Estudio y discusión sobre problemas de Olimpíada. Ecuaciones Diofánticas

Antonio Manuel Ortega Torres

Máster Interuniversitario en Matemáticas

Universidad de Granada

Granada. 2017

Trabajo Fin de Máster

Estudio y discusión sobre problemas de Olimpíada. Ecuaciones Diofánticas

Antonio Manuel Ortega Torres

Dirección: Prof. Dr. D. Pascual Jara Martínez

Máster Interuniversitario de Matemáticas
Universidad de Granada
Granada, 2017

Introducción

El presente Trabajo Fin de Máster, del Máster Interuniversitario de Matemáticas, trata sobre Ecuaciones Diofánticas. En él se discuten y analizan problemas similares a los que aparecen en las competiciones de Olimpíadas Matemáticas. Con el análisis de estos problemas se pretende fomentar el desarrollo de habilidades matemáticas tanto para aquellos que quieren aprender sobre las matemáticas, aquellos que quieren prepararse para las Olimpíadas, o que simplemente quieren practicar con conceptos relativos a Ecuaciones Diofánticas. El objetivo principal es ayudar a desarrollar habilidades para resolver problemas relacionados con el tema.

Las Olimpíadas Matemáticas son competiciones entre estudiantes, principalmente de secundaria y bachillerato, donde deben resolver una serie de problemas. El objetivo es promover el estudio de las matemáticas y además, la detección y formación de jóvenes talentos en ellas.

Las competiciones de Olimpíadas Matemáticas se desarrolla en tres fases, donde el nivel de dificultad va creciendo:

- **Fase Local**: Consta de dos pruebas escritas en las que los participantes han de resolver un total de seis problemas. Son estudiantes menores de 19 años que se presentan voluntariamente. Los tres alumnos con mejor puntuación en cada distrito pueden acceder a la siguiente fase.

- **Fase Nacional**: Consta de dos pruebas escritas en las que los participantes deben resolver un total de seis problemas propuestos por un tribunal. Los seis mejores clasificados podrán participar en la siguiente fase.

- **Fase Internacional**: Consta de dos pruebas escritas, donde los participantes deben enfrentarse a un total de seis problemas propuestos por un tribunal. Se celebra anualmente desde 1965, y los problemas tienen una mayor dificultad.

Para resolver los problemas de cada fase el participante debe tener conocimientos específicos de un determinado nivel. Son numerosas las apariciones de ejercicios con **ecuaciones diofánticas** (aquellas de las que estudiamos sus soluciones enteras) en estas competiciones. En este trabajo se ha recopilado la información necesaria para ayudar a resolver estos problemas, por lo que a lo largo del mismo se ha tratado de dar ejemplos y ejercicios con dificultad creciente.

La estructura de este trabajo se basa en dos grandes bloques: Teoría y Problemas. En el primer capítulo se realiza una Introducción Histórica sobre las ecuaciones diofánticas, viendo como se han desarrollado a lo largo de la historia, y centrándonos en el matemático que dio nombre a estas ecuaciones, Diofanto de Alejandría.

En los tres capítulos siguientes hemos realizado un repaso sobre los temas teóricos necesarios para la resolución de ecuaciones diofánticas, tratando que sea una herramienta de utilidad. También se acompañan ejemplos que ayuden a comprender las nociones tratadas.

A continuación aparecen tres capítulos de ejercicios resueltos. El primero corresponde a la fase local de las Olimpíadas Matemáticas, con ejercicios más sencillos. En el segundo corresponde a la fase nacional, y crece el nivel de dificultad. Por último, la fase internacional, con problemas de una mayor complejidad. Se trata de mostrar y resolver casos particulares que pueden ser de interés.

Índice general

Capítulo I

Introducción histórica

1. DIOFANTO DE ALEJANDRÍA

La “Edad de Oro” de la matemática griega puede ser considerado el periodo que oscila entre los siglos V a.C. y III a.C., donde encontramos figuras como Euclides, Eudoxo o Arquímedes.

En la “Edad de Plata” de la matemática griega, periodo del 250 al 350 d.c. aproximadamente, nos encontramos con el más importante de los algebristas griegos, **Diofanto de Alejandría**. Esta ciudad fue el centro de la actividad matemática hasta la muerte de Hipatia en el año 415. A Diofanto se le puede llamar el “padre del álgebra”, aunque su obra no contiene el material que constituye la base del álgebra elemental moderna.

Su obra más importante es **“Arithmetica”**, tratado de trece libros, de los que han sobrevivido los seis primeros. Recuerda mucho al álgebra babilónica, pero mientras esta se había ocupado principalmente de la solución aproximada de ecuaciones determinadas de grados hasta el tercero, la obra de Diofanto está dedicada a la resolución de ecuaciones determinadas e indeterminadas. Es la primera que distingue entre la matemática geométrica utilizada habitualmente por el mundo griego y la construcción de una matemática algebraica.

Diofanto empieza a adoptar algunas abreviaturas en vez de lenguaje ordinario. A lo largo de los seis libros de la Arithmetica se hace un uso de cierta abreviaturas para potencias de números y para relaciones y operaciones entre ellos. Un número desconocido se representa por un símbolo que se parece a la letra griego s. Los coeficientes numéricos se escribían después de los símbolos para las respectivas incógnitas a las que fueran asociados; la suma de términos se representaba por la simple yuxtaposición de los símbolos de los términos en cuestión, y la resta venía representada por un único símbolo situado inmediatamente antes de los términos que había que restar. Con esta notación Diofanto podía escribir polinomios con una única incógnita de una manera casi tan concisa como se hace hoy en día.

La diferencia más importante ente la sincopación diofántica y la notación algebraica moderna está en la falta de símbolos especiales para las operaciones y relaciones, así como de la notación exponencial en la primera de ellas.

2. LOS PROBLEMAS DIOFÁNTICOS

Se define una **ecuación** como una igualdad en la que intervienen tanto cantidades conocidas como desconocidas, llamadas estas últimas **incógnitas**. Encontrar una **solución** de una ecuación dentro de un conjunto numérico es encontrar una serie de valores dentro de este conjunto de forma que al sustituirlos por las incógnitas se verifique la igualdad.

En el caso de ecuaciones diofánticas, el conjunto donde se van a buscar las soluciones es el de los números naturales o el de los enteros, exigiendo además que sean (generalmente) ecuaciones de tipo polinómico.

"Arithmetica" consiste en una colección de 150 problemas resueltos en términos de ejemplos numéricos concretos, aunque quizás Diofanto pretendiese sugerir con ellos un método general. No hay ningún desarrollo axiomático ni tampoco se calcula todas las soluciones posibles; en el caso de las ecuaciones de segundo grado con dos raíces positivas se da solamente la mayor, y las raíces negativas no se consideran. Tampoco se establece ninguna distinción entre los problemas determinados e indeterminados, y para estos últimos, que tienen un número infinito de soluciones, se da una única solución.

Diofanto resuelve problemas con varias incógnitas expresando hábilmente todas las cantidades desconocidas en términos de una sola de ellas, siempre que esto sea posible. Un problema que puede servir para ilustrar este método es **"calcular dos números tales que su suma sea 20 y la suma de sus cuadrados 208".** Los números desconocidos no se representan por x e y, sino por lo que en nuestra notación moderna sería $(10+x)$ y $(10-x)$; entonces se tendrá que verificar únicamente que:

$$(10+x)^2+(10-x)^2=208.$$

Luego $x=2$ y los números buscados son 8 y 12. En este problema aparecen ecuaciones *determinadas* (una ecuación de segundo grado en una variable con dos soluciones posibles), pero Diofanto utilizaba el mismo método para los problemas de análisis *indeterminado* (existe más de una solución).
En un cierto problema se pide calcular dos números tales que al sumar cualquiera de ellos con el cuadrado del otro da siempre como resultado un cuadrado perfecto.

Hace un tipo de planteamiento siempre que dos números tengan que satisfacer dos condiciones, se deben elegir dichos números indeterminados de tal manera que una de las dos condiciones se verifique automáticamente, y después se les impone la segunda condición para determinarlos. Es decir, en vez de manejar un sistema de dos ecuaciones simultáneas en dos incógnitas, opera con las condiciones sucesivas de manera que solo aparezca una única incógnita a lo largo del proceso.

Entre los problemas indeterminados que aparecen en Arithmetica, hay algunos que conducen a ecuaciones $x^2=1+30y^2$, o $x^2=1+26y^2$, que son casos particulares de la llamada "Ecuación de Pell". En este caso, Diofanto se conforma con encontrar una solución, ya que intentaba resolver problemas, no ecuaciones.

3. ECUACIONES DIOFÁNTICAS Y CULTURAS DIVERSAS

La Arithmetica no es un texto de álgebra, sino una colección de problemas sobre aplicaciones del álgebra, y desde este punto de vista Diofanto se parece a los algebristas babilónicos. Sin embargo, sus números son completamente abstractos y no se refieren a medidas de grano, dimensiones de campos o unidades monetarias. Está interesado únicamente en soluciones exactas, mientras que los babilonios estaban dispuestos a aceptar aproximaciones de números irracionales como soluciones de sus ecuaciones. Por este motivo las ecuaciones cúbicas rara vez aparecen en la obra de Diofanto.

Diofanto ha tenido una influencia mayor sobre la teoría de los números moderna que cualquier otro algebrista no-geométrico griego. Por ejemplo, **Pierre Fermat** se vio conducido a su célebre "Gran Teorema" cuando intentaba generalizar un problema que había visto en la "Arithmetica" de Diofanto: "dividir un cuadrado dado en dos cuadrados".

El desarrollo de métodos de resolución de problemas de análisis indeterminado o diofántico constituye uno de los mayores logros de las **matemáticas hindúes**. La causa de que se interesaran en la solución de estos problemas yace en la necesidad del estudio de fenómenos que se repiten periódicamente, como la astronomía.

La teoría general de las ecuaciones diofánticas de primer grado $ax + by = 1$, donde a y b son números primos entre sí, fue construida en el siglo XVII por el matemático francés **Bachet de Meziriak**.

Sobre la creación de la teoría general de las ecuaciones diofánticas de segundo grado trabajaron muchos científicos notables como P. Fermat, L. Euler, J. Lagrange o K. Gauss. Como resultado de sus esfuerzos a comienzos del siglo XIX estaba investigada la ecuación general no homogénea de segundo grado con dos incógnitas y coeficientes enteros:

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0 \text{ con } a_i \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, 6.$$

Capítulo II

Ecuaciones diofánticas lineales

4. DEFINICIÓN

Dentro de las **ecuaciones algebraicas**, se consideran las llamadas **ecuaciones lineales** que de una manera formal se pueden definir así:

Consideremos un espacio vectorial de dimensión "n", $(V,+,*)$, sobre un Cuerpo $(K,+,\cdot)$ y tomemos una de sus bases $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, para todo $x\in V$, $x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n$, donde los $\{x_i\}$ $i=1,2,\ldots,n$ son las componentes del vector x respecto de la base B.
Sea una aplicación del espacio vectorial V en su propio Cuerpo $f:V\to K$, tal que cualquier vector le hacemos corresponder un elemento del Cuerpo K:

$$f(x)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n \text{ tal que } \{a_i\}\ i=1,2,\ldots,n,$$

son elementos determinados del Cuerpo.
La condición necesaria y suficiente para que "f" sea homomorfismo o aplicación lineal es que para todo $\alpha,\beta\in K$, para todo $x,y\in V$, entonces $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$.
Supongamos que fijamos el elemento del Cuerpo K y nos preguntamos que vector de V tiene por imagen al elemento de K; si $a\in K$ es dicho elemento entonces $f(x)=a$ si y solo si $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=a$, que constituye lo que conocemos como **ecuación lineal de incógnitas** $\{x_i\}$ $i=1,2,\ldots,n$.

Llamaremos **solución** a aquel vector de V cuyas componentes cumplan la igualdad. A los elementos del Cuerpo escogidos previamente $\{a_i\}$, $i=1,2,\ldots,n$, se les llama **coeficientes**.

Supongamos que esos coeficientes son todos números enteros, así como el término independiente, y que buscamos solo aquellos vectores solución tales que todas sus componentes sean enteras, en estos supuestos la **ecuación lineal se llama diofántica**.

5. CON DOS INCÓGNITAS $ax \pm by = c$

Donde a, b y c son enteros conocidos y los enteros incógnita son x e y.

Teorema. 5.1.
La condición necesaria y suficiente para que la ecuación $ax \pm by = c$ tenga solución es que el máximo común divisor d de a y b sea divisor de c.

DEMOSTRACIÓN.
Condición necesaria: si $\mathrm{m.c.d.}(a,b) = d$, entonces:

$$\begin{cases} d \text{ divide a } a, \text{ existe } t_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } t_1 d = a. \\ d \text{ divide a } b, \text{ existe } t_2 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } t_2 d = b. \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$ax \pm by = t_1 dx \pm t_2 dy = d(t_1 x \pm t_2 y).$$

Por lo tanto el primer miembro es múltiplo de d, entonces deberá el segundo miembro c también ser múltiplo de d si y solo si d divide a c.

Condición suficiente: dada la ecuación diofántica $ax + by = c$, con $a, b, c \in \mathbb{Z}$, el $\mathrm{m.c.d.}(a,b) = d$ es también divisor de c, entonces la ecuación tiene solución.
La demostración es consecuencia del **teorema de Bezout**:

$$\text{si } \mathrm{m.c.d.}(a,b) = d \text{ entonces existe } \lambda, \mu \in \mathbb{Z} \text{ tales que } d = \lambda a + \mu b.$$

Supongamos la ecuación inicial $ax + by = c$, y por hipótesis $\mathrm{m.c.d.}(a,b) = d$ también divide al término independiente c:
Según el teorema de Bezout, existe $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ tales que $\lambda a + \mu b = d$. Por otra parte d divide a c, entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $c = qd$. En la primera ecuación multiplicamos ambos miembros por el entero q:

$$(q\lambda)a + (q\mu)b = qd \text{ si y solo si } (q\lambda)a + (q\mu)b = c.$$

Luego existe solución:

$$\begin{cases} x = q\lambda \\ y = q\mu \end{cases}$$

$\square$

Por lo tanto, si tenemos una ecuación $ax \pm by = c$, que tiene solución, entonces $\mathrm{m.c.d.}(a,b) = d$, podemos dividir ambos miembros entre d, obteniendo una ecuación diofántica $\frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} = \frac{c}{d}$ que tiene las mismas soluciones que la ecuación original, donde los coeficientes enteros de x e y son primos relativos.

Una ecuación diofántica de la forma $ax \pm by = c$ representa una **recta en el plano cartesiano**. Resolverla consiste en obtener aquellos puntos de la misma que tengan su abscisa y ordenada enteras.

Podemos reducir los cuatro casos de signos de los coeficientes a y b a solo los dos siguientes, considerando a y b números naturales.

5.1. ECUACIÓN DIOFÁNTICA $ax - by = c$

Tratamos de resolver la ecuación $ax - by = c$, donde a y b son primos entre sí.

$$ax - by = c, \text{ entonces } ax = c + by.$$

El número entero $c + by$ es múltiplo del número natural a. Si consideramos los números congruentes módulo a obtendríamos a restos distintos: $0, 1, 2, \ldots, a - 1$; si le damos estos valores a la incógnita y, entonces:

$$c + b \cdot 0, c + b \cdot 1, \ldots, c + b \cdot (a - 1),$$

constituyen un sistema completo de números incongruentes módulo a, es decir, que dan a restos distintos al dividirlos por a. En efecto:
Supongamos que dos cualesquiera dan igual resto. Sean:

$$c + bp, c + bp' \text{ tal que } 0 < p < p' < a, \text{ entonces } (c + bp) - (c + bp') = b(p - p') \text{ es un múltiplo de } a.$$

Pero a y b son primos entre sí; según el Teorema de Euclides $(p - p')$ es un múltiplo de a, lo que no tiene sentido pues ambos son menores que a.

Luego solo uno de los restos será cero. Suponemos que es para $y = \gamma$, por lo que al dividirlo por a da exacto. Tomemos por cociente de esa división α:

$$\frac{(c + b\gamma)}{a} = \alpha \in \mathbb{Z}, \; c + b\gamma = a\alpha, \text{ entonces } a\alpha - b\gamma = c.$$

Acabamos de obtener una **solución particular** para esa ecuación diofántica $ax - by = c$. Se trata de obtener una solución general.

Restamos ordenadamente $ax - by = c$ con su solución particular:

$$\begin{cases} ax - by = c \\ a\alpha - b\gamma = c \end{cases}$$

$$a(x - \alpha) - b(y - \gamma) = 0.$$

$$a(x - \alpha) = b(y - \gamma). \tag{II.1}$$

Como a y b son números primos entre sí, b divide a $(x - \alpha)$, entonces $bt = x - \alpha$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $x = \alpha + tb$.

Sustituyendo en (II.1):

$$a(tb) = b(y-\gamma), \text{ entonces } at = y-\gamma, \text{ por lo tanto } y = \gamma + ta.$$

Luego la **solución general** será:

$$\begin{cases} x = \alpha + tb \\ y = \gamma + ta \end{cases}$$

Donde t puede ser cualquier número entero, pues si sustituimos en la ecuación inicial $ax - by = c$, se cumple:

$$a(\alpha + tb) - b(\gamma + ta) = a\alpha + atb - b\gamma - bta = a\alpha - b\gamma = c,$$

ya que (α, γ) era una solución particular.

Dicha ecuación la verifican infinitas parejas de números enteros.

Ejercicio. 5.2.
Halla las soluciones enteras de la siguiente ecuación:

$$30x - 25y = 15.$$

SOLUCIÓN.
Vemos si la ecuación diofántica tiene solución: $\text{m.c.d.}(30, 15) = 5$ y como 5 divide a 15, la ecuación tiene soluciones enteras.
Dividimos todos los coeficientes por 5, obteniendo la siguiente ecuación:

$$6x - 5y = 3$$

Calculamos una solución particular:

$$y = \frac{6x-3}{5}$$

Los números $0, 1, 2, 3, 4$, forman un sistema completo de números incongruentes módulo 5. Sustituimos estos valores en la incógnita x. El resultado cuya división euclídea para 5 tiene resto 0 es:

$$\text{Si } x = 3, \ y = \frac{6 \cdot 3 - 3}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Luego la solución particular es (3,3).
Por último calculamos la solución general:

$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 3 + 6t \end{cases} \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

□

Ejercicio. 5.3.
Halla las soluciones enteras no negativas de la siguiente ecuación:

$$2x - 3y = 5.$$

SOLUCIÓN.
Vemos si la ecuación diofántica tiene solución: $\text{m.c.d.}(2,3) = 1$ y como 1 divide a 5, la ecuación tiene soluciones enteras.
Calculamos una solución particular:

$$x = \frac{5+3y}{2}$$

Los números $0, 1$, forman un sistema completo de números incongruentes módulo 2. Sustituimos estos valores en la incógnita y. El resultado cuya división euclídea para 2 tiene resto 0 es:

$$\text{Si } y = 1,\ x = \frac{5+3\cdot 1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Luego la solución particular es (4,1).

Por último calculamos la solución general:

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Pero el enunciado pide las soluciones no negativas:

$$x \geq 0 \Rightarrow 4 + 3t \geq 0 \Rightarrow 3t \geq -4 \Rightarrow t \geq -\frac{4}{3} \Rightarrow t \geq -1.$$

$$y \geq 0 \Rightarrow 1 + 2t \geq 0 \Rightarrow 2t \geq -1 \Rightarrow t \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow t \geq 0.$$

Las soluciones no negativas son $(x, y) = (4+3t, 1+2t)$, donde $t \geq 0$. □

5.2. ECUACIÓN DIOFÁNTICA $ax + by = c$

Resolvamos ahora la ecuación $ax+by=c$, donde seguimos considerando a y b como números enteros primos entre sí.

Al igual que en el apartado anterior obtenemos una solución particular $x=\alpha, y=\gamma$, entonces $a\alpha+b\gamma=c$. Restamos a la ecuación general:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a\alpha+b\gamma=c \end{cases}$$
$$a(x-\alpha)+b(y-\gamma)=0$$

$$a(x-\alpha)=-b(y-\gamma) \tag{II.2}$$

Siendo a y b primos entre sí, b divide a $(x-\alpha)$, entonces $tb=x-\alpha$ tal que $t\in\mathbb{Z}$, por lo tanto $x=\alpha+tb$. Sustituyendo en (II.2):

$$a(tb)=-b(y-\gamma), \text{ entonces } at=-(y-\gamma), \text{ por lo tanto } y=\gamma-at.$$

Por lo que la **solución general** será:

$$\begin{cases} x=\alpha+tb \\ y=\gamma-ta \end{cases}$$

Siendo t cualquier número entero.

Ejercicio. 5.4.
Halla las soluciones enteras de la siguiente ecuación:

$$12x+16y=20.$$

SOLUCIÓN.
Vemos si la ecuación diofántica tiene solución: m. c. d.$(12,16)=4$ y como 4 es divisor de 20, la ecuación tiene soluciones enteras.
Dividimos todos los coeficientes por 4, obteniendo la siguiente ecuación:

$$3x+4y=5$$

Calculamos una solución particular:

$$x=\frac{5-4y}{3}$$

Los números $0,1,2$ forman un sistema completo de números incongruentes módulo 3. Sustituimos estos valores en la incógnita y. El resultado cuya división euclídea para 3 tiene resto 0 es:

$$\text{Si } y = 2,\ x = \frac{5-4\cdot 2}{3} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Luego la solución particular es (-1,2).

Por último calculamos la solución general:

$$\begin{cases} x = -1+4t \\ y = \quad 2-3t \end{cases} \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

□

Aunque las ecuaciones diofánticas se definen como aquellas para las que estudiamos sus soluciones enteras, por lo que sus coeficientes son números enteros; en ciertas ocasiones se plantean con coeficientes racionales. En todos los casos éstas se reducen a ecuaciones con coeficientes enteros multiplicando por un múltiplo de los denominadores.

Ejercicio. 5.5.
En una batalla en la que participan entre 10000 y 11000 soldados, resultan muertos $\frac{23}{165}$ *del total, y heridos* $\frac{35}{143}$ *del total. Hallar cuántos soldados resultan ilesos.*

Solución.
Llamamos:
x al número de soldados ilesos.
y al número total de soldados.

El número total de soldados es la suma de los soldados heridos, los soldados muertos y los que resultan ilesos. Planteamos la ecuación con los datos del problema:

$$\frac{23}{105}y + \frac{35}{143}y + x = y.$$

Multiplicando ambos miembros por el $\text{m.c.m.}(165,143) = 3\cdot 5\cdot 11\cdot 13 = 2145$, queda la siguiente ecuación:

$$299y + 525y + 2145x = 2145y$$

$$2145x - 1321y = 0$$

$$2145x = 1321y$$

$$\frac{y}{2145} = \frac{x}{1321}$$

Ecuación diofántica lineal de dos incógnitas ya que la solución tiene que ser un número natural. Por lo tanto las dos fracciones son un número natural k:

$$\frac{y}{2145} = \frac{x}{1321} = k, \text{ tales que } \begin{cases} x = 2145k \\ y = 1321k \end{cases} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Pero el número total de soldados está comprendido entre 10000 y 11000, es decir:

$$10000 < y < 11000.$$

Por lo tanto:

$$\text{Si } 10000 < y \Rightarrow 10000 < 2145k \Rightarrow 4,66 < k \Rightarrow 5 \leq k.$$

$$\text{Si } y < 11000 \Rightarrow 2145k < 11000 \Rightarrow k < 5,13 \Rightarrow k \leq 5.$$

La solución es para $k = 5$, luego:

$$x = 1321k \Rightarrow x = 1321 \cdot 5 \Rightarrow x = 6605.$$

El número de soldados que resultan ilesos es 6605. □

Ejercicio. 5.6.
Juan tiene un bolsa llena de canicas, las quiere organizar en dos rectángulos de 2 y 3 filas. Durante cuatro días lo ha hecho, obteniendo en cada caso un número diferente de canicas en cada rectángulo. Calcula el menor número de canicas que puede tener Juan.

Solución.
LLamamos:
x: número de columnas de rectángulo de 2 filas.
y: número de columnas del rectángulo de 3 filas.
c: número total de canicas.
Planteamos la ecuación diofántica ya que tienen que ser valores enteros positivos:

$$2x + 3y = c$$

Al haberlo conseguido durante cuatro días con valores diferentes, debemos encontrar al menos cuatro soluciones positivas diferentes, y de ellas vamos a obtener el menor valor de c.

Obtenemos una solución particular de la ecuación, que tiene solución, ya que $\text{m.c.d.}(2,3) = 1$, divide a c.
Para ello obtenemos una solución particular de la ecuación $2x + 3y = 1$. Es $(x, y) = (-1, 1)$.
Una solución de la ecuación $2x + 3y = c$ será $(x_0, y_0) = (-c, c)$.
La solución general es:

$$\begin{cases} x = -c + 3t \\ y = c - 2t \end{cases} \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Pero buscamos las soluciones enteras positivas:

$$x > 0 \Rightarrow -c + 3t > 0 \Rightarrow 3t > c \Rightarrow t > \frac{c}{3}.$$

$$y > 0 \Rightarrow c - 2t > 0 \Rightarrow c > 2t \Rightarrow \frac{c}{2} > t.$$

Luego:

$$\frac{c}{3} < t < \frac{c}{2}.$$

Para que t sea un número entero, c tiene que ser un múltiplo del $\mathrm{m.c.m.}(2,3) = 6$.
Damos valores a c para que $t \geq 4$, es decir, $\frac{c}{2} - \frac{c}{3} \geq 5$.

- $c = 6,\quad \frac{c}{3} = 2,\quad \frac{c}{2} = 3,\quad \frac{c}{2} - \frac{c}{3} = 1.$
- $c = 12,\quad \frac{c}{3} = 4,\quad \frac{c}{2} = 6,\quad \frac{c}{2} - \frac{c}{3} = 2.$
- $c = 18,\quad \frac{c}{3} = 6,\quad \frac{c}{2} = 9,\quad \frac{c}{2} - \frac{c}{3} = 3.$
- $c = 24,\quad \frac{c}{3} = 8,\quad \frac{c}{2} = 12,\quad \frac{c}{2} - \frac{c}{3} = 4.$
- $c = 30,\quad \frac{c}{3} = 10,\quad \frac{c}{2} = 15,\quad \frac{c}{2} - \frac{c}{3} = 5.$

Luego si Juan tiene 30 canicas hay cuatro formas diferentes de organizarlas:

$$(x, y) = (3, 8);\ (6, 6);\ (9, 4);\ (12, 2).$$

□

6. ALGORITMO DE EUCLIDES

El **algoritmo de Euclides** es un procedimiento para calcular el máximo común divisor de dos números. Se divide el mayor entre el menor; si la división es exacta el divisor es el m. c. d.; pero si la división no es exacta, se divide el divisor entre el resto obtenido, continuando de esta forma hasta obtener una división exacta, siendo el m. c. d. el último resto distinto de cero.

Hemos visto anteriormente que para que la ecuación diofántica $ax \pm by = c$ tenga solución, el $\mathrm{m.c.d.}(a, b) = d$ tiene que dividir a c. Según el teorema de Bezout:

$$\text{existen } \lambda, \mu \in \mathbb{Z} \text{ tales que } \lambda a + \mu b = d.$$

Por otra parte d divide a c, entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $c = qd$.

El algoritmo de Euclides proporciona un método para calcular λ y μ mediante divisiones sucesivas. Aplicando dicho algoritmo tenemos la expresión $\lambda a + \mu b = d$. Basta multiplicar ambos miembros por el entero q:

$$(q\lambda)a + (q\mu)b = qd \text{ si y solo si } (q\lambda)a + (q\mu)b = c.$$

De esta manera tenemos otro método para encontrar una solución particular de la ecuación diofántica inicial, siendo:

$$\begin{cases} x = q\lambda \\ y = q\mu \end{cases}$$

Los matemáticos hindúes tales como Bhaskara conocían que las raíces de la ecuación indeterminada de primer grado $ax - by = c$, se obtienen multiplicando por c las raíces de la ecuación $ax - by = 1$. Hemos visto que esta ecuación tendrá solución entera si y solo si el m. c. d.$(a, b) = 1$, pues el m. c. d.(a, b) debe dividir al término independiente 1.

Para obtener soluciones enteras de la ecuación diofántica $ax - by = 1$, los hindúes trabajaban:
Sea:

$$ax - by = 1 \text{ tal que } a \geq b.$$

Dividimos a entre b:

$$a = bq + r, \text{ entonces } (bq + r)x - by = 1.$$

Despejando y:

$$y = qx + \frac{rx - 1}{b}.$$

Donde para que y sea un número entero, $z = \dfrac{rx-1}{b}$ tiene que serlo también.
Luego $rx - bz = 1$ deberá tener soluciones enteras.
Hemos obtenido otra ecuación diofántica $rx - bz = 1$ donde sus coeficientes son menores que los de la ecuación inicial $ax - by = 1$, pues $r < b,\ b < a$.

Volvemos a repetir el proceso un cierto número de veces hasta llegar a una expresión de la forma $r_u u - pv = 1$, donde r_u es el último resto distinto de cero y donde p es el último divisor.

Por otra parte como el m. c. d.$(a, b) = 1$, entonces $r_u = 1$, de donde $u = pv + 1$, que nos permite obtener las soluciones de la ecuación propuesta $ax - by = 1$ sin más que ir sustituyendo las incógnitas que surgen en el proceso hasta obtener x e y en función de v.

Realmente lo que se está haciendo es un proceso análogo al **algoritmo de Euclides** que sirve para hallar el m. c. d.(a, b). En dicho algoritmo se concluye que el m. c. d.(a, b) es el último resto distinto de cero.

Ejercicio. 6.1.
Halla las soluciones enteras no negativas de la siguiente ecuación:

$$91x - 195y = 1079.$$

SOLUCIÓN.
Vemos si la ecuación diofántica tiene solución: $\text{m.c.d.}(91, 195) = 13$, y como 13 divide a 1079, la ecuación tiene soluciones enteras.
Dividimos todos los coeficientes por 13, obteniendo la siguiente ecuación:

$$7x + 15y = 83$$

Calculamos una solución particular mediante el algoritmo de Euclides:
Dividimos 15 entre 7, que da de cociente 2 y de resto 1. Por lo tanto el $\text{m.c.d.}(7, 15) = 1$.
Aplicando el algoritmo de la división:

$$15 = 7 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 15 - 7 \cdot 2 = 1 \Rightarrow 7 \cdot (-2) + 15 \cdot 1 = 1 \text{ (identidad de Bezout)}$$

Multiplicando por 83:

$$7 \cdot (-2 \cdot 83) + 15 \cdot (1 \cdot 83) = 1 \cdot 83$$
$$7 \cdot (-166) + 15 \cdot 83 = 83$$

Luego la solución particular es (-166,83).

Por último calculamos la solución general:

$$\begin{cases} x = -166 + 15t \\ y = \quad 83 \; - \; 7t \end{cases} \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Pero el enunciado pide las soluciones no negativas:

$$x \geq 0 \Rightarrow -166 + 15t \geq 0 \Rightarrow 15t \geq 166 \Rightarrow t \geq \frac{166}{15} \Rightarrow t \geq 11{,}07 \Rightarrow t \geq 12.$$

$$y \geq 0 \Rightarrow 83 - 7t \geq 0 \Rightarrow 83 \geq 7t \Rightarrow \frac{83}{7} \geq t \Rightarrow 11{,}85 \geq t \Rightarrow 11 \geq t.$$

Por lo tanto no tiene soluciones enteras positivas. □

Ejercicio. 6.2.
Halla las soluciones enteras de la siguiente ecuación aplicando el algoritmo de Euclides:

$$25x - 9y = 1.$$

SOLUCIÓN.
La ecuación diofántica tiene soluciones enteras ya que $\text{m.c.d.}(25,9) = 1$.
Dividimos 25 entre 9, que da de cociente 2 y resto 7. Aplicando algoritmo de la división:

$$25 = 9 \cdot 2 + 7$$

Sustituimos en la ecuación:

$$(9 \cdot 2 + 7)x - 9y = 1$$
$$y = 2x + \frac{7x-1}{9}, \text{ tal que } \frac{7x-1}{9} = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}.$$
$$7x - 1 = 9z$$
$$7x - 9z = 1$$

Dividimos ahora 9 entre 7, que da de cociente 1 y resto 2:

$$9 = 7 \cdot 1 + 2$$

Sustituimos:

$$7x - (7 \cdot 1 + 2)z = 1$$
$$x = z + \frac{2z+1}{7}, \text{ tal que } \frac{2z+1}{7} = u, \text{ para todo } u \in \mathbb{Z}.$$
$$2z + 1 = 7u$$
$$7u - 2z = 1$$

Continuamos dividiendo 7 entre 2, que da de cociente 3 y resto 1:

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

Sustituimos:

$$(2 \cdot 3 + 1)u - 2z = 1$$
$$z = 3u + \frac{u-1}{2}, \text{ tal que } \frac{u-1}{2} = v, \text{ para todo } v \in \mathbb{Z}.$$
$$u - 1 = 2v$$
$$u - 2v = 1$$

Hemos llegado a la última división, ya que es el último resto distinto de cero. Hemos calculado que el $\text{m.c.d.}(25,9) = 1$ mediante el algoritmo de Euclides.

Despejamos la última ecuación en función de v y sustituimos en las demás ecuaciones:

- $u = 1 + 2v$.
- $z = 3u + \dfrac{u-1}{2} = 3(1+2v) + \dfrac{1+2v-1}{2} = 3 + 6v + v$.
$$z = 3 + 7v.$$
- $x = z + \dfrac{2z+1}{7} = 3 + 7v + \dfrac{2(3+7v)+1}{7} = 3 + 7v + \dfrac{6+14v+1}{7} = 3 + 7v + \dfrac{7+14v}{7} = 3 + 7v + 1 + 2v$.
$$x = 4 + 9v.$$
- $y = 2x + \dfrac{7x-1}{9} = 2(4+9v) + \dfrac{7(4+9v)-1}{9} = 8 + 18v + \dfrac{28+63v-1}{9} = 8 + 18v + \dfrac{27+63v}{9} = 8 + 18v + 3 + 7v$.
$$y = 11 + 25v.$$

Por lo tanto las soluciones enteras son:

$$\begin{cases} x = 4 + 9v \\ y = 11 + 25v \end{cases} \text{para todo } v \in \mathbb{Z}.$$

□

Ejercicio. 6.3.
Calcula de dos maneras diferentes las soluciones enteras de la siguiente ecuación :

$$35x - 25y = 3.$$

SOLUCIÓN.

1. Vemos si la ecuación diofántica tiene solución: $\text{m.c.d.}(35, 25) = 1$, como 1 divide a 3, la ecuación tiene soluciones enteras.

   Calculamos una solución particular:
$$y = \frac{37x - 3}{25}$$
   Los números $0, 1, 2, 3, \ldots, 24$, forman un sistema completo de números incongruentes módulo 25. Sustituimos estos valores en la incógnita x. El resultado cuya división euclídea para 25 tiene resto 0 es:
$$\text{Si } x = 19,\ y = \frac{37 \cdot 19 - 3}{25} = \frac{700}{25} = 28.$$
   Luego la solución particular es $(x, y) = (19, 28)$.

   Por último calculamos la solución general:
$$\begin{cases} x = 19 + 25t \\ y = 28 + 37t \end{cases} \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

2. Dividimos 37 entre 25, que da de cociente 1 y resto 12:

$$37 = 25 \cdot 1 + 12$$

Sustituimos:

$$(25 \cdot 1 + 12)x - 25y = 3$$
$$y = x + \frac{12x-3}{25},\ \text{tal que } \frac{12x-3}{25} = z,\ \text{para todo } z \in \mathbb{Z}.$$
$$12x - 3 = 25z$$
$$12x - 25z = 3$$

Dividimos ahora 25 entre 12, que da de cociente 2 y resto 1:

$$25 = 12 \cdot 2 + 1$$

Sustituimos:

$$12x - (12 \cdot 2 + 1)z = 3$$
$$x = 2z + \frac{z+3}{12},\ \text{tal que } \frac{z+3}{12} = u,\ \text{para todo } u \in \mathbb{Z}.$$
$$z + 3 = 12u$$
$$12u - z = 3$$

Hemos llegado a la última división, ya que es el último resto distinto de cero. Hemos calculado que el $\text{m.c.d.}(37,25) = 1$ mediante el algoritmo de Euclides.

Despejamos la última ecuación en función de u y sustituimos en las demás ecuaciones:

- $z = 12u - 3$.
- $x = 2z + \frac{z+3}{12} = 2(12u-3) + \frac{12u-3+3}{12} = 24u - 6 + u$.
$$x = -6 + 25u.$$
- $y = x + \frac{12x-3}{25} = -6 + 25u + \frac{12(-6+25u)-3}{25} = -6 + 25u + \frac{-72+300u-3}{25} = -6 + 25u - 3 + 12u$.
$$y = -9 + 37u.$$

Por lo tanto las soluciones enteras son:

$$\begin{cases} x = -6 + 25u \\ y = -9 + 37u \end{cases} \text{para todo } u \in \mathbb{Z}.$$

□

Ejercicio. 6.4.
En Correos solo se tienen sellos de 14 y 21 céntimos. ¿De qué formas puede franquear un paquete por importe de 7,77 euros?

SOLUCIÓN.
LLamamos:
x: número de sellos de 14 céntimos.
y: número de sellos de 21 céntimos.
Donde x e y tienen que ser números enteros positivos.

Planteamos la ecuación diofántica:

$$14x + 21y = 777$$

Como el $\text{m.c.d.}(14, 21) = 7$ divide a 777, la ecuación tiene solución.
Dividimos todos los coeficientes por 7 y obtenemos una ecuación que tiene las mismas soluciones:

$$2x + 3y = 111$$

Obtenemos una solución particular:
Dividimos 3 entre 2, que da de cociente 1 y resto 1:

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$-2 + 3 = 1$$

Multiplicando por 111 obtenemos una solución particular: $2(-1 \cdot 111) + 3 \cdot 111 = 1 \cdot 111$.
La solución particular es $(x, y) = (-111, 111)$.

Por último calculamos la solución general:

$$\begin{cases} x = -111 + 3t \\ y = \quad 111 - 2t \end{cases} \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Pero el número de sellos tiene que ser un número natural:

$$x \geq 0 \Rightarrow -111 + 3t \geq 0 \Rightarrow 3t \geq 111 \Rightarrow t \geq \frac{111}{3} \Rightarrow t \geq 37.$$

$$y \geq 0 \Rightarrow 111 - 2t \geq 0 \Rightarrow 111 \geq 2t \Rightarrow \frac{111}{2} \geq t \Rightarrow 55,5 \geq t \Rightarrow 55 \geq t.$$

Las posibles formas para franquear el paquete son $(x, y) = (-111 + 3t, 111 - 2t),\ 37 \leq t \leq 54.$ □

7. CON n INCÓGNITAS

Sea la **ecuación lineal con n incógnitas** $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$. Se ha demostrado que $ax \pm by = c$ tiene solución si y solo si el m.c.d. de a y b es también divisor de c. Análogamente ocurre si tenemos una ecuación con n incógnitas.

Teorema. 7.1.
La ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ tendrá solución si y solo si el m.c.d. *de los a_j, para $j = 1, 2, \ldots, n$, es también divisor de c.*

DEMOSTRACIÓN.
Se demuestra por inducción:
Para $n = 1$, $ax = c$, que tendrá solución en $\mathbb{Z}$ si y solo si c es múltiplo de a.
Para $n = 2$, estamos en el caso del apartado anterior.
Suponemos cierto para $n-1$, es decir, $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} = c'$ tiene solución si y solo si $d = \text{m.c.d.}\{a_i\}$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, entonces d es un divisor de c' si y solo si existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $dh = c'$, si y solo si $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} = dh$.
Por lo tanto la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ la podemos escribir $dh + a_nx_n = c$, ecuación diofántica de la que para resolverla debemos hallar h y x_n. Hemos obtenido una ecuación que corresponde al apartado anterior, y tendrá solución si y solo si el $\text{m.c.d.}(d, a_n)$ divide a c.

Veámoslo:
Sea p el $\text{m.c.d.}(d, a_n)$, divisor también de c según el apartado anterior. Basta con demostrar que p es el m.c.d. de todos los a_j para $j = 1, 2, \ldots, n$.
En efecto, como p es el $\text{m.c.d.}(d, a_n)$, es también divisor de los primeros a_i para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, pues d es divisor de todos ellos. Por lo tanto p divide a todos los a_j para $j = 1, 2, \ldots, n$. Luego p es el m.c.d. de todos los a_j para $j = 1, 2, \ldots, n$.

□

Vamos a ver el caso particular para $n = 3$, es decir, **ecuaciones diofánticas lineales con tres incógnitas**:
Son ecuaciones del tipo:

$$ax + by + cz = f, \text{ para todo } a, b, c, f \in \mathbb{Z}.$$

Esta ecuación tiene solución si y solo si $d = \text{m.c.d.}(a, b, c)$, entonces d divide a f.
Llamamos $e = \text{m.c.d.}(a, b)$, y estudiamos la ecuación diofántica:

$$ax + by = e.$$

Si (x_0, y_0) es una solución particular, la solución general es:

$$(x, y) = (x_0 + bh, y_0 - ah), \text{ para todo } h \in \mathbb{Z}.$$

Para cualesquiera valores de $x, y \in \mathbb{Z}$, se verifica que $ax + by = ek$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Si (x, y) es una solución de $ax + by = e$, entonces (xk, yk) es una solución de $ax + by = ek$. Las soluciones de esta última ecuación son de la forma $((x_0 + bh)k, (y_0 - ah)k)$.

Podemos entonces considerar la ecuación $ax + by + cz = f$ como $ek + cz = f$. En esta nueva ecuación diofántica en las variables k y z se verifica que el m. c. d.(e, c) es también divisor de f. Si (k_0, z_0) es una solución particular, todas las soluciones son de la forma: $(k_0 + ct, z_0 - et)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Tenemos que si (k, z) es una solución de $ek + cz = f$, entonces:

$$(x, y, z) = ((x_0 + bh)(k_0 + ct), (y_0 - ah)(k_0 + ct), z_0 - et),$$

es una solución de $ax + by + cz = f$.

Ejercicio. 7.2.
Halla las soluciones enteras de la siguiente ecuación:

$$6x + 10y + 15z = 31.$$

SOLUCIÓN.

- La ecuación tiene soluciones enteras ya que m. c. d.$(6, 10, 15) = 1$.
- Tomamos el m. c. d.$(6, 10) = 2$. Se comprueba que el m. c. d.$(2, 15) = 1$.
- Consideramos la ecuación $6x + 10y = 2$. Dividimos todos los coeficientes por 2:

  $$3x + 5y = 1.$$

  Una solución particular es $(x_0, y_0) = (-3, 2)$. Por lo tanto la solución general es:

  $$(x, y) = (-3 + 5h, 2 - 3h), \text{ para todo } h \in \mathbb{Z}.$$

- Consideramos ahora la ecuación $6x + 10y = 2k$, cuyas soluciones son:

  $$(xk, yk) = ((-3 + 5h)k, (2 - 3h)k)$$

- Tomamos la ecuación original como:

  $$2k + 15z = 31.$$

  Calculamos una solución particular $(k_0, z_0) = (8, 1)$. Por lo tanto la solución general es:

  $$(k, z) = (8 + 15t, 1 - 2t), \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

- Por último tenemos entonces que:

  $$(x, y, z) = ((-3 + 5h)(8 + 15t), (2 - 3h)(8 + 15t), 1 - 2t),$$

  es la expresión general de cualquier solución de la ecuación $6x + 10y + 15z = 31$.

□

Ejercicio. 7.3.
Dado el siguiente plano, encuentra los puntos del mismo cuyas coordenadas son números enteros:

$$6x + 8y + 14z - 22 = 0.$$

SOLUCIÓN.
Como los coeficientes son números enteros y los puntos que nos piden también, se trata de resolver la siguiente ecuación diofántica con tres incógnitas:

$$6x + 8y + 14z = 22$$

- La ecuación tiene soluciones enteras ya que $\text{m.c.d.}(6,8,14) = 2$, y 2 divide a 22.
- Dividimos todos los coeficientes por 2, y queda la siguiente ecuación equivalente:

$$3x + 4y + 7z = 11$$

- Tomamos el $\text{m.c.d.}(3,4) = 1$. Se comprueba que el $\text{m.c.d.}(1,7) = 1$.
- Consideramos la ecuación $3x + 4y = 1$.
  Una solución particular es $(x_0, y_0) = (-1, 1)$. Por lo tanto la solución general es:

$$(x, y) = (-1 + 4h, 1 - 3h), \text{ para todo } h \in \mathbb{Z}.$$

- Consideramos ahora la ecuación $3x + 4y = k$, cuyas soluciones son:

$$(xk, yk) = ((-1 + 4h)k, (1 - 3h)k)$$

- Tomamos la ecuación original como:

$$k + 7z = 11.$$

  Calculamos una solución particular $(k_0, z_0) = (4, 1)$. Por lo tanto la solución general es:

$$(k, z) = (4 + 7t, 1 - t), \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

- Por último tenemos entonces que:

$$(x, y, z) = ((-1 + 4h)(4 + 7t), (1 - 3h)(4 + 7t), 1 - t),$$

  es la expresión general de cualquier solución de la ecuación $6x + 8y + 14z = 22$.
  Por lo tanto, dando valores a h y a t, encontramos los puntos del plano con las coordenadas enteras.

□

8. SISTEMAS DE ECUACIONES

En los **sistemas de ecuaciones lineales diofánticas** se trata de estudiar las soluciones de un conjunto de ecuaciones. Para ello basta con aplicar lo estudiado hasta ahora sobre ecuaciones diofánticas lineales y resolución de sistemas de ecuaciones mediante la regla de Cramer, el método de Gauss-Jordan y el teorema de Rouche Frobenius. Recordar que este último teorema nos dice que un sistema tendrá solución si y solo si el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.

Además una condición necesaria para que haya soluciones enteras es que en cada una de las ecuaciones que componen el sistema, el máximo común divisor de los coeficientes que acompañan a las incógnitas divida también al término independiente de la ecuación.

Ejercicio. 8.1.
Halla las soluciones enteras del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+4y-5z=17 \\ 3x-7y+4z=2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN.
Vemos si el sistema tiene solución. El rango de la matriz de coeficientes es 2, igual que el de la matriz ampliada, pero distinto del número de incógnitas, luego es un Sistema Compatible Indeterminado, con infinitas soluciones.
Tomamos z como parámetro y despejamos:

$$\begin{cases} 3x+4y=17+5z \\ 3x-7y=\ \ 2-4z \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones:

$$11y=15+9z.$$

Multiplicando la primera ecuación por 7 y la segunda por 4, y restando:

$$33x=127+19z.$$

Resolvemos la ecuación diofántica:

$$33x-19z=127,$$

que tiene solución entera ya que $m.c.d.(33,19)=1$.
Calculamos una solución particular:

$$z=\frac{33x-127}{19}$$

Los números $0,1,2,3,4,\ldots,18$, forman un sistema completo de números incongruentes módulo 19. Sustituimos estos valores en la incógnita x. El resultado cuya división euclídea para 19 tiene resto 0 es:

$$\text{Si } x=5,\ z=\frac{33\cdot 5-127}{19}=\frac{38}{19}=2.$$

Luego la solución particular es $(x,z) = (5,2)$.

Calculamos la solución general:

$$\begin{cases} x = 5 + 19t \\ z = 2 - 33t \end{cases} \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Sustituimos z en la ecuación:

$$11y = 15 + 9z$$
$$11y = 15 + 9(2 - 33t)$$
$$11y = 15 + 18 - 297t$$
$$y = \frac{33 - 297t}{11}$$
$$y = 3 - 27t$$

Las soluciones enteras del sistema de ecuaciones son:

$$(x,y,z) = (5 + 19t, 3 - 27t, 2 - 33t), \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

□

Ejercicio. 8.2.
En una bolsa hay monedas de 5, 10 y 20 céntimos. Se sabe que hay en total 24 monedas y que su valor es 2 euros. ¿Qué combinaciones de monedas son posibles?

SOLUCIÓN.
Llamamos:
x: número de monedas de 5 céntimos.
y: número de monedas de 10 céntimos.
z: número de monedas de 20 céntimos.
Con las dos condiciones del enunciado, queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ 5x + 10y + 20z = 200 \end{cases}$$

Dividiendo por 5 la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ x + 2y + 4z = 40 \end{cases}$$

Donde x, y, z son números enteros positivos.

Vemos si el sistema tiene solución. El rango de la matriz de coeficientes es 2, igual que el de la matriz ampliada, pero distinto del número de incógnitas, luego es un Sistema Compatible Indeterminado, con infinitas soluciones.

Despejando z de la primera ecuación:

$$z = 24 - x - y.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$x + 2y + 4(24 - x - y) = 40$$

$$x + 2y + 96 - 4x - 4y = 40$$

$$3x + 2y = 56$$

Ecuación diofántica lineal de dos incógnitas, que tiene soluciones enteras ya que $\text{m.c.d.}(3,2) = 1$.
Calculamos una solución particular: $(x, y) = (0, 28)$.

Calculamos la solución general:

$$\begin{cases} x = & 2t \\ y = 28 - 3t \end{cases} \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación:

$$z = 24 - x - y$$

$$z = 24 - 2t - 28 + 3t$$

$$z = -4 + t$$

Las soluciones enteras del sistema de ecuaciones son:

$$(x, y, z) = (2t, 28 - 3t, -4 + t), \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Pero x, y, z tienen que ser números positivos:

- $x \geq 0 \Rightarrow 2t \geq 0 \Rightarrow t \geq 0$.
- $y \geq 0 \Rightarrow 28 - 3t \geq 0 \Rightarrow 28 \geq 3t \Rightarrow \dfrac{28}{3} \geq t \Rightarrow 9 \geq t$.
- $z \geq 0 \Rightarrow -4 + t \geq 0 \Rightarrow t \geq 4$.

Las soluciones naturales del sistema de ecuaciones son:

$$(x, y, z) = (2t, 28 - 3t, -4 + t), \ 4 \leq t \leq 9.$$

□

Capítulo III

Ecuaciones diofánticas cuadráticas

9. ECUACIÓN $x^2 - y^2 = t$

Se trata de una **ecuación de segundo grado con dos incógnitas** x e y, es decir, una **ecuación diofántica cuadrática**, que podemos escribir:

$$(x+y)(x-y) = t.$$

Podemos descomponer el número entero t de todas las formas posibles:

$$t = t_1 \cdot t_2,$$

donde t_1 y t_2 son a la vez pares o a la vez impares, pues la suma y diferencia de dos enteros x e y son de igual paridad. Así:

$$\begin{cases} x + y = t_1 \\ x - y = t_2 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones calculamos x:

$$x = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

Restando las ecuaciones calculamos y:

$$y = \frac{t_1 - t_2}{2}$$

El razonamiento anterior nos muestra que existe solución si y solamente si t se puede descomponer como producto de números con las misma paridad:

- Si t es impar, siempre existirá solución, ya que solo se puede escribir como producto de números impares.
- Si a es par, hay que hacer las siguientes observaciones:
  - t no es divisible entre 4. Esto significa que el 2^1 está en la descomposición factorial de t, y en cualquier producto de dos factores, uno será par y el otro impar. No existe solución en este caso.
  - t sí es divisible entre 4. En este caso se podrá expresar como producto de dos factores pares. Sí existe solución.

  Al ser t_1 y t_2 de igual paridad, la ecuación no admitirá soluciones si t siendo múltiplo de 2 no lo fuese de 4.

La **interpretación geométrica** de la solución de la ecuación diofántica $x^2 - y^2 = t$ es obtener los puntos de coordenadas enteras de la gráfica de la correspondiente hipérbola equilátera.

Ejercicio. 9.1.
Halla las soluciones enteras de la siguiente ecuación:

$$x^2 - y^2 = 98.$$

SOLUCIÓN.
Se trata de una ecuación diofántica de dos incógnitas, donde la diferencia de cuadrados se escribe como suma por diferencia:

$$(x+y)(x-y) = 98.$$

La descomposición factorial del número 98 es: $98 = 2 \cdot 7^2$, número par pero no divisible por 4. Por lo tanto la ecuación no tiene soluciones enteras.
Lo comprobamos:
Descomponemos 98 como producto de dos factores: $98 = t_1 \cdot t_2$:

- $t_1 = 1, t_2 = 98.$

  $$\begin{cases} x + y = \ \ 1 \\ x - y = 98 \end{cases}$$

  Sumamos las ecuaciones, entonces:

  $$x = \frac{1+98}{2} = \frac{99}{2}$$

  Por lo tanto $x \notin \mathbb{Z}$.

  Restamos las ecuaciones, entonces:

  $$y = \frac{1-98}{2} = \frac{-97}{2}$$

  Por lo tanto $y \notin \mathbb{Z}$.

- $t_1 = 2, t_2 = 49.$

  $$\begin{cases} x + y = \ \ 2 \\ x - y = 49 \end{cases}$$

  Sumamos las ecuaciones, entonces:

  $$x = \frac{2+49}{2} = \frac{51}{2}$$

  Por lo tanto $x \notin \mathbb{Z}$.

  Restamos las ecuaciones, entonces:

  $$y = \frac{2-49}{2} = \frac{-47}{2}$$

  Por lo tanto $y \notin \mathbb{Z}$.

- $t_1 = 14, t_2 = 7$.

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = \ \ 7 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$x = \frac{14+7}{2} = \frac{21}{2}$$

Por lo tanto $x \notin \mathbb{Z}$.

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$y = \frac{14-7}{2} = \frac{7}{2}$$

Por lo tanto $y \notin \mathbb{Z}$.

□

Ejercicio. 9.2.
Halla dos números enteros cuya diferencia de cuadrados sea igual a 36.

SOLUCIÓN.
Se trata de una ecuación diofántica de dos incógnitas:

$$x^2 - y^2 = 36, \text{ donde } x, y \in \mathbb{Z}.$$

La diferencia de cuadrados se escribe como suma por diferencia:

$$(x + y)(x - y) = 36.$$

La descomposición factorial del número 36 es: $36 = 2^2 \cdot 3^2$, número par divisible por 4. Por lo tanto la ecuación tiene soluciones enteras.
Descomponemos 36 como producto de dos factores: $36 = t_1 \cdot t_2$:

- $t_1 = 1, t_2 = 36$. No hay solución, tienen distinta paridad.
- $t_1 = 2, t_2 = 18$.

$$\begin{cases} x + y = \ \ 2 \\ x - y = 18 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$x = \frac{2+18}{2} = \frac{20}{2}$$
$$x = 10.$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$y = \frac{2-18}{2} = \frac{-16}{2}$$
$$y = -8.$$

- $t_1 = 4, t_2 = 9$. No hay solución, tienen distinta paridad.
- $t_1 = 12, t_2 = 3$. No hay solución, tienen distinta paridad.
- $t_1 = 6, t_2 = 6$.
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 6 \end{cases}$$
Sumamos las ecuaciones, entonces:
$$x = \frac{6+6}{2} = \frac{12}{2}$$
$$x = 6.$$
Restamos las ecuaciones, entonces:
$$y = \frac{6-6}{2} = \frac{0}{2}$$
$$y = 0.$$
- $t_1 = 18, t_2 = 2$.
$$\begin{cases} x + y = 18 \\ x - y = \ \ 2 \end{cases}$$
Sumamos las ecuaciones, entonces:
$$x = \frac{18+2}{2} = \frac{20}{2}$$
$$x = 10.$$
Restamos las ecuaciones, entonces:
$$y = \frac{18-2}{2} = \frac{16}{2}$$
$$y = 8.$$
- $t_1 = 36, t_2 = 1$. No hay solución, tienen distinta paridad.

Por lo tanto las soluciones enteras son: $(x, y) = (10, -8);\ (6, 0);\ (10, 8)$. □

10. ECUACIÓN PITAGÓRICA

Se trata de la ecuación diofántica $x^2+y^2=z^2$, que bajo consideraciones geométricas equivale a obtener todos los **triángulos rectángulos cuyos lados tienen longitudes enteras**.

Los primeros números pitagóricos empleados fueron 3, 4 y 5, y podemos obtener a partir de ellos infinitos números pitagóricos sin más que multiplicarlos por cualquier entero $\lambda : 3\lambda, 4\lambda, 5\lambda$.

Si una solución de la ecuación es la terna $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, también lo es $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3),$ para todo $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Teorema. 10.1.
Si dos valores cualesquiera de los x, y, z tienen un divisor primo común, sea $t \in \mathbb{Z}$, entonces t será divisor del tercero.

DEMOSTRACIÓN.
Sea t tal que:

$$\begin{cases} t \text{ divide a } x, \text{ entonces existe } t_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } t_1 t = x. \\ t \text{ divide a } y, \text{ entonces existe } t_2 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } t_2 t = y. \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$(t_1 t)^2 + (t_2 t)^2 = z^2$$

$$t^2(t_1^2 + t_2^2) = z^2$$

$$tt(t_1^2 + t_2^2) = z^2$$

Por lo que t divide a z^2, y como t es primo, entonces t divide a z.

□

Por lo tanto se tratará de buscar las ternas de soluciones de forma que tomados de dos en dos sean primos entre sí. A este tipo de soluciones las conocemos con el nombre de **primitivas**.

Por otro lado si x e y son impares, entonces:

$$\begin{cases} x = 2n+1 \\ y = 2p+1 \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$(2n+1)^2 + (2p+1)^2 = z^2$$

$$4n^2 + 1 + 4n + 4p^2 + 1 + 4p = z^2$$

$$4(n^2 + n + p^2 + p) + 2 = z^2$$

$$4(n^2 + n + p^2 + p) = z^2 - 2$$

Por lo tanto:

$$z^2 \equiv 2 \text{ (módulo 4)},$$

que no es posible.

Como x e y no pueden ser tampoco a la vez pares (pues tendríamos un divisor común), tenemos que uno será par y otro impar.

Supongamos x impar e y par, entonces $y = 2k$. Sustituyendo en la ecuación:

$$x^2 + (2k)^2 = z^2$$

$$(2k)^2 = z^2 - x^2$$

$$1 = \left(\frac{z}{2k}\right)^2 - \left(\frac{x}{2k}\right)^2,$$

y estamos en el caso de la ecuación diofántica $x^2 - y^2 = t$.

$$\left(\frac{z}{2k} + \frac{x}{2k}\right) \cdot \left(\frac{z}{2k} - \frac{x}{2k}\right) = 1 \tag{III.1}$$

Donde:

$\dfrac{z}{2k} + \dfrac{x}{2k} = \dfrac{z+x}{2k} = \dfrac{z+x}{y}$.

$\dfrac{z}{2k} - \dfrac{x}{2k} = \dfrac{z-x}{2k} = \dfrac{z-x}{y}$.

Según (III.1), $\dfrac{z+x}{y}$ es la fracción inversa de $\dfrac{z-x}{y}$.

Escribimos:

$$\begin{cases} \dfrac{z}{2k} + \dfrac{x}{2k} = \dfrac{j}{s} \\ \dfrac{z}{2k} - \dfrac{x}{2k} = \dfrac{s}{j} \end{cases} \tag{III.2}$$

Sumando miembro a miembro en (III.2):

$$\frac{z}{k} = \frac{j}{s} + \frac{s}{j} = \frac{j^2 + s^2}{sj},$$

donde tanto $\dfrac{z}{k}$ como $\dfrac{j^2 + s^2}{sj}$ son fracciones irreducibles, entonces:

$$\begin{cases} \boldsymbol{z = j^2 + s^2} \\ k = \quad sj \end{cases}$$

Como $y = 2k$:

$$\frac{y}{2} = sj$$

$$\boldsymbol{y = 2sj}.$$

Restando las igualdades en (III.2):

$$\frac{x}{k} = \frac{j}{s} - \frac{s}{j} = \frac{j^2 - s^2}{sj}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{x = j^2 - s^2.}$$

Hemos obtenido tres ecuaciones que son la **solución de la ecuación pitagórica**:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = j^2 - s^2} \\ \boldsymbol{y = \ \ 2sj} \\ \boldsymbol{z = j^2 + s^2} \end{cases}$$

Tomando pares de valores enteros (j, s) obtenemos las ternas de soluciones buscadas.

Ejercicio. 10.2.
Demostrar que el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo pitagórico de lados enteros es siempre un número natural.

SOLUCIÓN.
Llamamos r al radio de la circunferencia inscrita, sean x, y, z las longitudes de los lados del triángulo rectángulo, donde x, y son los catetos y z la hipotenusa. Aplicando el teorema de Pitágoras, nos queda la ecuación pitagórica:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

El área del triángulo es: $A = \dfrac{xy}{2}$.
Si unimos el centro de la circunferencia inscrita con los vértices del triángulo, éste queda dividido en tres triángulos cuya suma de áreas es el área del triángulo inicial:

$$\frac{xy}{2} = \frac{xr}{2} + \frac{yr}{2} + \frac{zr}{2}$$

$$xy = xr + yr + zr \Rightarrow xy = r(x + y + z).$$

Despejando el radio:

$$r = \frac{xy}{x + y + z}$$

La solución de la ecuación pitagórica es:

$$\begin{cases} x = j^2 - s^2 \\ y = \ \ 2sj \\ z = j^2 + s^2 \end{cases}$$

Donde j y s son números naturales, $j \geq s$ para que las soluciones sean enteros positivos.
Sustituyendo:

$$r = \frac{2sj(j^2 - s^2)}{j^2 - s^2 + 2sj + j^2 + s^2} = \frac{2sj(j^2 - s^2)}{2j^2 + 2sj} = \frac{sj(j + s)(j - s)}{j(j + s)} = s(j - s),$$

que es un número natural. □

11. ECUACIÓN DEL PELL

La llamada **ecuación de Pell** es la ecuación diofántica cuadrática que tiene la forma $\boldsymbol{x^2 - Dy^2 = t}$.

Brahmagupta estudió la ecuación diofántica $x^2 = 1 + py^2$, que fue resuelta en algunos casos particulares por el también hindú Bhaskara.

Fue estudiada, entre otros, por Leonhard Euler, que fue quien le atribuyó el nombre. El matemático francés Pierre Fermat la planteó en el siglo XVII, y en el caso de que $t = 1$ y $D > 0$, siendo D un natural que no posee cuadrados en su descomposición factorial, conjeturó que esta ecuación tiene infinitas soluciones enteras, además de la trivial $x = \pm 1, y = 0$, demostración realizada por Joseph Louis Lagrange a finales del siglo XVII.

La solución de esta ecuación se realiza, suponiendo $x > 1, y > 0$, y haciendo uso de la ecuación equivalente:

$$(x + \sqrt{D}y)(x - \sqrt{D}y) = 1.$$

Si $D = d^2$ es un cuadrado perfecto no hay soluciones distinta de la trivial, ya que la ecuación queda:

$$x^2 - (dy)^2 = 1,$$

y la diferencia de dos cuadrados solo puede ser 1 si el minuendo es 1 y el sustraendo es 0. Pero si D no es un cuadrado perfecto, la solución tiene infinitas soluciones.

Vamos a mostrar como a partir de una solución particular pueden generarse las demás soluciones. Asociamos a cada solución (x, y) el número $x + \sqrt{D}y$, de tal manera que:

$$x^2 - Dy^2 = (x + \sqrt{D}y)(x - \sqrt{D}y) = 1.$$

Si $x, y > 0$ entonces se tiene:

$$x + \sqrt{D}y > 1, \quad x - \sqrt{D}y < 1.$$

Sea u, v otra solución de la ecuación, entonces:

$$u^2 - Dv^2 = (u + \sqrt{D}v)(u - \sqrt{D}v) = 1.$$

Si multiplicamos miembro a miembro:

$$(x + \sqrt{D}y)(u + \sqrt{D}v)(x - \sqrt{D}y)(u - \sqrt{D}v) = 1,$$

es decir,

$$(x + \sqrt{D}y)(u + \sqrt{D}v) = (xu + Dyv) + (xv + yu)\sqrt{D},$$

es el valor asociado a la solución $(xu + Dyv, xv + yu)$. En particular, si a partir de una solución (x_1, y_1) se definen x_n e y_n mediante la igualdad:

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n.$$

Se tienen infinitas soluciones (x_n, y_n), que pueden escribirse explícitamente como:

$$x_n = \frac{1}{2}((x_1 + y_1\sqrt{D})^n + (x_1 - y_1\sqrt{D})^n).$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}((x_1 + y_1\sqrt{D})^n - (x_1 - y_1\sqrt{D})^n).$$

Es claro que si (x, y) es solución, entonces $(-x, y)$, $(x, -y)$ y $(-x, -y)$ también lo son.
Por lo tanto es suficiente con buscar las soluciones (x, y) con $x > 0$, $y > 0$. Entre éstas, suponemos que (x_1, y_1) es aquella para la cual $x_1 + y_1\sqrt{D}$ es mínimo. En este caso las soluciones (x_n, y_n) son todas las soluciones positivas de la ecuación de Pell. En efecto, como:

$$1 < x_1 + y_1\sqrt{D} < (x_1 + y_1\sqrt{D})^2 < (x_1 + y_1\sqrt{D})^3 < \dots$$

si u, v es otra solución que no coincide con ninguna (x_n, y_n), entonces $u + v\sqrt{D}$ debe estar comprendido entre dos términos consecutivos de la sucesión anterior, es decir,

$$(x_1 + y_1\sqrt{D})^k < u + v\sqrt{D} < (x_1 + y_1\sqrt{D})^{k+1}.$$

Multiplicando todo por $(x_1 - y_1\sqrt{D})^k$ resulta:

$$1 < (u + v\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})^k < x_1 + y_1\sqrt{D}.$$

Como el término medio es mayor que 1, entonces corresponde a una solución positiva. Pero esto es absurdo por la forma en que se tomó (x_1, y_1).

La importancia de la ecuación de Pell está en que todas las ecuaciones cuadráticas en dos variables se pueden reducir a una de Pell:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \text{ para todo } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}.$$

$$ax^2 + (by + d)x + (cy^2 + ey + f) = 0.$$

Ecuación de segundo grado en x que tiene soluciones enteras si el discriminante es un cuadrado perfecto.

$$(by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f) = w^2, \text{ para todo } w \in \mathbb{Z},$$

entonces:

$$(b^2 - 4ac)y^2 + (2bd - 4ae)y + (d^2 - 4af) - w^2 = 0.$$

Llamando $b^2 - 4ac = p;\ 2bd - 4ae = q;\ d^2 - 4af = r$, se tiene:

$$py^2 + qy + r - w^2 = 0.$$

Ecuación de segundo grado en y que tiene soluciones enteras si el discriminante es un cuadrado perfecto.

$$q^2 - 4p(r - w^2) = z^2, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}, \text{ entonces } \boldsymbol{z^2 - 4pw^2 = q^2 - 4pr}.$$

Ecuación de Pell con $D = 4p$ y $t = q^2 - 4pr$.

12. TEOREMA DE LAGRANGE $m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

En 1621, **Bachet de Méziriac** conjeturó que todo número natural se puede escribir como suma de cuatro cuadrados, dando numerosos ejemplos. Posteriormente, en el siglo XVII, Pierre Fermat afirmó haber demostrado dicha conjetura, aunque no ha llegado su demostración.

Fue **Joseph-Louis Lagrange** quien en el siglo XVII dio solución al siguiente resultado: Dado m natural, la ecuación diofántica $m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ tiene solución.

La demostración se realiza tomando una identidad de Euler que permite reducir la demostración a los casos en los que m es un número primo.

A continuación demuestra que dado cualquier primo m mayor que dos, existen $n, x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq n < \frac{m}{2}$ y que $mn = 1 + x_0^2 + y_0^2$, resultado que, junto con otros resultados de la teoría de congruencias, dan solución al problema.

13. OTROS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Para resolver ecuaciones diofánticas que no se adaptan a los casos anteriormente descritos, se puede aplicar otras estrategias, como por ejemplo el **método de factorización** o el **método de la suma**.

- **Método de factorización**

  Consiste en factorizar el polinomio que define la ecuación diofántica en un miembro y usar en el otro la factorización de números enteros, determinando las posibles soluciones distinguiendo todos los casos.

Ejercicio. 13.1.
Demostrar que la ecuación $2x^2 + 3xy = 7$ no tiene solución entera.

SOLUCIÓN.

Factorizamos el primer miembro:

$$x(2x + 3y) = 7.$$

Consideramos las diferentes factorizaciones de 7:

x	1	7	-1	-7
$2x+3y$	7	1	-7	-1

Estudiamos los cuatro casos:

- Caso 1:
$$\begin{cases} x & = 1 \\ 2x + 3y & = 7 \end{cases}$$
No tiene solución entera.
- Caso 2:
$$\begin{cases} x & = 7 \\ 2x + 3y & = 1 \end{cases}$$
No tiene solución entera.
- Caso 3:
$$\begin{cases} x & = -1 \\ 2x + 3y & = -7 \end{cases}$$
No tiene solución entera.
- Caso 4:
$$\begin{cases} x & = -7 \\ 2x + 3y & = -1 \end{cases}$$
No tiene solución entera.

Por lo tanto la ecuación $2x^2 + 3xy = 7$ no tiene solución entera. □

Ejercicio. 13.2.
Determinar todos los números enteros positivos que sean solución de la ecuación:

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$

SOLUCIÓN.
Se trata de resolver la ecuación diofántica:

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$

Desarrollamos el cuadrado del primer miembro:

$$x^2y^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2.$$

Sumamos $2xy$ en ambos miembros para obtener un cuadrado en el de la derecha:

$$x^2y^2 - 14xy + 49 + 2xy = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$x^2y^2 - 12xy + 49 = (x + y)^2.$$

Completamos el miembro de la derecha para obtener un cuadrado:

$$(xy-6)^2+13=(x+y)^2.$$

Agrupamos los números en el miembro de la derecha y los términos que contienen variables en el de la izquierda:

$$(xy-6)^2-(x+y)^2=-13.$$

En el miembro de la izquierda tenemos una diferencia de cuadrados, que la escribimos como suma por diferencia:

$$(xy-6+x+y)(xy-6-x-y)=-13.$$

Consideramos las diferentes factorizaciones de -13:

$xy+x+y-6$	1	-1	13	-13
$xy-x-y-6$	-13	13	-1	1

Estudiamos los cuatro casos:

- Caso 1:

$$\begin{cases} xy+x+y-6= \ 1 \\ xy-x-y-6=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy+x+y= \ 7 \\ xy-x-y=-7 \end{cases}$$

  Sumamos las ecuaciones: $2xy=0$.
  Restamos las ecuaciones: $2x+2y=14$.
  Tenemos dos posibles soluciones:

$$\begin{cases} x=0, \ y=7 \\ x=7, \ y=0 \end{cases}$$

  Las soluciones tienen que ser positivas, por lo tanto no son solución del ejercicio.

- Caso 2:

$$\begin{cases} xy+x+y-6=-1 \\ xy-x-y-6=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy+x+y= \ 5 \\ xy-x-y=19 \end{cases}$$

  Sumamos las ecuaciones: $2xy=24$.
  Restamos las ecuaciones: $2x+2y=-14$.
  Despejando y sustituyendo obtenemos la ecuación de segundo grado $x^2+7x+12=0$.
  Resolvemos y tenemos dos posibles soluciones:

$$\begin{cases} x=-4, \ y=-3 \\ x=-3, \ y=-4 \end{cases}$$

  Las soluciones tienen que ser positivas, por lo tanto no son solución del ejercicio.

- Caso 3:

$$\begin{cases} xy+x+y-6=13 \\ xy-x-y-6=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy+x+y=19 \\ xy-x-y=\ 5 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones: $2xy=24$.
Restamos las ecuaciones: $2x+2y=14$.
Despejando y sustituyendo obtenemos la ecuación de segundo grado $x^2-7x+12=0$.
Resolvemos y tenemos dos posibles soluciones:

$$\begin{cases} x=4,\ y=3 \\ x=3,\ y=4 \end{cases}$$

Soluciones positivas, por lo tanto son solución del ejercicio.

- Caso 4:

$$\begin{cases} xy+x+y-6=-13 \\ xy-x-y-6=\ \ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy+x+y=-7 \\ xy-x-y=\ 7 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones: $2xy=0$.
Restamos las ecuaciones: $2x+2y=-14$.
Tenemos dos posibles soluciones:

$$\begin{cases} x=\ 0\ ,\ y=-7 \\ x=-7,\ y=\ 0 \end{cases}$$

Las soluciones tienen que ser positivas, por lo tanto no son solución del ejercicio.

Por lo tanto las soluciones positivas son $(x,y)=(4,3);\ (3,4)$. □

Ejercicio. 13.3.
Hallar todas las soluciones de la siguiente ecuación diofántica:

$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1.$$

SOLUCIÓN.

Queremos expresar el miembro de la izquierda como un producto. Para ello hacemos un cambio de variable:

Llamamos: $x-1=a$; $y-1=b$; es decir, $x=a+1, y=b+1$.

La ecuación queda:

$$(a+1)^2b+(b+1)^2a=1.$$

Desarrollando los cuadrados:

$$(a^2+2a+1)b+(b^2+2b+1)a=1$$

$$a^2b+2ab+b+ab^2+2ab+a=1$$

$$a^2b+ab^2+4ab+a+b=1$$

Sacando factor común ab:

$$ab(a+b+4)+a+b=1.$$

Sumando 4 en ambos miembros:

$$ab(a+b+4)+a+b+4=1+4$$

$$(a+b+4)(ab+1)=5$$

Hemos obtenido un producto en el primer miembro. Consideramos las diferentes factorizaciones de 5:

$a+b+4$	1	-1	5	-5
$ab+1$	5	-5	1	-1

Estudiamos los cuatro casos:

- Caso 1:

$$\begin{cases} a+b+4=1 \\ ab+1 \;\; =5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-3 \\ ab \;\; = \;\; 4 \end{cases}$$

  Despejando y sustituyendo obtenemos la ecuación de segundo grado: $a^2+3a+4=0$.
  Resolvemos y vemos que no tiene soluciones enteras.

- Caso 2:

$$\begin{cases} a+b+4=-1 \\ ab+1 \quad =-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-5 \\ ab \quad =-6 \end{cases}$$

  Despejando y sustituyendo obtenemos la ecuación de segundo grado: $a^2+5a-6=0$. Resolvemos y tenemos dos posibles soluciones:

$$\begin{cases} a=-6, b= \quad 1 \\ a= \quad 1, b=-6 \end{cases}$$

  Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{cases} x=-5, y= \quad 2 \\ x= \quad 2, y=-5 \end{cases}$$

- Caso 3:

$$\begin{cases} a+b+4=5 \\ ab+1 \quad =1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab \quad =0 \end{cases}$$

  Tenemos dos posibles soluciones:

$$\begin{cases} a=0, \ b=1 \\ a=1, \ b=0 \end{cases}$$

  Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{cases} x=1, \ y=2 \\ x=2, \ y=1 \end{cases}$$

- Caso 4:

$$\begin{cases} a+b+4=-5 \\ ab+1 \quad =-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-9 \\ ab \quad =-2 \end{cases}$$

  Despejando y sustituyendo obtenemos la ecuación de segundo grado: $a^2+9a-2=0$. Resolvemos y vemos que no tiene soluciones enteras.

Por lo tanto las soluciones de la ecuación son:

$$(x,y)=(-5,2); \ (2,-5); \ (2,1); \ (1,2).$$

□

- **Método de la suma**

  Es un método similar al de factorización, pero se obtiene en uno de los miembros de la ecuación una suma de potencias. Considerando los diferentes casos obtenemos la solución.

Ejercicio. 13.4.
Hallar dos números enteros cuya suma de cuadrados sea igual al doble de la suma de dichos números.

SOLUCIÓN.
El enunciado se puede expresar mediante la siguiente ecuación diofántica, llamando x, y a los números pedidos:

$$x^2 + y^2 = 2(x + y).$$

Desarrollamos el producto del segundo miembro y completamos cuadrados:

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$
$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1 + 1$$
$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

Hemos obtenido una suma de cuadrados en el primer miembro y un número en el segundo. Pero el número 2 solo se puede expresar como suma de cuadrados en los siguientes casos:

- Si $2 = 1^2 + 1^2$. Entonces:
$$x - 1 = 1, \text{ por lo tanto } x = 2.$$
$$y - 1 = 1, \text{ por lo tanto } y = 2.$$
- Si $2 = 1^2 + (-1)^2$. Entonces:
$$x - 1 = 1, \text{ por lo tanto } x = 2.$$
$$y - 1 = -1, \text{ por lo tanto } y = 0.$$
- Si $2 = (-1)^2 + 1^2$. Entonces:
$$x - 1 = -1, \text{ por lo tanto } x = 0.$$
$$y - 1 = 1, \text{ por lo tanto } y = 2.$$
- Si $2 = (-1)^2 + (-1)^2$. Entonces:
$$x - 1 = -1, \text{ por lo tanto } x = 0.$$
$$y - 1 = -1, \text{ por lo tanto } y = 0.$$

Las posibles soluciones son:

$$(x, y) = (0, 0);\ (0, 2);\ (2, 0);\ (2, 2).$$

□

Capítulo IV

Ecuaciones diofánticas de otros grados

14. PROBLEMA DE HILBERT-WARING

En el año 1770, **Edward Waring** conjeturó que las ecuaciones diofánticas:

$$m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$m = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_8^3 + x_9^3$$

$$m = x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{18}^4 + x_{19}^4$$

tenían solución. Es decir, todo natural puede escribirse como suma de 4 cuadrados, 9 cubos o 19 bicuadrados.

El gran matemático de comienzos del siglo XX, **David Hilbert**, generalizó estos resultados demostrando que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe otro número natural k_n de forma que la ecuación diofántica:

$$m = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{k_n-1}^n + x_{k_n}^n$$

admite solución con valores naturales.

El problema con el que se trabajó a lo largo del siglo XX fue determinar, dado un $n \in \mathbb{N}$ el mínimo de los k_n válidos para el teorema de Hilbert, que lo denotaremos por $g(n)$. Es decir, encontrar el mínimo valor posible $g(n)$ para que siempre exista solución de la ecuación diofántica $m = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{g(n)-1}^n + x_{g(n)}^n$, ya que el teorema anterior demostraba la existencia, pero no daba una estimación para k_n.

Por ejemplo, el teorema de Lagrange afirma que $g(2) = 4$, ya que la ecuación $m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ siempre tiene solución. También se ha llegado a demostrar que $m = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_8^3 + x_9^3$ siempre tiene solución, por lo que $g(3) = 9$. Los valores $g(4)$ y $g(5)$ todavía no son conocidos. Solamente se sabe que $19 \leq g(4) \leq 35$, y que $37 \leq g(5) \leq 40$.

Otro aspecto con el que se trabajó durante el siglo pasado fue el estudio de, dado $n \in \mathbb{N}$, el menor de los valores $G(n)$ para que la ecuación diofántica $m = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{G(n)-1}^n + x_{G(n)}^n$ tenga solución salvo para un conjunto finito de posibles valores de m.

Es decir, la diferencia entre $g(n)$ y $G(n)$ es que la primera aseguraría la solución de la ecuación diofántica para todo $m \in \mathbb{N}$ y en el segundo caso garantizaría la solución para todos los valores $m \in \mathbb{N}$ salvo un conjunto finito de estos. Por tanto, $G(n) \leq g(n)$.

Se ha demostrado que todos los números, salvo 23 y 239, se pueden expresar como suma de 8 cubos, por lo que tendríamos que $G(3) \leq 8$. Posteriormente, en 1942, **Yuri Linnik** demostró que $G(3) = 7$.

También se ha demostrado que todo número de la forma $8N + 7$ no puede ser expresado como suma de tres cuadrados, por lo que $G(2) = 4$. En 1939 se demostró que $G(4) = 16$ de la mano de **Harold Davenport**.

15. GRAN TEOREMA DE FERMAT

Pierre Fermat (francés, siglo XVII) se dedicó, por afición, a las matemáticas, contribuyendo a la fundación de la geometría analítica, al cálculo de probabilidades y la aritmética moderna. Gran parte de su obra matemática se conoce solo a través de su correspondencia y de anotaciones marginales en sus libros; en ella abundan los resultados formulados sin demostración, cuyo ejemplo más famoso es el de su conjetura.

Su estudio de las técnicas de análisis numéricos introducidos por Diofanto le llevó a varios descubrimientos importantes de la teoría de los números, entre los que cabe mencionar el método del descenso infinito, así como toda una serie de proposiciones y teoremas.

NÚMERO DE FERMAT

Son los números $\boldsymbol{F_n}$**, tal que** $\boldsymbol{F_n = 2^{2^n} + 1}$**, para** $\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \ldots}$

Los introdujo creyendo que se trataba de números primos para todo n. Sin embargo, se sabe con seguridad que no lo son para $5 \leq n \leq 16$, así como para algunos valores superiores de n.

TEOREMA DE FERMAT

Se conoce también con el nombre de **"pequeño teorema de Fermat"**. Nos dice que dado un número entero a cualquiera no divisible por p, siendo p primo, entonces $a^{p-1} - 1$ es divisible por p, es decir $a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$, que se conoce como **congruencia de Fermat**.

EL GRAN TEOREMA DE FERMAT

Llamado también **conjetura de Fermat**.

Teorema. 15.1.
Si n es un número entero mayor que 2, la ecuación $\boldsymbol{x^n + y^n = z^n}$ *no tiene solución entera positiva distinta de* $x = y = z = 0$.

Enunció este teorema anotándolo en un ejemplar de la obra de Diofanto, en el margen de una página, indicando que se hallaba en posesión de una “magnífica demostración” que, sin embargo, no podía anotar dado el estrecho del margen. La anotación de Fermat decía: “es imposible escribir un cubo como suma de dos cubos, una cuarta potencia como suma de dos cuartas potencias, y en general, cualquier potencia superior a la segunda como suma de dos potencias similares. Para esto he descubierto una prueba verdaderamente maravillosa, pero el margen es demasiado pequeño para contenerla ...”

Los trabajos para su demostración fueron impresionantes:

- Cien años después, Leonhard Euler trabaja en su resolución, aunque solo logra una demostración errónea para el caso $n = 3$.
- En 1825, Johann Peter Gustav L. Dirichlet y Adrien-Marie Legendre demostraron el caso $n = 5$.
- En 1840, Gabriel Lamé lo hizo para $n = 7$.
- En 1847, Ernst Kummer demuestra el teorema nada menos que para todos los valores de n menores o iguales a 100, excepto los casos 37, 59 y 67.
- En 1854, la Academia de Ciencias de París, promueve un premio de 300.000 francos de oro para aquel que pudiese demostrar el teorema. Este premio queda desierto, reduciéndolo simplemente a la condecoración de Ernst Kummer en 1857.
- Los medios informáticos utilizados en el siglo XX permitieron la demostración del teorema para valores de n de varias decenas de miles.

Pero la solución al Gran Teorema de Fermat llegó antes de la finalización del siglo XX. Fue el inglés **Andrew Wiles** quien, a partir del estudio de curvas elípticas, logró una demostración de este teorema en 1995. El logro de Wiles comportaba una solución parcial de otro difícil problema, conocido por **conjetura de Shimura Taniyama-Weil**, publicada en 1955, que afirmaba que toda curva elíptica de la forma $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ podía ser interpretada como una forma modular (un objeto topológico altamente simétrico). El hecho de que esta conjetura fuese cierta, implicaría la solución del teorema de Fermat.

Un comentario sobre la ecuación $x^n - 2y^n = 1$.

Ejercicio. 15.2.
Estudiar si existen soluciones enteras para la ecuación:

$$x^n - 2y^n = 1, \text{ donde } x > 1, \quad n > 2.$$

SOLUCIÓN.
Si $n = 2$, estamos en el caso de la ecuación:

$$x^2 - 2y^2 = 1,$$

que es una ecuación de Pell.
Si $n = 3$, la ecuación queda:

$$x^3 - 2y^3 = 1.$$

Boris Delone (1930) y Trygve Nagell (1928) demostraron que para cualquier número entero d distinto de cero, la ecuación $x^3 - dy^3 = 1$ tiene a lo sumo una solución entera (x, y) además de la trivial $(1, 0)$, sin ninguna restricción en los signos de x e y. En particular, ya que la ecuación $x^3 - 2y^3 = 1$ tiene la solución entera $(-1, -1)$, no hay soluciones enteras positivas.

Este teorema fue ampliado para el exponente $n = 4$ por Wilhelm Ljunggren (1942), y para $n \geq 5$ por Charles Leonard Bennett (2001): para $n \geq 3$ y $d \neq 0$, la ecuación $|x^n - dy^n| = 1$, tiene a lo sumo una solución en números enteros positivos.

En particular, $|x^n - 2y^n| = 1$ tiene a lo sumo una solución entera positiva. Ya que $(x, y) = (1, 1)$ es una solución, esta es la única. Pero $x^n - 2y^n = -1$ cuando $(x, y) = (1, 1)$, por lo tanto para $n \geq 3$ no hay solución para la ecuación inicial cuando x e y son números enteros positivos. □

Capítulo V

Primer nivel. Olimpíadas Locales

16. PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS

Una vez vista la teoría y los ejercicios relacionados con la ecuaciones diofánticas, nos centramos en los problemas de esta temática en las Olimpíadas Matemáticas. Empezamos con problemas propuestos en la fase local, los cuales conllevan un menor grado de dificultad.

Ejercicio. 16.1. (2014)
Hallar las soluciones enteras de la ecuación:

$$x^4 + y^4 = 3x^3y.$$

SOLUCIÓN.
La primera solución que vemos es la trivial, para $x = 0$ entonces $y^4 = 0$, por lo tanto $y = 0$.
Si $x \neq 0$, podemos dividir todos los términos de la ecuación por x^4:

$$\frac{x^4 + y^4}{x^4} = \frac{3xy^3}{x^4}$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 = 3 \cdot \frac{y}{x}$$

Hacemos el cambio de variable $z = \dfrac{y}{x}$:

$$1 + z^4 = 3z$$

$$z^4 - 3 + 1 = 0$$

Las soluciones enteras de la primera ecuación son las soluciones racionales de la segunda. Según el teorema de la raíz racional, de tener soluciones racionales, el denominador de la fracción debe ser divisor del coeficiente de mayor grado, z^4, y el numerador un divisor del término independiente, 1. Los candidatos a raíces son 1 y -1, que no verifican la ecuación.

Por lo tanto no hay soluciones racionales, y la ecuación $x^4 + y^4 = 3x^3y$ no tiene soluciones enteras distintas de la trivial $x = 0, y = 0$. □

Ejercicio. 16.2. (2015)
Dados tres números enteros positivos x, y, z, hallar el valor de su producto xyz sabiendo que cumplen:

$$x + 2y = z \qquad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$$

SOLUCIÓN.
De la primera ecuación despejamos $2y$:

$$2y = z - x.$$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$$x^2 - (z-x)^2 + z^2 = 310$$
$$x^2 - (z^2 - 2xz + x^2) + z^2 = 310$$
$$x^2 - z^2 + 2xz - x^2 + z^2 = 310$$
$$2xz = 310$$
$$xz = 155$$

Hemos obtenido un producto en el primer miembro. Descomponemos 155 en sus factores primos:

$$155 = 5 \cdot 31$$

Consideramos las diferentes factorizaciones con números positivos de 155:

x	1	5	31	155
z	155	31	5	1

Estudiamos los cuatro casos:

- Caso 1: $x = 1,\ z = 155$.
$$y = \frac{z-x}{2} = \frac{155-1}{2} = 77.$$
Los tres números son enteros positivos, luego su producto es $xyz = 11935$.

- Caso 2: $x = 5,\ z = 31$.
$$y = \frac{z-x}{2} = \frac{31-5}{2} = 13.$$
Los tres números son enteros positivos, luego su producto es $xyz = 2015$.

- Caso 3: $x = 31,\ z = 5$.
$$y = \frac{z-x}{2} = \frac{5-31}{2} = -13.$$
No es solución ya que y tiene que ser un número entero positivo.

- Caso 4: $x = 155,\ z = 1$.
$$y = \frac{z-x}{2} = \frac{1-155}{2} = -77.$$
No es solución ya que y tiene que ser un número entero positivo.

Por lo tanto los posibles valores el producto son 11935 y 2015. □

Observación. 16.3.
Se puede plantear un problema para resolver una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas en el que intervenga un parámetro desconocido, como por ejemplo el siguiente problema:

Ejercicio. 16.4.
Un rey quiere dividir a sus empleados en grupos de forma que el primer grupo pueda formar un rectángulo de cinco en línea, y el segundo grupo un rectángulo de siete en línea. Si durante nueve días no se repite el número de empleados en cada grupo, ¿cuál es el número mínimo de empleados?

SOLUCIÓN.
En primer lugar planteamos la ecuación que nos pide el enunciado. Llamamos:
x: número de filas del rectángulo que tiene cinco en línea.
y: número de filas del rectángulo que tiene siete en línea.
c: número de empleados.
Todos son números enteros positivos, por lo tanto se trata de una ecuación diofántica.

En el primer rectángulo hay cinco empleados en línea, lo que quiere decir que tiene 5 columnas y x filas. En el segundo rectángulo hay siete empleados en línea, lo que quiere decir que tiene 7 columnas e y filas. El número total de empleados es c, luego:
$$5x + 7y = c$$
Las soluciones de esta ecuación son las mismas de la ecuación $5x + 7y = 1$ multiplicadas por c.
Calculamos una solución particular de $5x + 7y = 1$.
Vemos si la ecuación diofántica tiene solución: $\text{m.c.d.}(5,7) = 1$, la ecuación tiene soluciones enteras.

Solución particular:

$$x = \frac{1-7y}{5}$$

Los números $0, 1, 2, 3, 4$, forman un sistema completo de números incongruentes módulo 5. Sustituimos estos valores en la incógnita y. El resultado cuya división euclídea para 5 tiene resto 0 es:

$$\text{Si } y = 3, \quad x = \frac{1-7\cdot 3}{5} = \frac{-20}{5} = -4.$$

Luego la solución particular es $(x_0, y_0) = (-4, 3)$.
Una solución particular de la ecuación inicial es $(cx_0, cy_0) = (-4c, 3c)$.
Por lo tanto, la solución general será:

$$\begin{cases} x = -4c + 7t \\ y = 3c - 5t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Pero x e y tienen que ser números enteros positivos:

$$\text{Si } -4c + 7t > 0, \text{ entonces } 7c > 4c, \text{ y se tiene } t > \frac{4c}{7}.$$

$$\text{Si } 3c - 5t > 0 \text{ entonces } 3c > 5t, \text{ y se tiene } \frac{3c}{5} > t.$$

Entonces t tiene que estar comprendido entre esos valores: $\dfrac{4c}{7} < t < \dfrac{3c}{5}$.

El número de empleados c tiene que ser mínimo para que haya nueve soluciones diferentes, ya que durante nueve días no se repite el número de sirvientes en cada grupo. Por lo tanto tenemos 9 valores diferentes de t, es decir, la diferencia entre los extremos de la desigualdad tiene que ser mayor que 9.
Además para que t sea un número entero, c tiene que ser múltiplo del mínimo común múltiplo de los denominadores 7 y 5, es decir $\text{m.c.m.}(5,7) = 35$.

Damos valores a c:

c	$\frac{4c}{7}$	$\frac{3c}{5}$	$\frac{3c}{5} - \frac{4c}{7}$
35	20	21	1
70	40	42	2
105	60	63	3
140	80	84	4
175	100	105	5
210	120	126	6
245	140	147	7
280	160	168	8
315	180	189	9
350	200	210	10

Luego el número mínimo de empleados es 350. □

Ejercicio. 16.5. (2005)
Demostrar que la ecuación
$$x^2 + y^2 - z^2 - x - 3y - z - 4 = 0$$
posee infinitas soluciones en los números enteros.

SOLUCIÓN.
Se trata de resolver una ecuación diofántica de segundo grado con tres incógnitas.
Vamos a operar en la ecuación para buscar cuadrados:
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - 4 = 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$$
Organizando la ecuación, queda dos diferencias de cuadrados en ambos miembros:
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2$$
Podemos escribirlos como suma por diferencia:
$$\left(x - \frac{1}{2} + z + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - z - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} + y - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2} - y + \frac{3}{2}\right)$$
$$(x + z)(x - z - 1) = (y + 1)(4 - y)$$
Si $x - z - 1 = y + 1$; $x + z = 4 - y$, la ecuación tiene solución.
Se trata de resolver el sistema de ecuaciones diofánticas:
$$\begin{cases} x - z = y + 2 \\ x + z = 4 - y \end{cases}$$
Que tiene infinitas soluciones. Tomamos como parámetro $y = \lambda$, para todo $\lambda \in \mathbb{Z}$.
Sumando las dos ecuaciones:
$$2x = 6 \Rightarrow x = 3.$$
Restando las dos ecuaciones:
$$-2z = -2 + 2\lambda \Rightarrow z = 1 - \lambda.$$
Las ternas $(3, \lambda, 1 - \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{Z}$, son soluciones de la ecuación. Por lo tanto se ha demostrado que tiene infinitas soluciones de números enteros. □

Ejercicio. 16.6. (2006)
Sabiendo que un número real positivo x verifica la ecuación

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7,$$

demostrar que $x^5 + \frac{1}{x^5}$ en un número entero y calcular su valor.

SOLUCIÓN.
Calculamos el valor de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 7 + 2 = 9$$

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

Si elevamos al cubo $x + \frac{1}{x}$, tenemos $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3$.
Desarrollamos $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 3.$$

Luego $x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 = 18$.
Multiplicamos y desarrollamos:

$$7 \cdot 18 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^5} = x^5 + \frac{1}{x^5} + 3$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 7 \cdot 18 - 3 = 123$$

Por lo tanto el valor de $x^5 + \frac{1}{x^5}$ es 123. □

Observación. 16.7.
A partir de operaciones con polinomios se pueden plantear ecuaciones diofánticas, como es el siguiente ejercicio:

Ejercicio. 16.8.
Determinar los números enteros x que verifican que x^4+2 es un múltiplo de $x+2$.

SOLUCIÓN.
Hacemos la división del polinomio x^4+2 entre el polinomio $x+2$, que da de cociente x^3-2x^2+4x-8 y de resto 18.
Por lo tanto podemos escribir:

$$x^4+2=(x^3-2x^2+4x-8)(x+2)+18.$$

Dividimos todos los términos por $x+2$:

$$\frac{x^4+2}{x+2}=(x^3-2x^2+4x-8)+\frac{18}{x+2}.$$

Para que $x+2$ divida a x^4+2, el segundo miembro tiene que ser un número entero.
Por lo tanto $\dfrac{18}{x+2}$ tiene que ser un número entero, es decir:

$$\frac{18}{x+2}=z, \text{ para todo } z\in\mathbb{Z}.$$

Con lo que hay que resolver una ecuación diofántica con dos incógnitas:

$$18=(x+2)\cdot z$$

Hemos obtenido un producto en el segundo miembro. Consideramos las diferentes factorizaciones de 18:

$x+2$	1	2	3	6	9	18	-1	-2	-3	-6	-9	-18
z	18	9	6	3	2	1	-18	-9	-6	-3	-2	-1

Si $x+2$ es cada uno de esos valores, los números enteros x que verifican que x^4+2 es un múltiplo de $x+2$, se obtienen despejando x en cada caso.
Por lo tanto,

$$x=-1,\ x=0,\ x=1,\ x=4,\ x=7,\ x=16,\ x=-3,\ x=-4,\ x=-5,\ x=-8,\ x=-11,\ x=-20,$$

son las soluciones. □

Ejercicio. 16.9. (2014)
Hallar para qué valores del número entero a, todas la raíces del polinomio $x^3 - 2x^2 - 25x + a$ son números enteros.

SOLUCIÓN.
Se trata de ver para qué valores de a tiene soluciones la ecuación diofántica de una incógnita:

$$x^3 - 2x^2 - 25x + a = 0.$$

Si α, β y γ son soluciones enteras de la ecuación, aplicando las fórmulas de Cardano Vieta tenemos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\alpha = -25$$
$$\alpha\beta\gamma = -a$$

Desarrollamos el cuadrado:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 2^2 - 2(-25) = 4 + 50 = 54$$

Es decir, tenemos que encontrar ternas de valores que verifiquen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 54$$

Las posibles soluciones enteras de la segunda ecuación son:

$$(\pm 1, \pm 2, \pm 7),\ (\pm 2, \pm 5, \pm 5),\ (\pm 3, \pm 3, \pm 6).$$

Solo la primera terna verifica la primera ecuación.
En este caso:
$$a = -\alpha\beta\gamma = -(2 \cdot 5 \cdot (-5)) = -(-50) = 50.$$

Luego el valor de a es 50.

□

Ejercicio. 16.10. (2016)
Encontrar la solución entera más pequeña de la ecuación:

$$\left[\frac{x}{8}\right]-\left[\frac{x}{40}\right]+\left[\frac{x}{240}\right]=210, \quad \textit{siendo } [x] \textit{ la parte entera de } x.$$

SOLUCIÓN.
Si dividimos x entre 240, obtenemos un cociente c_1 y un resto r_1:

$$x = 240c_1 + r_1$$

Si dividimos r_1 entre el otro denominador, 40, obtenemos un cociente c_2 y un resto r_2:

$$r_1 = 40c_2 + r_2$$

Si dividimos r_2 entre el último denominador, 8, obtenemos un cociente c_3 y un resto r_3:

$$r_2 = 8c_3 + r_3$$

Con $0 \leq r_1 < 240$, y por lo tanto $0 \leq c_2 < 6$.
Con $0 \leq r_2 < 40$, y por lo tanto $0 \leq c_3 < 5$.
Con $0 \leq r_3 < 8$.
Sustituyendo en $x = 240c_1 + r_1$:

$$x = 240c_1 + r_1 = 240c_1 + 40c_2 + r_2 = 240c_1 + 40c_2 + 8c_3 + r_3$$

Sustituimos el valor de x en la ecuación inicial:

$$210 = \left[\frac{x}{8}\right]-\left[\frac{x}{40}\right]+\left[\frac{x}{240}\right] = \left[\frac{240c_1+40c_2+8c_3+r_3}{8}\right]-\left[\frac{240c_1+40c_2+8c_3+r_3}{40}\right]+\left[\frac{240c_1+40c_2+8c_3+r_3}{240}\right]$$

Nos quedamos con las partes enteras de cada término:

$$210 = (30c_1 + 5c_2 + c_3) - (6c_1 + c_2) + c_1 = 25c_1 + 4c_2 + c_3$$

Sabiendo que $0 \leq c_2 < 6$ y $0 \leq c_3 < 5$, podemos probar los diferentes valores y la única solución es para:

$$c_1 = 8,\ c_2 = 2,\ c_3 = 2.$$

Por lo tanto, sustituyendo en $x = 240c_1 + 40c_2 + 8c_3 + r_3$:

$$x = 240 \cdot 8 + 40 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + r_3 = 2016 + r_3,\ \text{donde } 0 \leq r_3 < 8.$$

Dando valores a r_3, la solución entera más pequeña es $x = 2016$.

□

Ejercicio. 16.11. (2010)
Halla todos los números naturales n que verifican la ecuación:

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{2n}{3}\right]=n+335, \quad \textit{siendo } [x] \textit{ la parte entera de } x.$$

SOLUCIÓN.
El mínimo común múltiplo de los denominadores es $\text{m.c.m.}(2,3)=6$.
El número n puede ser de las siguientes formas:

$$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5,\ \text{para todo } k\in\mathbb{N}.$$

Y estudiamos los diferentes casos según el valor de n:

- $n=6k \Rightarrow \left[\frac{6k}{2}\right]+\left[\frac{12k}{3}\right]=6k+335 \Rightarrow 3k+4k=6k+335 \Rightarrow k=335.$
$$n=6\cdot 335=2010.$$
- $n=6k+1 \Rightarrow \left[\frac{6k+1}{2}\right]+\left[\frac{12k+2}{3}\right]=6k+1+335 \Rightarrow \left[3k+\frac{1}{2}\right]+\left[4k+\frac{2}{3}\right]=6k+336 \Rightarrow$ $3k+4k=6k+336 \Rightarrow k=336.$
$$n=6\cdot 336+1=2017.$$
- $n=6k+2 \Rightarrow \left[\frac{6k+2}{2}\right]+\left[\frac{12k+4}{3}\right]=6k+2+335 \Rightarrow [3k+1]+\left[4k+\frac{4}{3}\right]=6k+337 \Rightarrow$ $3k+1+4k+1=6k+337 \Rightarrow k=335.$
$$n=6\cdot 335+2=2012.$$
- $n=6k+3 \Rightarrow \left[\frac{6k+3}{2}\right]+\left[\frac{12k+6}{3}\right]=6k+3+335 \Rightarrow \left[3k+\frac{3}{2}\right]+[4k+2]=6k+338 \Rightarrow$ $3k+1+4k+2=6k+338 \Rightarrow k=335.$
$$n=6\cdot 335+3=2013.$$
- $n=6k+4 \Rightarrow \left[\frac{6k+4}{2}\right]+\left[\frac{12k+8}{3}\right]=6k+4+335 \Rightarrow [3k+2]+\left[4k+\frac{8}{3}\right]=6k+339 \Rightarrow$ $3k+2+4k+2=6k+339 \Rightarrow k=335.$
$$n=6\cdot 335+4=2014.$$
- $n=6k+5 \Rightarrow \left[\frac{6k+5}{2}\right]+\left[\frac{12k+10}{3}\right]=6k+5+335 \Rightarrow \left[3k+\frac{5}{2}\right]+\left[4k+\frac{10}{3}\right]=6k+340 \Rightarrow$ $3k+2+4k+3=6k+340 \Rightarrow k=335.$
$$n=6\cdot 335+5=2015.$$

Por lo tanto los números naturales que verifican la ecuación son 2010, 2012, 2013, 2014, 2015 y 2017. □

Ejercicio. 16.12. (2011)
Calcula todos los números enteros a, b y c tales que:

$$a^2 = 2b^2 + 3c^2.$$

SOLUCIÓN.
Una solución es la trivial $(0,0,0)$.
Vamos a demostrar que no hay solución distinta de la trivial.
Suponemos que existe una solución (a,b,c) distinta de $(0,0,0)$, con $|a|+|b|+|c|$ mínimo.

Tomamos la igualdad con números congruentes módulo tres, tenemos:

$$a^2 \equiv 2b^2 \pmod 3$$

Como a^2 y b^2 solo pueden ser congruentes con 1 o 0 módulo 3, entonces a y b son múltiplos de 3. Por lo tanto $3c^2$ es múltiplo de 9, así que c también es múltiplo de 3.

Pero entonces $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$ sería otra solución de la ecuación, con $|\frac{a}{3}|+|\frac{b}{3}|+|\frac{c}{3}| < |a|+|b|+|c|$, lo que contradice la hipótesis supuesta.

□

Observación. 16.13.
Siguiendo el mismo método de resolución, podemos proponer el siguiente problema:

Ejercicio. 16.14.
Probar que la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2),$$

no tiene soluciones enteras positivas.

SOLUCIÓN.
Suponemos que existe una solución.
Elegimos la solución de tal manera que $x^2 + y^2$ sea mínimo.
Suponemos que (a, b, c, d) es la solución elegida. Entonces:

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2).$$

Vemos que 3 divide a $a^2 + b^2$, entonces 3 divide a a y 3 divide a b.
Por lo tanto existe a_1, b_1 tales que $a = 3a_1$ y $b = 3b_1$. Sustituimos:

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$$

$$3^2a_1^2 + 3^2b_1^2 = 3(c^2 + d^2)$$
$$9(a_1^2 + b_1^2) = 3(c^2 + d^2)$$
$$c^2 + d^2 = 3(a_1^2 + b_1^2)$$

Hemos encontrado una nueva solución (c, d, a_1, b_1), donde $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$, pero es una contradicción de la hipótesis inicial.
Por lo tanto no tiene soluciones enteras positivas. □

Ejercicio. 16.15.
Encuentra números enteros positivos de dos cifras que sean iguales a tres veces el producto de éstas.

SOLUCIÓN.
LLamamos N al número de dos cifras, que se puede escribir:

$$N = 10a + b \text{ tal que } a \neq 0.$$

Podemos plantear la ecuación diofántica de dos incógnitas:

$$10a + b = 3ab$$

Despejamos la incógnita a:

$$a(10-3b)+b=0$$

$$a=\frac{-b}{10-3b}=\frac{b}{3b-10}$$

Sabemos que $0<a\leq 9$. Por lo tanto $3b-10$ tiene que ser positivo:

$$3b-10>0$$

$$3b>10$$

$$b>\frac{10}{3}$$

$$b\geq 4$$

Entonces $4\leq b\leq 9$. Estudiamos los diferentes casos dando valores a b:

- Si $b=4$, entonces $a=\dfrac{4}{12-10}=2$.

$$N=10\cdot 2+4=24.$$

- Si $b=5$, entonces $a=\dfrac{5}{15-10}=1$.

$$N=10\cdot 1+5=15.$$

- Si $b=6$, entonces $a=\dfrac{6}{18-10}=\dfrac{6}{8}$.
  No es solución ya que no es un número entero.
- Si $b=7$, entonces $a=\dfrac{7}{21-10}=\dfrac{7}{11}$.
  No es solución ya que no es un número entero.
- Si $b=8$, entonces $a=\dfrac{8}{24-10}=\dfrac{8}{14}$.
  No es solución ya que no es un número entero.
- Si $b=9$, entonces $a=\dfrac{9}{27-10}=\dfrac{9}{17}$.
  No es solución ya que no es un número entero.

Por lo tanto los números que de dos cifras que son iguales a tres veces el producto de éstas son 15 y 24.

$\square$

Ejercicio. 16.16. (2004)
Hallar todas las posibles formas de escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos.

SOLUCIÓN.
Se trata de buscar las soluciones enteras positivas de la ecuación diofántica:

$$x^2 + y^2 = 2003$$

Vemos los números congruentes módulo 4. Los cuadrados de los números enteros positivos:

Si $x = 1$, entonces $x^2 = 1^2 = 1$ congruente con 1 módulo 4.
Si $x = 2$, entonces $x^2 = 2^2 = 4$ congruente con 0 módulo 4.
Si $x = 3$, entonces $x^2 = 3^2 = 9$ congruente con 1 módulo 4.
Si $x = 4$, entonces $x^2 = 4^2 = 16$ congruente con 0 módulo 4.
Si $x = 5$, entonces $x^2 = 5^2 = 25$ congruente con 1 módulo 4.
Si $x = 6$, entonces $x^2 = 6^2 = 36$ congruente con 0 módulo 4.

Y así sucesivamente. Es decir, si x e y son números enteros, entonces x^2 e y^2 pueden ser congruentes con 0 o 1 módulo 4.
Luego la suma de los cuadrados $x^2 + y^2$ puede ser congruente con 0, 1 o 2 módulo 4.
Dividimos 2003 entre 4, y vemos que 2003 es congruente con 3 módulo 4.

Por lo tanto no es posible escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos. □

Observación. 16.17.
Nos preguntamos que ocurre si en vez de 2003 el término independiente es 2017.
Es decir, la ecuación sería:

$$x^2 + y^2 = 2017$$

En este caso dividimos 2017 entre 4, y vemos que 2017 es congruente con 1 módulo 4, por lo que es posible que tenga solución.
La solución en este caso es $x = 9,\ y = 44$.

Ejercicio. 16.18. (2013)
Hallar todas las soluciones enteras (x, y) de la ecuación:

$$y^k = x^2 + x,$$

donde k es un número entero mayor que 1.

SOLUCIÓN.
Es una ecuación diofántica de dos incógnitas. Sacamos factor común x:

$$y^k = x(x+1)$$

El segundo miembro es el producto de dos números enteros consecutivos. Su máximo común divisor es 1. Para que y sea un número entero, x y $x+1$ deben ser potencias k-ésimas de un número entero.

Tenemos que buscar dos números enteros consecutivos que sean potencias k-ésimas, con $k > 1$.
Las únicas opciones son los números -1 y 0; y por otro lado 0 y 1.

Las soluciones son:
Si $x = -1$, entonces $y = 0$

Si $x = 0$, entonces $y = 0$.

□

Ejercicio. 16.19.
Una persona compra doce piezas de frutas entre peras y melocotones por 99 céntimos. Si una pera cuesta 3 céntimos más que un melocotón, y compra más peras que melocotones, ¿cuántas piezas compra de cada fruta?

SOLUCIÓN.
Llamamos:
x al número de peras.
y al número de melocotones.
p al precio de un melocotón.
Planteamos las ecuaciones con los datos del enunciado:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ (p+3)x + py = 99 \end{cases}$$

Sacando factor común p en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x+y & =12 \\ 3x+p(x+y) & =99 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de la primera ecuación:

$$3x+12p=99$$

$$x+4p=33$$

$$x=33-4p$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$y=12-x$$

$$y=12-33+4p$$

$$y=4p-21$$

Compra más peras que melocotones, entonces $x>y$, sustituyendo:

$$33-4p>4p-21$$

$$33+21>4p+4p$$

$$54>8p$$

$$\frac{54}{8}>p$$

$$6\geq p$$

Por otro lado, x e y tienen que ser positivos:

$$33-4p\geq 0$$

$$33\geq 4p$$

$$\frac{33}{4}\geq p$$

$$8\geq p$$

$$4p-21\geq 0$$

$$4p\geq 21$$

$$p\geq \frac{21}{4}$$

$$p\geq 6$$

Por lo tanto solo puede ser $p=6$. Sustituyendo calculamos los valores de $x=9$ e $y=3$.
Luego compra 9 peras y 3 melocotones a un precio de 9 y 6 céntimos la pieza respectivamente.

□

Ejercicio. 16.20.
Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación diofántica:

$$2(x+y) = xy + 9.$$

SOLUCIÓN.
Vamos a buscar las soluciones enteras de la ecuación. Desarrollamos y despejamos x:

$$2x + 2y = xy + 9$$
$$x(2-y) = 9 - 2y$$
$$x = \frac{9-2y}{2-y}$$
$$x = \frac{2y-9}{y-2}$$
$$x = 2 - \frac{5}{y-2}$$

Para que x sea un número entero, $\frac{5}{y-2}$ tiene que ser un número entero k, entonces:

$$\frac{5}{y-2} = k$$
$$\frac{5}{k} = y-2$$
$$y = \frac{5}{k} + 2$$

Para que y sea un número entero, $\frac{5}{k}$ tiene que serlo también. Estudiamos los cuatro casos:

- Si $k=1$, entonces $y = \frac{5}{1} + 2 = 7$, $x = 2 - \frac{5}{7-2} = 1$.
- Si $k=-1$, entonces $y = \frac{5}{-1} + 2 = -3$, $x = 2 - \frac{5}{-3-2} = 3$.
- Si $k=5$, entonces $y = \frac{5}{5} + 2 = 3$, $x = 2 - \frac{5}{3-2} = -3$.
- Si $k=-5$, entonces $y = \frac{5}{-5} + 2 = 1$, $x = 2 - \frac{5}{1-2} = 7$.

Por lo tanto las soluciones son:

$$(x,y) = (1,7),\ (3,-3),\ (-3,3),\ (7,1).$$

□

Capítulo VI

Segundo nivel. Olimpíadas Nacionales

17. PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS

En este capítulo vamos a analizar los problemas propuestos en la fase nacional, los cuales conllevan un grado de dificultad mayor que en la fase local.

Ejercicio. 17.1. (1995)
Encontrar todas las soluciones enteras posibles x, y de la ecuación

$$p(x+y) = xy, \text{ donde } p \text{ es un número primo.}$$

SOLUCIÓN.
Si p es un número primo, entonces p divide a x o divide a y.
En este caso x e y son simétricos, podemos suponer que p divide a x, y por lo tanto existe un número $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = kp$.
Sustituyendo en la ecuación queda:

$$p(kp+y) = kpy$$
$$kp + y = ky$$
$$0 = ky - kp - y$$
$$0 = k(y-p) - y$$

Sumando p en ambos miembros, podemos obtener un producto de dos factores en el segundo miembro:

$$p = k(y-p) - y + p$$
$$p = (k-1)(y-p)$$

Siendo p un número primo, consideramos las diferentes factorizaciones de p:

$k-1$	$-p$	-1	1	p
$y-p$	-1	$-p$	p	1

Estudiamos los cuatro casos:

- Caso 1:
  $k-1=-p \Rightarrow k=1-p \Rightarrow x=p(1-p)$.
  $y-p=-1 \Rightarrow y=p-1$.
- Caso 2:
  $k-1=-1 \Rightarrow k=0 \Rightarrow x=0$.
  $y-p=-p \Rightarrow y=0$.
- Caso 3:
  $k-1=1 \Rightarrow k=2 \Rightarrow x=2p$.
  $y-p=p \Rightarrow y=2p$.
- Caso 4:
  $k-1=p \Rightarrow k=p+1 \Rightarrow x=p(p+1)$.
  $y-p=1 \Rightarrow y=p+1$.

Por lo tanto hay cuatro soluciones enteras.

□

Observación. 17.2.
Nos podemos plantear el problema anterior si tenemos dos números primos positivos en la ecuación. Veámoslo en el siguiente ejercicio:

Ejercicio. 17.3.
Hallar las soluciones enteras positivas de la ecuación

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}, \text{ donde } p,q \text{ son números enteros primos positivos.}$$

SOLUCIÓN.
Operamos para quitar los denominadores de la ecuación:

$$\frac{y+x}{xy}=\frac{1}{pq}$$
$$pq(y+x)=xy$$
$$pqy+pqx=xy$$

Buscamos poner el primer miembro como producto de dos factores para estudiar los diferentes casos. Sumamos en ambos miembros p^2q^2:

$$xy - pqx - pqy + p^2q^2 = p^2q^2$$

$$(x-pq)(y-pq) = p^2q^2$$

Consideramos las diferentes factorizaciones de p^2q^2:

$x-pq$	1	p	q	p^2	q^2	p^2q	pq^2	p^2q^2
$y-pq$	p^2q^2	pq^2	p^2q	q^2	p^2	q	p	1

Estudiamos los casos:

- Caso 1:
  $x-pq = 1 \Rightarrow x = 1+pq$.
  $y-pq = p^2q^2 \Rightarrow y = pq(pq+1)$.

- Caso 2:
  $x-pq = p \Rightarrow x = p(1+q)$.
  $y-pq = pq^2 \Rightarrow y = pq(q+1)$.

- Caso 3:
  $x-pq = q \Rightarrow x = q(1+p)$.
  $y-pq = p^2q \Rightarrow y = pq(p+1)$.

- Caso 4:
  $x-pq = p^2 \Rightarrow x = p(p+q)$.
  $y-pq = q^2 \Rightarrow y = q(p+q)$.

- Caso 5:
  $x-pq = q^2 \Rightarrow x = q(p+q)$.
  $y-pq = p^2 \Rightarrow y = p(p+q)$.

- Caso 6:
  $x-pq = p^2q \Rightarrow x = pq(p+1)$.
  $y-pq = q \Rightarrow y = q(p+1)$.

- Caso 7:
  $x-pq = pq^2 \Rightarrow x = pq(q+1)$.
  $y-pq = p \Rightarrow y = p(q+1)$.

- Caso 8:
  $x-pq = p^2q^2 \Rightarrow x = pq(pq+1)$.
  $y-pq = 1 \Rightarrow y = pq+1$.

Por lo tanto las soluciones son todas las anteriores al ser p, q números enteros positivos.

□

Ejercicio. 17.4. (2009)
Determina justificadamente todos los pares de números enteros (x, y) que verifican la ecuación:

$$x^2 - y^4 = 2009.$$

SOLUCIÓN.
Se trata de una ecuación diofántica con dos incógnitas, en la que el primer miembro es una diferencia de cuadrados, por lo que podemos escribirlo como suma por diferencia, y factorizar el número del segundo miembro.

$$(x - y^2)(x + y^2) = 2009.$$

La descomposición factorial del número 2009 es:

$$2009 = 7^2 \cdot 41$$

Consideramos las diferentes factorizaciones de 2009:

$x - y^2$	1	2009	7	287	49	41	-1	-2009	-7	-287	-49	-41
$x + y^2$	2009	1	287	7	41	49	-2009	-1	-287	-7	-41	-49

Estudiamos los diferentes casos:

- Caso 1:
$$\begin{cases} x - y^2 = 1 \\ x + y^2 = 2009 \end{cases}$$
Sumamos las ecuaciones, entonces:
$$2x = 2010$$
$$x = 1005$$
Restamos las ecuaciones, entonces:
$$-2y^2 = -2008$$
$$y^2 = 1004$$
No tiene solución entera.

- Caso 2:
$$\begin{cases} x - y^2 = 2009 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$$
Sumamos las ecuaciones, entonces:
$$2x = 2010$$
$$x = 1005$$
Restamos las ecuaciones, entonces:
$$-2y^2 = 2008$$
$$y^2 = -1004$$
No tiene solución entera.

- Caso 3:

$$\begin{cases} x - y^2 = \ \ 7 \\ x + y^2 = 287 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$2x = 294$$

$$x = 147$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$-2y^2 = -280$$

$$y^2 = 140$$

No tiene solución entera.

- Caso 4:

$$\begin{cases} x - y^2 = 287 \\ x + y^2 = \ \ 7 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$2x = 294$$

$$x = 147$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$-2y^2 = 280$$

$$y^2 = -140$$

No tiene solución entera.

- Caso 5:

$$\begin{cases} x - y^2 = 49 \\ x + y^2 = 41 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$2x = 90$$

$$x = 45$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$-2y^2 = 8$$

$$y^2 = -4$$

No tiene solución entera.

- Caso 6:

$$\begin{cases} x - y^2 = 41 \\ x + y^2 = 49 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$2x = 90$$

$$x = 45$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$-2y^2 = -8$$

$$y^2 = 4$$

Luego tiene solución entera $y = \pm 2$.

- Caso 7:

$$\begin{cases} x - y^2 = -1 \\ x + y^2 = -2009 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$2x = -2010$$

$$x = -1005$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$-2y^2 = 2008$$

$$y^2 = -1004$$

No tiene solución entera.

- Caso 8:

$$\begin{cases} x - y^2 = -2009 \\ x + y^2 = -1 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$2x = -2010$$

$$x = -1005$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$-2y^2 = -2008$$

$$y^2 = 1004$$

No tiene solución entera.

- Caso 9:

$$\begin{cases} x - y^2 = -7 \\ x + y^2 = -287 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$2x = -294$$

$$x = -147$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$-2y^2 = 280$$

$$y^2 = -140$$

No tiene solución entera.

- Caso 10:

$$\begin{cases} x - y^2 = -287 \\ x + y^2 = \quad -7 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$2x = -294$$

$$x = -147$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$-2y^2 = -280$$

$$y^2 = 140$$

No tiene solución entera.

- Caso 11:

$$\begin{cases} x - y^2 = -49 \\ x + y^2 = -41 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$2x = -90$$

$$x = -45$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$-2y^2 = -8$$

$$y^2 = 4$$

Luego tiene solución entera $y = \pm 2$.

- Caso 12:

$$\begin{cases} x - y^2 = -41 \\ x + y^2 = -49 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$2x = -90$$

$$x = -45$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$-2y^2 = 8$$

$$y^2 = -4$$

No tiene solución entera.

Por lo tanto las soluciones enteras son:

$$(x, y) = (45, 2);\ (45, -2);\ (-45, 2);\ (-45, -2).$$

□

Observación. 17.5.
Podemos modificar la ecuación para un posible problema para próximas olimpiadas como en el siguiente ejercicio:

Ejercicio. 17.6.
Determina justificadamente todos los pares de números enteros (x, y) *que verifican la ecuación:*

$$x^4 - y^4 = 2017.$$

SOLUCIÓN.
Al igual que en el ejercicio anterior, se trata de factorizar ambos miembros y estudiar los diferentes casos.

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 2017.$$

El número 2017 es un número primo.

Consideramos las diferentes factorizaciones de 2017:

$x^2 + y^2$	1	2017	-1	-2017
$x^2 - y^2$	2017	1	-2017	-1

Estudiamos los diferentes casos:

- Caso 1:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = & 1 \\ x^2 - y^2 = & 2017 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$2x^2 = 2018$$
$$x^2 = 1009$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$2y^2 = -2016$$
$$y^2 = -1008$$

No tiene solución entera.

- Caso 2:
$$\begin{cases} x^2+y^2=2017 \\ x^2-y^2=\quad 1 \end{cases}$$
Sumamos las ecuaciones, entonces:
$$2x^2=2018$$
$$x^2=1009$$
Restamos las ecuaciones, entonces:
$$2y^2=2016$$
$$y^2=1008$$
No tiene solución entera.
- Caso 3:
$$\begin{cases} x^2+y^2=\quad -1 \\ x^2-y^2=-2017 \end{cases}$$
Sumamos las ecuaciones, entonces:
$$2x^2=-2018$$
$$x^2=-1009$$
Restamos las ecuaciones, entonces:
$$2y^2=2016$$
$$y^2=1008$$
No tiene solución entera.
- Caso 4:
$$\begin{cases} x^2+y^2=-2017 \\ x^2-y^2=\quad -1 \end{cases}$$
Sumamos las ecuaciones, entonces:
$$2x^2=-2018$$
$$x^2=-1009$$
Restamos las ecuaciones, entonces:
$$2y^2=-2016$$
$$y^2=-1008$$
No tiene solución entera.

Por lo tanto no tiene soluciones enteras. □

Ejercicio. 17.7. (2005)
Sean a y b números enteros, demostrar que la ecuación

$$(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$$

admite a lo sumo una solución entera.

SOLUCIÓN.
Pasando el 1 al segundo miembro, queda una ecuación diofántica de tercer grado con una incógnita, donde el primer miembro es un producto de tres factores:

$$(x-a)(x-b)(x-3)=-1.$$

Suponemos que p es el número entero solución de la ecuación.
El producto de tres números enteros tiene que ser -1. Estudiamos los casos:

- Si $p-3=1$ entonces $p=4$.
    - $p-a=-1 \Rightarrow a=4+1=5$.
      $p-b=1 \Rightarrow b=4-1=3$.

      La ecuación queda $(x-5)(x-3)(x-3)=-1$. Desarrollando el producto:

      $$(x-5)(x^2-6x+9)=-1$$

      $$x^3-6x^2+9x-5x^2+30x-45+1=0$$
      $$x^3-11x^2+39x-44=0$$

      Quitando la solución entera $x=4$, queda la ecuación de segundo grado $x^2-7x+11=0$, cuya solución es $x=\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2}$, que no tiene soluciones enteras.
    - $p-a=1 \Rightarrow a=4-1=3$.
      $p-b=-1 \Rightarrow b=4+1=5$.

      Queda la misma ecuación que en el caso anterior.
- Si $p-3=-1$ entonces $p=2$.
    - $p-a=1 \Rightarrow a=2-1=1$.
      $p-b=1 \Rightarrow b=2-1=1$.

      La ecuación queda $(x-1)(x-1)(x-3)=-1$. Desarrollando el producto:

$$(x^2 - 2x + 1)(x - 3) = -1$$
$$x^3 - 2x^2 + x - 3x^2 + 6x - 3 + 1 = 0$$
$$x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$$

Quitando la solución entera $x = 2$, queda la ecuación de segundo grado $x^2 - 3x + 1 = 0$, cuya solución es $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, que no tiene soluciones enteras.

- $p - a = -1 \;\Rightarrow\; a = 2 + 1 = 3$.
  $p - b = -1 \;\Rightarrow\; b = 2 + 1 = 3$.

  La ecuación queda $(x-3)^3 = -1$. Desarrollando el cubo:

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 1 = 0$$
$$x^3 - 9x^2 + 27x - 26 = 0$$

  Quitando la solución entera $x = 2$, queda la ecuación de segundo grado $x^2 - 7x + 13 = 0$, cuya solución es $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{-3}}{2}$, que no tiene soluciones enteras.

Por lo tanto, la ecuación admite una solución entera. □

Ejercicio. 17.8. (1997)
Sea p un número primo. Determinar todos los números enteros k tales que $\sqrt{k^2 - kp}$ es un número natural.

SOLUCIÓN.
Planteamos la ecuación diofántica, llamando al número natural n:

$$\sqrt{k^2 - kp} = n.$$

Elevando los dos miembros al cuadrado:

$$k^2 - kp = n^2$$
$$k^2 - kp - n^2 = 0$$

Ecuación de segundo grado en la incógnita k que resolvemos:

$$k = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4n^2}}{2}$$

Para que k sea un número natural, el discriminante tiene que ser un cuadrado perfecto. Le llamamos a.

$$p^2 + 4n^2 = a^2$$
$$p^2 = a^2 - 4n^2$$
$$p^2 = (a + 2n)(a - 2n)$$

En el segundo miembro tenemos un producto de dos factores.

Como p es un número primo y además $a+2n \geq a-2n$, estudiamos los dos casos:

- $a+2n = p^2$ y $a-2n = 1$.

  Sumando las dos ecuaciones queda $a = \dfrac{p^2+1}{2}$.

  Restando las dos ecuaciones queda $n = \dfrac{p^2-1}{4}$.

  Como n es natural, exige que $p \neq 2$.

  Sustituyendo el valor de a en la ecuación $k = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2+4n^2}}{2}$:

$$k = \frac{p \pm \sqrt{\left(\dfrac{p^2+1}{2}\right)^2}}{2} = \frac{p \pm \dfrac{p^2+1}{2}}{2}$$

$$k_1 = \frac{p^2+2p+1}{4} = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$$

$$k_2 = -\frac{p^2-2p+1}{4} = -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

- $a+2n = p$ y $a-2n = p$.

  Sumando las dos ecuaciones queda $a = p$.

  Restando las dos ecuaciones queda $n = 0$.

  Sustituyendo el valor de a en la ecuación $k = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2+4n^2}}{2}$:

$$k = \frac{p \pm \sqrt{p^2}}{2} = \frac{p \pm p}{2}$$

$$k_1 = p$$

$$k_2 = 0$$

Por lo tanto si $p = 2$ entonces las soluciones son $k = 0$ o $k = p$.

Si $p \neq 2$ las soluciones son $k = \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2$, $k = -\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2$, $k = 0$ o $k = p$. □

Ejercicio. 17.9. (2012)
Hallar todos los números enteros positivos n y k tales que:

$$(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1.$$

SOLUCIÓN.
Para $n = 1$ la ecuación queda:

$$2 = 2^k + 4 \Rightarrow -2 = 2^k$$

Que no tiene solución para ningún valor de k.

Para $n \geq 2$:

$$(n+1)^n - 1 = 2n^k + 3n.$$

Desarrollando el primer miembro mediante el binomio de Newton:

$$(n+1)^n - 1 = \binom{n}{0}1 + \binom{n}{1}n + \binom{n}{2}n^2 + \binom{n}{3}n^3 + \ldots + \binom{n}{n}n^n - 1 = n^2 + \binom{n}{2}n^2 + \binom{n}{3}n^3 + \ldots + \binom{n}{n}n^n - 1.$$

Todos los términos son divisibles por n^2. Por lo tanto el primer miembro es múltiplo de n^2.

Vemos dos casos:

- Si $k = 1$:

$$(n+1)^n - 1 = 2n + 3n$$
$$(n+1)^n - 1 = 5n$$

  Entonces n^2 divide a $5n$, es decir, n divide a 5. Por lo tanto $n = 5$.

$$6^5 - 1 = 25$$

  Igualdad que no es cierta.

- Si $k \geq 2$:

$$(n+1)^n - 1 = 2n^k + 3n$$

  Entonces n^2 divide a $2n^k + 3n$, pero como divide a $2n^k$, también tiene que dividir a $3n$.
  Luego n divide a 3, y entonces $n = 3$.

$$4^3 - 1 = 2 \cdot 3^k + 9$$
$$4^3 - 10 = 2 \cdot 3^k$$
$$27 = 3^k$$

  Cuya solución es para $k = 3$.

Por lo tanto la solución es para $n = 3$ y $k = 3$.

□

Ejercicio. 17.10.
Una mujer cobra un cheque por e *euros y* c *céntimos en un banco. El cajero, por error, le da* c *euros y* e *céntimos. La mujer no se da cuenta hasta que gasta 23 céntimos y observa que en ese momento tiene* $2e$ *euros y* $2c$ *céntimos. ¿Cuál era el valor del cheque?*

SOLUCIÓN.
Pasando los euros a céntimos, planteamos la ecuación en el momento que se da cuenta del error:

$$100c + e = 200e + 2c + 23$$

$$98c - 199e = 23$$

Ecuación diofántica lineal con dos incógnitas. Tiene solución ya que el máximo común divisor de 98 y 199 es 1, que es divisor de 23.
Para encontrar una solución particular, utilizamos el algoritmo (*extendido*) de Euclides:

$$199 = 2 \cdot 98 + 3 \ \Rightarrow\ 3 = (-2) \cdot 98 + 1 \cdot 199$$

$$98 = 32 \cdot 3 + 2 \ \Rightarrow\ 98 = 32(-2 \cdot 98 + 1 \cdot 199) + 2 \ \Rightarrow\ 98 = -64 \cdot 98 + 32 \cdot 199 + 2 \ \Rightarrow\ 2 = 65 \cdot 98 - 32 \cdot 199$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1 \ \Rightarrow\ -2 \cdot 98 + 1 \cdot 199 = 1 \cdot (65 \cdot 98 - 32 \cdot 199) + 1 \ \Rightarrow\ (-67) \cdot 98 + 33 \cdot 199 = 1$$

Entonces $c = -67$ y $e = -33$ es solución de la ecuación $98c - 199e = 1$. Multiplicando esta solución por 23 tenemos una solución particular de $98c - 199e = 23$, es decir, $c = -1541$ y $e = -759$.
La solución general es:

$$\begin{cases} c = -1541 + 199t \\ e = \ \ -759 + 98t \end{cases}$$

Pero e y c son valores enteros positivos, luego:

$$-1541 + 199t > 0 \ \Rightarrow\ 199t > 1541 \ \Rightarrow\ t > \frac{1541}{199} \ \Rightarrow\ t \geq 8.$$

$$-759 + 98t > 0 \ \Rightarrow\ 98t > 759 \ \Rightarrow\ t > \frac{759}{98} \ \Rightarrow\ t \geq 8.$$

Para $t = 8$, $c = 51$ y $e = 25$.
Para $t = 9$, $c = 250$ y $e = 123$. Como vemos, para valores mayores a 8, c es mayor que 100, que no puede ser.

Por lo tanto, el valor del cheque era de 25 euros y 51 céntimos. □

Ejercicio. 17.11.
Encuentra de cuántas maneras diferentes podemos sumar 5 euros con 100 monedas de 1, 10 y 20 céntimos, indicando el número de monedas en cada caso.

SOLUCIÓN.
Llamamos:
x: número de monedas de 1 céntimo.
y: número de monedas de 10 céntimos.
z: número de monedas de 20 céntimos.
Planteamos el sistema de ecuaciones diofánticas con los datos del enunciado:

$$\begin{cases} x + \ \ y \ + \ \ z \ = 100 \\ x + 10y + 20z = 500 \end{cases}$$

Para resolver el sistema restamos las dos ecuaciones:

$$9y + 19z = 400$$

Resolvemos esta ecuación diofántica lineal con dos incógnitas mediante el algoritmo de Euclides:

$$19 = 2 \cdot 9 + 1$$

$$9y + (9 \cdot 2 + 1)z = 400$$

$$9y + 9 \cdot 2 \cdot z + z = 400$$

$$y = -2z + \frac{400 - z}{9}$$

Para que y sea entero, $\frac{400-z}{9}$ tiene que ser un número entero p:

$$\frac{400 - z}{9} = p$$

$$400 - z = 9p$$

$$z = 400 - 9p$$

Sustituyendo el valor de z en y en función del parámetro p:

$$y = -2(400 - 9p) + \frac{400 - 400 + 9p}{9}$$

$$y = -800 + 18p + p$$

$$y = -800 + 19p$$

Sustituyendo los valores de y, z en la primera ecuación en función de p:

$$x = 100 - y - z$$

$$x = 100 + 800 - 19p - 400 + 9p$$

$$x = 500 - 10p$$

Pero x, y, z son valores positivos, luego:

$$x \geq 0 \;\Rightarrow\; 500 - 10p \geq 0 \;\Rightarrow\; 500 \geq 10p \;\Rightarrow\; 50 \geq p.$$

$$y \geq 0 \;\Rightarrow\; -800 + 19p \geq 0 \;\Rightarrow\; 19p \geq 800 \;\Rightarrow\; p \geq \frac{800}{19} \;\Rightarrow\; p \geq 43.$$

$$z \geq 0 \;\Rightarrow\; 400 - 9p \geq 0 \;\Rightarrow\; 400 \geq 9p \;\Rightarrow\; \frac{400}{9} \geq p \;\Rightarrow\; 44 \geq p.$$

Luego tenemos dos formas diferentes de obtener 5 euros con 100 monedas de 1, 10 y 20 céntimos:

- Si $p = 43$:

$$x = 70$$

$$y = 17$$

$$z = 13$$

- Si $p = 44$:

$$x = 60$$

$$y = 36$$

$$z = 4$$

Las dos maneras son:
70 monedas de 1 céntimo, 17 monedas de 10 céntimos y 13 monedas de 20 céntimos.
60 monedas de 1 céntimo, 36 monedas de 10 céntimos y 4 monedas de 20 céntimos. □

Ejercicio. 17.12.
Demuestra que existen infinitos números naturales x, y, z de manera que

$$\frac{xyz}{x+y+z}$$

es un número natural.

SOLUCIÓN.
Se pide que busquemos las soluciones enteras positivas de la siguiente ecuación diofántica:

$$\frac{xyz}{x+y+z} = n.$$

siendo n cualquier número natural.
Sea a cualquier número natural, llamamos:

$$x = 2n$$

$$y = 2n + a$$

$$z = a$$

Si sustituimos estos valores en la ecuación:

$$\frac{2n \cdot (2n+a) \cdot a}{2n + 2n + a + a} = n$$

$$\frac{n \cdot (4n+2a) \cdot a}{4n+2a} = n$$

$$na = n$$

$$a = 1$$

Por lo tanto, son soluciones $(x, y, z) = (2n, 2n+1, 1)$, para cualquier valor del número natural n.
Para obtener otras soluciones basta con dar diferentes valores a los números naturales a, n, cuya solución es $(x, y, z) = (2n, 2n+a, a)$.

□

Capítulo VII

Tercer nivel. Olimpíadas Internacionales

18. PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS

En este capítulo vamos a analizar los problemas propuestos en la fase internacional de la Olimpíada Matemática, los cuales conllevan un grado de dificultad mayor que en la fase nacional.

Ejercicio. 18.1.
Resuelve en números enteros positivos la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 = 157(x - y).$$

SOLUCIÓN.
Escribimos la ecuación de la siguiente manera:

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2 \cdot 157 \cdot (x - y).$$

Completamos cuadrados:

$$(x + y)^2 + x^2 - 2xy + y^2 - 314x + 314y + 157^2 = 157^2$$

$$(x + y)^2 + (157 - x + y)^2 = 157^2$$

Llamamos $a = x + y$, $b = 157 - x + y$, y la ecuación queda:

$$a^2 + b^2 = 157^2$$

Ecuación pitagórica cuya solución es:

$$a = j^2 - s^2$$

$$b = 2sj$$

$$157 = j^2 + s^2$$

Donde j y s son números naturales, $j \geq s$ para que las soluciones sean enteros positivos.
La única manera de satisfacer la ecuación $157 = j^2 + s^2$, es para $j = 11$ y $s = 6$. Sustituimos los valores y calculamos a y b:

$$a = 11^2 - 6^2 = 85$$

$$b = 2 \cdot 11 \cdot 6 = 132$$

También puede ser $a = 132$ y $b = 85$.

Vemos los dos casos posibles:

- Caso 1:

$$\begin{cases} x+y = 85 \\ 157 - x + y = 132 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 85 \\ x - y = 25 \end{cases}$$

  Sumando las dos ecuaciones:

$$2x = 110, \text{ luego } x = 55.$$

  Restando las dos ecuaciones:

$$2y = 60, \text{ luego } y = 30.$$

- Caso 2:

$$\begin{cases} x+y = 132 \\ 157 - x + y = 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 132 \\ x - y = 72 \end{cases}$$

  Sumando las dos ecuaciones:

$$2x = 204, \text{ luego } x = 102.$$

  Restando las dos ecuaciones:

$$2y = 60, \text{ luego } y = 30.$$

Por lo tanto las dos soluciones son:

$$(x, y) = (55, 30), \ (102, 30).$$

□

Ejercicio. 18.2. (IMO 2006)
Determine todas las parejas de enteros (x, y) tales que:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

SOLUCIÓN.
Para $x < 0$, la ecuación no tiene solución entera.

Para $x = 0$, se tienen dos soluciones:

$$1 + 2^0 + 2^1 = y^2$$
$$1 + 1 + 2 = y^2$$
$$4 = y^2$$
$$y = \pm 2$$

Suponemos ahora que $x > 0$, y también $y > 0$, ya que (x, y) es solución si y solo si $(x, -y)$ lo es.

Pasamos el 1 al segundo miembro:

$$2^x + 2^{2x+1} = y^2 - 1$$

Y como el segundo miembro es una diferencia de cuadrados:

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (y + 1)(y - 1)$$

Los dos factores del segundo miembro son de la misma paridad, y no pueden ser impares. Luego son pares, y por lo tanto uno tiene que ser múltiplo de 4. Entonces $x \geq 3$.
Uno de los factores de la derecha tiene que ser divisible entre 2^{x-1}. Podemos escribir:

$$y = 2^{x-1}m + k, \text{ donde } m \text{ es impar, } k = \pm 1.$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (2^{x-1}m + k)^2 - 1 = 2^{2x-2}m^2 + 2 \cdot 2^{x-1}mk + k^2 - 1 = 2^{2x-2}m^2 + 2^x km$$

Dividiendo todos los términos por 2^x:

$$1 + 2^{x+1} = 2^{x-2}m^2 + km$$

$$1 - km = 2^{x-2}m^2 - 2^{x+1}$$

$$1 - km = 2^{x-2}(m^2 - 8)$$

- Para $k = 1$, $m^2 - 8 \leq 0$, entonces $m = 1$, pero sustituyendo su valor en $1 - m = 2^{x-2}(m^2 - 8)$, vemos que no tiene solución.

- Para $k = -1$, la ecuación queda:

$$1 + m = 2^{x-2}(m^2 - 8) \geq 2(m^2 - 8)$$

$$1 + m \geq 2m^2 - 16$$

$$2m^2 - m - 17 \leq 0$$

Resolviendo, $m \leq 3$. Como para $m = 1$ no satisface la ecuación, nos queda $m = 3$. Sustituimos:

$$1 + 3 = 2^{x-2}(3^2 - 8)$$

$$4 = 2^{x-2}$$

$$x - 2 = 2$$

$$x = 4$$

Calculamos el valor de y:

$$y = 2^{4-1}3 - 1$$

$$y = 2^3 \cdot 3 - 1$$

$$y = 24 - 1$$

$$y = 23$$

Por supuesto $(4, -23)$ también es solución de la ecuación.

Por lo tanto las soluciones enteras (x, y) son $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(4, 23)$, $(4, -23)$. □

Ejercicio. 18.3.
Prueba que $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$ *tiene infinitas soluciones en los números enteros.*

SOLUCIÓN.
Hay una solución que es obvia: $(1,1,1)$. Vamos a ver que hay más soluciones.
Para reducir el número de incógnitas, suponemos $z = -x$. La ecuación queda:

$$x^2 + y^2 + x^2 = x^3 + y^3 - x^3$$

$$2x^2 + y^2 = y^3$$

$$2x^2 = y^3 - y^2$$

$$2x^2 = y^2(y-1)$$

$$x^2 = y^2 \cdot \frac{y-1}{2}$$

Para que tenga solución, $\frac{y-1}{2}$ tiene que ser un cuadrado perfecto:

$$\frac{y-1}{2} = k^2$$

$$y = 2k^2 + 1$$

Donde k es cualquier número entero. Calculamos el valor de x en función de k:

$$x^2 = (2k^2+1)^2 \cdot \frac{2k^2+1-1}{2}$$

$$x = (2k^2+1)k$$

Por lo tanto $z = -k(2k^2+1)$.
Hemos encontrado infinitas soluciones de números enteros, según los distintos valores de k:

$$(x, y, z) = (k(2k^2+1), 2k^2+1, -k(2k^2+1)).$$

□

Ejercicio. 18.4. (IMO 2003)
Determinar todas las parejas de enteros positivos (x, y) *tales que*

$$\frac{x^2}{2xy^2 - y^3 + 1}$$

es un entero positivo.

SOLUCIÓN.
Sea t un número entero positivo. La ecuación diofántica a resolver es:

$$\frac{x^2}{2xy^2 - y^3 + 1} = t$$

Estudiamos diferentes casos:

- Si $y = 1$, la ecuación queda:
$$\frac{x^2}{2x} = t$$
Entonces $2x$ divide a x^2, y 2 divide a x.
Por lo tanto x es par, $x = 2k$, para todo $k \geq 1$ entero positivo.
En este caso la solución es $(2k, 1)$.
- Si $x = 1$, la ecuación queda:
$$\frac{1}{2y^2 - y^3 + 1} = t$$
Entonces $2y^2 - y^3 + 1$ divide a 1. Tenemos dos opciones:
  - $2y^2 - y^3 + 1 = 1$. Entonces $y^2(2 - y) = 0$, que tiene dos soluciones: $y = 0$, $y = 2$. Como piden soluciones enteras positivas la solución es (1,2).
  - $2y^2 - y^3 + 1 = -1$. Ecuación que no tiene soluciones enteras.
- Suponemos $x, y > 1$. Desarrollamos la ecuación inicial:
$$x^2 = t(2xy^2 - y^3 + 1)$$
$$x^2 = 2txy^2 - ty^3 + t$$
$$x^2 - 2ty^2x + ty^3 - t = 0$$
Ecuación de segundo grado en la variable x, que si resolvemos:
$$x = \frac{2ty^2 \pm \sqrt{(2ty^2)^2 - 4(ty^3 - t)}}{2}$$
LLamamos D^2 al discriminante, que para que x sea un número entero, tiene que ser un cuadrado perfecto.

Vamos a demostrar entre qué dos cuadrados se encuentra D^2:

- Vemos si $(2ty^2 - y - 1)^2 < D^2$.

$$(2ty^2 - y - 1)^2 < (2ty^2)^2 - 4(ty^3 - t)$$
$$4t^2y^4 - 4ty^2(y+1) + (y+1)^2 < 4t^2y^4 - 4ty^3 + 4t$$
$$-4ty^3 - 4ty^2 + (y+1)^2 < -4ty^3 + 4t$$
$$(y+1)^2 < 4t + 4ty^2$$
$$y^2 + 2y + 1 < 4t(y^2+1)$$
$$2y < 4t(y^2+1) - (y^2+1)$$
$$2y < (y^2+1)(4t-1)$$

  Desigualdad que es cierta ya que $(y-1)^2 \geq 0$, entonces $y^2 + 1 \geq 2y$ y además $4t - 1 \geq 0$, se tiene que $2y < (y^2+1)(4t-1)$.

- Vemos si $(2ty^2 - y + 1)^2 > D^2$.

$$(2ty^2 - y + 1)^2 > (2ty^2)^2 - 4(ty^3 - t)$$
$$4t^2y^4 - 4ty^2(y-1) + (y-1)^2 > 4t^2y^4 - 4ty^3 + 4t$$
$$-4ty^3 + 4ty^2 + (y-1)^2 > -4ty^3 + 4t$$
$$(y-1)^2 > 4t - 4ty^2$$
$$(y-1)^2 > -4t(y^2-1)$$
$$(y-1)^2 > -4t(y+1)(y-1)$$
$$y - 1 > -4t(y+1)$$
$$1 - y < 4t(y+1)$$

  Desigualdad que es cierta ya que $t, y > 1$.

Entonces se tiene que $(2ty^2-y-1)^2 < D^2 < (2ty^2-y+1)^2$, es decir, es un cuadrado entre su cuadrado antecesor y su cuadrado sucesor, por lo que $D^2 = (2ty^2 - y)^2$:

$$(2ty^2)^2 - 4(ty^3 - t) = (2ty^2 - y)^2$$
$$4t^2y^4 - 4ty^3 + 4t = 4t^2y^4 - 4ty^3 + y^2$$
$$4t = y^2$$

Como son números enteros positivos, $t = k^2$, con k positivo:

$$y^2 = 4k^2$$
$$y = 2k$$

Calculamos x sustituyendo D^2:

$$x = \frac{2ty^2 \pm \sqrt{(2ty^2 - y)^2}}{2}$$

$$x = \frac{2ty^2 \pm (2ty^2 - y)}{2}$$

Tenemos dos soluciones para x, donde $y = 2k$, $t = k^2$:

$$x_1 = \frac{2ty^2 + 2ty^2 - y}{2}$$

$$x_1 = \frac{4ty^2 - y}{2}$$

$$x_1 = \frac{4k^2(2k)^2 - 2k}{2}$$

$$x_1 = \frac{16k^4 - 2k}{2}$$

$$x_1 = 8k^4 - k$$

$$x_2 = \frac{2ty^2 - 2ty^2 + y}{2}$$

$$x_2 = \frac{y}{2}$$

$$x_2 = \frac{2k}{2}$$

$$x_2 = k$$

Por lo tanto las soluciones enteras positivas (x, y) son $(2k, 1)$, $(k, 2k)$, $(8k^4 - k, 2k)$, donde k es un entero positivo.

□

Ejercicio. 18.5. (IMO 1998)
Encuentra todos los pares de números positivos (a, b) *tales que* $ab^2 + b + 7$ *divide a* $a^2b + a + b$.

SOLUCIÓN.
Ambos son números positivos, entonces:

$$ab^2 + b + 7 \leq a^2b + a + b$$

$$7 \leq a(ab + 1 - b^2)$$

Como $a > 0$, el otro factor también es positivo:

$$1 \leq ab + 1 - b^2$$

$$b^2 \leq ab$$

$$b \leq a$$

Por el algoritmo de la división, podemos dividir a entre b, dando de cociente q y de resto r:

$$a = qb + r$$

Sustituimos el valor de a en las expresiones iniciales:

$$ab^2 + b + 7 = (qb + r)b^2 + b + 7 = qb^3 + rb^2 + b + 7$$

$$a^2b + a + b = (qb + r)^2b + (qb + r) + b = q^2b^3 + 2qrb^2 + r^2b + qb + r + b$$

Las siguientes condiciones son equivalentes:

$$ab^2 + b + 7 \text{ divide a } a^2b + a + b$$

$$qb^3 + rb^2 + b + 7 \text{ divide a } q^2b^3 + 2qrb^2 + r^2b + qb + r + b$$

$$qb^3 + rb^2 + b + 7 \text{ divide a } q^2b^3 + 2qrb^2 + r^2b + qb + r + b - q(qb^3 + rb^2 + b + 7)$$

$$qb^3 + rb^2 + b + 7 \text{ divide a } q^2b^3 + 2qrb^2 + r^2b + qb + r + b - q^2b^3 - qrb^2 - qb - 7q$$

$$qb^3 + rb^2 + b + 7 \text{ divide a } qrb^2 + r^2b + r + b - 7q$$

Estudiamos diferentes casos:

- Si $b=1$, entonces $r=0$, y la condición anterior es equivalente a las siguientes:

$$q+8 \text{ divide a } 1-7q$$

$$q+8 \text{ divide a } 1-7q+7(q+8)$$
$$q+8 \text{ divide a } 1-7q+7q+56$$
$$q+8 \text{ divide a } 57$$
$$q+8 \text{ divide a } 3\cdot 19$$

  Como $q+8>3$, las dos soluciones posibles son:

$$q+8=19 \;\Rightarrow\; q=11 \text{ y por lo tanto } a=11.$$

$$q+8=57 \;\Rightarrow\; q=49 \text{ y por lo tanto } a=49.$$

  Las soluciones en este caso son (11,1) y (49,1).

- Si $b\geq 2$, suponemos que $r=0$. Entonces la condición anterior se escribe qb^3+b+7 divide a $b-7q$. Tenemos las siguientes desigualdades:

$$qb^3+b+7>b-7q$$

$$qb^3+b+7\geq 8q+b+7>7q-b$$

  Entonces $qb^3+b+7>|b-7q|$, lo que significa que $b-7q=0$, y por lo tanto $b=7q$. Calculamos a.

$$a=bq+r=7qq=7q^2$$

  Las soluciones en este caso son $(7q^2,7q)$.

- Suponemos que b no divide a a, es decir $r\geq 1$.

  Si $b=2$ y $r=1$ la condición anterior implica:

$$qb^3+rb^2+b+7 \text{ divide a } qrb^2+r^2b+r+b-7q$$

$$8q+13 \text{ divide a } 5-3q$$
$$8q+13 \text{ divide a } 8(5-3q)+3(8q+13)$$
$$8q+13 \text{ divide a } 79$$

  Que no es posible, ya que 8 no divide a 66.

Suponemos $b \geq 3$.

$$qb^3 + rb^2 + b + 7 \leq qrb^2 + r^2b + r + b - 7q$$

$$qb^3 + rb^2 - qrb^2 - r^2b \leq r - 7q - 7$$

$$b(qb^2 + rb - qrb - r^2 \leq r - 7q - 7$$

$$b(qb(b-r) + r(b-r)) \leq r - 7q - 7$$

$$b(b-r)(qb+r) \leq r - 7q - 7$$

Que no es posible, ya que $r - 7q - 7 < qb + r < b(b-r)(qb+r)$. No hay más soluciones.

Por lo tanto las soluciones (a, b) son (11,1), (49,1) y $(7q^2, 7q)$.

□

Ejercicio. 18.6. (IMO 1997, Alemania)
Determina todos los números primos p para los cuales el sistema

$$\begin{cases} p+1 = 2x^2 \\ p^2+1 = 2y^2 \end{cases}$$

tiene solución en números enteros.

SOLUCIÓN.
Es un sistema de ecuaciones diofánticas con dos incógnitas.
Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x, y \geq 0$
Vemos que si $p + 1 = 2x^2$, entonces $p + 1$ es par, y por lo tanto p es impar, es decir, $p \neq 2$.
Por otro lado $2x^2 \equiv 1 \equiv 2y^2$ módulo p, lo que implica que $x \equiv \pm y$ módulo p, ya que p es un número primo impar. Como $x < y < p$, entonces tenemos que $x + y = p$. Sustituyendo $y = p - x$ en la segunda ecuación del sistema de ecuaciones:

$$p^2 + 1 = 2(p-x)^2$$

$$p^2 + 1 = 2p^2 - 4px + 2x^2$$

$$p^2 + 1 = 2p^2 - 4px + 2x^2$$

$$p^2 + 1 = 2p^2 - 4px + p + 1$$

$$4px = p^2 + p$$

$$4x = p + 1$$

$$4x = 2x^2$$

$$0 = x(x-2)$$

Las posibles soluciones son $x = 0$, $x = 2$.

Calculamos los valores de p:

$$p = 2x^2 - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Pero $p = -1$ no es un número primo.

$$p = 2x^2 - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Por lo tanto, el único número primo para que el sistema tenga solución entera es $p = 7$.
La solución del sistema es $(x, y) = (2, 5)$. □

Ejercicio. 18.7. (IMO 1988)
Sean a y b enteros positivos tales que $(ab+1)$ divide a a^2+b^2. Demostrar que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

es el cuadrado de un entero.

SOLUCIÓN.
Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.
Si $(ab+1)$ divide a a^2+b^2, entonces existe un número entero positivo k tal que:

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$$

Entonces:

$$a^2+b^2 = k(ab+1)$$
$$a^2 - kab + b^2 = k$$

Suponemos que k no es un cuadrado perfecto.
Vemos que a y b son no nulos, si uno es cero, k es un cuadrado perfecto. Además ambos tienen el mismo signo, ya que entonces $ab < 0$ y en consecuencia $a^2 - kab + b^2 > k$.

Suponemos que a y b son enteros tales que:

- $a^2 - kab + b^2 = k$.
- $a \geq b > 0$.
- a mínimo.

Esto no resta generalidad pues la ecuación es simétrica en a, b.
Observamos primero que $a > b$, pues si $a = b$ entonces $(2-k)a^2 = k$, y el miembro izquierdo es no positivo.

Consideramos ahora la expresión:

$$a^2 - kab + b^2 = k$$

como una ecuación cuadrática en a.
Tiene entonces dos soluciones a y a_1. Como $a + a_1 = kb$, entonces a_1 es un entero.
Tenemos un nuevo par que satisface la ecuación (a_1, b). Como $b > 0$ entonces $a_1 > 0$.
Además $aa_1 = b^2 - k$, por lo tanto:

$$a_1 = \frac{b^2 - k}{a} < \frac{a^2 - 1}{a} < a$$

En consecuencia el par (a_1, b) satisface la ecuación pero $a_1 < a$, lo cual contradice la minimalidad de a.

NOTA: Esta solución ganó el premio a la solución original en la IMO del año 1988. □

Ejercicio. 18.8. (IMO 2001)
Sean $a > b > c > d$ enteros positivos y supongamos que

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Probar que $ab + cd$ no es primo.

SOLUCIÓN.
Vamos a comprobar que:

$$ab + cd > ac + bd > ad + bc$$

Ya que:

$$(ab + cd) - (ac + bd) = ab + cd - ac - bd = a(b - c) - d(b - c) = (a - d)(b - c)$$

Por las condiciones del enunciado $a > b > c > d$:

$$(a - d)(b - c) > 0 \text{ entonces } ab + cd > ac + bd$$

Por otro lado:

$$(ac + bd) - (ad + bc) = ac + bd - ad - bc = a(c - d) - b(c - d) = (a - b)(c - d)$$

Por las condiciones del enunciado $a > b > c > d$:

$$(a - b)(c - d) > 0 \text{ entonces } ac + bd > ad + bc$$

Desarrollamos la ecuación inicial:

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

$$ac + bd = b^2 + bd - ab + bc + bd + d^2 - ad + cd + ab + ad - a^2 + ac - bc - cd + ac - c^2$$

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$$

Multiplicamos $(ac + bd)(b^2 + bd + d^2)$:

$$ac(b^2 + bd + d^2) + bd(b^2 + bd + d^2)$$

Sustituimos $a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$:

$$ac(b^2 + bd + d^2) + bd(a^2 - ac + c^2)$$

$$ab^2c + abcd + acd^2 + a^2bd - abcd + bc^2d$$

$$ab(bc + ad) + cd(ad + bc)$$

$$(ab + cd)(ad + bc)$$

Es decir, $(ac + bd)(b^2 + bd + d^2) = (ab + cd)(ad + bc)$.
Entonces $(ac + bd)$ divide a $(ab + cd)(ad + bc)$.

Suponemos que $(ab + cd)$ es primo. Como es $ab + cd > ac + bd$, no puede tener factores comunes con $(ac + bd)$. Por lo tanto $(ac + bd)$ debe dividir al otro factor $(ad + bc)$, pero esto es una contradicción ya que $ac + bd > ad + bc$.

Por lo tanto $(ab + cd)$ no es primo. □

Ejercicio. 18.9.
Demuestra que la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

no tiene soluciones enteras excepto $x = y = z = 0$.

SOLUCIÓN.
Como el segundo miembro es par, los términos del primer miembro o son los tres pares o uno par y dos impares. Si uno fuera par, el lado derecho es divisible por 4, el de la izquierda solo por 2. Por lo tanto los tres términos son pares.

Podemos escribir $x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ z = 2z_1$, y sustituyendo:

$$4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 = 2 \cdot 2x_1 \cdot 2y_1 \cdot 2z_1$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$$

Haciendo el mismo razonamiento anterior, tenemos $x - 1 = 2x_2,\ y_1 = 2y_2,\ z_1 = 2z_2$, y sustituyendo:

$$4x_2^2 + 4y_2^2 + 4z_2^2 = 4 \cdot 2x_2 \cdot 2y_2 \cdot 2z_2$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2$$

Continuando de manera sucesiva tenemos:

$$x = 2x_1 = 2^2x_2 = 2^3x_3 = \ldots = 2^nx_n = \ldots$$

$$y = 2y_1 = 2^2y_2 = 2^3y_3 = \ldots = 2^ny_n = \ldots$$

$$z = 2z_1 = 2^2z_2 = 2^3z_3 = \ldots = 2^nz_n = \ldots$$

Si (x, y, z) es una solución, entonces x, y, z son divisibles por 2^n para cualquier n. Pero esto es solo posible para $x = y = z = 0$.

□

Observación. 18.10.
Nos planteamos si la ecuación tiene soluciones enteras cuando el segundo miembro es $3xyz$; tenemos el siguiente problema:

Ejercicio. 18.11.
Encuentra soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

distintas de $x = y = z = 0$.

SOLUCIÓN.
Una solución es obvia, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.
Ahora fijamos como parámetros y, z. Entonces es una ecuación cuadrática en x:

$$x^2 - 3yzx + y^2 + z^2 = 0$$

Tiene dos soluciones x, x_1 que satisfacen:

$$x + x_1 = 3yz$$

$$x_1 = 3yz - x$$

Entonces x_1 es un número entero también. Si hay tres números (x, y, z) que son solución de la ecuación, debe haber otros tres, $(3yz - x, y, z)$ que serán solución de la ecuación. Lo comprobamos:

$$(3yz - x)^2 + y^2 + z^2 = 3(3yz - x)yz$$

$$9y^2z^2 - 6xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 9y^2z^2 - 3xyz$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

Por lo tanto, a partir de una solución (x, y, z), las infinitas soluciones de números enteros de la ecuación son $(3yz - x, y, z)$:

x	1	2	1	5	2	13	5	34
y	1	1	2	2	5	5	13	13
z	1	1	1	1	1	1	1	1

Y así sucesivamente. □

Ejercicio. 18.12.
Estudia si tiene solución la ecuación diofántica:

$$x^2 + x + 1 = y^N.$$

SOLUCIÓN.
Para el caso particular $N = 2$, es estudiar si $x^2 + x + 1$ es un cuadrado perfecto:

$$x^2 + x + 1 = y^2.$$

Pasando todo al segundo miembro, tenemos una ecuación de segundo grado en la variable x:

$$x^2 + x + 1 - y^2 = 0.$$

Cuya solución es:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1 - y^2)}}{2}$$

Para que tenga soluciones enteras el discriminante tiene que ser un cuadrado perfecto, lo llamamos k^2:

$$1 - 4(1 - y^2) = k^2$$

$$1 - 4 + 4y^2 = k^2$$

$$4y^2 - k^2 = 3$$

El primer miembro es una diferencia de cuadrados, que escribimos como suma por diferencia:

$$(2y + k)(2y - k) = 3$$

Consideramos las diferentes factorizaciones de 3:

$2y + k$	3	1	-1	-3
$2y - k$	1	3	-3	-1

Estudiamos los diferentes casos:

- Caso 1:

$$\begin{cases} 2y + k = 3 \\ 2y - k = 1 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$4y = 4$$

$$y = 1$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$2k = 2$$

$$k = 1$$

Por lo tanto las soluciones son $(x, y) = (0, 1),\ (-1, 1)$.

- Caso 2:

$$\begin{cases} 2y+k=1 \\ 2y-k=3 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$4y=4$$

$$y=1$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$2k=-2$$

$$k=-1$$

Por lo tanto las soluciones son $(x,y)=(0,1),\ (-1,1)$.

- Caso 3:

$$\begin{cases} 2y+k=-1 \\ 2y-k=-3 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$4y=-4$$

$$y=-1$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$2k=2$$

$$k=1$$

Por lo tanto las soluciones son $(x,y)=(0,-1),\ (-1,-1)$.

- Caso 4:

$$\begin{cases} 2y+k=-3 \\ 2y-k=-1 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, entonces:

$$4y=-4$$

$$y=-1$$

Restamos las ecuaciones, entonces:

$$2k=-2$$

$$k=-1$$

Por lo tanto las soluciones son $(x,y)=(0,-1),\ (-1,-1)$.

Las soluciones son $(x,y)=(0,1),\ (-1,1),\ (0,-1),\ (-1,-1)$.

Para $N>2$, la ecuación $x^2+x+1=y^N$ se puede escribir:

$$\frac{x^3-1}{x-1}=y^N$$

La ecuación diofántica:

$$\frac{x^n-1}{x-1}=y^q,\ \text{donde } x>1,\ y>1,\ n>2,\ q\geq 2,$$

fue estudiada por T. Nagell en 1920. Veinte años más tarde, W. Ljungren clarificó algunos aspectos y completó la demostración del siguiente resultado:

La ecuación $\frac{x^n-1}{x-1}=y^q$ no tiene otras soluciones enteras que $\frac{3^5-1}{3-1}=11^2$, $\frac{7^4-1}{7-1}=20^2$, $\frac{18^3-1}{18-1}=7^3$, si se cumplen cualquiera de las siguientes condiciones:

- $q=2$.
- 3 divide a n.
- 4 divide a n.
- $q=3$ y n no es congruente con 5 módulo 6.

Esto implica que solo hay una solución de la ecuación $x^2+x+1=y^N$:

$$x=18,\ y=7,\ N=3.$$

□

Ejercicio. 18.13.
¿Existen números enteros positivos a, b, c, tales que $\mathrm{m.c.d.}(a,b,c)=1$, *y que* $\frac{a^2}{b+c}$, $\frac{b^2}{a+c}$, $\frac{c^2}{a+b}$ *sean también números enteros positivos?*

SOLUCIÓN.
En primer lugar vemos que a, b y c deben ser números primos dos a dos.
Si el número primo p divide a $\mathrm{m.c.d.}(a,b)$, entonces que $(a+b)$ divida a c^2 implica que p divide a c, pero es una contradicción ya que el $\mathrm{m.c.d.}(a,b,c)=1$.
Como son divisores de números primos dos a dos, entonces $a+b$, $b+c$, $a+c$, son también primos dos a dos.

Por otro lado, como $a+b$ divide a c^2, $a+c$ divide a b^2, $b+c$ divide a a^2, entonces $a+b$, $b+c$, $a+c$ divide a:

$$D=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2-a^2-b^2-c^2.$$

Vamos a ver que $a+b$ divide a D. Desarrollamos dos de los cuadrados de D:

$$D=(a+b)^2+a^2+2ac+c^2+b^2+2bc+c^2-a^2-b^2-c^2$$

$$D=(a+b)^2+2ac+c^2+2bc$$

$$D=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2$$

Los tres términos son divisibles por $a+b$, por lo tanto divide a D.
Análogamente se hace para $a+c$ y $b+c$.
Entonces el producto $(a+b)(a+c)(b+c)$ también divide a D.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $a \leq b \leq c$, y que $a+b \leq a+c \leq b+c$. Entonces:

$$(a+b)(a+c)(b+c) \leq D$$

Y como:

$$D = (a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 < 3(b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 < 3(b+c)^2$$

Entonces:

$$(a+b)(a+c)(b+c) \leq D < 3(b+c)^2$$

$$(a+b)(a+c) < 3(b+c)$$

Por lo tanto:

$$(a+b)c < (a+b)(a+c) < 3(b+c) < 3b+3c \leq 6c$$

Lo que implica que:

$$a+b < 6$$

Como a y b son primos entre sí, su suma es menor que 6 y $a \leq b \leq c$, el único caso posible es:

$$a=2,\ b=3,\ c \geq 3$$

Pero si sustituimos los valores:

$$\frac{4}{3+c},\ \frac{9}{2+c},\ \frac{c^2}{5}$$

Vemos que es imposible, por lo tanto no tiene soluciones enteras positivas. □

Bibliografía

[1] C.B.Boyer, *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial, 1986.

[2] T. Andreescu, D. Andrica, *An introduction to diophantine equations*, Gil, 2002.

[3] A. Engel, *Problem-solving strategies*, Springer, 1998.

[4] J. H. Nieto, *Teoría de números para Olimpíadas Matemáticas*, Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, 2014.

[5] Cristóbal Sánchez-Rubio y Manuel Ripollés Amela, *Manual de matemáticas para preparación olímpica*, Universitat Jaume I. Castellón, 2000.

[6] *Olimpíada Matemática Española*, Real Sociedad Matemática Española, 2004.

[7] Underwood Dudley, *Elementary number theory*, 1969.

[8] M. Becheanu, *International Mathematical Olympiads. 1959-2000*, The Academic Distribution Center, 2001.

Refencias Web:

Nota[1]

- https://math.stackexchange.com/
- https://artofproblemsolving.com/
- http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es
- http://www.ugr.es/olimpiada/
- http://www.ugr.es/pjara/
- https://www.imo-official.org/problems
- http://www.cs.cornell.edu/asdas/imo/
- http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/entrenamiento/material/jornadas.pdf
- http://www.math.olympiaadid.ut.ee
- https://mks.mff.cuni.cz/kalva/
- http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/TNumerosOlimpiadas-final.pdf
- http://matematica.cubaeduca.cu/medias/pdf/844.pdf
- https://w3.ual.es/eventos/omersmalmeria/geometria/Diofanticas.pdf
- https://mathoverflow.net/questions/
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html

[1] Los enlaces son válidos en el formato digital.

Índice alfabético