{n+2}{n-2} + \binom{n+3}{n-2}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2 - 5n + 6)}{6}$$

Por tanto $a_n = \frac{(n+1)(2n^2-5n+6)}{6} \quad para\ n \geq 0$

Ejercicio 5: Resuelve la siguiente relación de recurrencia usando las funciones generatrices:

$$a_n - 3a_{n-1} = 5^{n-1}, \quad n \geq 1 \; y \; a_0 = 1$$

<u>Resolución:</u>

Operamos de una forma análoga a la de los ejercicios anteriores:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
$$-3x\,f(x) = -3a_0x - 3a_1x^2 - 3a_2x^3 - 3a_3x^4 + \cdots$$

Y sumando ambas expresiones:

$$(1-3x)f(x) = 1 + 5^0x + 5^2x^2 + 5^3x^3 + 5^4x^4 + \cdots$$

De la cual la función generatriz es $\left(\frac{1}{1-5x}\right) + 4.$ Por tanto se tiene que:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{1-5x} + 4}{5(1-3x)} = \frac{1-4x}{(1-5x)(1-3x)} = \frac{A}{1-5x} + \frac{B}{1-3x}$$

Por tanto, tenemos que: $1 - 4x = A(1-3x) + B(1-5x)$

Haciendo $x = \frac{1}{3}$ $se\ tiene\ que\ B = \frac{1}{2}$ $\quad y\ con\ \ x = \frac{1}{5}\ se\ tiene\ que\ A = \frac{1}{2}$

Por tanto la función generatriz es: $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-5x} + \frac{1}{1-3x}\right)$ donde el coeficiente de x^n es:

$$\frac{1}{2}(5^n + 3^n) \quad para\ n \geq 1$$

Ejercicio 6: Resuelve la siguiente relación de recurrencia usando las funciones generatrices:

$$a_{n+2} - 3a_{n-1} + 2a_n = 0, \quad n \geq 0 \; y \; a_0 = 1, a_1 = 6$$

<u>Resolución:</u> Operando igual que en los ejercicios anteriores, definimos:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

$$-3x\,f(x) = -3a_0x - 3a_1x^2 - 3a_2x^3 - 3a_3x^4 + \cdots$$
$$2x^2f(x) = 2a_0x^2 + 2a_1x^3 + 2a_2x^4 + \cdots$$

Y sumando todas las expresiones tenemos que:

$$(1 - 3x + 2x^2)f(x) = a + (a_1 - 3a_0)x = 1 + 3x \text{ es decir } f(x) = \frac{1-3x}{1-3x+2x^2}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\frac{1+3x}{1-3x+2x^2} = \frac{1+3x}{(x-1)(2x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-1}$$

De esta ecuación sacamos que: $A = 4\ y\ B = -5$

$f(x) = -\frac{4}{1-x} + \frac{5}{1-2x}$, por tanto el coeficiente de x^n es:

$$a_n = -4 + 5 \times 2^n$$

Ejercicio 7: Resuelve la siguiente relación de recurrencia usando las funciones generatrices:

$$a_{n+2} - 2a_{n-1} + a_n = 2^n, \quad n \geq 0 \; y \; a_0 = 1, a_1 = 2$$

Resolución:

Análogo al anterior, definimos:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
$$-2x\,f(x) = -2a_0x - 2a_1x^2 - 2a_2x^3 - 2a_3x^4 + \cdots$$
$$x^2 f(x) = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots$$

Y sumando todas las expresiones tenemos que:

$$(1 - 2x + x^2)f(x) = a_0 + (a_1 - 2a_0)x + 2^0x^2 + 2^1x^3 + 2^2x^4 + \cdots$$
$$= 1 + +2^0x^2 + 2^1x^3 + \cdots \quad (*)$$

Se conoce que $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2^1x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \cdots$

y multiplicando esto por x^2 se tiene que:

$$\frac{x^2}{1-2x} = x^2 + 2^1x^3 + 2^2x^4 + 2^3x^5 + 2^4x^6 + \cdots \text{ que es igual a } (*) - 1$$

Es decir, tenemos que:

$(1 - 2x + x^2)f(x) = \left(\frac{x^2}{1-2x}\right) + 1$ de donde concluimos que:

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{1-2x} + 1}{1 - 2x + x^2} = \frac{\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + 1}{(1 - 2\mathrm{x})(\mathrm{x} - 1)^2} = \frac{1}{1 - 2x}$$

Por tanto el coeficiente que acompaña de x^n es $a_n = 2^n \; para \; n \geq 0$

Ejercicio 8: Resuelve el siguiente sistema de relación de recurrencia:

$$\begin{cases} a_{n+1} = -2a_n - 4b_n \\ b_{n+1} = 4a_n + 6b_n \end{cases} \quad con \; n \geq 0, \;\; a_0 = 1, b_0 = 0$$

Resolución:

Si definimos por $f(x)$ a la función generatriz de la sucesión a_n , es decir $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ y sea $g(x)$ la función generatriz de la sucesión b_n, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$

Multiplicamos ahora por x^{n+1}, y obtenemos:

$$a_{n+1}x^{n+1} = -2a_nx^{n+1} - 4b_nx^{n+1}$$

$$b_{n+1x^{n+1}} = 4a_nx^{n+1} + 6b_nx^{n+1}$$

Tomando sumatorios desde 0 hasta ∞ tenemos:

$$\sum_{n(0)}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = -2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 4x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\sum_{n(0)}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} = 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 6x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Y esto expresado en términos de $f(x)\ y\ g(x)$ es:

$$f(x) - 1 = -2xf(x) - 4xg(x)$$
$$g(x) = 4xf(x) + 6xg(x)$$

Y resolviendo este sistema donde las incógnitas son f(x) y g(x) tenemos que:

$$f(x) = \frac{12x^2 - 4x + 1}{(1+2x)(1-2x)^2} \quad y \quad g(x) = \frac{4x}{(1-2x)^2}$$

Es obvio que el coeficiente de x^n de $g(x)$ es 4 (coeficiente de $x^{n-1}\ en\ (1-2x)^{-2}$), es decir:

$$4\binom{-2}{n-1}2^{n-1} = \binom{n}{n-1}2^{n+1} = n2^{n+1}$$

Por tanto se tiene que $b_n = n2^{n+1}$. Para calcular a_n calculamos el coeficiente de x^n en $f(x)$ para lo que tenemos que usar los coeficientes indeterminados:

$$\frac{-12x^2 - 4x + 1}{(1+2x)(1-2x)^2} = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{1-2x} + \frac{C}{(1-2x)^2}$$

Y resolviendo este sistema tenemos que $A = 0, B = 3, y\ C = -2$

Por tanto el coeficiente de x^n en la expresión es:

$$3 \times 2^n - 2\binom{-2}{n}2^n = 3 \times 2^n - 2(n+1)2^n = 2^n(1-2n)$$

Ejercicio 9: Resuelve el siguiente sistema de relación de recurrencia:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2 \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1 \end{cases} \quad con\ n \geq 0,\ \ a_0 = 0, b_0 = 1$$

<u>Resolución:</u>

Definimos de forma análoga al apartado anterior. Sea $f(x)$ a la función generatriz de la sucesión a_n , es decir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y sea $g(x)$ la función generatriz de la sucesión b_n, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

Multiplicamos ahora por x^{n+1}, y obtenemos:

$$a_{n+1}x^{n+1} = 2a_n x^{n+1} - b_n x^{n+1} + 2x^{n+1}$$

$$b_{n+1x^{n+1}} = -a_n x^{n+1} + 2b_n x^{n+1} - x^{n+1}$$

Y tomando sumatorios desde 0 hasta ∞ tenemos:

$$\sum_{n(0)}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\sum_{n(0)}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} = -x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Y esto expresado en términos de $f(x)\ y\ g(x)$ es:

$$f(x) = 2xf(x) - xg(x) + \frac{2x}{1-x}$$
$$g(x) - 1 = -xf(x) + 2xg(x) - \frac{x}{1-x}$$

Multiplico por 2 la primera ecuación y sumándosela a la primera, obtenemos que:

$$2g(x) - 2 + f(x) = 3xg(x) \ \Rightarrow f(x) = g(x)(3x-2) + 2$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación se tiene que:

$$g(x) - 1 = -x[g(x)(3x-2) + 2] + 2xg(x) - \frac{x}{1-x}$$

Y desarrollando tenemos que:

$$g(x)(1 + x(3x-2) - 2x) = 1 - 2x - \frac{x}{1-x};$$

$$g(x)(3x^2 - 4x + 1)(1-x) = 1 - x - 2x(1-x) - x$$

$$g(x)(1-x)^2(1-3x) = 2x^2 - 4x + 1 \ \Rightarrow \ g(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2(1-3x)}$$

Utilizando el método de los coeficientes determinados de nuevo tenemos que:

$$g(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x}$$

Que resolviendo tal sistema tenemos que: $A = \frac{3}{4}, B = \frac{1}{2} y\ C = -\frac{1}{4}$

Por tanto el coeficiente de x^n es: $b_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\binom{-2}{n} - \frac{1}{4}3^n = \frac{1}{4}(2n + 5 - 3^n)$

Sabiendo que $f(x) = g(x)(3x-2) + 2$ y sustituyendo el valor de $g(x)$ tenemos que:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2(1-3x)}(3x-2) + 2 = \frac{x - 2x^2}{(1-x)^2(1-3x)}$$

Y utilizando de nuevo el método de los coeficientes determinados tengo que:

$$\frac{x-2x^2}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x}$$

De donde se saca que: $A = -\frac{3}{4}, B = \frac{1}{2} y\ C = \frac{1}{4}$

Por tanto el coeficiente de x^n es: $b_n = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\binom{-2}{n} + \frac{1}{4}3^n = \frac{1}{4}(2n - 1 + 3^n)$

Conclusión:

Gracias a las funciones generatrices, podemos resolver las relaciones recurrentes de una forma diferente, que aunque a veces es más laborioso que el tradicional, dependiendo del grado de la relación de la recurrencia, o si de que la relación de recurrencia es homogénea o no homogénea nos puede servir de mucha ayuda.

A continuación, vemos unos ejemplos de ejercicios resueltos de un método u otro, y en algunos casos resueltos por ambos métodos dónde podemos observar si el método de las funciones generatrices es más sencillo o viceversa.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Ejercicio 1: Resolver la relación $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ con las condiciones iniciales: $a_0 = a_1 = 1$

Solución: $a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n$

Ejercicio 2: Resolver la relación $a_n - 2a_{n-1} = 2^n$ con la condición inicial $a_0 = 1$

Solución: $a_n = (n+1)2^n$

Ejercicio 3: Resolver la relación $a_n - 3a_{n-1} = n \; para \; n \geq 1$ con la condición inicial: $a_0 = 1$

Solución: $a_n = \frac{7}{4}3^n - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$

PROBLEMAS

EJERCICIOS DE LA FASE LOCAL/NACIONAL

Ejercicio 1: Sea $C\ =\{A,B,C\}$ y sea S_n el conjunto de cadenas de longitud n formadas con las letras de C que tienen un número par de letras A consecutivas. Encuentra una relación de recurrencia para calcular S_n y resuélvela.

Resolución: Sea $S_0=0, S_1=1(AA)\ y\ S_n$ el conjunto pedido. Definimos entonces:

- S_{nA} el conjunto de las anteriores que acaben en A
- S_{nB} el conjunto de las anteriores que acaben en B
- S_{nC} el conjunto de las anteriores que acaben en C

Por tanto tenemos que: $S_n=S_{nA}+S_{nB}+S_{nC}$ Conocemos que si la cadena acaba en B o en C, la cadena de n-1 letras puede acabar en A, B o C indistintamente, por tanto

$$S_{nB}=S_{nC}=n-1$$

Pero en caso de que acabe en A, sabemos que la letra anterior también es A, ya que si no fuese así tendríamos una A aislada (número impar). Y también conocemos que la letra anterior ya podría ser cualquiera. Por tanto $S_{nA}=S_{n-2}$

Con esto llegamos a la siguiente relación de recurrencia: $S_n=2S_{n-1}+S_{n-2}$

Resolviendo su ecuación característica que es $r^2-2r-1=0$, las soluciones son: $2\pm\sqrt{2}$. Por tanto la solución general es: $a_n=c_1\left(2+\sqrt{2}\right)^n+c_2\left(2-\sqrt{2}\right)^n$ Como conocemos que $S_1=0\ y\ S_2=1$, resolvemos el sistema obteniendo que:

$$c_1=\frac{\sqrt{2}-1}{4}\ y\ c_2=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

Por tanto la solución es:

$$a_n=\frac{\sqrt{2}-1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)^n+\frac{\sqrt{2}+1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)^n$$

Ejercicio 2: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1, \quad a_1 = 1$$

Resolución:

Como $a_1 = 1$ tenemos que $a_2 = 1 + 3$, $a_3 = 1 + 3 + 5$ en general

$a_n = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$ $\qquad (*)$

Tenemos que $(*)$ $2i - 1$ para $i = 1,2, \dots$ es una progresión aritmética. La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética b_n es: $S_n = (b_1 + b_n)\frac{n}{2}$

Por tanto, en nuestro caso tenemos que:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2$$

Ejercicio 3: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n - a_{n-1} = 3n^2, \quad a_0 = 8$$

Resolución:

Este ejercicio lo vamos a hacer usando funciones generatrices:

Defino $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ y por otro lado

$$-x\,f(x) = -a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 + \cdots$$

Por tanto, sumando tenemos que: $(1 - x)f(x) = 8 + 3(x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots)$

Ahora deducimos la función generatriz de la serie: $x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots$

Sea $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

$$g'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$xg'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$(xg'(x))' = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \cdots = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$x(xg'(x))' = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Entonces tenemos que: $(1 - x)f(x) = 8 + 3\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ y como consecuencia tenemos:

$$f(x) = \frac{8}{1-x} + \frac{3x(1-x)}{(1-x)^4}$$

Donde el coeficiente de x^n es el término general que estamos buscando para la sucesión a_n.

$$a_n = 8 + 3\binom{-4}{n-1} + 3\binom{-4}{n-2} = 8 + 3\binom{n+2}{n-1} + 3\binom{n+1}{n-2}$$
$$= 8 + \frac{(n+2)(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{2}$$

Es decir:

$$a_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 16}{2} \quad con\, n \geq 0$$

Ejercicio 4: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n - 3a_{n-1} = 7^n \cdot 5, \;\; a_0 = 2$$

Resolución:

La recurrencia homogénea asociada es una geométrica de razón 3, por lo que una solución sería $c(3)^n$. Ahora buscamos una solución en $A(7)^n$ verificando la recurrencia dada, es decir:

$A(7^n) - 3A(7^{n-1}) = 7^n \times 5$ y dividiendo esta ecuación por 7^{n-1} tenemos que:

$7A - 3A = 35 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{35}{4}$

Por tanto sabemos que la solución será del tipo: $c(3^n) + \frac{35}{4}(7^n)$.

Como $a_0 = 2$ tenemos que: $2 = c + \left(\frac{35}{4}\right) \;\; \Rightarrow c = 2 - \frac{35}{4} = -\frac{27}{4}$

Por tanto la solución general es:

$$a_n = \frac{7^{n+1} \times 5 - 27 \times 3^n}{4} \quad para\, n \geq 0$$

Ejercicio 5: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n - 3a_{n-1} = 3^n \cdot 5, \;\; a_0 = 2$$

Resolución: Puede parecer idéntica al ejercicio, pero varía en que la solución de la homogénea que es $c(3^n)$ y la supuesta solución para la recurrencia $A(3^n)$ son obviamente dependientes, por lo que en este caso hay que tomar $An(3^n)$ como posible solución de la recurrencia dada, es decir se tiene que verificar que: $An(3^n) - 3A(n-1)(3^{n-1} = 3^n \times 5$, y dividiendo por 3^{n-1} tenemos que:

$$3An - 3A(n-1) = 15 \quad \Rightarrow A = 5$$

Por tanto la solución genérica será $(c+5n)3^n$ Como $a_0 = 2$ tenemos que $c = 2$. Por tanto la solución general es:

$$a_n = (2+5n)3^n \ \ para\, n \geq 0$$

Ejercicio 6: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2, \quad a_0 = 11, a_1 = 1, a_2 = -1$$

Resolución:

Este ejercicio vamos a resolverlo utilizando funciones generatrices ya que es de orden 3 y es el primero que nos aparece de este tipo.

Defino $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ y por otro lado

$$-3x\, f(x) = -3a_0x - 3a_1x^2 - 3a_2x^3 - 3a_3x^4 + \cdots$$

$$4x^3 f(x) = 4a_0x^3 + 4a_1x^4 + 4a_2x^5 + 4a_3x^6 + \cdots$$

Y sumando todas ellas tenemos que:

$$(1-3x+4x^3)f(x) = a_0 + a_1x - 3xa_0 + xa_2x^2 + (3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdots)$$

$$(1-3x+4x^3)f(x) = (11 - 32x - 4x^2) + \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} - (x + 4x^2)$$

$$f(x) = \frac{8x^5 + 9x^4 - 86x^3 + 125x^2 - 65x + 11}{(1-x)^3(1+x)(1-2x)^2}$$

$$= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{D}{1+x} + \frac{E}{1-2x} + \frac{F}{(1-2x)^2}$$

Resolviendo este sistema llegamos a que: $A = 8, B = 3, C = 1, D = 4, E = -4, F = -1$

Por tanto nos quedaría:

$$\frac{8}{1-x} + \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{4}{1+x} + \frac{-4}{1-2x} + \frac{-1}{(1-2x)^2}$$

Siendo el coeficiente en x^n :

$$a_n = 8 + 3\binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + 4(-1)^n - 4 \times 2^n - \binom{n+1}{n}2^n$$

$$a_n = 3n + 11 + \frac{(n+2)(n+1)}{2} - 2^n(n+5) + 4(-1)^n \ \ para\, n \geq 0$$

Ejercicio 7: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n, \quad a_0 = 1, a_1 = 3$$

Resolución:

Tenemos que $a_n - 4a_{n-1} - 4a_{n-2} = n$

Defino $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ y por otro lado

$$-4x\, f(x) = -4a_0x - 4a_1x^2 - 4a_2x^3 - 4a_3x^4 + \cdots$$

$$4x^2 f(x) = 4a_0x^2 + 4a_1x^3 + 4a_2x^4 + 4a_3x^5 + \cdots$$

Y sumando todas ellas tenemos que:

$$(1 - 4x + 4x^2)f(x) = a_0 + a_1x - 4xa_0 + (2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots)$$
$$= 1 - x + (2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots)$$

Es fácil demostrar que

$$2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2} - x$$

Así que:

$$(1 - 4x + 4x^2)f(x) = 1 - 2x + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x + 1}{(1-x)^2}$$

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x + 1}{(1-x)^2(1-2x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{(1-2x)^2}$$

Haciendo $x = 0, 1, 2$ y ½ obtenemos que $A = 3, B = 1, C = -5$ y $D = 2.$

Por tanto tenemos que:

$$\frac{3}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{-5}{1-2x} + \frac{2}{(1-2x)^2}$$

Y el coeficiente de x^n es:

$$a_n = 3 + \binom{n+1}{n} - 5 \times 2\binom{n+1}{n}2^n = n + 4 + 2^n(2n-3) \;\; para\; n \geq 0$$

Ejercicio 8: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n-1} - a_n = 2n + 3 \quad n \geq 0, a_0 = 1$$

Resolución:

$$a_{n-1} - a_n = 2n + 3 \quad n \geq 0, a_0 = 1$$

$a_1 = a_0 + 3$

$a_2 = a_1 + 5 = a_0 + (3 + 5)$

$a_3 = a_2 + 7 = \cdots = a_0 + (3 + 5 + 7)$

Es decir en general tenemos que:

$$a_n = a_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (2i - 3)$$

Donde el segundo sumando es la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética cuya solución es $\frac{(3+2(n-1)+3)n}{2} = n^2 + 2n$

Recordatorio:

En una progresión aritmética al suma de los n primeros términos es igual a:

$$(\text{primer término} + \text{último término}) \times \text{nº de términos}/2$$

Por tanto la sucesión buscada es:

$$a_n = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 \ \ con\, n \geq 0$$

Ejercicio 9: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n-1} - a_n = 3n^2 - n \quad n \geq 0, a_0 = 3$$

Resolución:

$$a_1 = a_0 + 3 \times 0^2 - 0$$

$$a_2 = a_1 + 3 \times 1^2 - 1 = (a_0 + 3 \times 0^2 - 0) + 3 \times 1^2 \ - 1 = a_0 + 3(0^2 + 1^2) - (0 + 1)$$

$$a_3 = a_2 + 3 \times 2^2 - 2 = \cdots = a_0 + 3(0^2 + 1^2 + 2^2) - (0 + 1 + 2)$$

Es decir, en general tenemos que:

$$a_n = a_0 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

Ahora hay que calcular la función generatriz asociada a $1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots$

Definimos primero la función $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

Derivamos obteniendo: $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$ que multiplicando por x obtenemos que: $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$

Volviendo a derivar tenemos que: $1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \cdots = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

Multiplico por x para llegar a la función buscada: $1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots = \frac{x(1-x)}{(1-x)^3}$

Sabemos entonces que $\sum_{i=1}^{n} i^2$ es el coeficiente de x^n de la función $\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$ que es:

$$\binom{-4}{n-2} + \binom{-4}{n-1} = \binom{n+1}{n-2} + \binom{n+2}{n-1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$$
$$= \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

Y realizando la misma operación al otro sumatorio, sabemos que: $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$, por tanto, conocemos que $\sum_{i=1}^{n} i$ es el coeficiente de x^n de la función $\frac{x}{(1-x)^3}$ que es:

$$\binom{-3}{n-1} = \binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)n}{2}$$

Por tanto, la sucesión que buscamos será:

$$a_n = 3 + 3\frac{(n+1)n(2n+1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = 3 + n(n-1)^2$$

Ahora vamos a solucionar la misma sucesión pero trabajando con funciones generatrices. Defino entonces:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
$$-x\,f(x) = -a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 + \cdots$$

Si ahora sumamos ambas expresiones tenemos que:

$$\begin{aligned}(1-x)f(x) &= 3 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2)x^3 + \cdots \\ &= 3 + (3\times 1^2 - 1)x^2 + (3\times 2^2 - 2)x^3 + (3\times 3^2 - 3)x^4 + \cdots \\ &= 3 + 3(x^2 + 2^2x^3 + 3^2x^4 + \cdots) - (x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots) \\ &= 3 + 3x^2(1 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots) - x^2(1 + 2x + 3x^2 + \cdots) \\ &= 3 + \frac{3x^2(1+x)}{(1-x)^3} - \frac{x^2}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que: $f(x) = \frac{3}{1-x} + \frac{3x^2+3x^3}{(1-x)^4} - \frac{x^2}{(1-x)^3}$ donde el coeficiente de grado n es:

$$3 + 3\binom{-4}{n-2} + 3\binom{-4}{n-3} + \binom{-3}{n-2} = 3 + 3\binom{n+1}{n-2} + 3\binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2}$$
$$= 3 + n(n-1)^2$$

Ejercicio 10: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+1} - a_n = 5 \quad n \geq 0, a_0 = 1$$

Resolución: Solucionamos primero la ecuación homogénea, que será de la forma $c(2)^n$ y por otro lado buscamos una solución del tipo $A(1)^n$ que verifique la recurrencia. Es decir:

$$A - 2A = 5 \quad \Rightarrow A = -5$$

Por tanto la solución será de la forma $a_n = -5 + c(2)^n$. Como $a_0 = 1$, tenemos que $1 = -5 + c$, de donde $c = 6$. Por tanto la solución general será:

$$-5 + 6 \times 2^n$$

Ahora la resolvemos a través del método de las funciones generatrices, así que defino:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
$$-2x\,f(x) = -2a_0x - 2a_1x^2 - 2a_2x^3 - 2a_3x^4 + \cdots$$

Si ahora sumamos ambas expresiones tenemos que:

$$(1-2x)f(x) = a_0 + 5x + 5x^2 + 5x^3 + \cdots = 1 + 5(x + x^2 + \cdots) = 1 + 5\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{4x+1}{1-x}$$

Por tanto tenemos que $f(x) = \frac{4x+1}{(1-2x)(1-x)}$

Ahora resolvemos a través del método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{4x+1}{(1-2x)(1-x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x}$$

Y haciendo $x = 1$ y $x = 1/2$ tenemos que $A = 6$ y $B = -5$. Por tanto tenemos que:

$$f(x) = \frac{6}{1-2x} - \frac{5}{1-x} \quad \text{cuyo coeficiente de } x^n \text{ es } 6 \times 2^n - 5$$

Ejercicio 11: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n + na_{n-1} = n! \quad n \geq 1, a_0 = 1$$

Resolución:

La escribiremos de la siguiente manera: $a_n = n! - na_{n-1}$ $n \geq 1$ $a_0 = 1$

$$a_1 = 0, a_2 = 2!, a_3 = 0, a_4 = 4! \dots En\ general\ a_n = \begin{cases} 0 & si\ n\ es\ impar \\ n! & si\ n\ es\ par \end{cases}$$

Ejercicio 12: Resuelve la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n \quad n \geq 0, a_0 = 1$$

Resolución:

La solución de la ecuación homogénea es $c(2)^n$, como la posible ecuación de la ecuación no homogénea sería $A(2)^n$ resultan que ambas soluciones son linealmente dependientes, por lo que hay que buscar otra solución del tipo $An2^n$ y la sustituimos en la relación de recurrencia:

$$A(n+1)^{n+1} \times 2^{n+1} - 2 \times a \times n \times 2^n = 2^n$$

Y dividiendo por 2^n tenemos que:

$A(n+1)2 - 2A \times n = 1$ de donde sacamos que $A = 1/2$

Por tanto la solución general será de la forma: $a_n = c2^n + \left(\frac{1}{2}\right) n \times 2^n$ como $a_0 = 1$ tenemos que c=1. Por tanto la solución final será:

$$a_n = 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right) = 2^{n-1}(n+2)$$

Ejercicio 13: Calcula el término general de la serie $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$, $n \geq 0$ con condiciones iniciales $a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = -2$.

Resolución:

Sea A la función generatriz correspondiente de la serie, tenemos entonces:

$$\frac{A - 2 - 0 \cdot x - (-2)x^2}{x^3} = 6\frac{A - 2 - 0 \cdot x}{x^2} - 11\frac{A - 2}{x} + 6A$$

Despejando de aquí, obtenemos que:

$$A = \frac{20x^2 - 12x + 2}{1 - 6x + 11x^2 - 6x^3} = \frac{20x^2 - 12x + 2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}$$

Ahora resolvemos a través del método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{20x^2 - 12x + 2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)} = \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x}$$

Y haciendo $x = 1, x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{3}$ tenemos que $B = 5, C = 4$ y $D = 1$. Por tanto tenemos que

$$A = \frac{5}{1-x} + \frac{4}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (5 - 4 \cdot 2^n + 3^n) x^n$$

Por tanto la solución final será:

$$a_n = 5 - 2^{n+2} + 3^n$$

Ejercicio 4: Resolver la siguiente relación de recurrencia homogénea, con condiciones iniciales:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \qquad n \geq 2, \qquad a_0 = 6, a_1 = 8$$

Resolución:

Primero lo solucionamos por *el método tradicional*, como son ecuaciones homogéneas defino la ecuación característica $r^2 - 4r + 4 = 0$ que tiene una raíz doble: 2.

Por tanto la solución general será de la forma: $c_1\,(2)^n + c_2 n (2)^n$

Y apoyándonos en las condiciones iniciales tenemos que: $c_1 = 6$ y $c_2 = -2$

Por tanto, la solución es: $a_n = 2^{n+1}(3 - n)$

A continuación lo vamos a solucionar usando el *método de las funciones generatrices*:

Defino:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$-4x\, f(x) = -4a_0 x - 4a_1 x^2 - 4a_2 x^3 - 4a_3 x^4 + \cdots$$

$$4x^2 f(x) = 4a_0 x^2 + 4a_1 x^3 + 4a_3 x^5$$

Si ahora sumamos las tres expresiones tenemos que:

$$(1 - 4x + 4x^2) f(x) = a_0 + a_1 x - 4x a_0$$

De donde sacamos que:

$$f(x) = \frac{6 - 16x}{1 - 4x + 4x^2}$$

Y ahora a través del método de coeficientes indeterminados tenemos que:

$$\frac{6-16x}{1-4x+4x^2}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}$$

Y haciendo $x=\frac{1}{2}$ y $x=0$ tenemos que $A=-8$ y $B=-2$

$$\frac{8}{1-2x}-\frac{2}{(1-2x)^2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$8\ \cdot 2^n-2\binom{-2}{n}2^n=2^{n+3}-2^{n+1}(n+1)=2^{n+1}(3-n)\ \ para\ n\geq 0$$

Ejercicio 15: Resolver la siguiente relación de recurrencia homogénea, con condiciones iniciales:

$$a_n=7a_{n-1}-10a_{n-2},\qquad n\geq 2,\qquad a_0=2, a_1=1$$

<u>Resolución:</u>

Método tradicional:

La ecuación característica es $r^2-7r+10=0$ que tiene por raíces reales: 5 y 2

Por tanto la solución general será de la forma: $c_1 2^n+c_2 5^n$

Con las condiciones iniciales obtenemos que: $c_1=3\ y\ c_2=-1$

Por tanto la solución general es: $a_n=3\times 2^n-5^n\quad para\ n\geq 0$

Método de las funciones generatrices:

Defino

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

$$-7x\,f(x)=-7a_0x-7x^2-7a_2x^3-7a_3x^4+\cdots$$

$$10x^2f(x)=10a_0x^2+10a_1x^3+10a_3x^5$$

Si ahora sumamos las tres expresiones tenemos que:

$(1-7x+10x^2)f(x)=a_0+a_1x-7xa_0$, de donde se obtiene que:

$$f(x)=\frac{2-13x}{1-7x+10x^2}$$

Por tanto, a través del método de coeficientes indeterminados tenemos que:

$$\frac{2-13x}{1-7x+10x^2}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{(1-5x)^2}$$

Y haciendo $x = 1/5$ y $x = 1/2$ tenemos que $A = 3$ y $B = -1$

Por tanto

$$\frac{3}{1-2x} - \frac{1}{(1-5x)^2}$$

Siendo el coeficiente de x^n $3 \times 2^n - 5^n \quad para\ n \geq 0$

Ejercicio 16: Resolver la siguiente relación de recurrencia homogénea, con condiciones iniciales:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \qquad n \geq 2, \qquad a_0 = 4, a_1 = 1$$

<u>Resolución:</u>

Método tradicional:

La ecuación característica es $r^2 - 2r + 1 = 0$ que tiene una raíz doble: 1

Por tanto la solución general será de la forma: $c_1 1^n + c_2 n 1^n$

Con las condiciones iniciales obtenemos que: $c_1 = 4$ y $c_2 = -3$

Por tanto la solución general es: $a_n = 4 - 3n \quad para\ n \geq 0$

Método de las funciones generatrices:

Defino

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$-2x\, f(x) = -2a_0 x - 2x^2 - 2a_2 x^3 - 2a_3 x^4 + \cdots$$
$$x^2 f(x) = a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_3 x^5$$

Si ahora sumamos las tres expresiones tenemos que:

$(1 - 2x + x^2) f(x) = a_0 + a_1 x - 2x a_0$, de donde se obtiene que:

$$f(x) = \frac{4 - 7x}{1 - 2x + x^2}$$

Por tanto, a través del método de coeficientes indeterminados tenemos que:

$$\frac{4 - 7x}{1 - 2x + x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2}$$

Y haciendo $x = 1$ y $x = 0$ tenemos que $A = 7$ y $B = -3$

Por tanto

$$\frac{7}{1-x} - \frac{3}{(1-x)^2}$$

Siendo el coeficiente de x^n $7 - 3\binom{-2}{n} = 7 - 3(n+1) = 4 - 3n \quad para\ n \geq 0$

Ejercicio 17: Resolver la siguiente relación de recurrencia homogénea, con condiciones iniciales:

$$a_{n+2} = -4a_{n-1} + 5a_n, \qquad n \geq 0, \qquad a_0 = 2, a_1 = 8$$

<u>Resolución:</u>

Método tradicional:

La ecuación característica es $r^2 - 4r - 5 = 0$ que tiene por raíces reales: 1 y -5

Por tanto la solución general será de la forma: $c_1 1^n + c_2(-1)^n$

Con las condiciones iniciales obtenemos que: $c_1 = 3\ y\ c_2 = -1$

Por tanto la solución general es: $a_n = 3 - (-5^n) \quad para\ n \geq 0$

Método de las funciones generatrices:

Defino

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

$$4x\, f(x) = 4a_0x + 4x^2 + 4a_2x^3 + 4a_3x^4 + \cdots$$

$$-5x^2 f(x) = -5a_0x^2 - 5a_1x^3 - 5a_3x^5$$

Si ahora sumamos las tres expresiones tenemos que:

$(1 + 4x - 5x^2)f(x) = a_0 + a_1x + 4xa_0$, de donde se obtiene que:

$$f(x) = \frac{2 + 16x}{1 + 4x - 5x^2}$$

Por tanto, a través del método de coeficientes indeterminados tenemos que:

$$\frac{2 + 16x}{1 + 4x \pm 5x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1+5x)}$$

Y haciendo $x = 1/5\ y\ x = 1/2$ tenemos que $A = 3\ y\ B = -1$

Por tanto

$$\frac{3}{1-x} - \frac{1}{(1+5x)}$$

Siendo el coeficiente de x^n $3 - (-5)^n \quad para\ n \geq 0$

Ejercicio 18: Resolver la siguiente relación de recurrencia homogénea, con condiciones iniciales:

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}, \qquad n \geq 3, \qquad a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$$

<u>Resolución:</u>

Método tradicional:

La ecuación característica es $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ que tiene por raíces reales: 1,2 y 3

Por tanto la solución general será de la forma: $c_1 1^n + c_2(2)^n + c_3(3)^n$

Con las condiciones iniciales obtenemos que: $c_1 = 1, c_2 = -1\ y\ c_3 = 2$

Por tanto la solución general es: $a_n = 1 - 2^n + 2 \times 3^n \quad para\ n \geq 0$

Método de las funciones generatrices:

Defino

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
$$-6x\,f(x) = -6xa_0 - 6a_1x^2 - 6a_2x^3 - 6a_3x^4 - \cdots$$
$$11x^2f(x) = 11a_0x^2 + 11a_1x^3 + 11a_3x^5$$
$$-6x^3f(x) = -6a_0x^3 - 6a_1x^4 - 6a_2x^5 - 6a_3x^6$$

Si ahora sumamos las tres expresiones tenemos que:

$(1 - 6x + 11x^2 - 6x^3)f(x) = a_0 + a_1x - 6xa_0 + a_2x^2 - 6a_1x^2 + 11a_0x^2 = 2 - 7x + 7x^2$ de donde se obtiene que:

$$f(x) = \frac{2 - 7x + 7x^2}{(1-x)(1-3x)(1-2x)}$$

Por tanto, a través del método de coeficientes indeterminados tenemos que:

$$\frac{2 - 7x + 7x^2}{(1-x)(1-3x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-3x)} + \frac{C}{1-2x}$$

Y haciendo $x = \frac{1}{3}, x = 1\ y\ x = 1/2$ tenemos que $A = 1, B = 2\ y\ C = -1$

Por tanto

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-3x)} - \frac{1}{1-2x}$$

Siendo el coeficiente de x^n $1 + 2 \times 3^n - 2^n \quad para\ n \geq 0$

Ejercicio 19: Resolver la siguiente relación de recurrencia homogénea, con condiciones iniciales:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \qquad n \geq 2, \qquad a_0 = 1, a_1 = 0$$

Resolución:

Método tradicional:

La ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$ que tiene por raíces reales: 2 y 3

Por tanto la solución general será de la forma: $c_1 2^n + c_2 3^n$

Con las condiciones iniciales obtenemos que: $c_1 = 3 \; y \; c_2 = -2$

Por tanto la solución general es: $a_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \quad para\; n \geq 0$

Método de las funciones generatrices:

Defino

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$-5x\, f(x) = -5a_0 x - 5x^2 - 5a_2 x^3 - 5a_3 x^4 - \cdots$$

$$6x^2 f(x) = 6a_0 x^2 + 6a_1 x^3 + 6a_3 x^5$$

Si ahora sumamos las tres expresiones tenemos que:

$(1 - 5x + 6x^2) f(x) = a_0 + a_1 x - 5x a_0$, de donde se obtiene que:

$$f(x) = \frac{1 - 5x}{1 - 5x + 6x^2}$$

Por tanto, a través del método de coeficientes indeterminados tenemos que:

$$\frac{1 - 5x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{A}{1 - 3x} + \frac{B}{(1 - 2x)}$$

Y haciendo $x = 0 \; y \; x = 1/2$ tenemos que $A = -2 \; y \; B = 3$

Por tanto

$$\frac{-2}{1 - 3x} + \frac{3}{(1 - 2x)}$$

Siendo el coeficiente de x^n $-2 \times 3^n + 3 \times 2^n \quad para\; n \geq 0$

Ejercicio 20: Consideramos la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por $a_n = 1 \; para \; 0 \leq n \leq 3 \; y \; a_n = 0 \; para \; n \geq 4$. Llamamos F a la función generatriz determinada por esta sucesión. Calcula $F(2)$.

Resolución: La función generatriz F cumple que:

$$F(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + 0X^4 + 0X^5 + \cdots = 1 + X + X^2 + X^3$$

Por tanto, $F(2) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

Ejercicio 21: Consideramos la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por $a_n = n\ para\ 0 \leq n \leq 5\ y\ a_n = 0\ para\ n \geq 6$. Llamamos F a la función generatriz determinada por esta sucesión. Calcula $F(-2)$.

Resolución: La función generatriz F cumple que:

$$F(X) = 0 + 1X + 2X^2 + 3X^3 + 4X^4 + 5X^5$$

Por tanto, $F(-2) = -2 + 2 \times 2^2 - 3 \times 8 + 4 \times 16 - 5 \times 32 = -114$

EJERCICIOS DE FASE NACIONAL/INTERNACIONAL

Ejercicio 1: Prueba que:

$$\sum_{0\le k\le \frac{n}{3}} 2^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{2k} = 2^{n-1} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Resolución:

$$2^{\mathrm{k}} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{2k} = 2^k\binom{n-k}{2k} + 2^{k-1}\binom{n-k-1}{2k-1}$$

Por tanto la suma es igual a:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\left(\binom{n-k}{2k} + \binom{n-k-2}{2k+1}\right)$$

Llamamos

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x(n)$$

Entonces tenemos que:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^k \sum_{k=0}^{\infty} x^n\left(\binom{n-k}{2k} + \binom{n-k-2}{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{3k}}{(1-x)^{2k+1}} + \frac{2^k x^{3k+3}}{(1-x)^{2k+2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-x}\left(\frac{2x^3}{(1-x)^2}\right)^k + \frac{x^3}{(1-x)^2}\left(\frac{2x^3}{(1-x)^2}\right)^k =$$

$$= \frac{x^3-x+1}{(1-x)^2}\frac{1}{1-\frac{2x^3}{(1-x)^2}} = \frac{x^3-x+1}{1-2x+x^2-2x^3} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2-4x} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + 2^{n-1}\right)x^n$$

Así que tenemos que:

$$f(n) = \cos\frac{n\pi}{2} + 2^{n-1}\ para\ todo\ n \ge 1$$

Ejercicio 2: Calcula la suma: $\sum_k \binom{k}{n-k}$

Resolución: Sea n la variable libre y denotamos la suma por:

$$f(n) = \sum_k \binom{k}{n-k}$$

Y sea $F(x)$ la función generatriz de la serie $f(n)$, es decir:

$$F(n) = \sum_n x^n f(n) = \sum_n x^n \sum_k \binom{k}{n-k} = \sum_n \sum_k \binom{k}{n-k} x^n$$

La cual podemos reescribirla como:

$$F(n) = \sum_n \sum_k \binom{k}{n-k} x^n = \sum_k x^k \sum_n \binom{k}{n-k} x^{n-k}$$

Lo que nos da:

$$F(x) = \sum_k x^k (1+x)^k = \sum_k (x+x^2)^k = \frac{1}{1-(x-x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2}$$

La cual sabemos que es muy parecida a la sucesión de Fibonacci, es decir, $f(n) = F_{n+1}$ y llegamos a que:

$$\sum_k \binom{k}{n-k} = F_{n+1}$$

Ejercicio 3: Calcula la suma:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

Resolución: Sea $f(m) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$ y $F(x) = \sum_m x^m f(m)$. Entonces tenemos que:

$$F(x) = \sum_m x^m f(m) = \sum_m x^m \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \sum_{k\leq n} \binom{n}{k} \sum_{m\leq k} \binom{k}{m} x^m = \sum_{k\leq n} \binom{n}{k} (1+x)^k$$

Implicando $F(x) = (2+x)^n$. Ya que

$$(2+x)^n = \sum_m \binom{n}{m} 2^{n-m} x^m$$

Por tanto el valor de la suma pedida es: $f(m) = \binom{n}{m} 2^{n-m}$.

Ejercicio 4: Calcula la suma:

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m}$$

Resolución: Si n es un número fijado, entonces m es la variable libre de la que la suma depende. Sea $\mathrm{f}(m) = \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m}$ y sea $F(x)$ la función generatriz de la serie $f(m)$, es decir, $F(x) = \sum_m f(m)x^m$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} F(m) = \sum_m f(m)x^m &= \sum_m x^m \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} \\ &= \sum_{k\le n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{m\le k} \binom{k}{m} x^m = \sum_{k\le n} \binom{n}{k} (1+x)^k \end{aligned}$$

Aquí hemos usado que $\sum_{m\le k} \binom{k}{m} x^m = (1+x)^k$. Por tanto tenemos que:

$$F(x) = (-1)^n \sum_{k\le n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(1+x)^k = (-1)^n\big((1+x)-1\big)^n = (-1)^n x^n$$

Por lo tanto, hemos obtenido $F(x) = (-1)^n x^n$ y dado que esta es una función de generación de la serie $f(m)$ tenemos que:

$$f(m) = \begin{cases} (-1)^n & n = m \\ 0 & m < n \end{cases}$$

Ejercicio 5: Calcula la suma:

$$\sum_k \binom{n}{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil} x^k$$

Resolución: Para calcular la suma, la dividimos en 2 sumas:

$$\begin{aligned} \sum_k \binom{n}{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil} x^k &= \sum_{k=2k_1} \binom{n}{\left\lceil \frac{2k_1}{2} \right\rceil} x^{2k_1} + \sum_{k=2k_2+1} \binom{n}{\left\lceil \frac{2k_2+1}{2} \right\rceil} x^{2k_2+1} \\ &= \sum_{k_1} \binom{n}{k_1} (x^2)^{k_1} + x\sum_{k_2} \binom{n}{k_2} (x^2)^{k_2} = (1+x^2)^n + x(1+x^2)^n \end{aligned}$$

Es decir, tenemos que:

$$\sum_k \binom{n}{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil} x^k = (1+x)(1+x^2)^n$$

Ejercicio 6: Prueba que:

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j} x^k = \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j} \quad para\, n \geq 0$$

Resolución: Si fijamos n y sea j la variable libre tenemos que:

$$f(j) = \sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j} x^k, \;\; g(j) = \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j}$$

Cuyas funciones generatrices son respectivamente:

$$F(y) = \sum_j y^j f(j), \quad G(y) = \sum_j y^j g(j)$$

Queremos probar que $F(y) = G(y)$, y tenemos que:

$$F(y) = \sum_j y^j \sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j} x^k = \sum_k \binom{n}{k} x^k \sum_j \binom{k}{j} y^j = \sum_k \binom{n}{k} x^k\,(1+y)^k$$

Por lo tanto, $F(y) = (1+x+xy)^n$. Por otro lado tenemos que:

$$G(y) = \sum_j y^j \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j} = \sum_j \binom{n}{j} (1+x)^{n-j} (xj)^j = (1+x+xy)^n$$

Por lo tanto, tenemos que $F(y) = G(y)$

Ejercicio 7: Sea a_n el número de formas diferentes de distribuir n bolígrafos para 5 estudiantes de manera que cada uno de los dos primeros estudiantes obtenga un número par de bolígrafos, y los tres últimos obtengan un número par de bolígrafos. Calcula la función generatriz para la sucesión $\{a_n\}_n$.

Resolución: El conjunto S_n de todas las distribuciones posibles de bolígrafos para n estudiantes puede ser representado como el conjunto de las sucesiones $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = n$ y $2 \nmid \alpha_1, 2 \nmid \alpha_2,\; 2|\alpha_3, 2|\alpha_4, 2|\alpha_5$.

Es decir,

$$S_n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) : \; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = n,\; 2 \nmid \alpha_1, 2 \nmid \alpha_2, 2|\alpha_3, 2|\alpha_4, 2|\alpha_5\}$$

Tenemos que $|S_n| = a_n$. Entonces tomamos:

$$T_n = \{(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5) : (2\delta_1 + 1) + (2\delta_2 + 1) + 2\delta_3 + 2\delta_4 + 2\delta_5 = n\}$$

Consideramos la función $h: S_n \longrightarrow T_n$ definida por:

$$h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \left(\frac{\alpha_1 - 1}{2}, \frac{\alpha_2 - 1}{2}, \frac{\alpha_3}{2}, \frac{\alpha_4}{2}, \frac{\alpha_5}{2}\right)$$

Claramente, h es una biyección, por tanto $|S_n| = |T_n|$. La función generatriz de la sucesión $|T_n|$ es:

$$F(X) = (X + X^3 + X^5 + \cdots)^2(1 + X + X^2 + X^3 + \cdots)^3$$

El cuál, podemos simplificar aún más, quedando:

$$F(X) = X^2(1 + X^2 + X^4 + \cdots)^5 = \frac{X^2}{(1 - X^2)^5}$$

Ejercicio 8: Sea a_n el número de formas diferentes que hay de que un número entero no negativo n pueda ser escrito como suma de diferentes enteros positivos. Calcula la función generatriz de la sucesión $\{a_n\}_n$.

Resolución: La función generatriz se puede escribir como:

$$F\ (X)\ =\ (1\ +\ X)\ \cdot\ (1\ +\ X^2)\ \cdot\ (1\ +\ X^3)\ \cdot\ (1\ +\ X^4)\ \cdots$$

Donde el producto de todos los términos se forma cuando el primer paréntesis aporta 1 ó X; el segundo contribuye 1 ó X^2 , tercero 1 ó X^3, etc. Cada término es de la forma $X^{\alpha 1} \cdot X^{\alpha 2} \cdot X$^$\alpha 3$ $\cdots$ donde $\alpha^i \in \{0, i\}$. El número de términos de la forma X^n es precisamente el número de secuencias $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ con suma igual a n tal que $\alpha^i \in \{0, i\}$.

Ejercicio 9: Encontrar el número de maneras en que 10 bolígrafos se pueden distribuir a 7 estudiantes de tal manera que los dos primeros estudiantes obtengan un número impar de bolígrafos cada uno, y todos los demás obtienen un número par de bolígrafos.

Resolución: El conjunto S_n de todas las distribuciones posibles de bolígrafos para n estudiantes puede ser representado como el conjunto de las sucesiones $(\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots\ , \alpha_7)$ tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7 = n$ y $2 \nmid \alpha_1, 2 \nmid \alpha_2,\ 2|\alpha_3, \ldots, 2|\alpha_7$.

Es decir,

$$S_n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7) :\ \alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_7 = n,\ 2 \nmid \alpha_1, 2 \nmid \alpha_2, 2|\alpha_3, \ldots, 2|\alpha_7\}$$

Tenemos que $|S_n| = a_n$. Entonces tomamos:

$$T_n = \{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_7) : (2\delta_1 + 1) + (2\delta_2 + 1) + 2\delta_3 + \cdots + 2\delta_7 = n\}$$

Consideramos la función $h: S_n \longrightarrow T_n$ definida por:

$$h(\alpha_1, \dots, \alpha_7) = \left(\frac{\alpha_1 - 1}{2}, \frac{\alpha_2 - 1}{2}, \frac{\alpha_3}{2}, \dots, \frac{\alpha_7}{2}\right)$$

Claramente, h es una biyección, por tanto $|S_n| = |T_n|$. La función generatriz de la sucesión $|T_n|$ es:

$$F(X) = (X + X^3 + X^5 + \cdots)^2 (1 + X + X^2 + X^3 + \cdots)^5$$

El cuál, podemos simplificar aún más, quedando:

$$F(X) = X^2(1 + X^2 + X^4 + \cdots)^7 = \frac{X^2}{(1 - X^2)^7} = X^2(1 - X^2)^{-7} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-7}{k} (-1)^k x^{2k+2}$$

El coeficiente de X^{10} corresponde para $k = 4$, y esto equivale a:

$$\binom{-7}{4} = \frac{(-7) \cdot (-8) \cdot (-9) \cdot (-10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$

Ejercicio 10: Sea S_n el número de formas diferentes de distribuir n bolígrafos idénticos para 5 estudiantes de manera que cada uno de los dos primeros estudiantes obtenga un número par de bolígrafos, y los tres últimos obtengan un número divisible por 3. Calcula $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{2^n}$.

Resolución: Sea S_n es el coeficiente de X^n en la expresión

$f(X) = (1 + X^2 + X^4 + \cdots)^2 \cdot (1 + X^3 + X^6 + X^9 + \cdots)^3 = (\frac{1}{(1-X^2)^2} \cdot (\frac{1}{(1-X^3)^3}$.

Por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4^2 8^3}{3^2 7^3} = \frac{2^{13}}{3^2 7^3}$

Ejercicio 11: Calcula la suma

$$\sum_k \binom{n + k}{m + 2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k + 1} \quad para\ m, n \geq 0$$

Resolución: Ya que hay bastantes métodos combinatorios elementales que no solucionan la suma de una manera efectiva, Y como n solo aparece una vez en la suma, es normal considerar como una función de n. Sea F(x) la función generatriz de la serie. Entonces tenemos que:

$$F(x)=\sum_n x^n \sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\,x^{-k}\sum_n \binom{n+k}{m+2k}x^{n+k}$$

$$=\sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\,x^{-k}\,\frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}}=\frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}}\sum_k \binom{2k}{k}\frac{1}{k+1}\left\{\frac{-x}{(1-x)^2}\right\}^k$$

$$=\frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\left\{1-\sqrt{1+\frac{4x}{(1-x)^2}}\right\}=\frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\left\{1-\frac{1+x}{1-x}\right\}=\frac{x^m}{(1-x)^m}$$

Esta es la función generatriz de la serie $\binom{n-1}{m-1}$. Por tanto, tenemos que:

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\binom{n-1}{m-1}$$

Ejercicio 12 (Moriati): Para dados n y p, calcula la suma:

$$\sum_k \binom{2n+1}{2p+2k+1}\binom{p+k}{k}$$

Resolución: Lo primero de todo vamos a llamar $r=p+k$. Si asumimos que n es la variable libre, entonces tenemos que la suma es igual a:

$$f(n)=\sum_r \binom{2n+1}{2r+1}\binom{r}{p}$$

Tomamos $F(x)=\sum_n x^{2n+1}f(n)$. Esto es algo normal, ya que el coeficiente binomial contiene el término 2n+1. Por tanto, ahora tenemos:

$$F(x)=\sum_n x^{2n+1}\sum_r \binom{2n+1}{2r+1}\binom{r}{p}=\sum_r \binom{r}{p}\sum_n \binom{2n+1}{2r+1}x^{2n+1}$$

Ya que

$$\sum_n \binom{2n+1}{2r+1}x^{2n+1}=\frac{x^{2r+1}}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{2r+2}}+\frac{1}{(1+x)^{2r+2}}\right)$$

tenemos que:

$$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1-x)^2}\sum_r \binom{r}{p}\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^r+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1+x)^2}\sum_r \binom{r}{p}\left(\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^r$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1-x)^2}\frac{\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^p}{\left(1-\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^{p+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1+x)^2}\frac{\left(\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^p}{\left(1-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^{p+1}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{2p+1}}{(1-2x)^{p+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{2p+1}}{(1+2x)^{p+1}} = \frac{x^{2p+1}}{2}((1+2x)^{-p-1} + (1-2x)^{-p-1})$$

Esto implica que:

$$f(n) = \frac{1}{2}\left(\binom{-p-1}{2n-2p}2^{2n-2p} + \binom{-p-1}{2n-2p}2^{2n-2p}\right)$$

Es decir,

$$f(n) = \binom{2n-p}{2n-2p}2^{2n-2p}$$

Ejercicio 13: Calcula la suma:

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{3k}$$

Resolución: Lo primero de todo vamos a definir la función generatriz:

$$F(x) = \sum_k \binom{n}{3k} x^{3k}$$

Por tanto, la suma pedida será f(-1). La dificultad ahora es cómo omitir todos los términos excepto los de orden 3k en la fórmula binomial. Para ello vamos a usar la siguiente identidad para la suma de raíces de la unidad en el plano complejo:

$$\sum_{\varepsilon^r=1} \varepsilon^n \begin{cases} r, & r|n \\ 0, & otros\ casos \end{cases}$$

Sea $C(x) = (1+x)^n$ y sean $1, \varepsilon\ y\ \varepsilon^2$ las raíces cúbicas de 1. Entonces tenemos:

$$F(x) = \frac{C(x) + C(\epsilon x) + C(\varepsilon^2 x)}{3}$$

Que para x=-1 nos da:

$$F(-1) = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

Y por tanto, después de simplificar tenemos que:

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{3k} = 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

APLICACIONES

APLICACIONES:

<u>Aplicación 1:</u> Sean a y b números naturales. Queremos estimar la cantidad de divisores necesarios para calcular el máximo común divisor entre a y b mediante el algoritmo de Euclides.

Lema 1: Sean $a \leq b$ números naturales. Consideramos que el algoritmo de Euclides siempre comienza dividiendo el mayor número por el menor. Si $F_n \leq a \leq F_{n+1}$ (donde F_i es el i-ésimo número de Fibonacci), la cantidad de divisores necesaria para efectuar el algoritmo de Euclides está acotada por n.

Demostración: Lo demostraremos por inducción en n. Si $n = 1$ ó $n = 2$ el resultado es obvio. Supongamos $n > 2$. Como $F_n \leq a < F_{n+1}$, el resto r de la división de b por a es menor que F_{n+1}. Pueden darse dos casos:

1. $r < f_n$ en cuyo caso el algoritmo de Euclides entre a y r involucra a lo sumo n-1 divisiones (por hipótesis inductiva) y por lo tanto, entre a y b involucra a lo sumo n divisiones como queríamos demostrar.
2. $F_n \leq r < a < F_{n+1}$. En este caso, el siguiente paso será dividir a a por r. Si llamamos q al cociente y r' al resto, tenemos que:

$$r' = a - r \times q \leq a - r < F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$$

Por tanto, el algoritmo de Euclides entre r y r' involucra a lo sumo n-2 divisores (por hipótesis inductiva) y por lo tanto, entre a y b involucra a lo sumo n divisores como queríamos demostrar.

Proposición 2: Sean $a \leq b$ números naturales. El número de divisores necesarios para calcular el máximo común divisor entre a y b por medio del Algoritmo de Euclides está acotado por $5(D + 1)$, donde D es la cantidad de cifras del desarrollo decimal de a.

Demostración: Usando el Lema anterior, si queremos estimar el número de divisiones necesarias, deberíamos encontrar todos los n tales que $F_n \leq a$. Usando la fórmula general de los números de Fibonacci tenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \leq a$$

Y esto implica que:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - 1 < a$$

Con lo cual $\quad a\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < \log_{10}\left(\sqrt{5}(a+1)\right) < \log_{10}(a) + 1$

Y por tanto $\quad n < 5(\log_{10} a + 1)$

Notar que $\log_{10} a$ es la cantidad de cifras del desarrollo decimal de a.

Aplicación 2:

A continuación vamos a dar unos ejemplos del poder de las funciones generatrices, probando congruencias a través de los números combinatorios. Una congruencia entre dos funciones generatrices significa que hay congruencias entre cada par de los correspondientes coeficientes.

Ejemplo 1: Números de Stirling de primer tipo

Definición 1: Dado el grupo de permutaciones S_n sobre un conjunto de n elementos, se podría plantear la cuestión de cuántas permutaciones se pueden descomponer exactamente en k ciclos triviales y no triviales. A este número $\boldsymbol{S_1(n,k)}$ **ó** $\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{k}\end{bmatrix}$ así definido lo llamaremos Número de Stirling de primera clase.

Ejemplo:

A título de ejemplo vemos para n=3, es decir, si tenemos 3 elementos, calcular el número de ciclos de k elementos diferentes que hay:

$$S_1(3,1) = \{(1\ 2\ 3)\}\ y\ \{(1\ 3\ 2)\}$$

$$S_1(3,2) = \{(1\ 2)(3)\}, \{(1\ 3)(2)\}\ y\ \{(2\ 3)(1)\}$$

$$S_1(3,3) = \{(1)(2)(3)\}$$

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	2	3	1					
4	0	6	11	6	1				
5	0	24	50	35	10	1			
6	0	120	274	225	85	15	1		
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

(Primeros números de Stirling de 1ª clase)

La propiedad fundamental de estos números, y que permite generarlos en una tabla, es la siguiente:

$$S_1(n,k) \;=\; (n-1) \times S_1(n-1,k) + S_1(n-1,k-1)$$

Conocemos que los números de Stirling de primer tipo $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ tienen la función generatriz:

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$$

Queremos encontrar el criterio para decidir la uniformidad y rareza de estos números, que cuentan el número de permutaciones de n elementos con k ciclos disjuntos. Si tomamos la anterior expresión módulo 2, tenemos que:

$$\textstyle\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \equiv x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) \qquad (mod\ 2) = x^{\left[{n \atop 2}\right]}(x+1)^{\left[{n \atop 2}\right]}$$

Ahora sacamos los coeficientes de x^k en ambos lados, y tenemos que:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \equiv [x^k]x^{\left[\frac{n}{2}\right]}(x+1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \qquad (mod\ 2)$$

$$= \left[x^{k-\left[\frac{n}{2}\right]}\right](1+x)^{\left[\frac{n}{2}\right]} = \binom{\left[\frac{n}{2}\right]}{k-\left[\frac{n}{2}\right]}$$

Teorema 1: Los números de Stirling $\left[{n \atop k}\right]$ tienen la misma paridad que el coeficiente del binomio $\binom{\left[\frac{n}{2}\right]}{k-\left[\frac{n}{2}\right]}$. En particular, $\left[{n \atop k}\right]$ es un número si $k < \left[\frac{n}{2}\right]$

Ejemplo 2: Los otros números de Stirling (de segundo tipo)

Definición 2: Es interesante preguntarse cuántas particiones distintas de k subconjuntos se pueden definir en un conjunto de n elementos. El resultado se denomina como número de Stirling de segunda clase y lo representaremos por $\boldsymbol{S_2(n,k)}$ ó $\left\{{n \atop k}\right\}$.

La propiedad que permite generar estos números es:

$$S_2(n,k) \;=\; r \cdot S_1(n-1,k) + S_1(n-1,k-1)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

(Primeros números de Stirling de 2ª clase)

En este caso, los números de Stirling de segunda clase, los $\left\{{n \atop k}\right\}$, que cuentan las formas de dividir un conjunto de n elementos en k partes, se expresan a través de las funciones generatrices de la forma:

$$\sum_n \left\{ {n \atop k} \right\} x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}$$

De nuevo, tomamos la ecuación módulo 2 obteniendo que:

$$\sum_n \left\{ {n \atop k} \right\} x^n \equiv \frac{x^k}{(1-x)^{\left[\frac{k}{2}\right]}} \quad (mod\ 2) = x^k \sum_h \binom{\left[\frac{k}{2}\right] + h - 1}{h} x^h$$

Si ahora tomamos el coeficiente de x^n tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2: Los números de Stirling $\left\{ {n \atop k} \right\}$ tienen la misma paridad que el coeficiente del binomio:

$$\binom{\left[\frac{k}{2}\right] + n - k - 1}{n-k}$$

Aplicación 3:

Las funciones generatrices hallan promedios, medias, etc.

El poder de las series de funciones generatrices nos resulta muy útil para calcular derivaciones estándar, y otros resultados de distribuciones como mínimos.

Suponemos que $f(n)$ es el número de objetos de una cierta colección S de N objetos, que tienen exactamente n propiedades, para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ con $\sum_n f(n) = N$. ¿Cuál es el promedio/media del número de propiedades que un objeto en S tiene? Es obvio que:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_n n f(n) \qquad (1)$$

Suponemos que tenemos la suerte de tener el opuesto de la serie $\{f(n)\}$, llamamos $F(x) \overset{op\,x}{\longleftrightarrow} \{f(n)\}$. ¿Será conveniente expresar μ de (1) en términos de F? Por supuesto. Evidentemente, $\mu = F'(1)/F(1)$. Por lo que las medias pueden calcularse directamente a través de las funciones generatrices.

Vamos con el siguiente momento, la derivación normal σ, de la distribución. Esta está definida de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{\omega \in S} (n(\omega) - \mu)^2 \qquad (2)$$

Donde ω representa un objeto del conjunto S, y $n(\omega)$ es el número de propiedades que ω tiene. Se conoce σ^2, como lo varianza de la distribución, es por lo tanto el cuadrado de la media de la diferencia entre el número de propiedades que cada objeto tiene y el cuadrado del número de propiedades de μ.

Cada uno de los f(n)objetos ω que tienen exactamente n propiedades contribuirá $(n-\mu)^2$ de la suma en (2), es por eso que:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_n (n-\mu)^2 f(n) = \frac{1}{N}\sum_n (n^2 - 2\mu n + \mu^2) f(n) =$$

$$= \frac{1}{N}\{(xD)^2 - 2\mu(xD) + \mu^2\}F(x)|_{x=1} = \frac{F''(1) + (1-2\mu)F'(1) + \mu^2 F(1)}{F(1)} = \tag{3}$$

$$= \frac{F''(1)}{F(1)} + \frac{F'(1)}{F(1)} - \left(\frac{F'(1)}{F(1)}\right)^2 = \{(\log F)' + (\log F)''\}_{x=1}$$

Así que la varianza de la distribución puede ser calculada en términos de los valores de F y de las dos primeras derivadas en x=1 como se acaba de probar.

Vamos a trabajar este resultado con las familias exponenciales. En una familia exponencial F, ¿Cuál es el número medio, $\mu(n)$, de cartas en una mano de carga/peso n?

Si $h(n,k)$ es el número de manos de carga n que tienen k cartas, entonces la media es:

$$\mu(n) = \frac{1}{h(n)}\sum_k k h(n,k) \tag{4}$$

Ahora si nosotros comenzamos con la fórmula exponencial tenemos:

$$\sum_{n,k} h(n,k)\frac{x^n}{n!}y^k = e^{yD(x)}$$

Y ahora aplicando el operador $\partial/\partial y$ y haciendo $y = 1$ tenemos como resultado:

$$\sum_n \frac{x^n}{n!}\sum_k k h(n,k) = D(x)e^{D(x)} = D(x)H(x) \tag{5}$$

Teorema 3:

En una familia exponencial F, el número de cartas en mano de peso n es:

$$\mu(n) = \left[\frac{h(n)x^n}{n!}\right] D(x)H(x) = \frac{1}{h(n)}\sum_r \binom{n}{r} d_r h(n-r)$$

CONCLUSIÓN.

Como conclusión podemos decir que las funciones generatrices se pueden emplear para:

- Encontrar una solución en forma cerrada para una sucesión dada una relación de recurrencia. A modo de ejemplo, los números de Fibonacci.
- Encontrar relaciones de recurrencia para sucesiones, en este caso la forma de una función generadora puede sugerir una fórmula de recurrencia.
- Encontrar relaciones entre sucesiones, en este caso si las funciones generadoras de dos sucesiones tienen una forma similar, entonces las propias sucesiones probablemente están relacionadas.
- Explorar el comportamiento asintótico de las sucesiones.
- Evaluar en algunos casos sumas infinitas.
- Demostrar identidades que implican sucesiones.
- Resolver problemas de enumeración en combinatoria.

BIBLIOGRAFÍA. REFERENCIAS WEB:

1. B. Kisacanin. “Mathematical problems and proofs. Combinatorics, number theory, and geometry”. Kluwer, 2002.

2. Pablo Soberón Bravo. “Problem-solving methods in combinatorics. An approach to Olympiad Problems”. Birkhauser, 2013.

3. Santiago Álvarez Areces, Manuel Fernández Flórez. “2000 Problemas de matemáticas”. Ed. Everest, 2002.

4. M. Becheanu. ”International Mathematical Olympiads. 1959–2000”. Academic Distributiion Center, 2001.

5. S. Lang, Algebra 3rd. ed., Springer, 2002.

6. https://www.math.upenn.edu/~wilf/gfology2.pdf

7. http://www.cs.elte.hu/~csiki/generating_functions_Novakovic.pdf

8. http://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2014/Combinatoria.pdf

9. http://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2004/100MDSucesiones-PB.pdf

10. https://www.artofproblemsolving.com/community/c6t29821f6h1297686_generating_functions

11. https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/capitulo10.pdf

12. http://www.iesxunqueira1.com/Departamentos/Documentos/funcionesgeneratrices.pdf

13. http://www.imomath.com/index.php?options=353&lmm=1