PROBLEMAS DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS SOBRE PROBABILIDAD

Marta Fernández Rodríguez

Máster Interuniversitario en Matemáticas
Universidad de Granada
Granada. 2017

Trabajo Fin de Máster

PROBLEMAS DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS SOBRE PROBABILIDAD

MARTA FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ

DIRECCIÓN: PROF. DR. D. PASCUAL JARA MARTÍNEZ

Máster Interuniversitario de Matemáticas
Universidad de Granada
Granada, 2017

INTRODUCCIÓN

Las Olimpiadas Matemáticas son competiciones, en el área de las Matemáticas escolares, con las que se busca motivar en Matemáticas, a través de la resolución de problemas. Estos problemas no son los problemas usuales tratados en el aula y, aunque en su resolución se usen los conocimientos escolares estándar, la principal característica que se persigue en el proceso de resolución es el estímulo del razonamiento, la imaginación, la intuición geométrica, etc. Son muchos los temas que el olímpico debe usar en este proceso de resolución, con la restricción de que la base teórica de la misma debería limitarse a los contenidos de los *curricula* de la enseñanza secundaria.

Las Olimpíadas Matemáticas tiene su origen en los comienzos del siglo XX, siendo sus máximos exponentes los países del Este de Europa. Ya en la segunda parte de la década de los 60, concretamente en 1967, se unen a las mismas algunos países occidentales, y posteriormente lo hace España.

En España y bajo el patrocinio de la Real Sociedad Matemática Española (R.S.M.E), se viene celebrando desde 1964, la Olimpíada Matemática Española, dirigida a los alumnos de Bachillerato; en las últimas ediciones, la OME ha servido de prueba de selección del alumnado español participante en la Olimpíada Matemática Internacional.

En la escuela primaria este tipo de competiciones no se había organizado nunca, hasta que la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (S.A.E.M. Thales) puso en marcha la primera edición de la Olimpíada Matemática Thales, con el propósito fundamental de eliminar la mala imagen de difícil, terrorífica e inaccesible de las Matemáticas que los alumnos de este nivel y gran parte de la sociedad civil, en general, han mantenido siempre. La Olimpíada Matemática Thales está dirigida a alumnos y alumnas de segundo curso de E.S.O.

Tal vez es Paul Halmos, uno de los más importantes matemáticos del siglo XX, quien pone de manifiesto la motivación esencial para el matemático moderno. Halmos escribió en su famoso artículo El corazón de la matemática: "*La principal razón de existir del matemático es resolver problemas, y por lo tanto en lo que realmente consiste las matemáticas es en problemas y soluciones*".

En este Trabajo de Fin de Máster voy a realizar una síntesis de aquellos resultados que he considerado importantes relacionados con combinatoria y el cálculo de probabilidades.

Tras un desarrollo teórico, se relaciona una serie de problemas que ha aparecido en las diversas competiciones de las Olimpiadas Matemáticas: locales, nacionales e internacionales, así como otros problemas que no han aparecido pero que podrían servir como preparación para estas. Todos los problemas planteados tienen como eje central combinatoria y el cálculo de probabilidades. La dificultad de estos problemas es distinta en cada una de las competiciones, por lo que los hemos clasificado atendiendo a la misma.

La memoria está organizada en dos partes. La primera incluye a los capítulos I-IV, y trata de los resultados teóricos que el alumno debería conocer; la segunda trata del análisis y resolución de problemas que han ido apareciendo o están relacionados con las Olimpiadas. En la preparación de estos nos hemos encontrado con la dificultad de que en las diversas competiciones que hemos considerado no aparecen muchos problemas que traten sobre probabilidad, por lo que el número es escaso; por otro lado, señalar que en algunas competiciones sí hemos encontrado algunos problemas más, pero de nivel demasiado elemental como para ser incluidos en esta memoria.

El capítulo V trata de problemas para el nivel de preparación básica, mientras que el VI está dedicada a problemas más avanzados. El capítulo VII incluye algunos problemas más complejos. Por último señalar que la clasificación hecha es subjetiva; otra persona, bajo los mismos principios, organizaría el material en una forma totalmente diferente.

Índice general

Capítulo I

COMBINATORIA

1. NOCIONES ELEMENTALES DE COMBINATORIA

El análisis combinatorio se ocupa de la ordenación y agrupación de los objetos de un conjunto. Es una parte de las Matemáticas que trata de las técnicas para contar y es muy usada en el Cálculo de Probabilidades. En este sentido nos facilitará métodos útiles para determinar el número de resultados posibles de un experimento.

El punto de partida es el "**principio de multiplicación**", que nos dice que si un proceso puede hacerse de m formas distintas y otro puede hacerse de n formas distintas, entonces los dos procesos pueden hacerse de mn formas distintas. Para que el principio de multiplicación funcione, no debe haber ninguna relación entre los procesos.

Ejemplo. 1.1.
¿Cuántos números de dos cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar y la segunda sea diferente de la primera?

La primera cifra puede seleccionarse de 5 maneras diferentes, a saber 1,3,5,7 ó 9. Una vez seleccionada la primera, la segunda cifra puede ser cualquier dígito excepto el escogido en primer lugar, es decir que hay 9 maneras de seleccionar la segunda cifra. Por el principio de multiplicación, la respuesta es $5 \times 9 = 45$.

El principio de multiplicación vale en realidad para cualquier número de selecciones consecutivas; es decir: si una primera selección puede realizarse de n_1 maneras, una segunda selección puede realizarse de n_2 maneras, ..., y una k-ésima selección puede realizarse de n_k maneras, entonces el conjunto de k selecciones puede realizarse de $n_1 n_2 \cdots n_k$ maneras.

Veamos a continuación las formulas combinatorias:

VARIACIONES SIN REPETICIÓN

Se llaman **variaciones sin repetición** de n elementos tomados en grupos de m, a cada uno de los subconjuntos de m elementos que se pueden formar con los n elementos dados, teniendo en cuenta el orden. (Importa el orden y no se pueden repetir).

$$V_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

Ejemplo. 1.2.
Sea un conjunto formado por las letras a, b, c. ¿Cuántos grupos de 2 letras se pueden obtener, sin repetir los elementos, teniendo en cuenta el orden?

$$V_3^2 = 3 \times (3-2+1) = 3 \times 2 = 6.$$
$$\{a, b, c\} \to (a, b), (b, c), (b, a), (c, a), (a, c) \to 6$$

VARIACIONES CON REPETICIÓN

Se llama **variaciones con repetición** de n elementos tomados en grupos de m, a cada uno de los subconjuntos de m elementos que se pueden formar con los n elementos, teniendo en cuenta el orden. Es el mismo concepto anterior pero pudiendo repetir los elementos que intervienen en el grupo.

$$VR_n^m = n^m.$$

Siguiendo con el ejemplo anterior, ¿Cuántos grupos de 2 letras se pueden obtener, repitiendo los elementos, teniendo en cuenta el orden?

$$V_3^2 = 3^2 = 9.$$

$$\{a, b, c\} \to (a, b), (b, c), (b, a), (c, b), (c, a), (a, c), (a, a), (c, c) \to 9$$

PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN

Se llama **permutaciones** de n elementos a las variaciones sin repetición en las que el número de elementos coincide con el número de grupo. (Importa el orden y no se pueden repetir).

$$P_n = V_m^n = n!$$

Siguiendo con el ejemplo, ¿Cuántos grupos de 3 letras se pueden obtener, sin repetir los elementos, teniendo en cuenta el orden?

$$P_3 = 3! = 3 * 2 * 1 = 6.$$
$$\{a, b, c\} \to (a, b, c), (b, c, a), (c, b, a), (a, c, b), (b, c, a), (c, a, b) \to 6$$

COMBINACIONES SIN REPETICIÓN

Se llama **combinaciones sin repetición** de n elementos tomados en grupos de m, a cada uno de los subconjuntos de m elementos que se pueden formar con los n elementos, sin tener en cuenta el orden. (No importa el orden ni se pueden repetir). El número de éstas lo representamos por $\binom{m}{n}$.

Para cada combinación de n elementos tomamos de a m, formemos las $m!$ permutaciones posibles con sus elementos. De este modo se obtendrán variaciones de n elementos tomamos de a m. Todas las variaciones formadas serán distintas, pues si provienen de combinaciones distintas difieren en algún elemento, y si provienen de la misma difieren en el orden de los elementos. Además es evidente que se obtendrán todas las variaciones de los n elementos tomados de m en m. Puesto que cada una de las $\binom{n}{m}$ origina $m!$ variaciones, resulta que $\binom{n}{m}m! = n(n-1)\cdots(n-m+1)$ y por tanto

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}.$$

Siguiendo con el primer ejemplo, tenemos:

$$C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\{a, b, c\} \to (a, b), (a, c), (b, c) \to 3$$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Se llama **combinaciones con repetición** de n elementos tomados en grupos de m, a cada uno de los subconjuntos de m elementos que se pueden formar con los n elementos, sin tener en cuenta el orden. (No importa el orden pero se pueden repetir).

$$CR_n^m = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

y por último, terminando el ejemplo tenemos:

$$CR_3^2 = \binom{2+3-1}{2} = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = \frac{24}{4} = 6.$$

$$\{a, b, c\} \to (a, b), (a, c), (b, c), (a, a), (b, b), (c, c) \to 6$$

Ejercicio. 1.3.
¿De cuántas formas se pueden elegir un comité de 3 personas de un grupo de 20? ¿Y de cuántas si uno debe ser el presidente, otro el vicepresidente y el tercero el secretario?

SOLUCIÓN. Empecemos resolviendo la segunda pregunta, el presidente podemos elegirlo primero de 20 formas distintas. Una vez elegido el presidente quedan 19 personas para elegir el vicepresidente y por último, quedan 18 personas para elegir al secretario. En total, hay $20 \times 19 \times 18 = 6840$ posibilidades. Esto es lo que hemos llamado variaciones sin repetición de 20 elementos tomados de

3 en 3, y se representa V_{20}^{3}. (Se llaman variaciones sin repetición porque se supone que una persona no puede ocupar dos cargos).

Para responder a la primera pregunta, tengamos en cuenta que cada posibilidad, PVS, de presidente, vicepresidente y secretario, elegida anteriormente, prescindiendo de los cargos, da lugar a seis posibilidades que la primera pregunta considera iguales: PVS, PSV, VPS, SPV y SVP. Por tanto resultan sólo $\frac{6840}{6} = 1140$ formas de elegir tres personas para un comité. $\square$

Capítulo II

CONCEPTOS Y RESULTADOS BÁSICOS

2. EXPERIMENTOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL

EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Un **experimento aleatorio** es aquel puede dar lugar a varios resultados sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cual de estos va a ser observado tras la realización del experimento.

Al describir un experimento aleatorio es esencial especificar qué aspecto del resultado interesa observar, es decir, cuál es el criterio para considerar dos resultados como diferentes. Esta especificación se logra mediante el espacio muestral.

ESPACIO MUESTRAL

Llamamos **espacio muestral** al conjunto de todos los resultados posibles que se pueden dar en un experimento aleatorio. Normalmente, lo denotamos por Ω.

TIPOS DE ESPACIOS MUESTRALES

Atendiendo al número de resultados posibles de un experimento aleatorio se pueden establecer los siguientes tipos de espacios muestrales:

- Espacios muestrales finitos: Son aquellos que tienen un número finito de elementos, como puede ser la tirada de un dado.
- Espacios muestrales infinitos numerables: Son aquellos en los que Ω tiene un número infinito de elementos y puede ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales, como puede ser el número de automóviles que pueden pasar por el puente de peaje.
- Espacios muestrales infinitos no numerables: Son aquellos en los que Ω tiene un número infinito de elementos y no puede ponerse en correspondencia con los números naturales, como puede ser la elección al azar de un número en el intervalo $[0,1]$.

EJEMPLOS DE ESPACIOS MUESTRALES

- En el lanzamiento de un dado se puede tomar como espacio muestral $\Omega = 1,2,3,4,5,6$.
- En el caso de elegir al azar un número real en el intervalo $[0,1]$, el espacio muestral asociado es $\Omega = [0,1]$
- Consideremos el experimento aleatorio consistente en extraer una bola al azar de una urna compuesta por tres bolas rojas, dos blancas y una verde. Podemos considerar como espacio muestral

  $$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$

  en donde $\omega_1 =$ bola roja, $\omega_2 =$ bola blanca, y $\omega_3 =$ bola verde, aunque también podríamos haber considerado como espacio muestral el conjunto

  $$\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\right\},$$

  en donde $\omega_i =$ bola roja, para $i = 1,2,3$; $\omega_i =$ bola blanca, para $i = 4,5$, y $\omega_6 =$ bola verde, haciendo las bolas distinguibles.

3. SUCESOS

Llamamos **suceso** a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral. Existen diferentes tipos de sucesos.

TIPOS DE SUCESOS

- Suceso elemental, es aquel que está formado por un único resultado del experimento.
- Suceso compuesto, es aquel que está formado por más de un resultado del experimento aleatorio.
- Suceso seguro, es aquel que se verifica siempre al realizar el experimento aleatorio. Esta formado por todos los resultados posibles de experimentos y por tanto coincide con el espacio muestral.
- Suceso Imposible, es aquel que nunca se verifica. Se representa con el símbolo del conjunto vacío ϕ
- Suceso contrario o complementario: dos sucesos son contrarios o complementarios si la verificación de uno implica la no verificación del otro. El contrario de A se representa por $\overline{A}$.

  El suceso complementario del suceso imposible es el suceso seguro, que es precisamente el espacio muestral $\overline{\phi} = \Omega$.
- Sucesos incompatibles son aquellos que no se pueden verificar simultáneamente.

OPERACIONES CON SUCESOS

INCLUSIÓN

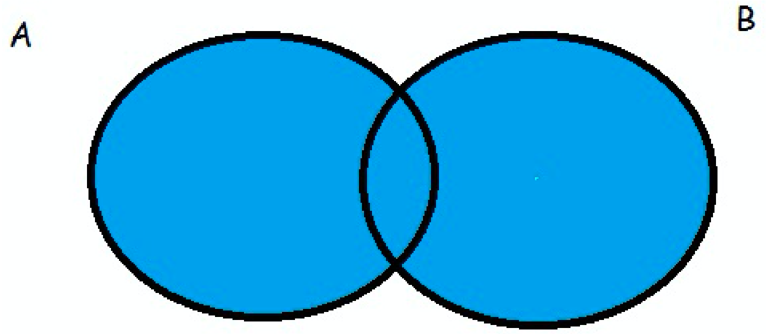
Un suceso A esta **incluido** o **contenido** en otro suceso B, si todo suceso elemental de A pertenece también a B. Se representa $A \subseteq B$.

IGUALDAD DE SUCESOS

Dos sucesos son **iguales** A y B, si están formados por los mismos sucesos elementales. Se representa por $A = B$.

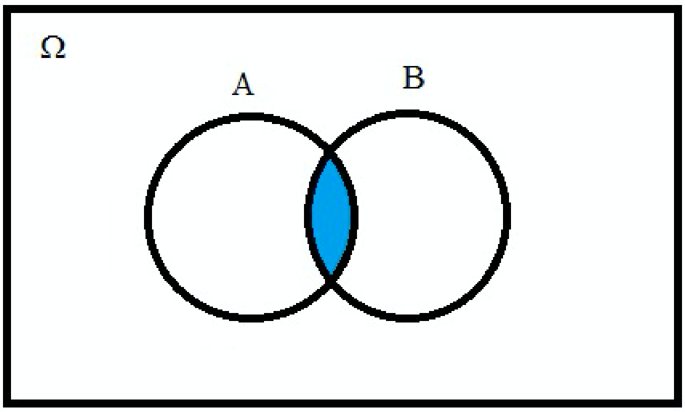
UNIÓN

Dados dos sucesos A y B, el suceso **unión**, $A \cup B$, es aquel que se verifica si lo hacen al menos uno de los dos sucesos A ó B.

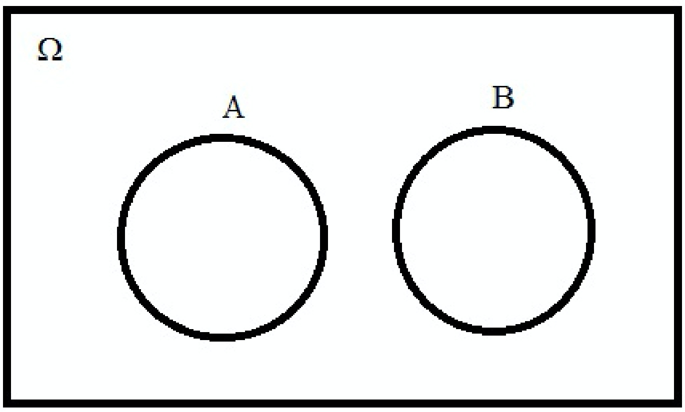


INTERSECCIÓN

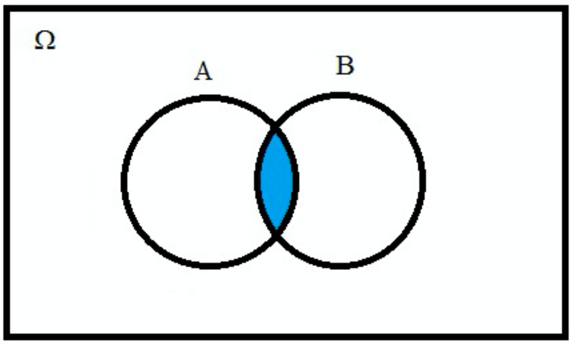
Dados dos sucesos A y B, el suceso **intersección**, $A \cap B$, es aquel que se verifica si lo hacen A y B al mismo tiempo.



- Si $A \cap B = \phi$, entonces A y B son incompatibles.

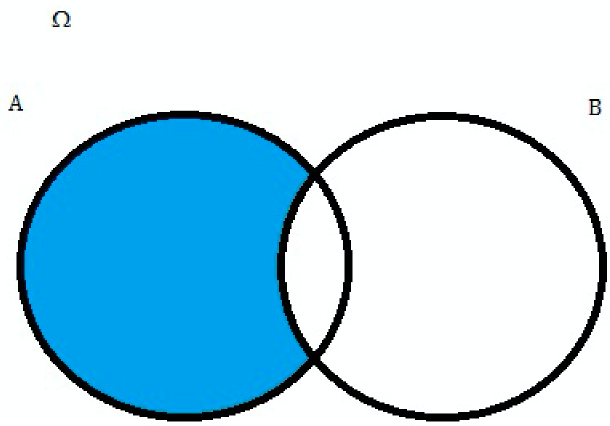


- Si $A \cap B \neq \phi$, entonces A y B son compatibles.



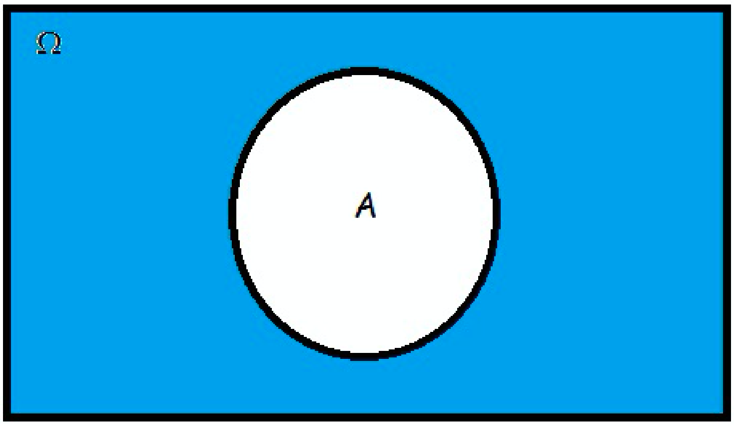
DIFERENCIA

Llamamos suceso **diferencia** de A menos B al suceso formado por todos los elementos de A que no están en B, y se denota por $C = A \backslash B$; esto es, el suceso C ocurre si ocurre A y no ocurre B. Se observa que $C = A \setminus B = A \cap \overline{B}$.



COMPLEMENTARIOS O CONTRARIOS

Dado un suceso cualquiera A de un experimento aleatorio, llamaremos suceso **contrario** o **complementario** de A al suceso que se verifica cuando no se verifica A. Se representa por, $\overline{A}$ ó A^C.



PROPIEDADES:

1. $A \cap \overline{A} = \Omega$.
2. $A \cap \overline{A} = \phi$.
3. $\overline{\Omega} = \phi$.
4. $\overline{\phi} = \Omega$.

4. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON SUCESOS

PROPIEDADES	UNIÓN	INTERSECCIÓN
Asociativa	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
Conmutativa	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
Idempotente	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
Simplificativa	$A\cup(A\cap B)=A$	$A\cap(A\cup B)=A$
Absorción	$A\cup\Omega=\Omega$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
Elemento Neutro	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap\Omega=A$
Complementación	$A\cup A^C=\Omega$	$A\cap A^C=\varnothing$
Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Leyes de de Morgan	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Ejemplo. 4.1.
En el experimento E="lanzar un dado al aire", consideramos los sucesos:

A, "sacar un número par"
$B=\{1,2,3,5\}$, "obtener un 1, 2, 3 ó 5".
$C=\{4,6\}$, "Obtener un 4 ó un 6"
$D=\{2,6\}$, "Obtener un 2 ó un 6"
$F=\{1,3\}$, "Obtener un 1 ó un 3"
G, "obtener un múltiplo de 3"

- A y D no son sucesos iguales al no estar formados por los mismos sucesos elementales.
- C está contenido en A. Luego $C\cap A=C$, puesto que siempre que ocurre el suceso C (sacar 4 ó 6) ocurre el suceso A, puesto que se obtiene un número par.
- B y C son incompatibles, ya que $B\cap C=\phi$ y complementarios, al cumplirse $B\cup C=E$ y $B\cap C=\phi$.
- $A\cup B=$ "Sacar un número par" $\cup\{1,2,3,5\}=\{1,2,3,4,5,6\}=E$, pero no son complementarios.
- $A\cap G=\{2,4,6\}\cap\{3,6\}=\{6\}$, es decir, el suceso intersección de los sucesos "sacar un número par" y "obtener un múltiplo de tres" es "sacar un 6".
- $B\setminus D=B\cap\overline{D}=\{1,2,3,5\}\cap\{1,3,4,5\}=\{1,3,5\}=$ "obtener un número impar" $=\overline{A}$.
- C y F son incompatibles puesto que $C\cap F=\phi$.

Ejercicio. 4.2.
Sea X un conjunto finito y sean A y B subconjuntos de X. Pruebe que $|A\cap B|\geq|A|+|B|-|X|$.

SOLUCIÓN. Como $A \cup B \subset X$ se tiene

$$|X| \geq |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

de donde

$$|A \cap B| \geq |A| + |B| - |X|.$$

□

Capítulo III

PROBABILIDAD

5. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

Cuando repetimos un experimento aleatorio muchas veces, la frecuencia relativa $P(A) = \dfrac{n_A}{n}$, de un suceso A tiende a aproximarse a un valor fijo, ese valor se define como **probabilidad** del suceso A, donde,

n_A es el número de veces que ocurre el suceso A, y
$n =$ es el número de veces que se hace el experimento.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

Consideremos un experimento aleatorio del espacio muestral Ω. Se llama **probabilidad** a una función $P : \Omega \to \mathbb{R}$, $A \mapsto P(A)$, y que cumple los siguientes axiomas:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$ para cualquier suceso A.
(2) $P(\phi) = 0$ y $P(\Omega) = 1$.
(3) Si A y B son dos sucesos incompatibles, es decir, $A \cap B = \phi$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

PROPIEDADES

Además de los axiomas, y como consecuencia de ellos, se verifican las siguientes propiedades:

(1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Demostración. Se tiene $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = P(\overline{A}) + P(A) = 1$, entonces $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. □

(2) $P(\phi) = 0$.

Demostración. Se tiene $P(\phi) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$. □

(3) Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $A \subseteq B$, entonces $B = A \cup (B - A)$ con $A \cap (B - A) = \phi$. Por tanto $P(B) = P(A) + P(B - A)$ con $P(B - A) \geq 0$, con lo cual $P(B) \geq P(A)$. □

4. Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son incompatibles dos a dos, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

6. $P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

DEMOSTRACIÓN. Se tiene $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, entonces $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, y por tanto $P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. □

5. Si A y B son dos sucesos compatibles

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A, B, y C son sucesos compatibles dos a dos, se tiene:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, y por tanto

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(b) - P(A \cap B).$$

□

7. Si el espacio muestral Ω es finito y $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ un suceso, entonces:

$$P(A) = P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_n).$$

6. REGLA DE LAPLACE

Sea $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Si todos los sucesos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son equiprobables, es decir con la misma probabilidad, entonces, la **regla de Laplace** nos dice que la probabilidad de cualquier suceso A del espacio muestral es

$$P(A) = \frac{N^o \text{ de casos favorables a que ocurra } A}{N^o \text{ total de casos posibles}}.$$

NOTA.

Es muy importante que los sucesos del espacio muestral sean equiprobables, ya que si se aplica en casos en que no lo sea, el resultado es erróneo.

EJERCICIOS

Ejercicio. 6.1.
Si escogemos al azar dos números de teléfono y observamos la última cifra de cada uno, determina las probabilidades siguientes.

(1) Que las dos cifras sean iguales.
(2) Que su suma sea 11.

SOLUCIÓN. (1). El espacio muestral de este experimento está formado por los cien sucesos elementales:

$$00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, \dots, 98, 99$$

.

Los casos favorables son: $00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$.

La probabilidad de que las últimas cifras sean iguales es:

$$\text{P(últimas cifras iguales)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

(2). Los casos favorables a que la suma de las últimas cifras sea 11 son: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 y 92.

$$\text{P(últimas cifras suman once)} = \frac{8}{100} = 0,08.$$

□

Ejercicio. 6.2.
Un cartero reparte al azar tres cartas entre tres destinatarios. Calcula la probabilidad de que al menos una de las cartas llegue a su destino correcto.

SOLUCIÓN. Hay seis formas de hacer el reparto: , donde por ejemplo, xyz, indica que al primer destinatario se le ha entregado la carta del destinatario x, al segundo la del destinatario y al tercero la del destinatario z. El número de cartas que llegan al destinatario correcto es, respectivamente, 3, 1, 1, 0, 0, 1. Vemos que en 4 de los seis casos posibles hay al menos una carta que llega a su destino correcto. Por tanto, $p = \frac{2}{3}$. □

Capítulo IV

PROBABILIDAD CONDICIONADA. PROBABILIDAD COMPUESTA

En determinados experimentos aleatorios, hay sucesos que, de alguna forma, condicionan a otros que se realicen a posteriori. Este tipo de situaciones da lugar a experimentos compuestos y a la llamada **probabilidad condicionada**.

DEFINICIÓN.

Consideremos un experimento aleatorio, llamamos suceso A **condicionado** a B al suceso A/B que ocurre cuando ocurre A sabiendo que ha ocurrido ya B, cuya probabilidad viene dada por la expresión,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) > 0,$$

y se llama probabilidad de A **condicionada** a B.

NOTA.

Obsérvese que, de la definición anterior, sin más que despejar obtenemos la expresión:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B).$$

Esta expresión es de enorme utilidad.

DEFINICIÓN.

Un experimento aleatorio se llama **compuesto** cuando está formado por varios experimentos aleatorios simples.

7. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS

DEFINICIÓN.

Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio se dice que los sucesos A y B son **independientes** si el resultado de A no influye nada en el de B y viceversa. En caso contrario, se llaman **dependientes**.

NOTA.

Es evidente, que dos sucesos son independientes cuando se verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes.

(a) $P(A/B) = P(A)$.
(b) $P(B/A) = P(B)$.
(c) $P(A \cap B) = P(B)$.

EJERCICIOS

Ejercicio. 7.1.
Demostrar que si los sucesos A y B son independientes, entonces sus complementarios también son independientes.

SOLUCIÓN. Como A y B son independientes entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, y se tiene:

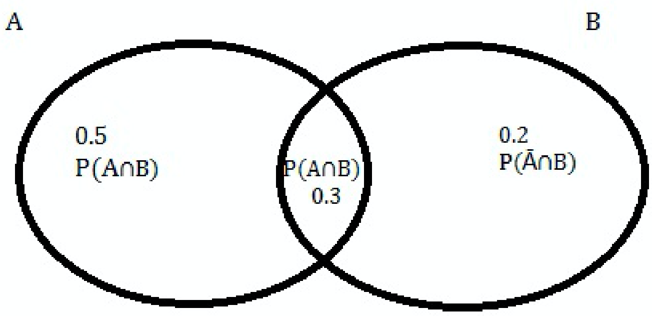
$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ &= [1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)] \\ &= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \end{aligned}$$

Por tanto $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$, y los sucesos son independientes. □

Ejercicio. 7.2.
Sean A y B sucesos tales que $P(A \cup B) = P(\Omega = 1$, $P(A) = 0,8$, y $P(B) = 0,5$. Calcular

(1) $P(A \cap B)$.
(2) $P(A \cup \overline{B})$.
(3) $P(\overline{A} \cup B)$.
(4) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

SOLUCIÓN. Tenemos $P(A \cup B) = P(\Omega) = 1 = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, por tanto $1 = 0,8 + 0,5 - P(A \cap B)$. Entonces $P(A \cap B) = 0,8 + 0,5 - 1 = 0,3$.
De la misma forma se tiene $P(A \cup \overline{B}) = P(A) = 0,8$, $P(\overline{A} \cup B) = P(B) = 0,5$, y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,3 = 0,7$.



$\square$

NOTA.
Como $P(A \cup B) = \Omega$ se tiene $\begin{cases} P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) = 0,5 \\ P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) = 0,2 \end{cases}$.

Ejercicio. 7.3.
Sean tres sucesos incompatibles A, B y C, donde $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,25$ y $P(C) = 0,2$. Calcular

(1) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.
(2) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.
(3) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.
(4) $P(B - A)$.
(5) La probabilidad de que ocurra exactamente uno de los sucesos.

SOLUCIÓN. Se sabe que al ser los sucesos A, B y C incompatibles

$$P(A \cap B) = 0, \qquad P(A \cap C) = 0, \qquad P(B \cap C) = 0 \quad \text{y} \quad P(A \cap B \cap C) = 0.$$

(1). De otra parte,

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] \\
&= P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C),
\end{aligned}$$

con lo que

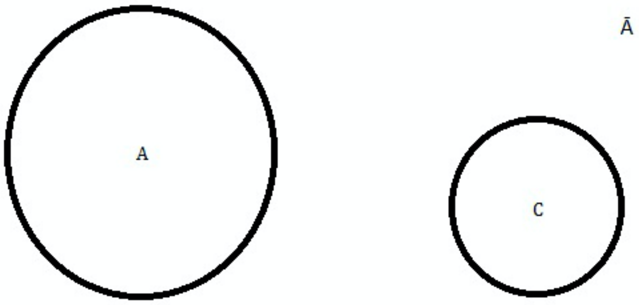
$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)] = 1-0,5-0,25 = 0,25.$$

(2). $P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) = P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1-P(A\cup B\cup C) = 1-[P(A)+P(B)+P(C)] = 1-(0,5+0,25+0,2) = 0,05$.

(3). $C\subset\overline{A} \Rightarrow P(\overline{A}\cap C) = P(C) = 0,2$.

(4). $C\subset\overline{B} \Rightarrow P(\overline{B}\cap C) = P(C) = 0,2$.

(5). $P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C) = P(C) = 0,2$.



$P(B-A) = P(B\cap\overline{A}) = P(B) = 0,25$

$P[(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)] = P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})+P(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})+P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C) = P(A)+P(B)+P(C) = 0,5+0,25+0,2 = 0,95$. □

8. PROBABILIDAD TOTAL

DEFINICIÓN.

Sea Ω el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Se dice que un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ forma un **sistema completo de sucesos** si cumple las dos condiciones siguientes:

(1) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

(2) $A_i \cap A_j = \phi$ para todo par con $i \neq j$.

Teorema. 8.1. (TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL)
Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos asociados a un experimento aleatorio del espacio muestral Ω. Para cualquier suceso B se cumple la siguiente igualdad

$$P(B) = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2) + \cdots + P(B/A_n) \times P(A_n)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B/A_i).$$

Esta identidad es una de las expresiones más útiles y nos permitirá resolver multitud de situaciones, además es la base con la que se demuestra el teorema de Bayes.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, $B = B \cap \Omega$, y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, por tanto

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i).$$

Los sucesos $\{B \cap A_i\}_i$ son disjuntos por serlo los sucesos $\{A_i\}_i$, resulta, por tanto:

$$P(B) = P\left[B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \right] = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i) \right] = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i).$$

Como $P(B/A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)}$, entonces $P(B \cap A_i) = P(A_i) \times P(B/A_i)$ para todo i. Sustituyendo se tiene

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B/A_i)$$

para todo i. $\square$

9. PROBABILIDAD A POSTERIORI. TEOREMA DE BAYES

En muchas ocasiones hemos de determinar probabilidades de sucesos que condicionan a otros de los que conocemos la probabilidad.

Básicamente, desconocemos probabilidades de sucesos que, en la mayoría de los casos han ocurrido antes conociendo lo que ha ocurrido después, es decir, nos preguntan probabilidades "del pasado" conociendo las que ocurren en un experimento posterior, por eso se llaman probabilidades a posteriori.

Teorema. 9.1. (TEOREMA DE BAYES)
Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos asociados a un experimento aleatorio de espacio muestral Ω. Para cualquier suceso B con probabilidad no nula, se cumple

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \times P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \times P(A_i)}{P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2) + \cdots + P(B/A_n) \times P(A_n)}.$$

Equivalentemente,

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j) \times P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B/A_i)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Se tiene $P(A_j/B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$ y $P(B/A_j) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(A_j)}$, por tanto $P(A_j \cap B) = P(A_j) \times P(B/A_j)$, y se tiene,

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \times P(B/A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \times P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B/A_i)}.$$

□

EJERCICIOS

Ejercicio. 9.2.
Sean A, B y C tres sucesos tales que $A \cap B = \phi$. Demostrar que

$$P[(A \cup B)/C] = P(A/C) + P(B/C).$$

SOLUCIÓN. Se tiene

$$\begin{aligned} P[(A\cup B)/C] &= \tfrac{P[(A\cup B)\cap C]}{P(C)} \\ &= \tfrac{P[(A\cap C)\cup(B\cap C)]}{P(C)} \\ &= \tfrac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(C)} \\ &= \tfrac{P(A\cap C)+P(B\cap C)}{P(C)} \\ &= \tfrac{P(A\cap C)}{C} + \tfrac{P(B\cap C)}{P(C)} \\ &= P(A/B)+P(B/C). \end{aligned}$$

□

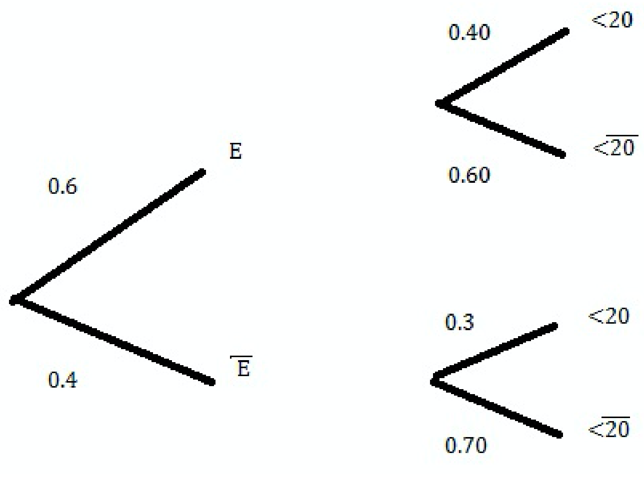
Ejercicio. 9.3.
El 60 % de las personas que visitan un museo durante el mes de mayo eran españoles. De éstos el 40 % eran menores de 20 años. En cambio, de los que no eran españoles, tenían menos de 20 años el 30 % . Calcular:

(1) La probabilidad de que un visitante elegido al azar tenga menos de 20 años.
(2) La probabilidad de que sea español sabiendo que tiene menos de 20 años.

SOLUCIÓN. (1). Definimos los sucesos:
E="ser visitante español en el museo el mes de mayo" y
<20="tener menos de 20 años".

Se tiene

$$P(<20) = P(E)\times P(<20/E) + P(\overline{E})\times P(<20/\overline{E}) = 0,6\times 0,4 + 0,4\times 0,3 = 0,36.$$



(2). La probabilidad pedida es:

$$P(E/<20) = \frac{P(E\cap <20)}{P(<20)} = \frac{0,6\times 0,4}{0,36} = \frac{0,24}{0,36} = 0,666 = 0,\widehat{6}.$$

□

Ejercicio. 9.4.
Un banco ha estimado, por experiencias anteriores, que la probabilidad de que una persona falle en los pagos de un préstamo personal es de 0,3. También ha estimado que el 40 % de los préstamos no pagados a tiempo se han hecho para financiar viajes de vacaciones y 60 % de los prestamos pagados a tiempo se han hecho para financiar viajes de vacaciones. Se pide:

(1) *Calcular la probabilidad de que un préstamo que se haga para financiar viaje de vacaciones no se pague a tiempo.*
(2) *Calcula la probabilidad de que si el préstamo que se hace para propósitos distintos a viajes de vacaciones sea pagado a tiempo.*

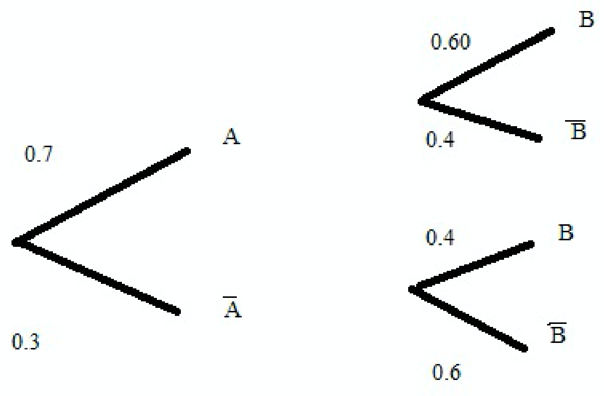
SOLUCIÓN. (1). Definimos los sucesos:
A="préstamo personal pagado a tiempo" y
B="financiar viaje vacaciones".

Se tiene:

$$P(\overline{A}) = 0{,}3, \qquad P(B/\overline{A}) = 0{,}4, \qquad P(B/A) = 0{,}6.$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,4} = 0,22.$$



(2). La probabilidad pedida es:

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,7 * 0,4}{0,7 * 0,4 + 0,3 * 0,6} = 0,608.$$

□

Capítulo V

OLIMPIADAS LOCALES

10. Problemas

Problema. 10.1. (Andalucía 1999)
Antonio, Enrique, Luisa, Pedro, Diego, María y Bernardo son amigos y forman la plantilla de un equipo de baloncesto. Para formar un equipo, el entrenador ha de elegir 5 jugadores de la plantilla.

(1) ¿Cuántos equipos distintos podrá formar si incluye a los dos chicas?
(2) ¿Y si incluye solamente a una chica?
(3) ¿Y si no incluye a ninguna?
(4) Teniendo en cuenta las respuestas anteriores, di cuántos equipos distintos podría formar el entrenador.

SOLUCIÓN. (1). Vamos a considerar que dos equipos son diferentes sólo si cambia algún jugador, sin considerar las diferentes alineaciones.

Si las dos chicas forman parte del equipo, sólo tenemos que elegir 3 de entre los 5 chicos. Si los numeramos del 1 al 5, tenemos:

$$(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5),$$

nos salen 10 equipos.

(2). Representamos a las chicas con A y B. Si la elegida es A, tenemos que elegir 4 de entre los 5 chicos:

$$(1,2,3,4),(1,2,3,5),(1,2,4,5),(1,3,4,5),(2,3,4,5).$$

Luego obtenemos 5 equipos.

Si hacemos lo mismo con B, tenemos otros 5 equipos. En total nos salen 10 equipos.

(3). Si sólo lo forman chicos, hay una sola posibilidad: (1,2,3,4,5).

(4). Por tanto, en total podemos formar 10+10+1=21 equipos

Otra forma más rápida es aplicando el cálculo combinatorio. Cuando los equipos incluyen a los dos chicas tenemos

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

Cuando se incluye solo a una chica tenemos

$$2.C_5^4 = 2\binom{5}{4} = 2\frac{5!}{4!1!} = 2\frac{5}{1} = 10.$$

Si no incluye a ninguna chica tendríamos

$$C_5^5 = 1.$$

□

Problema. 10.2. (Andalucía 1999)
En una carrera de cien metros lisos participan cinco atletas y se conceden tres medallas: una de oro, otra de plata y una tercera de bronce para primero, segundo y tercer clasificado, respectivamente. Si no se tiene en cuenta cómo llegan a la meta el resto de participantes, ¿Cuántos resultados distintos puede tener la carrera?

SOLUCIÓN. Numeramos los atletas del 1 al 5.
Medalla de oro: cualquiera de los cinco: 1, 2, 3, 4, 5. Tenemos 5 formas.
Medalla de plata:

- Si ganó el 1 $\Rightarrow$ 2 ó 3 ó 4 ó 5.
- Si ganó el 2 $\Rightarrow$ 1 ó 3 ó 4 ó 5.
- si ganó el 3 $\Rightarrow$ 1 ó 2 ó 4 ó 5.
- Si ganó el 4 $\Rightarrow$ 1 ó 2 ó 3 ó 5.
- si ganó el 5 $\Rightarrow$ 1 ó 2 ó 3 ó 4.

Es decir, por cada posición en la medalla de oro, tenemos 4 posibilidades, esto es, 20 formas para repartir oro y plata.

Medalla de bronce: Supongamos una de las 20 anteriores, por ejemplo $\begin{pmatrix} \text{oro} & \text{plata} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

El tercer lugar puede ser para 3 ó 4 ó 5, es decir, 3 posibilidades nuevas. Como tenemos 20 para (oro, plata) y por cada una 3, saldrá un total de $20 \times 3 = 60$ posibilidades de adjuntar las medallas.
Aplicando el cálculo combinatorio, el problema es muy sencillo. Se trata de las variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3:

$$V_{5,3} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

□

Problema. 10.3. (PROBLEMA PREPARACIÓN)
Seis amigos tienen 100 euros. Determinar el número de formas distintas en las que pueden repartirse el dinero (cada uno obtiene una cantidad entera de euros) en cada uno de los siguientes supuestos independientes:

(1) Se admite que algunos de ellos reciban 0 euros.
(2) Todos tienen que recibir al menos un euro

SOLUCIÓN. Este problema es un problema clásico de combinaciones con repetición. Encontrar una forma de repartir 100 euros entre 6 personas es equivalente a encontrar una forma de elegir 5 elementos de un conjunto de 105 y, por tanto, el número buscado son las combinaciones de 105 elementos tomados de 5 en 5, es decir,

$$\binom{105}{5} = \frac{105 \cdot 104 \cdot 103 \cdot 102 \cdot 101}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 v 1} = 96560646.$$

Pongamos 105 elementos en fila y elijamos 5, que separan a los 100 restantes en 6 conjuntos. Empezando en orden por un extremo, a cada uno de los 6 amigos, que hemos ordenado previamente, le damos tantos euros como elementos tenga el conjunto que le toque. Así obtenemos todas las formas de repartir los euros, luego éste es el número buscado (observa que dos de estos 5 elementos que hemos destacado pueden ser consecutivos, lo que quiere decir que el conjunto que queda entre los dos tiene cero elementos).

Para el apartado (2) se pueden tomar dos caminos. La primera opción es calcular el número de formas de repartir en las que alguno haya recibido cero euros y restárselo al número calculado anteriormente. La segunda opción es repartir previamente un euro a cada amigo y luego calcular el número de formas de repartir los 94 restantes. En vista del apartado anterior, el número es:

$$\binom{99}{5} = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 71523144.$$

□

Problema. 10.4. (ENERO 2004)
Halla el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos rellenar para asegurar que obtenemos al menos cinco aciertos en una de ellas.

SOLUCIÓN. Con tres apuestas nos aseguramos un mínimo de cinco aciertos: basta rellenar una apuesta con todo 1, otra con todo X y otra con todo 2 (como hay 14 partidos excluyendo el pleno al

15, habrá al menos cinco que repiten $1, X$ ó 2). Es obvio que con menos de 3 no se puede (de hecho, con menos de tres apuestas, siempre puede ocurrir que no tengamos ningún acierto). □

Problema. 10.5. (ENERO 2002)
En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar?

SOLUCIÓN. Hay $\binom{11}{6} = 462$ elecciones posibles.

La suma de los números de las camisetas de los elegidos será impar si hay entre ellos una cantidad impar de números impares.

Veamos los casos favorables, hay 6 números impares y 5 pares.

- 1 camiseta impar y 5 pares $\binom{6}{1}\binom{5}{5} = 6 \cdot 1 = 6$.
- 3 camisetas impares y 3 pares $\binom{6}{3}\binom{5}{1} = 20 \cdot 10 = 200$.
- 5 camisetas impares y 1 par $\binom{6}{5}\binom{5}{1} = 6 \cdot 5 = 30$.

La probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar sería

$$\frac{6+200+30}{\binom{11}{6}} = \frac{236}{462} = \frac{118}{231}.$$

□

Problema. 10.6. (ALBACETE 1998)
Cuando nos cruzamos casualmente en la calle con dos de las hermanas García, en uno de cada dos casos ambas tiene los ojos azules. ¿Puedes determinar en número de hermanas García y cuántas de ellas tienen los ojos azules?

SOLUCIÓN. Si el número de hermanas fuera 2 ó 3, no se cumple que al salir por parejas en la mitad de los casos tengan ambas los ojos azules.

Por el contrario, esto sí se verifica en el caso de 4 hermanas, de las cuales 3 si tienen los ojos azules y una no.

Sean A_1, A_2, A_3 las que tienen ojos azules y $\overline{A_4}$ la que no los tiene así.
Las posibles parejas serán:

$$A_1A_2, \quad A_1A_3, \quad A_1\overline{A_4}, \quad A_2A_3, \qquad A_2\overline{A_4} \quad A_3\overline{A_4}.$$

De estas parejas la mitad tiene los ojos azules. □

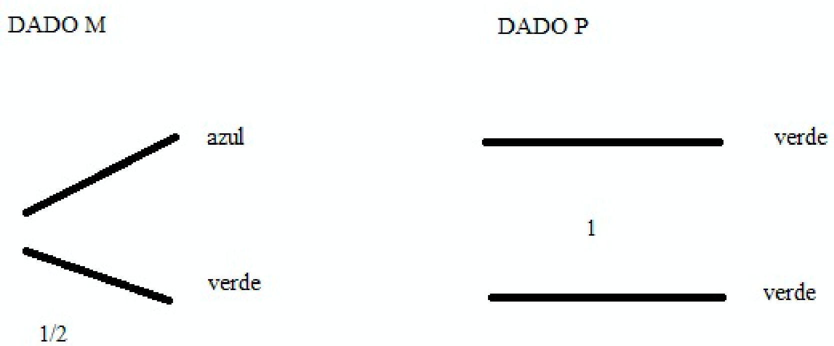
Problema. 10.7. (ARAGÓN 1998. FASE FINAL)
Tenemos tres dados con las caras pintadas: uno con tres caras azules y 3 caras verdes, otro con 2 caras azules y 4 verdes y el tercero con todas las caras verdes. El juego consiste en lanzar dos dados (uno tú y otro yo), si las caras son del mismo color ganas tu y si salen de distinto color gano yo. Si yo elijo para lanzar el dado de las tres caras verdes y tres caras azules, ¿Qué dado elegirías tu?

SOLUCIÓN. Sea M el dado con 3 caras azules y 3 verdes, N el de dos azules y 4 verdes y P el de todas las caras verdes.
Analicemos qué sucede si juegan los dados M y N.
La probabilidad de que los dos sean del mismo color es

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{2}.$$

Si utilizamos los dados M y P, entonces: la probabilidad de que los dos sean del mismo color es

$$\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

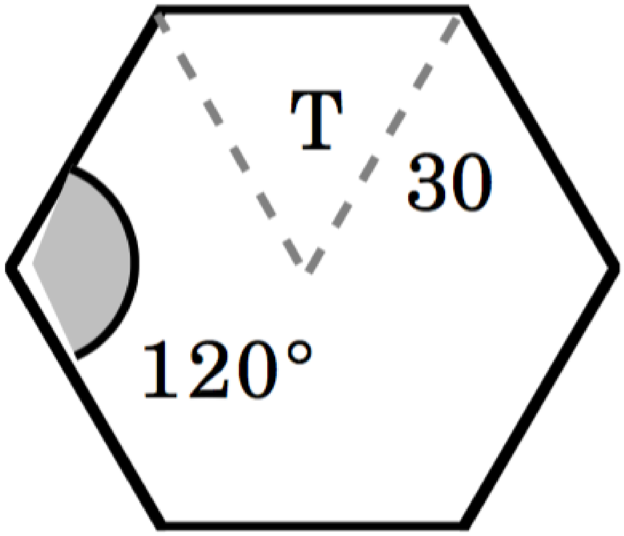


Coincide con la anterior, luego da igual jugar con la pareja M, N que con la pareja M, P. □

Problema. 10.8. (ZAMORA 1998. FASE FINAL)
Disponemos de un recinto en forma de hexágono regular de 30 metros de lado, en cuyos vértices existen piscinas con forma de sector circular de 10 metros de radio. Si unos paracaidistas caen aleatoriamente dentro del recinto,

(1) ¿Cuál es la probabilidad de que no caigan en el agua?
(2) ¿Cuál es la probabilidad de que se mojen al caer en alguna de dichas piscinas?
(3) ¿Cuál es la probabilidad de que caigan con un pie en cada piscina?

SOLUCIÓN. (1). El hexágono se compone de 6 triángulos equiláteros, T, de lado 30 metros.



Las piscinas son sectores de 120Âž, un tercio de círculo, y 10 metros de radio.
Área del hexágono $= 6T = 6\frac{30^2\sqrt{30}}{4} = 1350\sqrt{3}m^2$.
Área de un sector $frac13\pi 10^2 = \frac{100\pi}{3}m^2$.
Las probabilidades que se calculan se refieren a un solo paracaidista.
Probabilidad de no caer en el agua

$$\frac{\text{área del hexágono–área de 6 sectores}}{\text{área del hexágono}} = \frac{1350\sqrt{3} - 200\pi}{1350\sqrt{3}} = 0,73.$$

(2). La probabilidad de caer en alguna de las piscinas es $1 -$ la probabilidad de no caer en el agua

$$1 - 0,73 = 0,27.$$

(3). La probabilidad de caer con un pie en cada piscina es 0, es un caso imposible, ya que la mínima distancia entre dos piscinas es 10 metros. □

Problema. 10.9.
En una determinada región del país se sabe por experiencia que la probabilidad de seleccionar a un adulto mayor de 40 años con cancer es de $0,05$.

La probabilidad de que un médico diagnostique correctamente a una persona con cáncer con tener la enfermedad es $0,78$ *y la probabilidad de diagnosticar incorrectamente a una persona sin cáncer que tenga la enfermedad es de* $0,06$. *¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea diagnosticada con cáncer?*

SOLUCIÓN. Aparentemente la respuesta sería 0,05 porque habla de la probabilidad de que una persona tenga un cáncer, pero no es esa la probabilidad.

Vamos aplicar el Teorema de la Probabilidad Total.

C denota el caso en que una persona tiene cáncer entonces obviamente C y $\overline{C}$ forman una partición, podemos encontrar la probabilidad de que alguien es diagnosticado con cáncer.

Llamamos $D =$ "diagnosticado con cáncer". Entonces

$$P(D) = P(D/C) \cdot P(C) + P(D/\overline{C}) \cdot P(\overline{C}) = 0,78 \times 0,05 + 0,06 \times (1 - 0,05) = 0,96.$$

□

Problema. 10.10.
Tomás y Nico arrojan 7 veces una moneda. Si sale cara gana Tomás, si sale cruz gana Nico. Cada vez que se arroja la moneda, el perdedor le paga al ganador. La primera vez un euro, la segunda dos euros, la tercera cuatro euros, y así siguiendo, cada vez el perdedor paga el doble de lo que pagó el perdedor en la vez anterior. Si Nico comenzó con 87 euros y terminó con 187 euros. ¿Cuántas veces ganó Nico?

SOLUCIÓN. La secuencia de euros a pagar es $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$.

Notemos que en cada jugada se gana más de lo que se podría ganar en todas las jugadas anteriores juntas.

Lo máximo a ganar es

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127.$$

De este modo, ya que Nico debe tener al final 100 euros más de los que tenía al inicio, está obligado a ganar el último y el penúltimo lanzamiento, con los que acumula 96 euros. Entre las primeras 5 jugadas debe acumular 4 euros más.

Si Tomás ganara la quinta jugada, recibiría 16 euros, más de lo que Nico acumularía en las primeras cuatro jugadas, 15 euros. Entonces Nico también estaría obligado a ganar la quinta jugada, acumulando 112 euros . Para perder los 12 euros extra en las primeras cuatro tiradas, tendría que perder la cuarta jugada, de lo contrario acumularía más euros. Entonces tendría 104 euros, de los que debería perder 4 en las primeras tres jugadas. Si pierde la tercera jugada, tendría exactamente 100 euros, pero todavía habría que ver que ocurre con las primeras dos jugadas. Gane o no en cualquiera de ellas siempre tendrá más de 100 o menos de 100 euros. Así, es imposible que Nico se quede con 100 euros más de los que tenía. □

Capítulo VI

PROBLEMAS PARA LAS OLIMPIADAS NACIONALES

11. Problemas

Problema. 11.1. (PROBLEMA. PREPARACIÓN)
Tiramos consecutivamente tres dados y formamos con ellos un número A de tres cifras (la primera tirada nos da las centenas de A, la segunda las decenas y la tercera las unidades). Repetimos el proceso obteniendo otro número B de tres cifras. Calcular la probabilidad de que $A > B$.

SOLUCIÓN. Como cada dado se tira con independencia de los demás, es fácil, darse cuenta de que hay el mismo número de posibles casos en que $A > B$ y en que $B > A$, es decir, estos dos sucesos tienen la misma probabilidad p. Por tanto, si llamamos q a la probabilidad de que $A = B$, tendremos que $2p + q = 1$ ya que ha de ocurrir alguno de los tres sucesos.

Ahora bien, una vez que hemos tirado los tres primeros dados, si queremos que ocurra $A = B$, tendremos que obtener en la cuarta tirada el mismo resultado que en la primera (probabilidad $\frac{1}{6}$), en la quinta lo mismo que en la segunda (probabilidad $\frac{1}{6}$) y en la sexta lo mismo que en la tercera (probabilidad $\frac{1}{6}$). Esto nos dice que $q = \frac{1}{6^3}$, de donde podemos despejar

$$p = \frac{1-q}{2} = \frac{1-\frac{1}{6^3}}{2} = \frac{6^3-1}{2\cdot 6^3} = \frac{215}{432}.$$

$\square$

Problema. 11.2. (PROBLEMA.PREPARACIÓN:)
¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número al azar entre 1000 y 9999 el producto de sus cifras sea múltiplo de 3? ¿y si sabemos que el número es par?

SOLUCIÓN. Vamos a calcular la probabilidad de que el producto de las cifras no sea múltiplo de 3, es decir, de que ninguna de las cifras sea múltiplo de 3. La probabilidad de que la cifra de los millares no sea múltiplo de 3 es igual $\frac{2}{3}$ ya que hay seis elecciones $\{1,2,4,5,7,8\}$ que no son múltiplos de 3 de nueve candidatos posibles. No obstante, para las cifras de las centenas, decenas y unidades la probabilidad se reduce a $\frac{3}{5}$ ya que también cabe la posibilidad de que tomen el valor 0, tenemos $\{0,1,2,4,5,8\}$ y hay 6 elecciones de 10, $\frac{3}{5}$. Como la elección de los distintos dígitos es independiente, la probabilidad de que el producto de las cifras no sea múltiplo de 3 es igual a producto de las probabilidades:

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{125}.$$

La probabilidad de que dicho producto sí sea múltiplo de 3 es la complementaria $1-\frac{18}{125}=\frac{107}{125}$, que es el número buscado.

Saber que el número es par afecta al comportamiento de la cifra de las unidades, pero esto no cambia el resultado, ya que la probabilidad de que la cifra de las unidades no sea múltiplo de 3 sigue siendo $\frac{3}{5}$ (hay cinco dígitos posibles $\{0,2,4,6,8\}$, dos de los cuales son múltiplos de 3). Por tanto, la probabilidad pedida en el caso de que el número se sabe par, es también igual a $\frac{107}{125}$. □

Problema. 11.3. (FASE NACIONAL 1999)
Se meten en un saco 900 tarjetas numeradas del 100 al 999. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar del saco, para asegurarnos que al menos en tres tarjetas la suma de los dígitos del número escrito es la misma?

SOLUCIÓN. La suma mínima corresponde al número 100 y la máxima al número 999. Por lo tanto, las sumas varían entre 1 y 27 y hacen un total de 27 sumas distintas, pero las sumas 1 y 27 sólo se tienen en las tarjetas correspondientes a 100 y 999, respectivamente. En consecuencia, el mayor número de tarjetas posible sin tener de igual suma es 52 (una por cada tarjeta 100 y 999 y dos que corresponden a cada suma entre 2 y 26). De esto deducimos que si tomamos 53 tarjetas cualesquiera, siempre habrá tres que tengan la misma suma. □

Problema. 11.4. (PROBLEMA.PREPARACIÓN:)
José Antonio es el profesor de Matemáticas y quiere que cada día salgan a la pizarra el mismo número de niños que de niñas. Para ello, ha pensado en construir una ruleta en la que si sale el color rojo salga a la pizarra uno de los niños y sale verde salga una de las niñas. Si en la clase hay 20 niñas y 10 niños, ¿Cómo debería ser la ruleta para que haya la misma probabilidad de salir niño o niña?

SOLUCIÓN.

- Caso A. Si lo que se quiere es la misma probabilidad, basta con marcar media ruleta roja y media verde.
- Caso B. Si queremos que todos los alumnos queden representados manteniendo igual probabilidad para ambos sexos, podemos proceder de la siguiente manera: dividimos la ruleta en 40 partes iguales y les asignamos un número del 1 al 40.

Los pares representan a cada una de las niñas (todos en verde); los impares los apareamos, de la siguiente forma:

$$(1,21),(3,23),(5,25),\dots,(19,39).$$

Cada par es un mismo niño (todos rojos). Con esta distribución tenemos:

$$P(\text{niña}) = \tfrac{20}{40} = \tfrac{1}{2},$$

$$P(\text{niño}) = \tfrac{20}{40} = \tfrac{20}{40}$$

Luego se tiene:

$$P((\text{una niña determinada}) = \tfrac{1}{40},$$

$$P((\text{un niño determinado}) = \tfrac{2}{40} = \tfrac{2}{40} = \tfrac{1}{20}.$$

□

Problema. 11.5. (PROBLEMA.PREPARACIÓN:)
Hallar el número de formas de ordenar los números $1,2,\dots,n$ que no dejan fijo a ninguno de los números, es decir, el número k no está en el k-ésimo lugar de la ordenación. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una ordenación al azar, la elegida no deje fijo a ningún elemento?

SOLUCIÓN. Vamos a usar el principio de inclusión–exclusión para resolver este problema. El número total de ordenaciones (biyecciones) de los números $\{1,2,\dots,n\}$ es $n!$ De éstas, dado $k \in \{1,\dots,n\}$, hay $(n-1)!$ que dejan fijo a k y, en general, dados r elementos de $\{1,\ldots,n\}$ hay $(n-r)!$ permutaciones que los dejan fijos. Por tanto, dicho principio nos dice que el número de aplicaciones que no dejan fijo a ningún elemento es

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

La probabilidad de que al elegir una ordenación al azar, ésta no deje fijo ningún elemento es dividir el número anterior entre el número total de permutaciones, que es $n!$, luego es simplemente eliminar el factor $n!$ en el miembro de la derecha de la igualdad anterior.

$$\frac{n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

□

Problema. 11.6. (PROBLEMA.PREPARACIÓN)
Consideremos un polígono convexo de n lados y supongamos que no tiene tres diagonales que se corten en el mismo punto. Calcular en función n el número de puntos interiores al polígono que son corte de dos diagonales.

SOLUCIÓN. Si nos fijamos en uno de estos puntos, observamos que las diagonales que se cortan en él provienen de cuatro vértices distintos, y que cuatro vértices distintos determinan exactamente dos diagonales que se cortan en un punto interior. Por tanto, habrá tantos puntos interiores como conjuntos de cuatro vértices podamos hacer, es decir,

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^4-6n^3+11n^2-6}{24}.$$

□

La Olimpíada Juvenil de Matemáticas (OJM) se realizó en Venezuela por la asociación Venezolana de Competencias Matemáticas. Es una actividad educativa anual donde los alumnos disfrutan compitiendo sin presión de calificaciones y es un estímulo para incorporarse al grupo de los mejores estudiantes de matemáticas.

Problema. 11.7. (*PROBLEMA, OJM 2013*)
Una pulga se halla en el suelo, al pie de una escalera de 30 escalones. La pulga sólo puede dar saltos de 3 escalones hacia arriba o de 4 escalones hacia abajo. ¿De cuántas maneras puede subir hasta el escalón 22 en el menor número de saltos?

SOLUCIÓN. Ascendiendo sólo llega a los escalones múltiplos de 3. Si desciende una vez sólo llega a los escalones de la forma $3n-4=3(n-2)+2$. Así nunca llegará al 22 pues 22 deja resto 1 al dividirlo entre 3. Usando dos descensos sí puede llegar, si asciende 10 veces: $10\times 3-2\times 4=22$. Si usa más descensos debe aumentar también el número de ascensos y por lo tanto el número total de pasos.

Ahora se trata de contar las posibles ubicaciones de los dos saltos descendentes, entre los 12 saltos. Como ni el primer salto ni el segundo pueden ser descendentes, los dos descendentes se ubican entre los 10 últimos.

Hay $\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!8!}=\frac{90}{2}=45$ maneras de escogerlos, pero como el tercer y cuarto salto no pueden ser ambos descendentes quedan $45-1=44$ posibilidades. Todas ellas son realizables, ya que hacia arriba se llega a lo sumo al escalón $10\times 3=30$, el primer salto descendente está precedido de al menos tres ascendentes (y $3+3+3-4-4\geq 1$).

Luego el número de maneras en los que puede subir es:

$$\binom{10}{2}-1=\frac{10!}{2!8!}-1=\frac{90}{2}-1=45-1=44.$$

$\square$

Capítulo VII

PROBLEMAS PARA LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES

12. Problemas

Problema. 12.1. (*AIME 1983*)
Veinticinco caballeros están sentados alrededor de la mesa del rey Arturo. Tres de ellos son escogidos al azar, de manera equiprobable, para ir a enfrentarse a un dragón. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de los tres escogidos sean vecinos en la mesa?

SOLUCIÓN. Se pueden escoger 3 de los 25 de $\binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{6} = 25 \cdot 4 \cdot 23 = 2300$ maneras. Las ternas que cumplen la condición son de dos tipos:

- Las de 3 caballeros sentados en puestos consecutivos, que son 25.
- Las compuestas por dos caballeros sentados juntos y un tercero separado de ellos. Las parejas de vecinos se pueden escoger de 25 maneras, y una vez escogidos quedan 21 posibilidad para el tercero. Luego hay $25 \cdot 21 = 525$ ternas de este tipo.

En total hay $25 + 25 \cdot 21 = 25 \cdot 22$ ternas que cumplen la condición. La probabilidad buscada es entonces $\frac{25 \cdot 22}{25 \cdot 4 \cdot 23} = \frac{11}{46}$. □

Problema. 12.2. (*AIME 1990*)
Cinco equipos juegan un torneo de béisbol. Cada equipo juega exactamente una vez contra cada uno de los demás. Si cada equipo tiene probabilidad 1/2 de ganar cada juego en que interviene, ¿Cuál es la probabilidad de que al final del torneo cada equipo haya ganado al menos un juego y perdido al menos un juego?

SOLUCIÓN. Hay $\binom{5}{2} = 10$ juegos. Como en cada juego hay dos posibilidades para el ganador, el espacio muestral X (posibles resultados del torneo) tiene $2^{10} = 1024$ elementos. Los torneos en que hay un invicto (evento I) pueden contarse así: el invicto se puede coger de 5 maneras, y los demás deben jugar $10—4 = 6$ juegos entre ellos, que pueden resultar de 2^6 maneras. Luego $|I| = 5 \cdot 2^6 = 320$. Del mismo modo, si P es el evento en que un equipo pierde todos sus juegos, $|P| = 320$.
Pero I y P no son disjuntos $|I \cap P| \neq 0$. El equipo invicto puede ser cualquiera de los 5, el que pierde todos sus juegos puede ser cualquiera de los 4 restantes, y entre los 3 que quedan se realizan 3 juegos que pueden resultar de $2^3 = 8$ maneras. Luego $|I \cap P| = 5 \cdot 4 \cdot 2^3 = 160$.
El evento que nos interesa es $X \setminus (I \cup P)$, y

$$|X \setminus (I \cup X)| = |X| - |I \cup P| = |X| - (|I| + |P| - |I \cap P|) = 1024 - (320 + 320 - 160) = 544.$$

Finalmente la probabilidad pedida es $\frac{544}{1024} = \frac{17}{32}$. □

La Sociedad Matemática Mexicana organizó la 22° Olimpíada Mexicana de Matemáticas, donde sólo podían participar los estudiantes de México nacidos después del 1 de agosto de 1989.

Problema. 12.3. (OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS)
En un torneo de voleibol durante la copa Europa–África, hubieron 9 equipos más de Europa que de África. Cada pareja de equipos jugó exactamente una vez, y en total los equipos europeos ganaron 9 veces tantos partidos como ganaron los equipos africanos. ¿Cuál es el máximo número de partidos que un solo equipo africano pudo haber ganado?

SOLUCIÓN. Sea n el número de equipos africanos. Entonces el número de equipos europeos es $n+9$. Los equipos africanos jugaron $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ partidos entre ellos, y por lo tanto ganaron en total $\frac{n(n-1)}{2} + k$ partidos, donde k es el número de partidos ganados por los equipos africanos a los equipos europeos.
Similarmente, los equipos europeos jugaron $\binom{n+9}{2} = \frac{(n+8)(n+9)}{2}$ partidos entre ellos y ganaron $n(n+9) - k$ partidos contra equipos africanos, de modo que en total ganaron $\frac{(n+8)(n+9)}{2} + n(n+9) - k$ partidos.
Luego, $9(\frac{n(n-1)}{2} + k) = \frac{(n+8)(n+9)}{2} + n(n+9) - k$, de donde $3n^2 - 22n + 10k - 36 = 0$.
Como n es un entero positivo, el discriminante de la ecuación cuadrática debe ser un cuadrado perfecto, es decir, $4 \cdot (229 - 30k) = m^2$. Como $m^2 \geq 0$, tenemos que $k \leq 7$. Las únicas soluciones son $k = 2$ y $k = 6$.

- Si $k = 2$, entonces $n = 8$ y por tanto el mejor equipo africano sólo pudo haber ganado 7 partidos contra equipos africanos y 2 contra equipos europeos.

- Si $k = 6$, entonces $n = 6$ y el mejor equipo africano pudo haber ganado 5 partidos contra equipos africanos y 6 partidos contra equipos europeos.

Por lo tanto, el máximo número de partidos que un equipo africano pudo haber ganado es 11. □

OCMU–ICW es la Olimpíada Colombiana de Matemáticas Universitaria junto con el Instituto Científico de Viezman presentada en 1999 a nivel Iberoamericano.

Problema. 12.4. (OCMU-ICW 1999)
Una víctima de un accidente morirá a menos que reciba en los primeros 10 minutos una transfusión de sangre tipo A-Rh+. Se dispone de gran número de donantes de los cuales sólo se sabe que el 40 % *tiene sangre de ese tipo. Se necesitan dos minutos para determinar el tipo de sangre del posible donante y dos minutos para realizar la transfusión. ¿Cuál es la probabilidad de que se salve si el hospital dispone de un sólo equipo de tipificación de sangre?*

SOLUCIÓN. Como tiene 2 minutos para analizar la sangre de cada donante y 2 minutos para hacer la transfusión y en total dispone de 10 minutos, se salvaría si el cuarto donante ó alguno de los anteriores tienen sangre A-RH+. Si llamamos A_i al suceso el individuo que se analiza tiene sangre A-RH+, entonces

$$P(\text{salvarse}) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4),$$

siendo $\overline{A}_i$ el suceso "el individuo i que se analiza no tiene sangre A-RH+". Como los sucesos son independientes, ya que la probabilidad de que uno no tenga sangre A-RH+ no se ve afectada por el hecho de que los otros analizamos la tengan ó no, la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades, por lo que:

$$\begin{aligned} P(\text{salvarse}) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) \\ &= 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 1 - \frac{81}{625} = \frac{544}{625}. \end{aligned}$$

Ya que el $40\,\% = \frac{2}{5}$ tienen sangre A-RH+, por lo que $P(\overline{A}_i) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. □

La 50° Olimpíada Internacional de Matemáticas (IMO) se celebró del 10 al 22 de julio de 2009 en Bremen, Alemania. Donde participaron 104 países.

Problema. 12.5. (OLIMPÍADA INTERNACIONAL ALEMANIA 2009. NEW ZEALAND)
Considera 2009 cartas, cada una con un lado dorado y el otro lado negro, puestas de forma paralela en una larga mesa. Inicialmente todas las cartas muestran su lado dorado. Dos jugadores, empiezan

por el mismo lado de la mesa, juegan un partido con alternancia de movimientos. Cada jugada consiste en elegir un bloque de 50 cartas consecutivas, si el que esta más a la izquierda muestra la cara dorada las gira, así las que muestran el lado dorado muestran ahora el lado negro y viceversa. El último jugador que pueda hacer un movimiento legal gana.

(1) ¿El juego termina?
(2) ¿Existe una estrategia ganadora?

SOLUCIÓN. (1). Nosotros interpretamos una carta mostrando el lado negro con el dígito 0 y una que muestra el lado dorado con el dígito 1. Así cada posición de las 2009 cartas, se leen de izquierda a derecha, corresponden biyectivamente a un entero no negativo, escrito en notación binaria de dígitos 2009, donde se permiten ceros a la izquierda. Cada movimiento disminuye este entero, por lo que el juego debe terminar.

(2). Veamos que no hay ninguna estrategia ganadora para el jugador que comienza. Etiquetamos las cartas de derecha a izquierda por $1, 2, \ldots, 2009$ y consideramos el conjunto S de cartas con etiquetas $50i$, con $i = 1, 2, \ldots, 40$. Sea g_n el número de cartas de S mostrando el lado dorado después de n movimientos. Obviamente $g_0 = 40$. Por otra parte, si $|g_n - g_{n+1}| = 1$, el jugador continua. Así, después de un número de movimientos, el jugador que no comienza encuentra una tarjeta de S mostrando el lado dorado y por lo tanto, podrá realizar una jugada. En consecuencia, el segundo jugador siempre gana. □

La XXII Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas se llevó a cabo en Coimbra, Portugal, del 9 al 16 de Septiembre de 2007.

Problema. 12.6. (PROBLEMA DE LA XXII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS)
Dos equipos, A y B, disputan el territorio limitado por una circunferencia. A tiene n banderas azules y B tiene n banderas blancas ($n \geq 2$, fijo). Juegan alternadamente y A comienza el juego. Cada equipo, en su turno, coloca una de sus banderas en un punto de la circunferencia que no se haya usado en una jugada anterior. Cada bandera, una vez colocada, no se puede cambiar de lugar. Una vez colocadas las $2n$ banderas se reparte el territorio entre los dos equipos.

Un punto del territorio es del equipo A si la bandera más próxima a él es azul, y es del equipo B si la bandera más próxima a él es blanca. Si la bandera azul más próxima a un punto está a la misma distancia que la bandera blanca más próxima a ese punto, entonces el punto es neutro (no es ni de A ni de B). Un equipo gana el juego si sus puntos cubren un área mayor que el área cubierta por los puntos del otro equipo. Hay empate si ambos cubren áreas iguales. Demostrar que, para todo n, el equipo B tiene estrategia para ganar el juego.

SOLUCIÓN. Un determinado equipo controla un punto P del círculo (P distinto del centro) si y sólo si controla todos los puntos del radio del círculo al que pertenece P. Por lo tanto, el problema se reduce a controlar los puntos de la circunferencia F. De aquí en adelante, arco significa arco de la circunferencia F, sin incluir a los extremos.

Supongamos que tenemos k banderas fijadas; éstas descomponen a F en k arcos distintos, teniendo cada arco una bandera en cada extremo. Un arco delimitado por banderas azules es un arco azul y un arco delimitado por banderas blancas es un arco blanco. Si las banderas son de distinto color, se dice que el arco es neutro.

Un arco es azul (respectivamente blanco) si, y sólo si, está controlado por A (respectivamente por B). En un arco neutro, la mitad es controlado por A y la otra mitad por B. Luego, para determinar quién gana o si hay empate, no nos interesan los arcos neutros.

Si una nueva bandera ocupa un punto de uno de esos k arcos, digamos el arco α, diremos que la nueva bandera separa las banderas limítrofes de α. Si α tiene color distinto al de la nueva bandera, ésta descompone a α en dos arcos neutros, y diremos entonces que la bandera neutraliza a α.

Lema. 12.7.
En una configuración de $a+b$ banderas, con a azules y b blancas, y r_A, r_B el número de arcos azules y blancos, respectivamente, se tiene que $r_A - r_B = a - b$.

Así, en el transcurrir del juego, cada jugada de A deja a B una configuración con por lo menos un arco azul. Luego, cada vez que juega B, puede neutralizar un arco azul. La neutralización sistemática conduce al empate. Para lograr que B gane, después de colocar la primera bandera azul, construimos un n-ágono regular inscrito en F que tenga esa bandera como un vértice de dicho n-ágono. Estos vértices V determinan n arcos disjuntos iguales, a los que llamaremos arcos "grandes", y los denotaremos por G. A continuación presentamos una estrategia ganadora para B.

(1) B va colocando sus banderas en vértices V, hasta que no haya más vertices V disponibles.
(2) Después, B neutraliza un arco azul en cada jugada, dando prioridad a los arcos de G, hasta quedarse con sólo una bandera disponible.
(3) La última bandera blanca es colocada en posición, es decir, para ganar. Si al final del primer paso hay w vértices de V azules, de modo que B tiene w banderas disponibles. Por lo tanto, en el paso 2, B neutraliza todos los arcos G azules. (El argumento contempla el caso $w = 1$, en el cual el paso 2 no existe). En el paso 2, B no crea nuevos arcos blancos.

Cuando B coloca su última bandera, hay por lo menos un arco en G, pero ninguno de ellos es azul. Luego, el número de arcos azules excede en uno al de arcos blancos y todos los arcos blancos son arcos G. Tenemos dos casos a considerar:

- Caso 1. Existe un arco G blanco. B coloca la última bandera blanca, de modo que neutraliza un arco azul y gana.
- Caso 2. No existe un arco G blanco. Por lo tanto, no existe un arco blanco, de donde se sigue que existe un sólo arco azul que no es un arco G, y existe por lo menos un arco G neutro. Entonces, B coloca la última bandera blanca en un arco G neutro, que no es de A, de modo que crea un arco blanco de mayor tamaño al del único arco azul existente y gana.

□

La 48ª Olimpíada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo en Manoi, Vietnam, del 19 al 31 de julio del 2007. Participaron 93 países y 520 participantes de los cuales 49 eran mujeres.

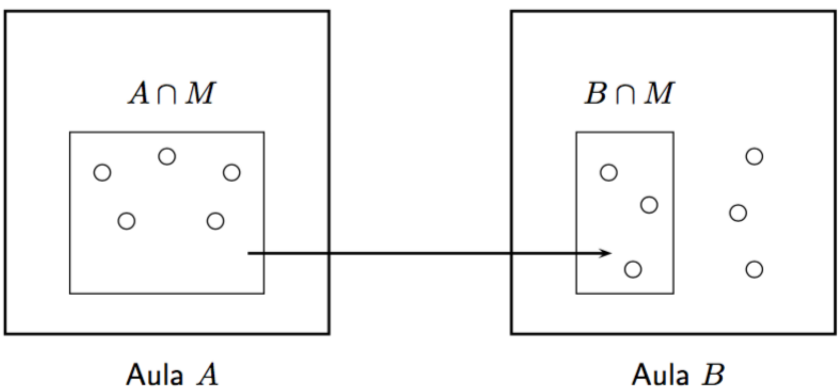
Problema. 12.8. (48ª OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS)
En una competencia de matemáticas algunos participantes son amigos. La amistad es siempre recíproca. Decimos que un grupo de participantes es una "clique" si dos cualesquiera de sus miembros son amigos. (En particular, cualquier grupo con menos de dos participantes es una clique). Al número de elementos de una clique se le llama tamaño. Se sabe que en una competencia el mayor de los tamaños de la clique es par.

Demostrar que los participantes pueden distribuirse en dos aulas, de manera que el mayor de los tamaños de las cliques contenidas en un aula sea igual al mayor de los tamaños de las cliques contenidas en la otra.

SOLUCIÓN. Presentaremos un algoritmo para distribuir a los participantes. Supongamos que las aulas son "Aula A" y "Aula B". Comenzamos con una distribución inicial, y entonces la modificamos varias veces enviando una persona a la otra aula. en cualquier paso del algoritmo, A y B denotará los conjuntos de los participantes en la aulas, y $c(A)$ y $c(B)$ denotará los tamaños de las cliques más grandes contenidas en las aulas A y B, respectivamente.

- Paso 1. Sea M una de las cliques de mayor tamaño, $|M| = 2m$. Enviamos a todos los miembros de M a a la aula A y al resto de los participantes a la aula B.
  Como M es una clique de mayor tamaño, tenemos que $c(A) = |M| \geq c(B)$.

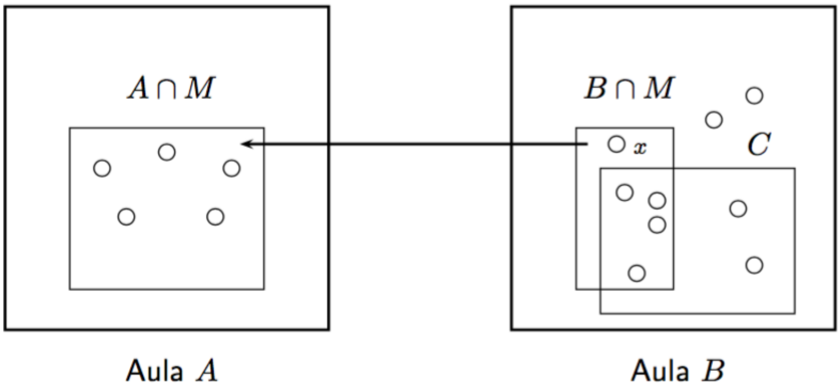
- Paso 2. Mientras $c(A) > c(B)$, enviamos una persona del aula A al aula B.



Note que $c(A) > c(B)$ implica que el aula A no está vacía. En cada paso, $c(A)$ disminuye en uno y $c(B)$ aumenta en a lo más uno. Luego, al final tendremos que $c(A) \leq c(B) \leq c(A)+1$. También tendremos al final que $c(A) = |A| \geq m$, ya que si no tendríamos al menos $m+1$ miembros de M en el aula B y a lo más $m-1$ miembros de M en el aula B y a lo más $m-1$ en el aula A, lo que implicaría que $c(B)-c(A) \geq (m+1)-(m-1) = 2$.

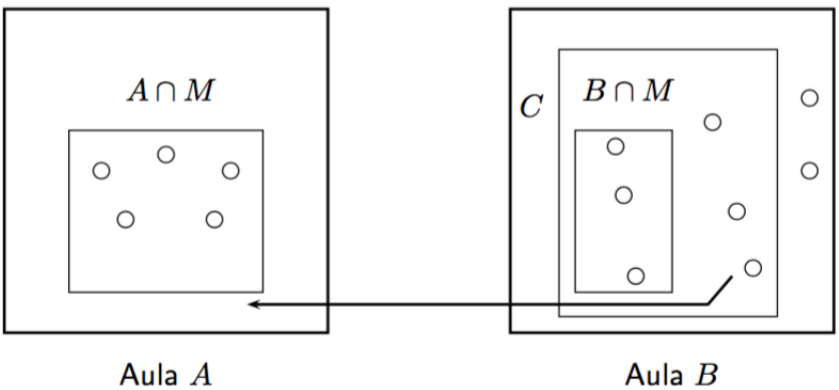
- Paso 3. Sea $k = c(A)$. Si $c(B) = k$, entonces terminamos. Si llegamos a que $c(A) = c(B) = k$, entonces habremos encontrado la distribución deseada. En los otros casos, tenemos que $c(B) = k+1$. De la estimación anterior también que $k = |A| = |A \cap M| \geq m$ $|B \cap M| \leq m$.

- Paso 4. Si existe un participante $x \in B \cap M$ y una clique $C \subseteq B$ tal que $|C| = k+1$ y $x \notin C$, entonces movemos x al aula A y terminamos.



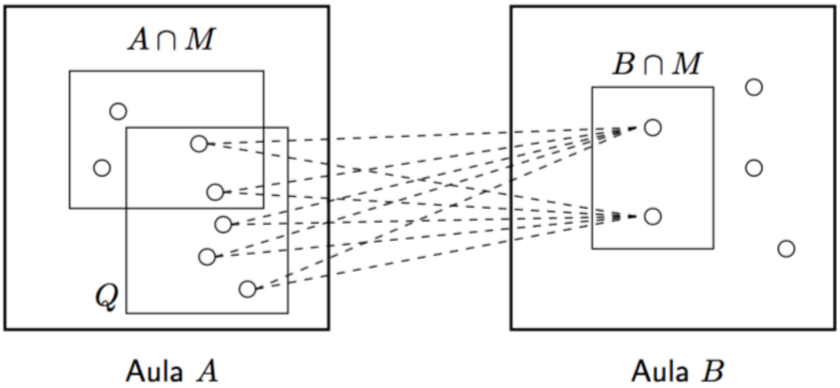
Después de regresar a x al aula A, tendremos $k+1$ miembros de M en el aula A, de modo que $c(A) = k+1$. Como $x \notin C$, $c(B) = |C|$ no disminuye, y después de este paso tenemos que $c(A) = c(B) = k+1$.
Si no hay tal competidor x, entonces en el aula B todas las cliques de tamaño $k+1$ contienen a $B \cap M$ como subconjunto.

- Paso 5. Mientras $c(B) = k+1$, elegimos una clique $C \subseteq B$ tal que $|C| = k+1$ y movemos un miembro de $C \setminus M$ al aula A.



Note que $|C| = k+1 > m \geq |B \cap M|$, de modo que $C \setminus M$ no puede ser vacío. En cada momento movemos una sola persona del aula B al aula A, de tal manera que $c(B)$ disminuye en a lo más 1. Luego, al final de esta rutina tenemos que $c(B) = k$. En el aula A tenemos la clique $A \cap M$ de tamaño $|A \cap M| = k$. Luego, $c(A) \geq k$. Demostraremos que no hay ninguna clique de tamaño mayor que k en A.

Sea $Q \subseteq A$ una clique arbitraria. Demostraremos que $|Q| \leq k$.



En el aula A, y especialmente en el conjunto Q, puede haber dos tipos de participantes:

(1) Algunos miembros de M. Como M es una clique, ellos son amigos de todos los miembros de $B \cap M$.

(2) Participantes que fueron movidos al aula A en el paso 5. Cada uno de ellos ha estado en una clique con $B \cap M$, así que ellos son también amigos de todos los miembros de $B \cap M$.

Luego,todos los miembros de Q son amigos de todos los miembros de $B \cap M$. Los conjuntos Q y $B \cap M$ son por sí mismos cliques, de modo que $Q \cup (B \cap M)$ es también una clique. Como M es una clique de mayor tamaño, tenemos que:

$$|M| \geq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B \cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|,$$

de donde $|Q| \leq |A \cap M| = k$. Finalmente tenemos que $c(A) = c(B) = k$. $\square$

Índice alfabético

Bibliografía

[1] Esteban M.; González L.; Molano A.; Rodríguez, P.; González, M., *Problemas IX y X Olimpiadas Matemáticas*, Junta de Extremadura, Mérida, 2002.

[2] García Capitán, Francisco Javier, *Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas*, Priego de Córdoba, 2002.

[3] Nieto, José; Sánchez, Rafael; Vielma, Laura, *Olimpiadas Matemáticas 2010*, Caracas, 2010.

[4] Nieto Said, José Heber, *Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas*, Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, 2014.

[5] Rubio, C., *Problemas para la* 22^a *Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, 2008.

[6] Suárez, J., *Introducción a la Teoría de Probabilidad*, Universidad Nacional de Colombia, Manizales, 2002.

Enlaces a páginas Web:

(1) Página Oficial de la Olimpiada Matemática Española.
http://www.olimpiadamatematica.es/

(2) Página Olimpíada Matemática. Granada.
http://www.ugr.es/~olimpiada/
https://wdb.ugr.es/~olimpiada/

(3) Web sobre problemas en Matemáticas.
http://math.stackexchange.com

(4) Página Oficial de la International Mathematical Olympiad.
http://www.imo-official.org/