COMPUTACIÓN SIMBÓLICA

María José Zapata

Departamento de Álgebra

Universidad de Granada. 2016

COMPUTACIÓN SIMBÓLICA

MARÍA JOSÉ ZAPATA

Director: Prof. Pascual Jara
Departamento de Álgebra

Trabajo de fin de grado
Universidad de Granada. 2016

A mi padre

Agradecimientos

A mi tutor por su inestimable ayuda y paciencia.

Introducción

En los últimos años las matemáticas discretas han ganado popularidad debido a sus múltiples aplicaciones dentro de las distintas áreas tecnológicas. Una consecuencia directa de este hecho es la introducción de esta disciplina como asignatura propia en la mayoría de ingenierías. En este sentido, la teoría de grafos como parte de la matemática discreta, es una de las ramas con mayor aplicabilidad.

En este trabajo estudiaremos algoritmos para tratar con grafos; la idea es obtener un modelo algebraico de los grafos para estudiar sus propiedades y desarrollar nuevos algoritmos, de cara a las muchas aplicaciones que de los mismos se realizan en la actualidad. Aplicaremos los resultados obtenidos a un problema de la vida cotidiana: la configuración de semáforos urbanos.

Para conseguir ver la importancia relativa del uso de un modelo algebraico veremos algunos conceptos que se calculaban usando la combinatoria, es decir, quitando o añadiendo elementos y comprobaremos que su dificultad es mucho más alta que usando la modelización algebraica.

En una primera instancia, las herramientas que vamos a utilizar son la colorabilidad de un grafo, el algoritmo de la división de polinomios en varias variables, las bases de Groebner, el polinomio cromático y las raíces de la unidad para lograr la modelización de los semáforos.

Los contenidos los estructuramos en varios niveles.

1. Empezaremos hablando de la k-coloreabilidad de grafos para ello introduciremos brevemente unos conceptos básicos sobre grafos, una historia sobre los orígenes de la k-coloreabilidad y algunos elementos básicos en dicha teoría, así como algunos de los resultados que se han considerado importantes para dar una base teórica al proyecto dentro de este campo.

2. Posteriormente definiremos y expondremos toda la base teórica sobre anillos de polinomios, monoideales, bases de Groebner, etc., en los que se basan los resultados de este proyecto.

3. Realizaremos un modelo algebraico de la coloreabilidad, y los aplicaremos a diversos posibles modelos de organización del tráfico en una ciudad.

4. El último elemento de este trabajo será la presentación de diferentes ejemplos en los que se pretende comparar diversas configuraciones, en este caso de cruces regulados por semáforos, estableciendo la base matemática para su resolución y una tabla de conclusiones en cada uno de los casos.

Índice general

Capítulo I

COLORACIÓN DE GRAFOS

Introducción

Los grafos son objetos que abundan en muchas ramas de la matemática; los podemos usar, por ejemplo, para diseñar los diagramas de instalación de redes eléctricas que usan los ingenieros entre otras múltiples aplicaciones. En general muchos problemas que son de naturaleza combinatoria pueden ser pensados como problemas de grafos. Hoy en día la teoría de grafos es usada como herramienta fundamental en muy diferentes áreas, ajenas a la matemática, como la investigación operativa, la química, la física, la genética, etc.

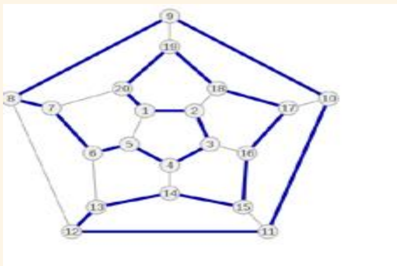
Es dentro de este campo, el de buscar aplicabilidad a la coloreabilidad de los grafos y a la computación simbólica, donde se desarrollará este trabajo.

1. Nociones de grafos

Antes de continuar definamos lo que es un grafo, y veamos un ejemplo bastante intuitivo: al pensar en un mapa de carreteras, podemos considerar dos tipos básicos de elementos: ciudades y carreteras. Nuestro objetivo es modelizar las conexiones entre ciudades por carretera usando un objeto matemático abstracto y esto lo conseguiremos mediante el uso de grafos. Matemáticamente su definición es:

Un **grafo** es una terna $G=(V,A,\phi)$, donde $V=V(G)$ es una colección finita y no vacía de puntos a los que llamaremos **vértices** de G; $A=A(G)$ es una colección finita de líneas que llamaremos **aristas** o **lados** de G y que unen elementos de V y ϕ es una aplicación: $\phi: A \longrightarrow V \times V$ donde para cada $a \in A$, $\phi(a)=(v_1,v_2)$, siendo $v_1, v_2 \in V$. Donde a cada elemento de A se le asocia dos elementos v_1 y v_2 de V, de manera que a *une* los vértices v_1 y v_2. Se dice que v_1 y v_2 son los extremos de la arista a, o lo que es lo mismo que la arista es **incidente** en v_1 y v_2 o simplemente que los vértices son **adyacentes** a la arista. Si dos vértices o dos lados no son adyacentes, se llaman **independientes**.

La manera más habitual de dibujar un grafo es dibujar un punto por cada vértice y, si existe una arista entre dichos vértices, dibujar una línea que los una. La representación de un grafo no es única. Ejemplo:



Se dice que el grafo G es **orientado**, si las aristas sólo se pueden recorrer en un sentido. En caso contrario diremos que es **no orientado**.
Si un grafo es orientado, siendo $\{v_1, v_2\}$ una arista, entonces se dice que v_1 es el **origen** y v_2 es el **fin** de la arista. En este caso las aristas se llaman **flechas** del grafo.

Una arista de un grafo es un **lazo** si $\varphi(A) = (v, v)$. En un grafo orientado una flecha será un **lazo** si origen y fin no coinciden.

El grafo G es **simple**, si no tiene ni aristas múltiples ni lazos, es decir, si no hay más de una flecha entre dos vértices y no existe ningún lazo.

El grafo G es **conexo**, si para cada dos vértices v y w existe una sucesión de lados $l_1, \ldots, l_t$ tal que v es adyacente a l_1, w es adyacente a l_t, y cada dos lados l_i, l_{i+1} tienen un vértice adyacente en común. El grafo será **disconexo** si no es conexo.

Definimos también una **componente conexa** de un grafo como un subgrafo conexo maximal, es decir, para un vértice v la componente conexa de v es el conjunto de vértices distintos de v y pertenecientes al grafo para los cuales existe una sucesión de lados de v a cada uno de los vértices.

A-I Si w está en la componente conexa de v, v lo está en la de w. Usaremos la notación $K(G)$ para indicar las componentes conexas de un grafo.

A-II La observación clave es que si consideramos dos vértices distintos de G, sus componentes conexas o bien son la misma o bien son disjuntas.

A-III Todo grafo es unión disjunta de sus componentes conexas.

Un grafo G se llama **finito** si los conjuntos V y A son conjuntos finitos.

Los grafos que vamos a considerar son finitos.

Definimos el **grado** de un vértice de un grafo finito como el número de aristas que inciden en él, es decir, como el número de lados que lo tienen como adyacente.

Diremos que un grafo finito G es **regular** cuando todos los vértices de G tienen el mismo grado.

Todo grafo finito se puede representar mediante un gráfico formado por puntos, que representan a los vértices, y líneas, que representan a los lados.

2. K-coloreabilidad. Nociones básicas

La coloración de grafos es un caso especial de etiquetado de grafos asignando a cada elemento del grafo un color. Para definir una **coloración** de los vértices de un grafo haremos que ningún par de vértices adyacentes compartan el mismo color. Esto se puede extender a aristas del grafo, manteniendo siempre la condición de que elementos adyacentes no compartan el mismo color; simplemente señalar que este caso puede ser tratados como si de coloración de vértices se tratase considerando el grafo dual.

Sea G un grafo de n vértices, sea k un entero positivo, con $k < n$. Sea $C_k = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ un conjunto de k elementos, donde cada $c_k \in \mathbb{Z}^+$ se denomina **color**. Una k**–coloración** de los vértices de G, o simplemente, una k-coloración de G, es una aplicación $f : V \longrightarrow C_k$, verificando que para cada lado $\{A, B\}$ se tiene $f(A) \neq f(B)$.
De forma intuitiva f asigna colores a cada uno de los vértices de G, y si dos vértices son adyacentes, entonces están coloreados de diferente forma.
Además si si todo par de vértices adyacentes recibe colores distintos se dice que es **coloración propia**

Dadas dos coloraciones f, g de un grafo G, se dice que son **distinguibles** si no se puede obtener una como permutación de los elementos de la otra. Esto significa que no existe una permutación π de C_k haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& C_k \arrow[dd, "\pi"] \\
V \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
& C_k
\end{tikzcd}$$

Se dice que G es k**–coloreable** si tiene al menos una k–coloración propia y que es **únicamente** k**–coloreable** si tiene solamente una k–coloración propia distinguible.

Si G es un grafo de n vértices y únicamente k coloreable, entonces tendrá $k!$ coloraciones diferentes no distinguibles entre sí

La propuesta a realizar en el estudio de semáforos es representar cada cruce por un grafo, siendo los vértices los semáforos y las aristas las relaciones de incompatibilidad. Determinaremos coloraciones aunque no sean únicamente coloreables.

3. Una breve historia de la coloreabilidad

Antes de comenzar con la coloreabilidad de los grafos hagamos un breve recorrido por la historia de esta disciplina para entender sus orígenes y evolución.

La coloración de grafos se introdujo como resultado de intentar colorear un mapa de Inglaterra, asociando al mapa un grafo dual para así convertir el problema de la coloración en un problema de grafos.

En 1852 Francis Guthrie, que había sido alumno de Augustus de Morgan, postuló la conjetura de los 4 colores, especificando que sólo se necesitan 4 colores para colear el mapa de forma que las regiones que comparten un borde común no reciban el mismo color. El término país vecino se debe entender como países adyacentes a lo largo de una línea fronteriza y no por un punto o cantidad finita de puntos, si no se hiciese así es fácil comprobar que se necesitan más de cuatro colores. Para definir país tendremos que entenderlo como una región conexa del plano o tampoco podríamos demostrar la veracidad de esta teoría.

El hermano de Guthrie, que en ese momento también era alumno de de Morgan, le paso este problema a su profesor para saber si existía una prueba matemática. De Morgan fue incapaz de decidir sobre la certeza o veracidad del problema así que se lo comunicó a otros matemáticos que empezaron a trabajar sobre él. En 1860 Charles Peirce trato de probar la conjetura sin resultado positivo. Tras varios años sin respuesta, Arthur Cayley envía el problema a la London Mathematical Society en 1878 ante su incapacidad de probar la veracidad del mismo.

Aproximadamente un año después aparece una prueba que permanecerá incuestionable durante más de una década. Desarrollada por Alfred Bray Kempe quién utilizo un método conocido como el *Método de las cadenas de Kempe* . Aunque la prueba es incompleta contiene en esencia las ideas básicas que condujeron un siglo más tarde a la prueba correcta. La demostración de Kempe usaba el concepto de mapa normal, que lo es si ninguna región incluye a otra y si en cada punto se encuentran exactamente tres regiones. En esos mapas no hay regiones con 1 borde. Si un mapa no es normal se puede obtener otro normal que para ser coloreado necesite el mismo número de colores que él no normal, por lo que el estudio se redujo a la demostración de la veracidad del teorema en mapas normales.

En realidad Kempe probó que cinco colores eran suficientes pero, aunque no se había encontrado todavía un mapa que no fuese 4-coloreable, tampoco se había demostrado que todos tenían que serlo. En 1890 Heawood descubrió que el argumento de Kempe contenía un error y consiguió probar el teorema de los 5 colores. En el siglo siguiente se fueron introduciendo nuevas teorías cuyo objetivo era reducir el número de colores a 4.

Fue en 1976 cuando se publica una prueba (asistida por ordenador) que garantiza que todos los mapas normales se pueden colorear con a lo sumo cuatro colores. Sin embargo, esta prueba propuesta por Kenneth Appel y Wolfgang causó una gran controversia precisamente porque se ayudaba de un ordenador.

En 1997, Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas publicaron una prueba de 42 páginas, también hecha con la ayuda de un ordenador, que sí fue comúnmente aceptada, poniendo fin a un problema que había ocupado a los matemáticos durante más de un siglo, y que de hecho se había convertido en el problema más estudiado de la teoría de grafos.

La coloración de grafos ha sido estudiada como un problema algorítmico desde 1970: el problema del número cromático es el problema 21 de Karp NP-completo de 1972, y aproximadamente al mismo tiempo varios algoritmos de tiempo exponencial fueron desarrollados basados en *back tracking* y en la eliminación y *mala* contracción de Zykov (1949).Para ver la importancia actual de la coloración de grafos destacar que una de las mayores aplicaciones de la coloración de grafos es la asignación de registros en compiladores introducida en 1981.

El interés en la coloración de grafos, sin embargo, es más que histórico teniendo aplicación directa para la planificación de tópicos encontrados en el mundo real de una gran importancia práctica, desde autobuses, trenes, tráfico, gestión de recursos en las tareas de secuenciación, arquitectura de ordenadores y gestión del espacio en las aulas o del tráfico aéreo, entre otros. En los últimos años se han obtenido numerosos avances teóricos que extienden los resultados ya conocidos y generalizan la mayoría de las técnicas utilizadas.

Dentro de este campo es donde se desarrolla nuestro trabajo, en el que estudiaremos la aplicabilidad de la k–coloreabilidad al sistema de semáforos de una ciudad.

Capítulo II

ANILLOS DE POLINOMIOS Y BASES DE GROEBNER

Introducción

Numerosos problemas pueden ser modelados por sistemas de ecuaciones polinomiales. N. Alon acuñó el término método polinomial para describir el uso de polinomios no lineales para resolver problemas combinacionales. Usaremos dicho método junto con la aplicación de los conocimientos sobre la teoría algorítmica de ideales polinomiales, la cúal permite usar dichos ideales para detectar la k-coloreabilidad. Usando entre otras herramientas los algoritmos de la división polinomiales, los conocimientos sobre bases de Groebner y la programación en Mathematica conseguiremos desarrollar un procedimiento de trabajo que nos permita determinar todas las opciones posibles para la regulación de un sistema de semáforos.

En realidad buscamos encontrar soluciones algorítmicas que resuelvan problemas combinacionales. Asociaremos preguntas espcíficas a ecuaciones polinomiales, las soluciones de dichos sistemas serán las respuestas a los problemas planteados. Esta metodología es aplicable a numerosos contextos, en concreto las soluciones a los sistemas de ecuaciones que plantearemos nos permitirá saber las distintas combinaciones de los colores de las luces de los semáforos de nuestros cruces, tratandolos como grafos y explorando su k-coloreabilidad. [5]

La herramienta fundamental para hacer un desarrollo computacional la proporcionan las bases de Groebner, que nos permiten diseñar algoritmos para comparar ideales y dar métodos efectivos para poder calcular las operaciones aritméticas elementales con los mismos.

Antes de comenzar estableceremos las bases teóricas sobre anillos de polinomios en los que se basa nuestro trabajo.

4. Aritmética de anillos de polinomios. Bases de Groebner.

4.1. Introducción

Vamos a usar la aritmética de anillos de polinomios en varias indeterminadas con coeficientes en un cuerpo. Introduciremos métodos computacionales, basados en la división con resto en anillos de polinomios en n indeterminadas, por lo que necesitaremos introducir relaciones de orden en $\mathbb{N}^n$ que sean un buen orden compatible con la suma y con la condición de que el elemento $0 = (0, \cdots, 0)$ sea el elemento mínimo. Usando las bases de Groebner podremos realizar operaciones aritméticas con ideales.

4.2. Representación de polinomios

Se considera un cuerpo K, indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$ y el anillo $K[X_1, \ldots, X_n]$ de los polinomios en $X_1, \ldots, X_n$ con coeficientes en K. Al identificar $K[X_1, \ldots, X_n]$ con $K[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$, cada elemento $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ se escribe, de forma única, como:

$$F = \sum_{i=1}^{t} F_i X_n^i, \qquad \text{con } F_i \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]. \tag{II.1}$$

Cada producto de éstas se escribe de forma única como

$$X_1^{\alpha_1} \cdots X_n{}^{\alpha_n}.$$

Llamamos **monomio** a cada una de estas expresiones. Por simplicidad, al monomio $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n{}^{\alpha_n}$ lo representaremos por X^α, siendo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Entonces el polinomio F se puede escribir como una combinación lineal de monomios, con coeficientes en K, esto es,

$$F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha, \qquad \text{con } a_\alpha \in K, \text{ casi todos nulos.}$$

4.3. Órdenes en $\mathbb{N}^n$

Estamos interesados en la unicidad de esta representación. Buscaremos criterios para asociar a cada polinomio una expresión única que nos permita compararlos de forma sencilla y poder desarrollar algoritmos sobre los mismos.

Para poder determinar expresiones únicas para cada polinomio necesitamos utilizar ordenes totales en $\mathbb{N}^n$. (Un orden $\preceq$ es un **orden total** si para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ se tiene $\alpha \preceq \beta$ ó $\beta \preceq \alpha$).
También necesitaremos que sea un buen orden, es decir, un orden en un conjunto S es un **buen orden** si cada subconjunto no vacío tiene un primer elemento.

Es indispensable fijar un buen orden cuando trabajamos con bases de Groebner, pues los resultados computacionales dependen del orden fijado. Vamos a usar el siguiente orden
Orden lexicográfico

$$\alpha \geq_{lex} \beta \text{ si para el primer índice } i \text{ tal que } \alpha_i \neq \beta_i \text{ se tiene } \alpha_i > \beta_i.$$

Debido a la biyección entre $\mathbb{N}^n$ y el conjunto de monomios $X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$, fijada una ordenación, $X_1 > X_2 > \cdots > X_n$, de las indeterminadas, dada por $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \mapsto X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$, cada orden o preorden en $\mathbb{N}^n$ define, de forma unívoca, un orden o preorden en el conjunto de monomios. Para poder utilizar esta informacón necesitamos conocer lo siguiente:

- **Lema de Dickson.** Dado un subconjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{N}^n$, existe un subconjunto finito $G \subseteq S$ tal que para cada $x \in S$ existen $y \in G$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tales que $x = y + \alpha$.
- Un subconjunto $E \subseteq \mathbb{N}^n$ se llama un **monoideal** si para cada $\gamma \in E$ y cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se tiene $\gamma + \alpha \in E$, esto es, $E = E + \mathbb{N}^n$.
- Cada monoideal tiene un único sistema de generadores minimal.

4.4. Algoritmo de la división

Consideramos el anillo de polinomios $K[X_1,\ldots,X_n]$. Ya conocemos algo de su estructura; por ejemplo, es un dominio de factorización única. Vamos a profundizar un poco más en su aritmética.

Recordemos que como las indeterminadas se suponen conmutativas, cada producto de las mismas se puede escribir, unívocamente, en la forma $X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$, siendo $\alpha_i \in \mathbb{N}$, y que abreviadamente podemos representar este producto por X^α, siendo $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Podemos desarrollar cada polinomio $F \in K[X_1,\ldots,X_n]$ como una combinación lineal de monomios en la siguiente forma:

$$F = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha,$$

con $a_\alpha \in K$ (casi todos nulos), $\alpha \in \mathbb{N}^n$, y si $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, entonces $X^\alpha = X_1^{\alpha_1}\cdots {X_n}^{\alpha_n}$.

Veamos, para fijar notación, algunos elementos asociados con el polinomio F cuando tenemos un orden monomial en $\mathbb{N}^n$.

(I) El **diagrama de Newton** de F es: $\mathcal{N}(F) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid a_\alpha \neq 0\}$.

(II) Si $F \neq 0$, el **exponente** de F: $\exp(F) = \max\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid \alpha \in \mathcal{N}(F)\}$.

(III) El **grado** de F: $\operatorname{grad}(F) = \max\{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \mid \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(F)\}$.

(IV) El **coeficiente líder** de F: $\operatorname{lc}(F) = a_{\exp(F)}$.

(V) El **término líder** de F: $\operatorname{lt}(F) = a_{\exp(F)} X^{\exp(F)}$.

(VI) El **monomio líder** de F: $\operatorname{lm}(F) = X^{\exp(F)}$.

Por completitud definimos $\operatorname{lc}(0) = 0 = \operatorname{lt}(0)$. Como consecuencia, para cada $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tenemos $F \neq 0$ si, y sólo si, $\operatorname{lt}(F) \neq 0$ si, y sólo si, $\operatorname{lc}(F) \neq 0$.

Siguiendo la siguiente notación: Si $\alpha^1, \ldots, \alpha^t \in \mathbb{N}^n$, es una lista de elementos de $\mathbb{N}^n$, definimos:
$\Delta^1 = \alpha^1 + \mathbb{N}^n$
$\Delta^2 = (\alpha^2 + \mathbb{N}^n) \setminus \Delta^1$
...
$\Delta^t = (\alpha^t + \mathbb{N}^n) \setminus \cup_{i<t} \Delta^i$
$\overline{\Delta} = \mathbb{N}^n \setminus \cup_{i \leq t} \Delta^i$.
Para cada lista de elementos de $\mathbb{N}^n$, por ejemplo, $\alpha^1, \ldots, \alpha^t$, tendremos que $\{\Delta^1, \ldots, \Delta^t, \overline{\Delta}\}$ es una **partición** de $\mathbb{N}^n$, cuando eliminamos los conjuntos vacíos.

Una consecuencia directa de esto es:

Algoritmo de la división. Dado un orden monomial en $\mathbb{N}^n$, para cada lista finita de polinomios no nulos

$$G_1, \ldots, G_t \in K[X_1, \ldots, X_n],$$

consideramos la partición de $\mathbb{N}^n$ determinada por la lista

$$\exp(G_1), \ldots, \exp(G_t).$$

Se verifica que para cada $0 \neq F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ existen elementos $Q_1, \ldots, Q_t$ y $R \in K[X_1, \ldots, X_n]$, únicos, cumpliendo las propiedades siguientes:
(1) $F = \sum_{i=1}^t Q_i G_i + R$.
(2) $R = 0$ ó $\mathcal{N}(R) \subseteq \overline{\Delta}$.
(3) Para cada índice i se verifica: $\exp(G_i) + \mathcal{N}(Q_i) \subseteq \Delta^i$.

Como consecuencia, si $Q_i G_i \neq 0$, se tiene $\exp(Q_i G_i) \leq \exp(F)$ y si $R \neq 0$, entonces $\exp(R) \leq \exp(F)$.

Llamamos a R el **resto de la división**, y lo representamos por $R(F, \mathbb{G})$, y a los Q_i los **cocientes** de esta división.

5. Bases de Groebner

Vamos a tratar ahora el caso general de un ideal no nulo del anillo de polinomios y vamos a ver si es posible obtener un sistema de generadores que sea mínimo en algún sentido.
Antes de establecer el resultado, necesitaremos definir: $\text{Exp}(\mathfrak{a})$:
Si $\mathfrak{a}$ un ideal definimos $\text{Exp}(\mathfrak{a}) = \{\exp(F) \mid 0 \neq F \in \mathfrak{a}\}$.

Sea $\mathfrak{a}$ un ideal no nulo de $K[X_1,\ldots,X_n]$. Si $A \subseteq \mathbb{N}^n$ es un sistema finito de generadores de $\text{Exp}(\mathfrak{a})$, para cada conjunto de polinomios $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\} \subseteq \mathfrak{a}$ tales que $\exp(F_\alpha) = \alpha$ para cada $\alpha \in A$, se tiene que $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es sistema de generadores de $\mathfrak{a}$ como ideal.

Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $K[X_1,\ldots,X_n]$, una **base de Groebner** de $\mathfrak{a}$ es un conjunto finito de elementos no nulos, $\mathbb{G} = \{G_1,\ldots,G_t\} \subseteq \mathfrak{a}$, verificando que

$$\text{Exp}(\mathfrak{a}) = \{\exp(G_1),\ldots,\exp(G_t)\} + \mathbb{N}^n = \text{Exp}(\mathbb{G}) + \mathbb{N}^n.$$

De las bases de Groebner sabemos:

(1) Cada ideal no nulo de $K[X_1,\ldots,X_n]$ tiene una base de Groebner.
(2) Toda base de Groebner de un ideal no nulo es un sistema de generadores.
(3) **Teorema de la base de Hilbert.** Todo ideal de $K[X_1,\ldots,X_n]$ es finitamente generado.

También es necesario conocer el teorema de **Teorema de Buchberger.**

Sea $\mathfrak{a}$ un ideal no nulo del anillo $K[X_1,\ldots,X_n]$ y $\mathbb{G}$ un sistema finito de generadores de $\mathfrak{a}$. Son equivalentes los siguientes enunciados:

(a) $\mathbb{G}$ es una base de Groebner de $\mathfrak{a}$.
(b) Para un orden fijado de $\mathbb{G}$ y para cada $i \neq j$ se tiene $R(S(G_i,G_j);\mathbb{G}) = 0$.

Siendo $S(G_i,G_j)$ el **s–polinomio** definido por G_i y G_j.

Y el **algoritmo** del mismo nombre que nos permite el cálculo de las bases de Groebner.

Sea $\mathfrak{a}$ un ideal no nulo de $K[X_1,\ldots,X_n]$, con un sistema de generadores $\{F_1,\ldots,F_t\}$, es posible construir una base de Groebner de $\mathfrak{a}$ siguiendo los siguientes pasos:
(1) Se define $\mathbb{G}_0 = \{F_1,\ldots,F_t\}$.
(2) Se define $\mathbb{G}_{n+1} = \mathbb{G}_n \cup \{R(S(F,G);\mathbb{G}_n) \neq 0 \mid F,G \in \mathbb{G}_n\}$.

Entonces, cuando $\mathbb{G}_i = \mathbb{G}_{i+1}$, tenemos que $\mathbb{G}_i$ es una base de Groebner de $\mathfrak{a}$.

Una base de Groebner $\mathbb{G}$ de un $\mathfrak{a}$ no nulo de $K[X_1,\ldots,X_n]$ se llama **minimal** si verifica:
(1) $\operatorname{lc}(F)=1$ para cada $F\in\mathbb{G}$;
(2) $\exp(F)\notin\{\exp(G)\mid F\neq G\in\mathbb{G}\}+\mathbb{N}^n$ para cada $F\in\mathbb{G}$.

Eliminando los elementos que sobran obtenemos:

Todo ideal no nulo $\mathfrak{a}$ de $K[X_1,\ldots,X_n]$ tiene una base de Groebner minimal.

Dado un subconjunto $\mathbb{G}=\{G_1,\ldots,G_t\}\subseteq\mathfrak{a}$ de un ideal de $K[X_1,\ldots,X_n]$, son equivalentes:
(a) $\mathbb{G}$ es una base de Groebner minimal.
(b) $\{\exp(G_1),\ldots,\exp(G_t)\}$ es un sistema mínimo de generadores de $\operatorname{Exp}(\mathfrak{a})$ si imponemos que los coeficientes líderes sean iguales a 1.

Como consecuencia los términos líderes de una base de Groebner minimal están determinados de forma única y cada dos bases de Groebner minimales tienen el mismo número de elementos.

Una base de Groebner G de un ideal no nulo a se llama **reducida** si verifica:
(1) $\operatorname{lc}(F)=1$ para cada $F\in\mathbb{G}$;
(2) $\mathcal{N}(F)\bigcap\{\exp(G)\mid F\neq G\in\mathbb{G}+\mathbb{N}^n\}=0$ para cada $F\in\mathbb{G}$.

Cada ideal no nulo tiene una única base de Groebner reducida.

6. Aplicaciones de las bases de Groebner

Vamos a estudiar aplicaciones de la teoría de bases de Groebner hasta ahora desarrollada. En primer lugar estudiamos las aplicaciones clásicas de las bases de Groebner en orden a calcular con elementos en el anillo $K[X_1,\ldots,X_n]$. La última parte la dedicamos al cálculo de la dimensión en algunos ejemplos de anillos cocientes de anillos de polinomios. En esta sección queremos dejar constancia de los numerosos problemas que pueden resolverse usando bases de Groebner.

Problema de pertenencia

Problema.
Sea $\mathfrak{a}$ un ideal izquierda de $K[X_1,\ldots,X_n]$ con un sistema de generadores $\{F_1,\ldots,F_r\}$; dado $F \in K[X_1,\ldots,X_n]$, nos planteamos el problema de determinar si $F \in \mathfrak{a}$.

Esto se hace como sigue: Se calcula una base de Groebner $\mathbb{G} = \{G_1, \ldots, G_t\}$ de $\mathfrak{a}$; entonces tenemos $F \in \mathfrak{a}$ si, y sólo si, $R(F;\mathbb{G}) = 0$.
Es posible también obtener una expresión de F como combinación lineal de los generadores originales $F_1, \ldots, F_r$. Para ello únicamente hay que tener en cuenta que, por el algoritmo de la división, tenemos una expresión de la forma:

$$F = Q_1G_1 + \cdots + Q_tG_t,$$

y como los G_i se obtienen haciendo s–polinomios a partir de los F_j, tenemos que es posible dar la expresión deseada.

Igualdad de ideales

Problema.
Sean $\mathfrak{a}_1$ y $\mathfrak{a}_2$ ideales de $K[X_1,\ldots,X_n]$ con sistemas de generadores $\{F^1_1,\ldots,F^1_{r_1}\}$ y $\{F^2_1,\ldots,F^2_{r_2}\}$, respectivamente. El problema es determinar cuando $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$.

Conseguimos bases de Groebner reducidas $\mathbb{G}_1$ y $\mathbb{G}_2$ de $\mathfrak{a}_1$ y $\mathfrak{a}_2$, respectivamente. Por la unicidad de las bases de Groebner reducidas, tenemos $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ si, y sólo si, $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2$.

Representantes canónicos

Problema.
Dado un ideal $\mathfrak{a}$ de $K[X_1,\dots,X_n]$ el problema es dar un criterio, y un método, para determinar un representante canónico en cada clase del cociente $K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{a}$.

En primer lugar, dado $\mathfrak{a}$, construimos una base de Groebner $\mathbb{G}$ de $\mathfrak{a}$. Para cada $F \in K[X_1,\dots,X_n]$ consideramos el resto $R(F;\mathbb{G})$ y es claro que se verifica:

$$F + \mathfrak{a} = R(F;\mathbb{G}) + \mathfrak{a}.$$

Además, $R(F,\mathbb{G})$ es único verificando la igualdad anterior y $\mathcal{N}(R(F;\mathbb{G})) \subseteq \overline{\Delta} = \mathbb{N}^n \setminus \operatorname{Exp}(\mathfrak{a})$, ver el algoritmo de la división en la página 12. Este elemento $R(F;\mathbb{G})$ lo llamamos la forma normal de la clase de F con respecto a $\mathbb{G}$.
El comportamiento de la forma normal es bueno respecto a combinaciones K–lineales, ya que si a_1, $a_2 \in \mathbb{C}$ y F_1, $F_2 \in K[X_1,\dots,X_n]$, entonces se verifica: $R(a_1F_1 + a_2F_2;\mathbb{G}) = a_1R(F_1;\mathbb{G}) + a_2R(F_2;\mathbb{G})$. Es claro que por el algoritmo de la división tenemos:

$$F_i = Q_1^iG_1 + \cdots + Q_t^iG_t + R(F_i;\mathbb{G}),$$

entonces se verifica:

$$\begin{gathered} a_1F_1 + a_2F_2 = \\ a_1Q_1^1G_1 + \cdots + a_1Q_t^1G_t + a_1R(F_1;\mathbb{G}) + a_2Q_1^2G_1 + \cdots + a_2Q_t^2G_t + a_2R(F_2;\mathbb{G}) = \\ (a_1Q_1^1 + a_2Q_1^2)G_1 + \cdots + (a_1Q_t^1 + a_2Q_t^2)G_t + a_1R(F_1;\mathbb{G}) + a_2R(F_2;\mathbb{G}), \end{gathered}$$

de donde tenemos el resultado, ya que

$$\mathcal{N}(a_1R(F_1;\mathbb{G}) + a_2R(F_2;\mathbb{G})) \subseteq \mathbb{N}^n \setminus \operatorname{Exp}(\mathfrak{a}),$$

y por tanto $R(a_1F_1 + a_2F_2;\mathbb{G}) = a_1R(F_1;\mathbb{G}) + a_2R(F_2;\mathbb{G})$. Tenemos entonces, para cualesquiera F_1, $F_2 \in K[X_1,\dots,X_n]$, las equivalencias entre los siguientes enunciados:

$$\begin{aligned} &F_1 + \mathfrak{a} = F_2 + \mathfrak{a}. \\ &F_1 - F_2 \in \mathfrak{a}. \\ &R(F_1 - F_2;\mathbb{G}) = 0. \\ &R(F_1;\mathbb{G}) = R(F_2;\mathbb{G}). \end{aligned}$$

Como consecuencia, cada elemento de $K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{a}$ está unívocamente determinado, y determina, un elemento R de $K[X_1,\dots,X_n]$ con $\mathcal{N}(R) \subseteq \mathbb{N}^n \setminus \operatorname{Exp}(\mathfrak{a})$. Para estos elementos las operaciones en $K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{a}$ están definidas exactamente por estos representantes por la regla:

$$a_1(R_1 + \mathfrak{a}) + a_2(R_2 + \mathfrak{a}) = (a_1R_1 + a_2R_2) + \mathfrak{a}.$$

Ideales cofinitos

Pasamos ahora a estudiar el caso de ideales cofinitos, esto es, ideales $\mathfrak{a}$ de $K[X_1,\dots,X_n]$ tales que el cociente $K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{a}$ es de dimensión finita como K–espacio vectorial.

K–base del cociente

Problema.
Se trata de dar un método que permita calcular una base del espacio vectorial $K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{a}$.

Para cada clase $F+\mathfrak{a}$ de $K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{a}$, considerando una base de Groebner de $\mathfrak{a}$, tenemos un representante R de la clase $F+\mathfrak{a}$ tal que $\mathcal{N}(R)\subseteq \mathbb{N}^n\setminus \mathrm{Exp}(\mathfrak{a})$. De aquí resulta que R se puede escribir en la forma

$$R=\sum_\alpha c_\alpha X^\alpha,$$

con $\alpha\notin\{\exp(G):\ G\in\mathbb{G}\}+\mathbb{N}^n=\mathrm{Exp}(\mathfrak{a})$ y $c_\alpha\in K$. Tenemos entonces que $\{X^\beta \mid \beta\in\mathbb{N}^n\setminus\mathrm{Exp}(\mathfrak{a})\}$ es un sistema de generadores linealmente independiente de $K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{a}$; esto resuelve el problema.

Operaciones en el cociente

Problema.
Dar un criterio que permita calcular las operaciones en el cociente $K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{a}$ cuando $\mathfrak{a}$ es un ideal (cofinito) de $K[X_1,\dots,X_n]$.

Supuesto que $\mathfrak{a}$ es un ideal cofinito, las clases del cociente $S=K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{a}$ tienen una K–base finita, y como S es un anillo, tenemos un producto interno en S. Pero S es una K–álgebra finito–dimensional, luego este producto se puede describir completamente en términos de los productos de los elementos de una K–base. El cálculo se realiza considerando una base de Groebner $\mathbb{G}$ y calculando los restos de la división por $\mathbb{G}$.

Eliminación de variables

Dado un sistema de ecuaciones polinómicas: $F_i=0\}_{i=1,\dots,s}$, siendo cada $F_i\in K[X_1,\dots,X_n]$, una solución al sistema es un elemento $(a_1,\dots,a_n)\in K^n$ tal que $F_i(a_1,\dots,a_n)=0$ para cada índice i.

Observar que si llamamos $\mathfrak{a}$ al ideal generado por $\{F_1,\dots,F_s\}$, entonces para cada sistema de generadores $\{G_1,\dots,G_t\}$ de $\mathfrak{a}$ un elemento $(a_1,\dots,a_n)$ es una solución del sistema $F_i=0\}_{i=1,\dots,s}$ si y sólo si es una solución del sistema $G_j=0\big\}_{j=1,\dots,t}$.

Esto significa que los sistemas que tenemos que resolver son aquellos para los que $\{F_1,\dots,F_s\}$ es una base de Groebner, si es necesario reducida, de un cierto ideal.

En el caso en que los F_i son polinomios lineales el sistema $F_i=0\}_{i=1,\dots,s}$ se resuelve por el método de Gauss–Jordan. En ese caso se van eliminando variables: X_1, X_2, etc., hasta llegar a ecuaciones en las que cada variable "libre"se expresa en función de unas variables "dependientes".

Este proceso podemos repetirlo si consideramos un sistema de ecuaciones polinómicas no lineales $F_i = 0\}_{i=1,\dots,s}$. Si $\{F_i \mid i = 1, \dots, s\}$ es una base de Groebner del ideal correspondiente, al que llamaremos $\mathfrak{a}$, definimos el i–ésimo ideal de eliminación, con respecto al orden lexicográfico con $X_1 > X_2 > \dots > X_n$, como $\mathfrak{a}_{\mathrm{i}} := \mathfrak{a} \bigcap K[X_(i+1), \dots, X_n]$.

Capítulo III

NÚMERO Y POLINOMIO CROMÁTICO

Introducción

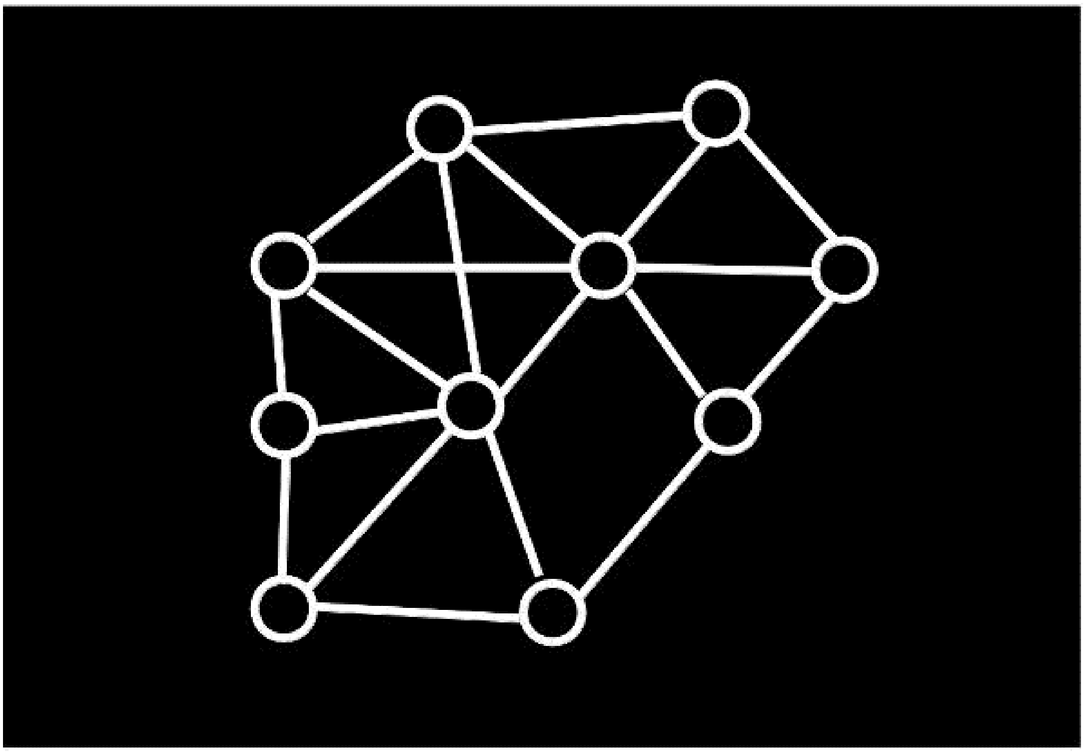
El río Pregolya atraviesa la ciudad de Könisberg. En el siglo XVI había siete puentes que lo cruzaban y nunca hubo uno de los habitantes de la ciudad que pudiese hacer una ruta que cruzará cada uno de estos puentes una sola vez. Leonard Euler trabajo en lo que el llamó *"El problema de los puentes de Königsberg"* que es considerado por muchos como el inicio de la teoría de grafos.

Al principio las ideas sobre grafos de Euler se encontraban centradas únicamente en la resolución de puzles o en el análisis de juegos. Sin embargo, a partir del siglo XVII, se observó que los grafos podían usarse para modelizar un sinfín de cosas diferentes. De hecho la teoría sobre coloración de mapas con cuatro colores de De Morgan parecía estar fuera de este campo, no obstante el problema puede ser totalmente modelizado con la teoría de grafos como hemos explicado anteriormente. La teoría de grafos empezó a florecer en el siglo XX y su capacidad para modelar matemáticamente distintas situaciones de la vida empezó a ser reconocida, su crecimiento aún continua.

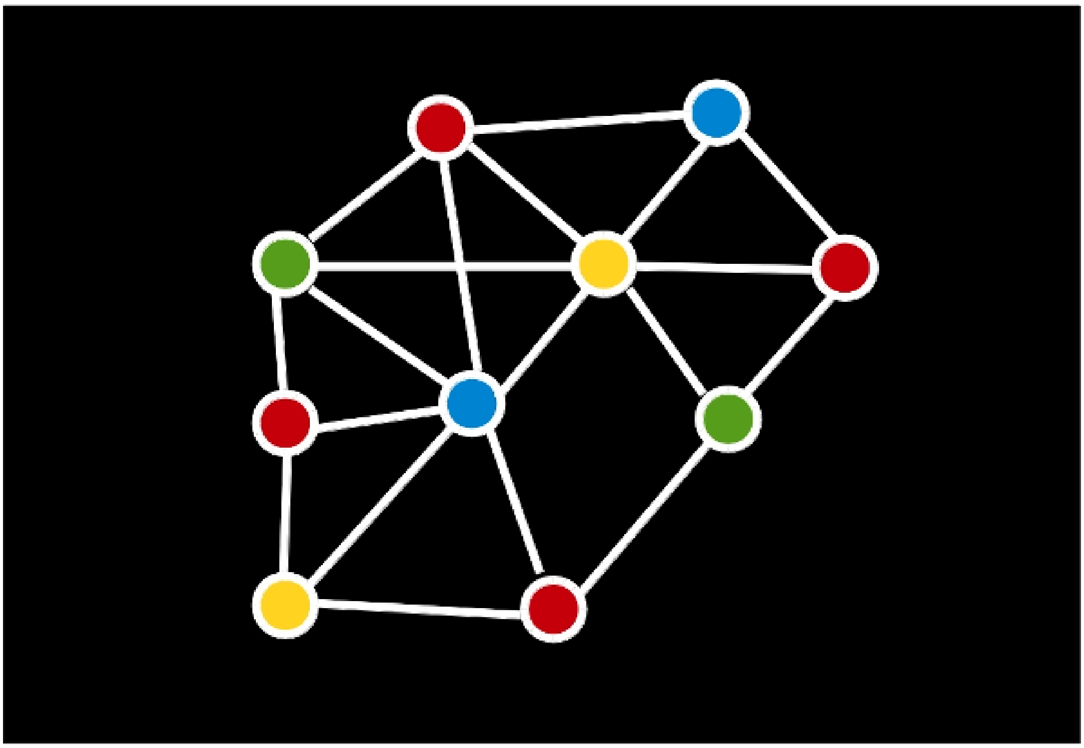
Veamos una explicación sencilla de cómo podemos modelizar, por ejemplo, el reparto de frecuencias para las distintas cadenas de televisión, y así entender cómo algo tan alejado de vértices y aristas puede ser modelizado mediante ellas.

El control de los medios de comunicación tradicionales (televisión, radio y prensa escrita, en orden decreciente de importancia) es fundamental para moldear la opinión pública. Este control se extiende mucho más allá y podemos comprobar cómo los gobiernos de turno se caracterizan por favorecer de forma descarada a los medios afines a la hora del reparto de frecuencias, tanto en las radios como en las TDT locales. Puede que más de uno se pregunte: ¿por qué hay que repartir las frecuencias? ¿Por qué cada cual no pone su emisora de radio donde quiera y emite sin más? Por las interferencias, claro. Pues por sorprendente que parezca, la física y las matemáticas juegan un papel fundamental en esta historia. El rol de la física es sencillo de vislumbrar: estamos hablando de emisión de ondas y por tanto de interferencias. Así que voy a tratar de explicar por qué hemos de tener en cuenta también a las matemáticas. Es fácil deducir que si dos emisoras cercanas emiten en una frecuencia también cercana, se puede producir una interferencia entre ellas; por lo tanto, habría que evitar la asignación de frecuencias semejantes a emisoras que no disten mucho entre sí y no disponemos de un número infinito de frecuencias para hacerlo. Entonces, ¿cómo se puede resolver este problema?

Supongamos que el siguiente gráfico muestra una determinada zona geográfica y que cada puntito (o circulito) señala la ubicación de nuevas emisoras de radio. Hemos unido con una línea, de dos en dos, a aquellas emisoras para las que, por la geografía, pudieran existir interferencias entre ellas si se les asignan frecuencias cercanas.



A continuación, vamos a colorear los circulitos, a los que a partir de aquí llamaremos vértices, de forma que dos vértices que estén unidos por una línea, a las que llamaremos aristas, no tengan el mismo color.



Cada color representa una frecuencia y ha bastado con cuatro. Hemos usado cuatro colores para resolver el problema en esta zona geográfica. Lo que estamos haciendo es representar el problema con un grafo, con vértices y aristas, y dar una coloración de vértices para el mismo.

Es claro que el uso de conceptos como polinomio cromático o número cromático son aplicables a diversas áreas de la vida cotidiana, lo que viene a reflejar la importancia de esta herramienta en la resolución de problemas no exclusivamente matemáticos. Ver las referencias: (1) y (4).

7. Número cromático

El número cromático de un grafo es la menor cantidad de colores necesarios para colorear sus vértices sin que dos vertices vecinos tengan el mismo color. Claramente se puede colorear cada vértice de un color diferente, pero eso no nos dará el número cromático. Veremos ahora la definición y propiedades de este número.

El **número cromático** o **índice cromático** de un grafo G es el menor cardinal de los conjuntos C tales existe una coloración de G con valores en C, es decir, el mínimo valor k que pertenece a $\mathbb{N}$ tal que G es k–coloreable y se denota por $\chi(G)$.

Puesto que todo grafo G con n vértices admite siempre una n–coloración se tiene que para cada grafo G existe un valor k, que pertenece a $\mathbb{N}$, para el cual G es k–coloreable pero no es $(k-1)$-coloreable. A partir de esto, podemos definir el número cromático de un grafo. Si $n = \chi(G)$ se dice que el grafo es n**–cromático**. (Es decir cuando el número mínimo de colores con el que se puede pintar el grafo es igual al número de vértices del grafo);

Algunos grafos especiales tienen índices cromáticos conocidos:

1. El grafo K_2, (grafo completo de orden 2), con dos vértices y un lado, tiene índice cromático 2.
2. El grafo completo K_n, (grafo completo de orden n), tiene índice cromático n.
3. El índice cromático de un subgrafo $G' \subseteq G$ de un grafo G es menor que el índice cromático de G.
4. Si un grafo es plano, entonces su índice cromático es menor o igual que 4.
5. Si un grafo es un ciclo sabemos que su índice cromático es 2 si n es par y tres si n es impar.

8. Polinomio cromático

Asociado al número crómatico aparece el polinomio cromático, este concepto supone un puente entre la geometría y el álgebra, entre el dibujo y el número. Comenzaremos a hablar de él con su definición más sencilla

Dado un grafo G y un conjunto de colores k, definimos la función $P(G,k)$ como el número de formas distintas de colorear G usando los k colores.

Intentemos dar una explicación a esta definición:

Dado un grafo G y una paleta con un número determinado k de colores, determinar de cuántas maneras diferentes se puede colorear el grafo G con colores de esa paleta, sujetas de nuevo las coloraciones a la restricción de que dos extremos de una arista deben llevar colores diferentes.

Aquí hay que aclarar qué significa «diferentes», aunque la idea corresponde completamente con la intuición: dos coloraciones de un grafo llevadas a cabo con la misma paleta se consideran diferentes si al menos uno de los vértices del grafo tiene color diferente en cada una de las dos. Así pues, lo primero que hay que hacer es modelar este problema de un modo apropiado. Para empezar, nos damos cuenta de que dada una paleta de colores cualquiera, desde el punto de vista de contar coloraciones nos importa poco cuáles sean los colores concretos de la paleta; en realidad, solo nos va a importar el número k de colores que ésta contenga. Dicho de otro modo, si un grafo podemos colorearlo exactamente de diez maneras diferentes con los colores rojo, amarillo y azul, igual podremos colorearlo de diez maneras diferentes con los colores verde, naranja y rosa, o viceversa. Solo nos va a importar en cada caso el número de colores de la paleta, no los colores concretos.

Ahora podemos definir una asignación (lo que en matemáticas se llama una función) del siguiente modo: para cada paleta con k colores y para cada grafo G, $P(G,k)$ será el número de coloraciones posibles del grafo G con colores de la paleta. A esta asignación es a lo que se llama **polinomio cromático** de G.

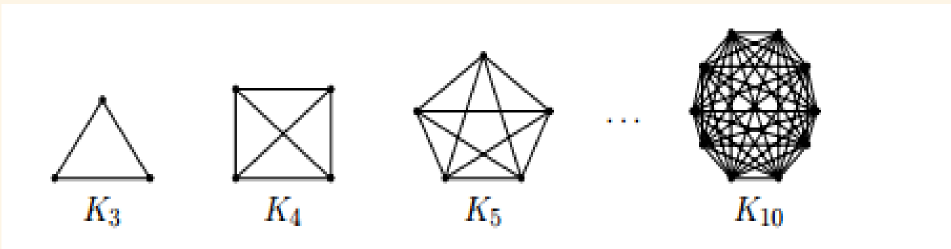
Fue Birkhoff, quien en 1942 introdujo el polinomio cromático en su intento de demostrar el teorema de los cuatro colores. Al leer la definición de polinomio cromático, en principio, no aparece un polinomio por ningún sitio, solo una asignación cualquiera. Birkhoff demostró que dicha función era un polinomio y gracias a ella podemos obtener muchísima información sobre el grafo. Veamos algunos ejemplos.

(1) El grado del polinomio cromático es siempre el número de vértices del grafo.
(2) Si el polinomio cromático es de grado n, el coeficiente de grado $n-1$ cambiado de signo es el número de aristas del grafo.
(3) Si el polinomio cromático es de grado n, el coeficiente de grado $n-2$ (ligeramente retocado) cuenta el número de triangulitos que se forman en el grafo.

(4) Dado un grafo G, una componente conexa de G está formada por todos los vértices tales que existe un camino dentro de G entre ellos, y las aristas de G que los unen. Entonces, si el primer término no nulo del polinomio cromático es de grado j, el grafo tiene j componentes conexas.

Otras de las propiedades del polinomio cromático son

1. $P(G,0)=0$.
2. $P(G,k)>0$ si, y sólo si, G es k–coloreable.
3. Si un grafo tiene al menos un lado entonces $P(G,1)=0$
4. Si el grafo G tiene t componentes conexas, $G_1,\ldots,G_t$ entonces $P(G,n)=\prod_{i=1}^{t}P(G_i,n)$. Lo que reduce el problema a trabajar con grafos conexos.
5. Si consideramos K_2, entonces un vértice se puede colorear de n formas distintas, y el segundo de $n-1$ formas, por lo tanto el número total de coloraciones $P(K_2,n)=n.(n-1)$ y $P(K_t,n)=n.(n-1)\cdots(n-t+1)$.



Algunas propiedades del polinomio cromático son:

1. Si G no es un grafo nulo, es decir, tiene alguna arista, entonces la suma de los coeficientes de su polinomio cromático vale siempre 0. Esto es consecuencia de que $\sum_j b_j = P(G,1) = \#\{\text{formas de colorear } G \text{ con un color}\} = 0$.
2. Sea G un grafo con r componentes conexas, n vértices y m aristas. Entonces,
   a) Si G no tiene vértices aislados, entonces $2r \leq n$.
   b) Si G no tiene vértices aislados y además $m \geq 4$, entonces $r \leq n-3$.

El cálculo del polinomio cromático se puede hacer de diferentes maneras. Tradicionalmente se ha calculado usando la combinatoria, bien quitando aristas o bien añadiéndolas. Veamos algunos ejemplos:

8.1. CÁLCULO DEL POLINOMIO CROMÁTICO CON ELIMINACIÓN DE UNA ARISTA:

Contracción de una arista.

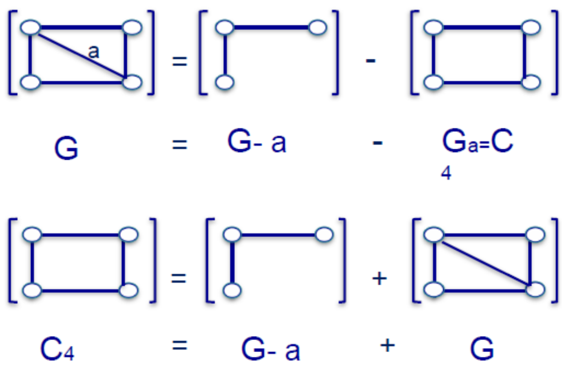
Dado un grafo, G, y sea $a = \{u,v\}$ arista que une los vértices u y v, llamaremos contracción de la arista "a" del grafo G, G_a, a la operación resultante de considerar los vértices u y v cómo un único vértice. Por tanto, G_a tiene un vértice menos que G, la arista G_a ha desaparecido, dos aristas no incidentes que tengan como extremos los vértices de a pasan a tener un vértice común, y dos aristas cualquiera que formen un triángulo con a en G pasan a ser la misma arista en G_a. Se realiza, de hecho, un «pegado» en el grafo.

Usaremos el algoritmo de Eliminación-contracción (o *algoritmo come aristas*), que consiste en aplicar el siguiente teorema:

$$P(G,k) = P(G-a,k) - P(G_a,k).$$

Donde G_a como ya hemos dicho es la contracción de G y $G-a$ es un grafo que tiene los mismos vértices que G y las mismas aristas que G excepto la arista a, que la borramos (los extremos los dejamos).

Gráficamente:



Ahora expresamos el polinomio cromático de un grafo con r aristas como diferencia de los polinomios cromáticos de dos grafos tales que cada uno tiene, como mucho, $r-1$ aristas. Veamos cómo funciona. G_a tiene un vértice menos que G, la arista a ha desaparecido, dos aristas no incidentes que tengan como extremos los vértices de a pasan a tener un vértice común, y dos aristas cualquiera que formen un triángulo con a en G pasan a ser la misma arista en G_a. Se realiza, de hecho, un nuevo «pegado» en el grafo.

Pensemos ahora en una coloración de $G-a$. Pueden pasar dos cosas: que los extremos de la arista que hemos quitado lleven el mismo color, o colores diferentes. En el primer caso, la coloración da una coloración de G_a (con el vértice distinguido de G_a con el color de los extremos de la arista que hemos quitado en G), y en el segundo, la coloración de $G-a$ da una coloración de G. Dicho de otro modo, habrá tantas coloraciones de $G-a$ con k colores como coloraciones de G_a con k colores más coloraciones de G con k colores. Escrito resumidamente llegamos al teorema inicial

$$P(G,k) = P(G-a,k) - P(G_a,k).$$

Lo que hemos conseguido aquí es expresar el polinomio cromático de G en función de los polinomios cromáticos de grafos con, al menos, una arista menos. Ahora, si reiteradamente vamos quitando aristas de esta manera de $G-a$ y G_a, acabaremos escribiendo $P(G,k)$ como sumas y restas de polinomios cromáticos de grafos vacíos. De este modo, además de ver que $P(G,k)$ es un polinomio, hemos encontrado un método para construirlo, que no solo puede comprender cualquier persona, sino lo que es más importante desde el punto de vista del cálculo, que entiende cualquier ordenador. Así, el polinomio cromático puede calcularse, dado un grafo, de modo completamente automático (otra cosa es el tiempo que se tarde).

8.2. CÁLCULO DEL POLINOMIO CROMÁTICO CON ADICIÓN DE UNA ARISTA

En realidad este no es un algoritmo nuevo, sino simplemente otra forma de enfocar el conocido de "quitar aristas". Recordamos que en este último obteníamos $P(G,k) = P(G-a,k) - P(G_a,k)$. Por lo tanto, $P(G-a,k) = P(G,k) + P(G_a,k)$. Pero esto nos dice que si tenemos un cierto grafo (en la notación de arriba, $P(G-a,k)$, su polinomio cromático se puede escribir como la suma del polinomio cromático del grafo que obtenemos añadiéndole a $P(G-a,k)$ una cierta arista a (que, por supuesto, es una que no está en el grafo), más el del grafo que resulta de identificar los vértices de a.

¿Cuál es la ventaja de este enfoque sobre el anterior? Imaginemos que el grafo del que queremos conocer el polinomio cromático está muy cerca de ser un grafo completo; añadiendo unas pocas aristas, escribiremos su polinomio como suma de unos cuantos polinomios cromáticos de grafos completos, cuya expresión conocemos.

Sin embargo nosotros usamos un algoritmo definido en Wolfran Mathematica para el cálculo de los mismos:

ALGÓRITMO EN WOLFRAM MATHEMATICA PARA EL CÁLCULO DEL POLINOMIO CROMÁTICO.

Lo primero que se necesita es calcular las distintas opciones de coloreabilidad que tiene el grafo.
Se define el número de vértices y las ecuaciones necesarias para determinar cuántas opciones diferentes de coloreabilidad existen.

Var=Table[X_i,{i,1,5}]
Ecu1[n_]:=Subscript[X, n]^5-1
Ecu2[D_]:=Subscript[X, D[[1]]]^4+Subscript[X, D[[1]]]^3*$X_{D[[2]]}$+Subscript[X, D[[1]]]^2 Subscript[X, D[[2]]]^2+$X_{D[[1]]}$ Subscript[X, D[[2]]]^3+Subscript[X, D[[2]]]^4

Ecua=Join[Map[Ecu1,{1,2,3,4,5}],Map[Ecu2,{{1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{2,3},{2,4},{2,5},{3,4},{3,5},{4,5}}]]
Length[Ecua]
Aux=GroebnerBasis[Ecua,Var]
Length[Aux]
Aux=Thread[Aux==0]
Aux=Solve[Aux,Var]
Length[Aux]

Luego procedemos a definir las variables necesarias para poder diseñar nuestra función, la que calculará el polinomio cromático. Se definen distintas variables: número de vértices, listas de parejas, se define una lista, se define el algoritmo para calcular el primer primo que aparece en esa lista, etc.

LE=(*ListaFlechas=*){{1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{2,3},{2,4}, {2,5},{3,4},{3,5},{4,5}}
NV=(*NumeroVertices=*)5

{{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {4,5}}

$$\text{Funcion}[\text{nv\_}, \text{le\_}, \text{co\_} := \text{Module}[\{a, l, b, c, \text{Var}, \text{lp1}, \text{lp2}, \text{lp3}, m, \text{Ecu1}, \text{Ecu2}, \text{Ecua}, \text{Aux}\},$$

$$a = \text{co};$$

$$c = \text{nv};$$

$$l = \text{Table}[i, \{i, 1, c\}];$$

$$b = \text{le};$$

$$\text{Var} = \text{Table}[X_i, \{i, 1, c\}];$$

$$\text{lp1} = \text{Table}[1 + k * a, \{k, 1{,}100\}];$$

$$\text{lp2} = \text{Table}\left[\left\{\text{lp1}[[i]], \text{PrimeQ}\left[\text{lp1}[[i]]\right]\right\}, \{i, 1, \text{Length}[\text{lp1}]\}\right];$$

$$\text{lp3} = \text{Cases}\left[\text{lp2}, \{_{,\text{True}}\}\right];$$

$$m = \text{lp3}\left[[1{,}1]\right];\ (*m = \text{primerprimoenlalista1} + k * a; *)$$

Definimos las diferentes ecuaciones que hay que resolver para la obtención del polinomio cromático.

$$\text{Ecu1}[\text{n\_}] := {X_n}^a - 1;$$

$$\text{Ecu2}[\text{D\_}] := \sum_{i=0}^{a-1} {X_{D[[1]]}}^i * {X_{D[[2]]}}^{a-i};$$

$$\text{Ecua} = \text{Join}\left[\text{Map}[\text{Ecu1}, l], \text{Map}[\text{Ecu2}, b]\right];$$

$$\text{Aux} = \text{GroebnerBasis}[\text{Ecua}, \text{Var}, \text{Modulus} \to m];$$

$$\text{gg} = \text{Aux};\ g = \text{Length}[\text{Aux}];$$

$$\mathrm{Aux} = \mathrm{Thread}[\mathrm{Aux} == 0];$$

$$\mathrm{Aux} = \mathrm{Solve}[\mathrm{Aux}, \mathrm{Var}, \mathrm{Modulus} \to m]; \mathrm{Length}[\mathrm{Aux}]]$$

$$\mathrm{Ecu1}[\mathrm{n\_}] := {X_n}^a - 1; \mathrm{Ecu2}[\mathrm{D\_}] := \sum_{i=0}^{a-1} {X_{D[[1]]}}^i * {X_{D[[2]]}}^{a-i};$$

$$\mathrm{Ecua} = \mathrm{Join}[\mathrm{Map}[\mathrm{Ecu1}, l], \mathrm{Map}[\mathrm{Ecu2}, b]];$$

$$\mathrm{Aux} = \mathrm{GroebnerBasis}[\mathrm{Ecua}, \mathrm{Var}, \mathrm{Modulus} \to m];$$

$$\mathrm{gg} = \mathrm{Aux};\ g = \mathrm{Length}[\mathrm{Aux}];$$

$$\mathrm{Aux} = \mathrm{Thread}[\mathrm{Aux} == 0];$$

$$\mathrm{Aux} = \mathrm{Solve}[\mathrm{Aux}, \mathrm{Var}, \mathrm{Modulus} \to m]; \mathrm{Length}[\mathrm{Aux}]]$$

Por último definimos la función:

$$\mathrm{Funcion2}[\mathrm{nv\_}, \mathrm{le\_}, \mathrm{X\_}] := \mathrm{Module}[\{x, \mathrm{Aux}\},$$

$$x = X; y = \mathrm{le}; z = \mathrm{nv};$$

$$\mathrm{Aux} = \mathrm{Table}[\mathrm{Funcion}[z, y, j], \{j, 1, z\}];$$

$$\mathrm{InterpolatingPolynomial}[\mathrm{Aux}, x]]$$

APLICACIÓN, CÁLCULO POLINOMIO CROMÁTICO C_4

Funcion2[4,2,Z]

1+(15+(25+10 (-3+Z)) (-2+Z)) (-1+Z)

Usando estos métodos podríamos fácilmente calcular los siguientes polinomios cromáticos:

1. $P(O_n, k) = kn$, con O_n el grafo trivial de n vértices.
2. $P(K_n, k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$, es claramente, una generalización de la propiedad general para todos los grafos.
3. $P(L_n, k) = k(k-1)n$, con L_n el grafo camino de n vértices.
4. $P(C_n, k) = k(k-1)n + (-1)n(k-1)$, con C_n el grafo cíclico de n vértices.

Hemos visto que todo grafo da lugar a un polinomio cromático con las siguientes caraterísticas:

1. El término independiente a_0 del polinomio cromático es siempre cero.
2. Todos los coeficientes del polinomio cromático son números enteros.
3. Los coeficientes del polinomio cromático se van alternando en signo.
4. Todos los coeficientes del polinomio cromático son distintos de cero a partir de un cierto a_j.
5. El grado del polinomio cromático es siempre el número de vértices del grafo.
6. Si el polinomio cromático es de grado n, el coeficiente de grado $n-1$ cambiado de signo es el número de aristas del grafo.
7. Si el polinomio cromático es de grado n, el coeficiente de grado $n-2$ (ligeramente retocado) cuenta el número de triangulitos que se forman en el grafo.
8. Dado un grafo G, una componente de G está formada por todos los vértices tales que existe un camino dentro de G entre ellos, y las aristas de G que los unen. Entonces, si el primer término no nulo del polinomio cromático es de grado j, el grafo tiene j componentes.
9. Sea G un grafo con n vértices. Si G es k–coloreable, entonces G también es k'–coloreable para todo k' pertenece a N tal que $k < k'$ A partir de este resultado se deduce que si G no es k–coloreable entonces tampoco será k'–coloreable para ningún k' perteneciente a N tal que $k < k'$.

El polinomio cromático codifica una gran parte de la estructura del grafo. Es decir, que a partir de un grafo, que puede ser un objeto terriblemente enrevesado, se puede obtener de modo automático un polinomio limpio y claro que inmediatamente nos va a proporcionar un montón de información que de otro modo resultaría muy difícil de conseguir.

Capítulo IV

APLICACIONES

9. Introducción a la aplicación de la coloración de grafos en la regulación de semáforos

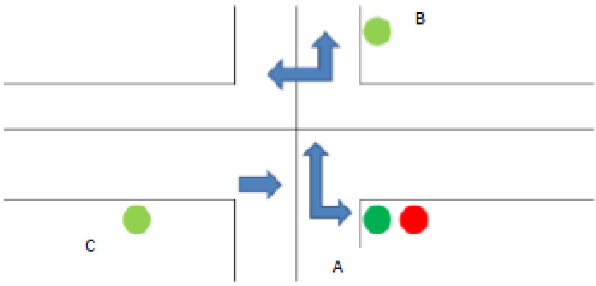
La herramienta fundamental para hacer un desarrollo computacional la proporcionan las bases de Groebner, que nos permiten diseñar algoritmos para comparar ideales y dar métodos efectivos para poder calcular las operaciones aritméticas elementales con los mismos. También vamos a utilizar principios de eliminación de variables, es decir, encontraremos ecuaciones que sólo relacionen las soluciones de ciertas variables usando los sistemas de generadores proporcionados por las bases de Groebner.

Definiremos nuestro sistema de trabajo utilizando para ello una serie de pasos que facilitarán la obtención de información:

- Inclusión de fotografías para ilustrar el caso concreto que se está estudiando.
- Dibujar un esquema del cruce regulado por semáforos que estamos estudiando en cada caso para establecer que regulaciones y restricciones existen en él.
- Traduciremos ese diagrama en un grafo.
- Estableceremos el número de colores a utilizar.
- Estableceremos las ecuaciones a resolver.
- Resolveremos usando el Wolfran Mathematica.
- Incluiremos una tabla explicativa donde se resumirá cada una de las posibles soluciones y la traduciremos al sistema de colores que regulan los semáforos.

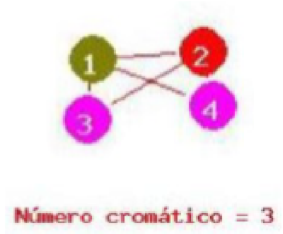
SEMÁFORO CAMINO DE RONDA, RONDA MOTOR

Observando el cruce nos damos cuenta que se puede representar con el siguiente esquema:



Situándonos en el punto A los coches pueden ir hacia delante, a izquierda o a derecha(en el cruce un poco más adelante). Y se ven afectados por tres semáforos que no pueden coincidir exactamente en el mismo color. En este cruce los coches también pueden venir en una dirección perpendicular a la situación del punto A, este semáforo marcado con el punto C sí puede coincidir con el marcado con el punto B.

Traducimos toda esta información y usando https://matiestii:wikispaces.com/file/view/polinomio+cromático.pdf obtenemos:



Para ello tendremos que introducir los datos de la matriz de adyacencia del grafo, es decir poner un 1 o un 0 dependiendo de sí los lados están o no relacionados (1 si están relacionados, 0 no). Así es como se transforma nuestro cruce en grafo, introduciendo en el programa todos los datos antes mencionados.

Según lo observado necesitaremos 3 colores para colorear el grafo de cuatro vértices. Resolveremos los siguientes algoritmos usando Mathematica y aplicándolo a las parejas de vértices unidas por lados, $(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)$

Definimos las siguientes variables atendiendo al número de vértices, que ya sabemos que son 4:

```
Var=Table[Xi,{i,1,4}]
```

Planteamos las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta el número de colores con el que podemos pintar y los puntos que no pueden estar pintados del mismo color que es lo que determina la lista de parejas.

```
Ecu1[n_]:=Xn^3-1

Ecu2[D_]:=Subscript[X, D[[1]]]2+XD[[1]]*XD[[2]]+Subscript[X, D[[2]]]2

Ecua=Join[Map[Ecu1,{1,2,3,4}],Map[Ecu2,{{1,2},{1,3},{1,4},{2,3},{2,4}}]]
Aux=GroebnerBasis[Ecua,Var]
Aux=Thread[Aux==0]
Aux=Solve[Aux,Var]
{Length[Aux]}
```

Las ecuaciones a resolver son:

$$-1+X_1^3,$$
$$-1+X_2^3,$$
$$-1+X_3^3,$$
$$-1+X_4^3,$$
$$X_1^2+X_1X_2+X_2^2,$$
$$X_1^2+X_1X_3+X_3^2,$$
$$X_1^2+X_1X^4+X_4^2,$$
$$X_2^2+X_2X_3+X_3^2,$$
$$X_2^2+X_2X_4+X_4^2$$
$$-1+X_4^3,$$
$$X_3-X_4,$$
$$X_2^2+X_2X_4+X_4^2,$$
$$X_1+X_2+X_4$$
$$-1+X_4^3=0,$$
$$X_3-X_4=0,$$
$$X_2^2+X_2X^4+X_4^2=0,$$
$$X_1+X_2+X_4=0$$
$$X_1+X_2+X_4=0$$

Los cálculos se han realizado sobre $\mathbb{C}$, lo que complica las operaciones y dificulta la interpretación de las soluciones. Si tataraos el problema sobre un cuerpo finito se deberían obtener el mismo número de soluciones pero más fácilmente entendibles. Por ejemplo, en nuestro caso estamos trabajando con raíces cúbicas de la unidad; el lugar adecuado sería un cuerpo $\mathbb{F}_p$ con 3/p-1 para asegurar la existencia de raíces cúbicas de en $\mathbb{F}_p$.

Las soluciones obtenidas son:

$$\left\{X_1 \to -1+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}), X_2 \to \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}), X_3 \to 1, X_4 \to 1\right\}$$

$$\left\{X_1 \to -1+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}), X_2 \to \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}), X_3 \to 1, X_4 \to 1\right\}$$

$$\left\{X_1 \to \frac{1}{4}(-1-i\sqrt{3})+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})+\frac{1}{2}\sqrt{4+2(-1-i\sqrt{3})+\frac{1}{4}(-1-i\sqrt{3})^2}, X_2 \right.$$
$$\to \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})-\frac{1}{2}\sqrt{4+2(-1-i\sqrt{3})+\frac{1}{4}(-1-i\sqrt{3})^2}, X_3$$
$$\left. \to \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}), X_4 \to \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})\right\}$$

Estas soluciones resultan difíciles de interpretar. Para poder interpretarlas de un modo más sencillo usaremos que para los elementos de un grupo de orden 3, sabemos que $3 = p$ -1 donde p es un número primo,(principio de D'Alembert), por lo que se cumple que $p = 3k + 1$, dándole a k distintos valores vamos obteniendo los valores de p,
Si $k = 0 \Longrightarrow p = 1$,
Si $k = 1 \Longrightarrow p = 4$,
Si $k = 2 \Longrightarrow p = 7$ es el primer primo que nos aparece por lo que necesitaremos hacer las operaciones módulo 7.

En Mathematica el algoritmo que se usa para la resolución de las ecuaciones usando módulo 7 es prácticamente el mismo,

```
Ecu1[n_]:=Xn^3-1

Ecu2[D_]:=Subscript[X, D[[1]]]2+XD[[1]]*XD[[2]]+Subscript[X, D[[2]]]2

Ecua=Join[Map[Ecu1,{1,2,3,4}],Map[Ecu2,{{1,2},{1,3},{1,4},{2,3},{2,4}}]]
Aux=GroebnerBasis[Ecua,Var]
Aux=Thread[Aux==0]
Aux=Solve[Aux,Var, Modulus→7]
{Length[Aux]}
```

Las soluciones son:

$$\{X1\to 1, X2\to 2, X3\to 4, X4\to 4\}$$
$$\{X1\to 1, X2\to 4, X3\to 2, X4\to 2\}$$
$$\{X1\to 2, X2\to 1, X3\to 4, X4\to 4\}$$
$$\{X1\to 2, X2\to 4, X3\to 1, X4\to 1\}$$
$$\{X1\to 4, X2\to 1, X3\to 2, X4\to 2\}$$
$$\{X1\to 4, X2\to 2, X3\to 1, X4\to 1\}$$

Más fáciles de interpretar y mucho más rápido su cálculo usando el ordenador.

Estas soluciones resultan difíciles de interpretar. Para poder interpretarlas de un modo más sencillo, vamos a trabajar con los elementos de un grupo de orden 3, sabemos que $3/p-1$ donde p es un número primo, (principio de D'Alembert), por lo que se cumple que $p=3k+1$, dándole a k distintos valores vamos obteniendo los valores de p, $k=0 \Longrightarrow p=1$, $k=1 \Longrightarrow p=4$, $k=2 \Longrightarrow p=7$ es el primer primo que nos aparece por lo que necesitaremos hacer las operaciones módulo 7.

Nos salen 6 soluciones diferentes, si observamos atentamente la tabla de representación de colores podemos observar que en realidad solo hay tres coloroaciones diferentes, las demás se obtienen como permutaciones de las mismas. Para verlo más intuitivamente observaremos los resultados númericos de cada una de las soluciones:

$$(1,2,3,4);\ (1,4,2,2);\ (1,2,4,4);\ (2,4,1,1);\ (4,1,2,2);\ (1,2,3,4).$$

Claramente se puede ver que unos resultados son permutaciones de otros. El hecho de colorear un grafo de n vértices con k colores es lo mismo que formar listas con repeticiones permitidas de longitud n con los colores de manera que se respeten las restricciones que imponen los vértices que no pueden ser coloreados igual.

Este mismo significado tendrán todas las demás tablas expuestas en este trabajo, es decir todas las opciones de coloreabilidad no son propias, unas se obtienen como permutaciones de las otras.

Una coloración de cualquier grafo G con n colores consiste en asignar a cada vértice un color de forma que los extremos de cada arista tengan un color diferente. Lo importante es que se "respete" la restricción de no permitir que vértices adyacentes tengan el mismo color, es por ello que aparecen varias soluciones pero no son todas "totalmente" diferentes.

Ahora será más sencillo interpretar la tabla de soluciones.

Su interpretación según el siguiente código de colores

1	2	3	4

Es:

X_1	1	
X_2	2	
X_3	3	
X_4	4	

X_1	1	
X_2	4	
X_3	2	
X_4	2	

X_1	2	
X_2	1	
X_3	4	
X_4	4	

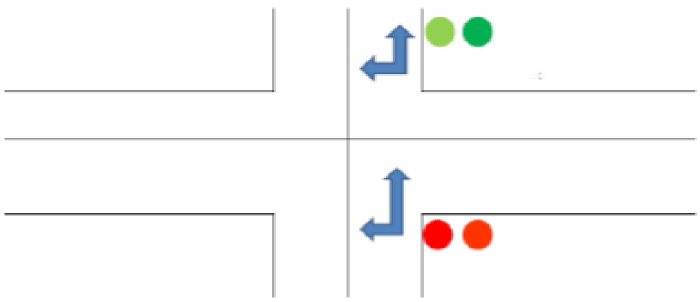
X_1	2	
X_2	4	
X_3	1	
X_4	1	

X_1	4	
X_2	1	
X_3	2	
X_4	2	

X_1	4	
X_2	2	
X_3	1	
X_4	1	

SEMÁFORO BEIRO

Observando el cruce nos damos cuenta que se puede representar con el siguiente esquema:



Los coches pueden ir hacia delante o a la derecha en una esquina e igual en la otra, ninguno de los cuatro puede coincidir con el mismo color en el mismo momento.

Traducimos toda esta información y usando https://matiestii:wikispaces.com/file/view/polinomio+cromático.pdf obtenemos:

Para ello tendremos que introducir los datos de la matriz de adyacencia del grafo, es decir poner un 1 o un 0 dependiendo de sí los lados están o no relacionados (1 si están relacionados, 0 no). Así es como se transforma nuestro cruce en grafo, introduciendo en el programa todos los datos antes mencionados.

Según lo observado necesitaremos 4 colores para colorear el grafo de cuatro vértices. Resolveremos los siguientes algoritmos usando Mathematica y aplicándolo a las parejas de vértices unidas por lados , $(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$

Definimos las siguientes variables atendiendo al número de vértices, que ya sabemos que son 4:

```
Var=Table[Xi,{i,1,4}]
```

Planteamos las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta el número de colores con el que podemos pintar y los puntos que no pueden estar pintados del mismo color que es lo que determina la lista de parejas.

```
Ecu1[n_]:=Xn^4-1

Ecu2[D_]:=Subscript[X, D[[1]]]3+XD[[1]]2*XD[[2]]+
XD[[1]]2*XD[[2]]2+Subscript[X, D[[2]]]3

Ecua=Join[Map[Ecu1,{1,2,3,4}],Map[Ecu2,{{1,2},{1,3},{1,4},{2,3},{2,4},},{3,4}}]]
Aux=GroebnerBasis[Ecua,Var]
Aux=Thread[Aux==0]
Aux=Solve[Aux,Var]
{Length[Aux]}
```

Las ecuaciones a resolver son:

$$\{-1+X_1^4,-1+X_2^4,-1+X_3^4,-1+X_4^4,X_1^3+X_1^2X_2+X_1X_2^2+X_2^3,X_1^3+X_1^2X_3+X_1X_3^2+X_3^3,X_1^3+X_1^2X_4+X_1X_4^2+X_4^3,X_2^3+X_2^2X_3+X_2X_3^2+X_3^3,X_2^3+X_2^2X_4+X_2X_4^2+X_4^3,X_3^3+X_3^2X_4+X_3X_4^2+X_4^3\}$$

$$\{-1+X_4^4,X_3^3+X_3^2X_4+X_3X_4^2+X_4^3,X_2^2+X_2X_3+X_3^2+X_2X_4+X_3X_4+X_4^2,X_1+X_2+X_3+X_4\}$$

$$\{-1+X_4^4==0,X_3^3+X_3^2X_4+X_3X_4^2+X_4^3=0,X_2^2+X_2X_3+X_3^2+X_2X_4+X_3X_4+X_4^2==0,X_1+X_2+X_3+X_4==0\}$$

Los cálculos se han realizado sobre ℂ, las soluciones no son difíciles de interpretar por lo que no es necesario recurrir a trabajar sobre un cuerpo finito, nos daría el mismo resultado pero con números enteros.

Las soluciones son:

$$
\begin{gathered}
\{\{X_1 \to 1, X_2 \to \boldsymbol{i}, X_3 \to -\boldsymbol{i}, X_4 \to -1\} \\
\{X_1 \to \boldsymbol{i}, X_2 \to 1, X_3 \to -\boldsymbol{i}, X_4 \to -1\} \\
\{X_1 \to 1, X_2 \to -\boldsymbol{i}, X_3 \to \boldsymbol{i}, X_4 \to -1\} \\
\{X_1 \to -\boldsymbol{i}, X_2 \to 1, X_3 \to \boldsymbol{i}, X_4 \to -1\} \\
\{X_1 \to \boldsymbol{i}, X_2 \to -\boldsymbol{i}, X_3 \to 1, X_4 \to -1\} \\
\{X_1 \to -\boldsymbol{i}, X_2 \to \boldsymbol{i}, X_3 \to 1, X_4 \to -1\} \\
\{X_1 \to 1, X_2 \to \boldsymbol{i}, X_3 \to -1, X_4 \to -\boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to \boldsymbol{i}, X_2 \to 1, X_3 \to -1, X_4 \to -\boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to 1, X_2 \to -1, X_3 \to \boldsymbol{i}, X_4 \to -\boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to -1, X_2 \to 1, X_3 \to \boldsymbol{i}, X_4 \to -\boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to \boldsymbol{i}, X_2 \to -1, X_3 \to 1, X_4 \to -\boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to -1, X_2 \to \boldsymbol{i}, X_3 \to 1, X_4 \to -\boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to 1, X_2 \to -\boldsymbol{i}, X_3 \to -1, X_4 \to \boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to -\boldsymbol{i}, X_2 \to 1, X_3 \to -1, X_4 \to \boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to 1, X_2 \to -1, X_3 \to -\boldsymbol{i}, X_4 \to \boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to -1, X_2 \to 1, X_3 \to -\boldsymbol{i}, X_4 \to \boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to -\boldsymbol{i}, X_2 \to -1, X_3 \to 1, X_4 \to \boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to -1, X_2 \to -\boldsymbol{i}, X_3 \to 1, X_4 \to \boldsymbol{i}\} \\
\{X_1 \to \boldsymbol{i}, X_2 \to -\boldsymbol{i}, X_3 \to -1, X_4 \to 1\} \\
\{X_1 \to -\boldsymbol{i}, X_2 \to \boldsymbol{i}, X_3 \to -1, X_4 \to 1\} \\
\{X_1 \to \boldsymbol{i}, X_2 \to -1, X_3 \to -\boldsymbol{i}, X_4 \to 1\} \\
\{X_1 \to -1, X_2 \to \boldsymbol{i}, X_3 \to -\boldsymbol{i}, X_4 \to 1\} \\
\{X_1 \to -\boldsymbol{i}, X_2 \to -1, X_3 \to \boldsymbol{i}, X_4 \to 1\} \\
\{X_1 \to -1, X_2 \to -\boldsymbol{i}, X_3 \to \boldsymbol{i}, X_4 \to 1\}\}
\end{gathered}
$$

Su interpretación según el siguiente código de colores

1	i	-1	-i

Es:

X_1	1		X_1	1		X_1	1		X_1	1		X_1	1		X_1	1	
X_2	-1		X_2	-1		X_2	i		X_2	i		X_2	-i		X_2	-i	
X_3	i		X_3	-i		X_3	-i		X_3	-1		X_3	i		X_3	-1	
X_4	-i		X_4	i		X_4	-1		X_4	-i		X_4	-1		X_4	i	

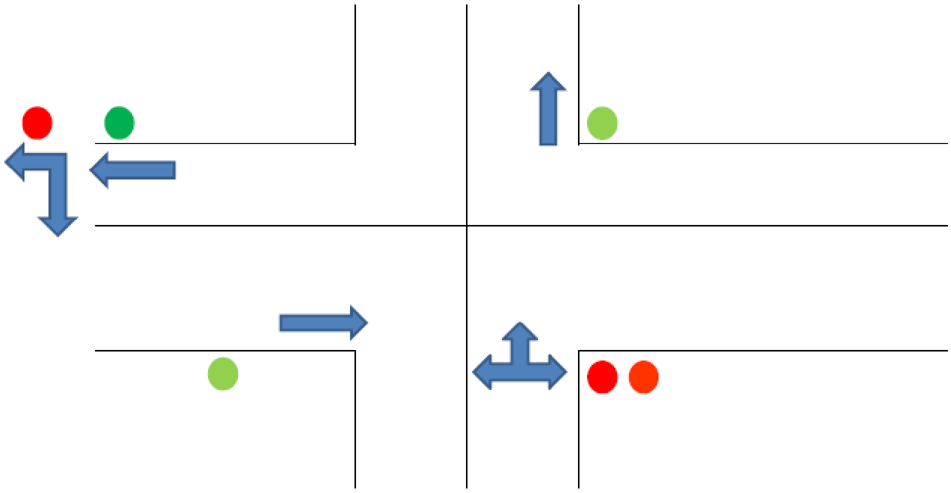
X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1	
X_2	1		X_2	1		X_2	i		X_2	i		X_2	-i		X_2	-i	
X_3	i		X_3	-i		X_3	1		X_3	-i		X_3	1		X_3	i	
X_4	-i		X_4	i		X_4	-i		X_4	1		X_4	i		X_4	1	

X_1	i		X_1	i		X_1	i		X_1	i		X_1	i		X_1	i	
X_2	1		X_2	1		X_2	-1		X_2	-1		X_2	-i		X_2	-i	
X_3	-1		X_3	-i		X_3	1		X_3	-i		X_3	1		X_3	-1	
X_4	-i		X_4	-1		X_4	-i		X_4	1		X_4	-1		X_4	1	

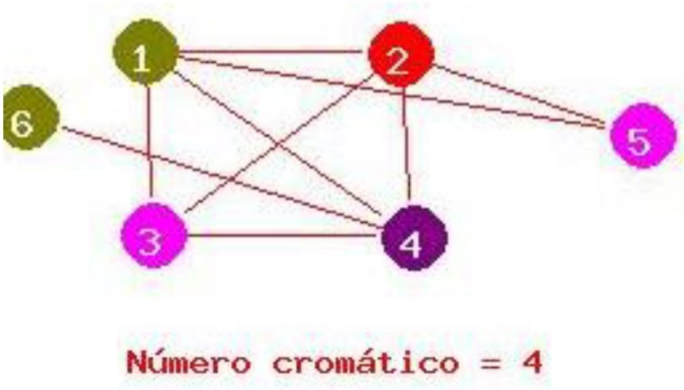
X_1	-i		X_1	-i		X_1	-i		X_1	-i		X_1	-i		X_1	-i	
X_2	1		X_2	1		X_2	-1		X_2	-1		X_2	i		X_2	i	
X_3	-1		X_3	-i		X_3	1		X_3	i		X_3	1		X_3	-1	
X_4	-i		X_4	-1		X_4	i		X_4	1		X_4	-1		X_4	1	

SEMÁFORO FUENTES

El esquema del cruce es:



Usando https://matiestii:wikispaces.com/file/view/polinomio+cromático.pdf obtenemos:



Según lo observado necesitaremos 4 colores para colorear el grafo de cuatro vértices. Resolveremos los siguientes algoritmos usando Mathematica y aplicándolo a las parejas de vértices unidas por lados ,$(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,3),(2,4),(2,6),(4,5)$

Definimos las siguientes variables atendiendo al número de vértices, que ya sabemos que son 6:

Var=Table[X_i,{i,1,6}]

Planteamos las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta el número de colores con el que podemos pintar y los puntos que no pueden estar pintados del mismo color, que es lo que nos determina la lista de parejas definidas en el algoritmo.

Ecu1[n_]:=X_n^4-1

Ecu2[D_]:=Subscript[X, D[[1]]]^3+Subscript[X, D[[1]]]^2*$X_{D[[2]]}$+$X_{D[[1]]}$ Subscript[X, D[[2]]]^2+Subscript[X, D[[2]]]^3

Ecua=Join[Map[Ecu1,{1,2,3,4,5,6}],Map[Ecu2,{{1,2},{1,3},{1,4},{1,6},{{2,3},{2,4},{2, 6},{{4,5}}]]

Aux=GroebnerBasis[Ecua,Var]

Aux=Thread[Aux==0]

Aux=Solve[Aux,Var]

{Length[Aux]}

Las ecuaciones a resolver son:

$$-1 + X_1^4$$
$$-1 + X_2^4$$
$$-1 + X_3^4$$
$$-1 + X_4^4$$
$$-1 + X_5^4$$
$$-1 + X_6^4$$
$$X_1^3 + X_1^2X_2 + X_1X_2^2 + X_2^3$$
$$X_1^3 + X_1^2X_3 + X_1X_3^2 + X_3^3$$
$$X_1^3 + X_1^2X_4 + X_1X_4^2 + X_4^3$$
$$X_1^3 + X_1^2X_6 + X_1X_6^2 + X_6^3$$
$$X_2^3 + X_2^2X_3 + X_2X_3^2 + X_3^3$$
$$X_2^3 + X_2^2X_4 + X_2X_4^2 + X_4^3$$

$$X_2^3 + X_2^2X_6 + X_2X_6^2 + X_6^3$$
$$X_4^3 + X_4^2X_5 + X_4X_5^2 + X_5^3$$
$$-1 + X_6^4$$
$$-1 + X_5^4$$
$$X_4^3 + X_4^2X_5 + X_4X_5^2 + X_5^3$$
$$\begin{aligned}-X_3 + X_4 + X_3^2X_5^3 - X_3X_4X_5^3 + X_3^2X_5^2X_6 - X_3X_4X_5^2X_6 - X_3X_5^3X_6 + X_4X_5^3X_6\\ + X_3^2X_5X_6^2 - X_3X_4X_5X_6^2 - X_3X_5^2X_6^2 + X_4X_5^2X_6^2 + X_3^2X_6^3 - X_3X_4X_6^3\\ - X_3X_5X_6^3 + X_4X_5X_6^3\end{aligned}$$
$$X_3^2X_4 - X_3X_4^2 - X_3^2X_6 + X_4^2X_6 + X_3X_6^2 - X_4X_6^2$$
$$-1 + X_3^4$$
$$\begin{aligned}X_2 + X_4 + X_5 + X_2^2X_5^3 + X_2X_4X_5^3 + X_4^2X_5^3 + X_6 + X_2^2X_5^2X_6 + X_2X_4X_5^2X_6 + X_4^2X_5^2X_6\\ + X_2X_5^3X_6 + X_4X_5^3X_6 + X_2^2X_5X_6^2 + X_2X_4X_5X_6^2 + X_4^2X_5X_6^2 + X_2X_5^2X_6^2\\ + X_4X_5^2X_6^2 + X_5^3X_6^2 + X_2^2X_6^3 + X_2X_4X_6^3 + X_4^2X_6^3 + X_2X_5X_6^3 + X_4X_5X_6^3\\ + X_5^2X_6^3\end{aligned}$$
$$X_2^2X_4 + X_2X_4^2 - X_4^2X_5 - X_4X_5^2 - X_5^3 - X_2^2X_6 - X_2X_6^2 - X_6^3$$
$$X_2^2X_3 + X_2X_3^2 + X_3^3 - X_2^2X_6 - X_2X_6^2 - X_6^3$$
$$X_2^3 + X_2^2X_6 + X_2X_6^2 + X_6^3$$
$$\begin{aligned}1 + X_1X_5^3 + X_2X_5^3 + X_4X_5^3 + X_1X_5^2X_6 + X_2X_5^2X_6 + X_4X_5^2X_6 + X_5^3X_6 + X_1X_5X_6^2\\ + X_2X_5X_6^2 + X_4X_5X_6^2 + X_5^2X_6^2 + X_1X_6^3 + X_2X_6^3 + X_4X_6^3 + X_5X_6^3\end{aligned}$$
$$X_1X_4 + X_2X_4 + X_4^2 - X_1X_6 - X_2X_6 - X_6^2$$
$$X_1X_3 + X_2X_3 + X_3^2 - X_1X_6 - X_2X_6 - X_6^2$$
$$X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 + X_1X_6 + X_2X_6 + X_6^2$$

Los cálculos se han realizado sobre $\mathbb{C}$, las soluciones no son difíciles de interpretar por lo que no es necesario que recurramos a trabajar sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_5$, nos darían el mismo número de resultados y las soluciones serían números enteros.

Las soluciones son:

$$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to -1\},$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -i, X4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to -1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$$

$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to i, X4\to -1, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to \imath, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X2\to 1, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to -1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -\imath, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to 1, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to -i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -i, X2\to -1, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to i\}$
$\{X_1\to 1, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to i\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to i\}$

$$\{X_1\to -1, X_2\to - i, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to - i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to - i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to - i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to - i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to - i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to - i, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to -1, X_5\to - i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to - i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to - i, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to - i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to - i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to - i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to - i, X_4\to i, X_5\to - i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to - i, X_4\to - i, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to - i, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to - i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to - i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to - i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to - i, X_3\to i, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to - i, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to - i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to - i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to - i, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to - i, X_4\to - i, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to - i, X_5\to i, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to - i, X_4\to - i, X_5\to 1, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to - i, X_5\to 1, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to - i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to -1, X_3\to - i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to - i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to - i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to - i, X_3\to i, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to - i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to - i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$$
$$\{X_1\to 1, X_2\to - i, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$$

$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to i\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to 1, X_3\to -1, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to 1, X_3\to -i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to i\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to -1, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$

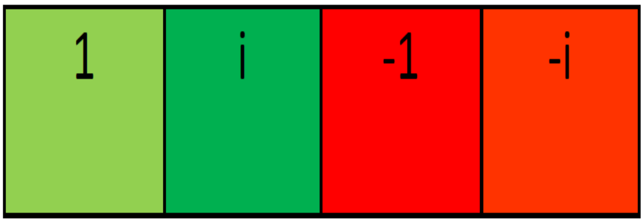
$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$

$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to -i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to 1, X_5\to i, X_6\to 1\}$
$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to 1\}$

$$\{X_1\to i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to 1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to 1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to -1, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to 1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to 1\}$$
$$\{X_1\to i, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to 1\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to i, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to 1\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to -i, X_3\to 1, X_4\to i, X_5\to 1, X_6\to 1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to -1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to 1\}$$
$$\{X_1\to -i, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -1, X_5\to 1, X_6\to 1\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to -i, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to 1\}$$
$$\{X_1\to -1, X_2\to i, X_3\to 1, X_4\to -i, X_5\to 1, X_6\to 1\}$$

Ahora es el momento de representar las soluciones, asignamos a cada solución un color, en total obtenemos 288 soluciones, aunque lo más importante es saber que no son todas coloraciones propias, unas son permutaciones de otras (la justificación se puede encontrar en el primer ejemplo)



X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	-1
X_5	-1
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	-1
X_5	1
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	-1
X_5	-1
X_6	i

X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	-1
X_5	1
X_6	i

X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	-1
X_5	i
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	-1
X_5	i
X_6	i

X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	i
X_5	-1
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	-1
X_5	1
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	i
X_5	-1
X_6	i

X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	i
X_5	1
X_6	i

X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	i
X_5	i
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	-1
X_4	i
X_5	i
X_6	i

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	-1
X_5	-1
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	-1
X_5	1
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	-1
X_5	-1
X_6	i

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	-1
X_5	1
X_6	i

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	-1
X_5	i
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	-1
X_5	i
X_6	i

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	i
X_5	-1
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	i
X_5	1
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	i
X_5	-1
X_6	i

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	i
X_5	1
X_6	i

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	i
X_5	i
X_6	-1

X_1	1
X_2	-i
X_3	i
X_4	i
X_5	i
X_6	i

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	1	
i	i	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	-1	
X_6	i	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	i	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	1	
i	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	i	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	1	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	i	
X_5	-i	
X_6	-i	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	-1	
X_6	i	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	-1	

X_1	1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	i	

X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1	
X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1	
X_3	i		X_3	i		X_3	i		X_3	i		X_3	i		X_3	i	
X_4	i		X_4	i		X_4	i		X_4	i		X_4	i		X_4	i	
X_5	-1		X_5	-1		X_5	-i		X_5	-i		X_5	i		X_5	i	
X_6	i		X_6	-i		X_6	1		X_6	i		X_6	-i		X_6	i	

X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1	
X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1	
X_3	i		X_3	i		X_3	i		X_3	i		X_3	i		X_3	i	
X_4	-i		X_4	-i		X_4	-i		X_4	-i		X_4	-i		X_4	-i	
X_5	-1		X_5	-1		X_5	-i		X_5	-i		X_5	i		X_5	i	
X_6	i		X_6	-i		X_6	1		X_6	i		X_6	-i		X_6	i	

X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1	
X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1	
X_3	-i		X_3	-i		X_3	-i		X_3	-i		X_3	-i		X_3	-i	
X_4	-i		X_4	-i		X_4	-i		X_4	-i		X_4	-i		X_4	-i	
X_5	-1		X_5	-1		X_5	-i		X_5	-i		X_5	i		X_5	i	
X_6	i		X_6	-i		X_6	1		X_6	i		X_6	-i		X_6	i	

X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1		X_1	-1	
X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1		X_2	1	
X_3	-i		X_3	-i		X_3	-i		X_3	-i		X_3	-i		X_3	-i	
X_4	i		X_4	i		X_4	i		X_4	i		X_4	i		X_4	i	
X_5	-1		X_5	-1		X_5	-i		X_5	-i		X_5	i		X_5	i	
X_6	i		X_6	-i		X_6	1		X_6	i		X_6	-i		X_6	i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	i	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	-i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	-1	
X_6	i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	-1	
X_6	i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	i	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	-1	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	i	
X_6	-i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-1	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	-i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-1	
X_5	i	
X_6	-i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	-i	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	-i	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	-i	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	1	
X_6	-i	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	-1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	-i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-1	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	i	
X_2	1	
X_3	-i	
X_4	-i	
X_5	i	
X_6	-i	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	-1	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	-1	
X_5	-i	
X_6	-1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	-1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-1	
X_6	-1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	i	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	-1	
x_5	-1	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	-1	
x_5	-1	
x_6	i	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	-1	
x_5	i	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	-1	
x_5	i	
x_6	i	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	-1	
x_5	-i	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	-1	
x_5	-i	
x_6	-i	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	i	
x_5	-1	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	i	
x_5	-1	
x_6	i	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	i	
x_5	i	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	i	
x_5	i	
x_6	i	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	i	
x_5	-i	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	i	
x_4	i	
x_5	-i	
x_6	-i	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	-1	
x_5	-1	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	-1	
x_5	-1	
x_6	i	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	-1	
x_5	i	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	-1	
x_5	i	
x_6	i	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	-1	
x_5	-i	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	-1	
x_5	-i	
x_6	-i	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	i	
x_5	-1	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	i	
x_5	-1	
x_6	i	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	i	
x_5	i	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	i	
x_5	i	
x_6	i	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	i	
x_5	-i	
x_6	-1	

x_1	-i	
x_2	1	
x_3	-1	
x_4	i	
x_5	-i	
x_6	-i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	1	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	1	
X_5	i	
X_6	i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	1	
X_6	i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	-i	
X_6	1	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	-i	
X_6	i	

X_1	-i	
X_2	-1	
X_3	i	
X_4	i	
X_5	i	
X_6	i	

Bibliografía

[1] PASCUAL JARA, NOTAS DE TRABAJO. ANILLOS DE POLINOMIOS. ÁLGEBRA CONMUTATIVA BÁSICA. UGR, 2016.

[2] MARÍA ROSA MURGA DÍAZ COLORACIÓN EN GRAFOS. UNIVERSIDAD DE CANTABRIA, 2013.

[3] ANA ISABEL PEREZ MARTÍN TFG MÉTODOS POLINOMIALES PARA TRABAJAR CON GRAFOS. UNIVERSIDAD DE VALLADOLID, 2014.

[4] ANTONIO GARVÍN COLOREANDO MAPAS. UNIVERSIDAD DE MÁLAGA.

[5] J.A. DE LOREA, C. J. HILLAR, P.N. MALKIN, M. OMAR RECOGNIZING GRAPH THEORETIC PROPERTIES WITH POLYNOMIAL IDEALS. ELECTRONIC J. COMB, 17, 2010, 26pp

[6] NICHOLE SCHIMANSKI REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS PORLAND STATE UNIVERSITY, 2011

[7] J.M. HARRIS, J.L. HIRST, M.J. MOSSINGHOFF, S. AXTER, K.A. RIBET COMBINATORICS AND GRAPH THEORY SPRINGER, 2000

Refencias Web:

Un tipo de referencias

1. http://www.jotdown.es/2014/1/entusiasmo-por-el-polinomio-cromatico/
2. http://www.jotdown.es/2013/10/clara-grima-los-colores-de-la-radio/
3. https://matiestii:wikispaces.com/file/view/polinomio+cromático.pdf
4. https://es.wikipedia.org/wiki/Coloraci%C3%B3n_de_grafos

Índice alfabético

Capítulo V

ENGLISH MEMORY

ENGLISH REPORT

With this essay we want to introduce algebraic equations as a way to solve historical problems, problems that have been already solved but of which demonstration involve too much time and that can be easily replace with a modern way of problem solving. One example can be the computation of the chromatic polynomial; first it was solved using combinatorial techniques now it solved using algebraical procedures.

We also shall establish a way of working using algebra to solve problems of our quotidian life, as the regulation of a traffic light cross.

We shall list what is needed during the process that allows us to get our final equations. Those equations will be solved by Wolfram Mathematic program.

We shall start listing the importance of Discrete Mathematics and the different number of applications that can be found for them.

In the last few years Discrete Mathematics has won a great popularity just because it can be used in many different technological areas. A direct result of this fact is the introduction of this discipline as a main subject in the major part of engineering degrees. Graph theory is one of the branches with most applicability inside sciences field.

There are a lot of different applications for graphs. Nowadays, graph theory is used as a basic tool in several fields as important as Operative Researching, Chemistry, Physics, Genetic, etc. or can be used for designing installation diagrams of electric nets. Generally those problems have been resolved using Combinatorial Mathematics, the introduction of Graph theory has supposed a really great improvement that makes things be determined more easily.

Before continuing, let's define superficially what a graph is, we will use a simple and intuitive example to do it. We will think in a road map, on it we can distinguish two type of objects: cities and roads, we will modelize these connections between cities by roads using a mathematical abstract object. We will do that using graphs. The usual way of drawing a Graphs is drawing a point for each vertex. If there exists an edge between two vertices we will draw a line connecting them. The representation of a graph is not unique.

Colourability of graphs is an special case of labelling graphs. We will assign to each item of the graph a colour. To define a colourability of the vertices of the graphs we will need to oblige to each contiguous vertices not to share same colour. We can extend that condition to edges and faces so we will keep as condition that contiguous items will not share same colours. Each of these cases will be treating as if they were vertices.

The problem of efficiently colouring the vertices of a graph is a problem nearly as old as graph theory itself. Indeed, one of the most celebrated theorems of modern mathematics is the "four–colour Theorem", which states that any planar graph can be properly coloured with four colours. This famous result was conjectured in 1852 by Francis Guthrie and yet defied proof until 1976, when it was finally confirmed by Kenneth Appel and Wolfgang Haken. Their proof made essential use of a computer to generate and verify many subcases of the argument. The interest in graph colouring, however, is more than historical. With direct applications to scheduling, the topic finds many real–world uses of great practical importance. In recent years, there have been several theoretical advances in the subject that extend familiar results and generalize many of the techniques.

In our essay we will show two different ways of computing the chromatic polynomial of a graph. The first one is combinatorial, it is hard and difficult. The second one uses a Mathematica algorithm, and will make things really easy.

A great range of problems can be modelled for systems of polynomial equations. We will mention terms that N. Alon coined and that are described in Recognizing graph theoretic properties with polynomial ideals. This term is Polynomial Method and with it, he describes the use of non-lineal polynomials for solving combinatorial problems.

Continuing with the inspection of this method and showing how the algorithmic theory of polynomial ideals can be applied to detect k–colourability. We shall use, between others thing, division algorithm, Groebner basis and Wolfrang Mathematic software and programming.

We shall explore k-colourability using commutative algebra technics and using algebraic geometry. In this report we also will use arithmetic of polynomials rings in several indeterminates with coefficient in a field. We will introduce computational methods based on division with remainder in a polynomial ring with n indeterminates. To achieve that, we will need to introduce order relations in n . An indispensable condition for this order relation is that it needs to be a good order, compatible with addition and with zero element, that means that $(0,\dots,0)$ should be the minimum element for this specific order. In this dissertation we will use Groebner basis for getting a way to do arithmetic operations with ideals. Some of the things we are going to use are:

(1) Cyclotomic polynomial $\phi_n(\omega)$, its definition will allow us to use the n–th primitive roots of the unit as a way to solve colourability problems. We will define and solve those equations.
(2) The relationship between the division algorithm and Groebner basis will be an important tool for making our operations due to the special characteristic that tell us that every division with respect to a Groebner basis get always the same remainder, and that it will be zero if the polynomial belong to the ideal generated by the Groebner basis.
(3) Using Wolfrang Mathematica we will design an algorithm that will calculate the different solutions of colourability of every graph we want to get coloured, for that we only need to tell to the programme how many vertices and colours we will be used.
(4) Using "*http://porcomputador.com/grafos/cromatico.html*" we will able to know how many colours we need to use in order to colour our graph.

(5) So the problem is quickly solved, only indicating which points are related and the number of colours that we shall use. This way, we obtain all the range of different solutions.

The last part of our work is centred in the application of the theory to a practical use. We shall apply those data to traffic lights.

The first thing is to represent our traffic lights cross with a graph. We shall define which point can be related to other, that means that we shall establish which of each traffic lights can be coloured with the same colour at the same time. That way, we will obtain which pairs are related.

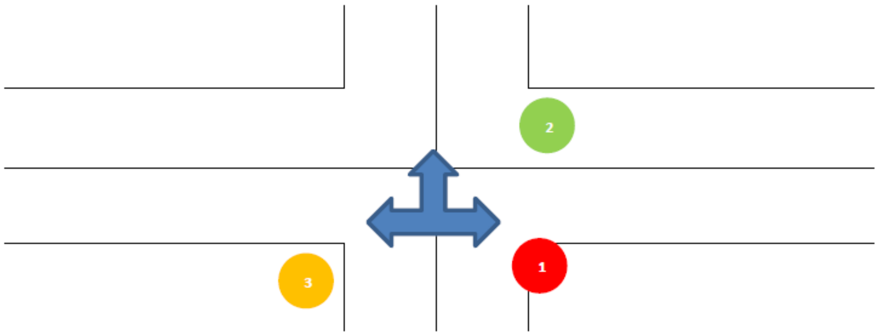
Then we shall get the graph draw and the number of colours that we need to color the graph. Knowing how many colours we need allow us to translate that information in the world of algebra. We will use the numbers of colours needed to define which primitive roots of the unit we will need to solve equations. It is basic information because that knowledge will be the origin of the equations we will resolve.

When we get that ready we will use Wolfram Mathematic program to resolve the equations that allow us to know the different solutions for colouring our graph.

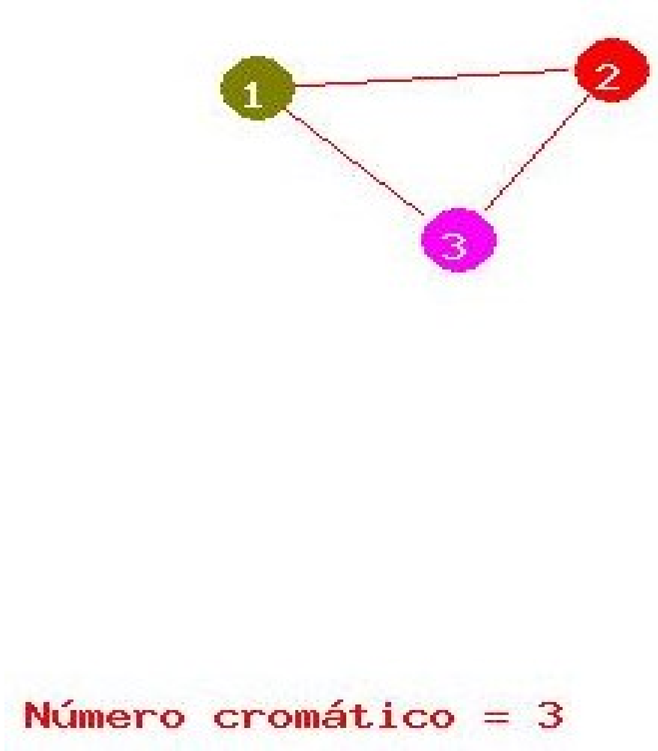
Sometimes the solutions will be difficult to be interpreted; in those cases we will introduce a new idea. Using D'Alembert principle we will find a prime that will allow us to resolve those equations using module this prime, the solutions obtain with this procedure will be really easy to be interpreted.

Last part of the essay will be tables where in an intuitive way we can see all the different ways that our traffic lights can get. A small example is listed now in order to get understood what we will do during the whole work.

In a street cross there is three traffic lights, one to allow cars on the right side to go, other to allow cars continue going to the front and the last one that allow cars going to the left. Our cross will be something like that:


2
3
1

Clearly when traffic light number 1, the one which allow cars keep going straight, is green, traffic Light 2 will be red, so number 1 and 2 can't be coloured the same way so they need to be coloured differently. For traffic light number 3 and number 2 happen the same, so 3 and 2 can't be at the same color at the same time. For traffic light 1 and traffic light 3, they can be same coloured at the same time, but also can be coloured differently.



We shall need to use $(1,2),(1,3),(2,3)$ pairs and we shall need only three colours to coloured this graphs. So we shall need to use the equations defined by third roots of the unit. We shall obtain following equations:

$$\text{Var} = \text{Table}\,[X_i, \{i, 1, 3\}]$$
$$\text{Ecu1[n\_]:=}X_n{}^3 - 1$$
$$\text{Ecu2[D\_]:=}X_{D[[1]]}{}^2 + X_{D[[1]]} * X_{D[[2]]} + X_{D[[2]]}{}^2$$

When we resolve that we obtain our solutions that will be translate into a table. So, summarizing, we have used algebraic equations to solve a problem that traditionally has been solved using combinatorial. The use of this tool, together with the use of modern software, allows us to obtain result quicker and more efficiently than before. Modern mathematics are a faithful reflect of modern world. Using what science brings us to make our life easy it is an intelligent way of using our resources.