# GRAFO DE DIVISORES DE ZERO DE UN ANILLO

RODRIGO BOTELLO MARABOTTO

Departamento de Álgebra

Universidad de Granada. 2015

# Grafo de Divisores de Zero de un anillo

Rodrigo Botello Marabotto

Trabajo de fin de máster
Universidad de Granada. 2015

*Dedicado a mis padres y a mi hermana*

# Agradecimientos

A Pascual Jara por toda la ayuda recibida.

# Introducción

En el estudio de anillos y álgebras (conmutativas) una de las herramientas esenciales es la aritmética de sus elementos, lo que permite aproximarnos a su estructura; las nociones generalmente estudiadas son las de elemento invertible, divisor de cero, elemento regular, elemento nilpotente, elemento idempotente, etc. Cada una de estas nociones nos aporta información; por ejemplo, la existencia de un elemento idempotente nos asegura que nuestro anillo descompone como un producto de dos anillos, que son ideales del anillo original. Los elementos nilpotentes nos definen un ideal: el nilradical, y los anillos con nilradical cero son subanillos de un producto (posiblemente infinito) de dominios. Por otro lado, al estudiar un subanillo del producto de cuerpos nos aparece el radical de Jacobson. En los dos casos anteriores el anillo es un producto subdirecto de dominios o de cuerpos, respectivamente. Los elementos regulares podemos invertirlos, formalmente, obteniendo el anillo total de fracciones, un anillo en el que se embebe el anillo original y verifica cierta propiedad de maximalidad.

Los elementos divisores de cero no tienen construcciones similares; una cierta invarianza al pasar al anillo total de fracciones y un cierto control mediante ideales primos asociados son las propiedades elementales de los mismos. Sin embargo estos elementos deben aportar información sobre el anillo; por ejemplo si el cero es el único divisor de cero, entonces tenemos un dominio de integridad. Para casos no tan triviales, conviene desarrollar una teoría. Una aportación a esta teoría es debida a I.Beck, quien en 1988 introdujo el concepto de grafo de divisores de cero de un anillo conmutativo. Su propósito era asociar la teoría de grafos, que trabaja con objetos intuitivos, con la teoría de anillos, que es mucho más abstracta, y así poder obtener un beneficio mutuo entre las dos. Desde entonces, muchos matemáticos han trabajado para obtener resultados en este campo.

Queda claro que el estudio del grafo de divisores de cero nos aporta una información adicional en el caso en que los divisores de cero son abundantes. Al estudio de este grafo, sus propiedades y a las propiedades que determina en el anillo es a lo que está dedicada esta memoria.

Esta memoria está organizada en cuatro capítulos. El primero trata de introducir las nociones básicas de divisores de cero y el grafo asociado y estudiar sus propiedades más elementales. En él hemos utilizado el conjunto de divisores de cero no nulos como conjunto de vértices, limitación que nos lleva a dedicar la memoria al trato con grafos finitos, anillos finitos y anillos próximos a estos. Una extensión de esta teoría pasa por considerar otro tipo de vértices, por ejemplo ideales, pero hemos preferido recoger la teoría clásica y dejar estas variantes para desarrollos posteriores. No obstante, los desarrollos que se obtienen en la teoría clásica son de interés por sí mismos y muestran claramente cual es el alcance de la misma.

En el capítulo dos estudiamos coloraciones a la Beck, basándonos en el trabajo original, planteando la conjetura que motiva parte del mismo, introduciendo los elementos necesarios, y acabándolo con un contraejemplo que prueba que la misma es falsa. No obstante, es posible obtener familias de anillos para los que la conjetura es cierta, mostrando la potencia de la teoría en ciertas clases de anillos.

Queda el problema de determinar si la relación anillo-grafo es buena. Es claro que el grafo es un valioso invariante, por esta razón será de interés determinar qué grafos son grafos de divisores de cero y cuando tengamos uno de ellos, es de interés construir un anillo cuyo grafo de divisores de cero sea el grafo dado. El hecho de trabajar con grafos cuyos vértices sean elementos (divisores de cero) de un anillo, nos permite hacer una construcción eficiente, que por la complejidad de la misma solo describimos en este texto de forma muy somera.

Una vez que se conocen las líneas maestras de la teoría de grafos de divisores de cero, en el capítulo cuatro mostramos otras construcciones similares para anillos e incluso para módulos. Cada una de ellas requeriría un desarrollo como el aquí realizado, sin embargo por la limitación de espacio de esta memoria solo hemos descrito algunas de estas construcciones y mencionado algunos de los resultados elementales sobre las mismas.

# Índice general

# Capítulo I

# Grafo de Divisores de Cero: Propiedades básicas

En este capítulo definiremos los objetos sobre los que vamos a trabajar, los grafos de divisores de cero, definidos como se utilizan actualmente por Anderson y Livingston en [8], y enunciaremos sus propiedades básicas.

Después, veremos algunos invariantes de interés para la teoría.

## 1. Definición y Propiedades básicas

**Definición 1.1 (Grafo de divisores de cero)**
*Sea $R$ un anillo conmutativo, $Z(R)$ el conjunto de sus divisores de cero y $Z(R)^*$ el conjunto de sus divisores de cero no nulos. Llamaremos $\Gamma(R)$ al grafo de divisores de cero de $R$, que es el grafo simple que tiene:*

- *Como conjunto de **vértices** los elementos de $Z(R)^*$.*
- *Existe una **arista** entre dos vértices diferentes $x$ e $y$ si, y solo si, $xy = 0$.*

Dada la definición, podemos observar que en general, para un anillo cualquiera, su grafo asociado no será necesariamente finito, y puesto que los casos en los que el grafo es finito es cuando se puede dibujar (y por tanto computar con sencillez), nos van a interesar estos especialmente. Por eso, veremos cuando el grafo asociado es finito.

**Teorema. 1.1. (Cuando el Grafo es finito)**
*Sea $R$ un anillo conmutativo. Entonces $\Gamma(R)$ es finito si, y solo si, $R$ es finito o $R$ es un dominio integral (en cuyo caso $\Gamma(R)$ es vacío). En particular, si $1 \leq |\Gamma(R)| < \infty$, entonces $R$ es finito y no es un cuerpo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\Gamma(R)(= Z(R)^*)$ es finito y no vacío. Entonces existen elementos no nulos $x, y \in R$ con $xy = 0$. Sea $I = \mathrm{Ann}(x)$. Entonces $I \subset Z(R)$ es finito y $ry \in I$ para todo $r \in R$. Si $R$ es infinito, entonces existe un $i \in I$ con $J = \{r \in R | ry = i\}$ infinito. Para cualquier $r, s \in J, (r-s)y = 0$, por lo que $\mathrm{Ann}(y) \subset Z(R)$ es infinito, una contradicción. Por tanto R debe ser finito. □

Otra de las propiedades que se observan con mayor facilidad es la conexión del grafo, es decir, si existe un camino entre dos vértices cualesquiera. En caso de que esto sea así, interesará conocer el llamado **diámetro del grafo**, $\mathrm{diam}(\Gamma) = \sup\{d(x, y) | \text{x e y son vértices distintos de } \Gamma\}$ donde $d(x, y)$ es la longitud de un camino mínimo entre $x$ e $y$. El otro invariante de interés será el **girth de** $\Gamma$, $\mathrm{girth}(\Gamma)$, que es la longitud del ciclo más pequeño del grafo. El siguiente teorema pondrá algo de luz sobre estas cuestiones:

**Teorema. 1.2. (Conexión, diámetro y girth)**
*Sea $R$ un anillo conmutativo. Entonces $\Gamma(R)$ es conexo y diam$(\Gamma(R)) \leq 3$. Mas aún, si $\Gamma(R)$ contiene un ciclo, entonces girth$(\Gamma(R)) \leq 7$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x, y \in Z(R)^*$ distintos. Si $xy = 0$, entonces $d(x, y) = 1$. Luego supongamos que $xy$ es no nulo. Si $x^2 = y^2 = 0$, entonces $x-xy-y$ es un camino de longitud 2. Luego $d(x, y) = 2$. Si $x^2 = 0$ e $y^2 \neq 0$, entonces hay un $b \in Z(R)^* - \{x, y\}$ con $by = 0$. Si $bx = 0$, entonces $x-b-y$ es un camino de longitud 2. Si $bx \neq 0$, entonces $x - bx - y$ es un camino de longitud 2. En cualquier caso, $d(x, y) = 2$. Un argumento similar sirve si $y^2 = 0$ y $x^2 \neq 0$. Por tanto podemos asumir que $xy, x^2, y^2$ son todos no nulos. Por tanto, existen $a, b \in Z(R)^* - \{x, y\}$ con $ax = by = 0$. Si $a = b$, entonces $x - a - y$ es un camino de longitud 2. Por tanto, podemos asumir que $a \neq b$. Si $ab = 0$ entonces $x - a - b - y$ es un camino de longitud 3 y por tanto $d(x, y) \leq 3$. Si $ab \neq 0$, entonces $x - ab - y$ es un camino de longitud 2. Luego $d(x, y) = 2$. Por tanto $d(x, y) \leq 3$ y el diámetro de $\Gamma(R)$ es meor o igual que 3.
Además, sabemos que si un grafo cualquiera $\Gamma$ tiene ciclos, entonces $\mathrm{girth}(\Gamma) \leq 2\mathrm{diam}(\Gamma) + 1$, obteniendo la parte del teorema que faltaba. □

Por ser $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$ sabemos que, dados $x$ e $y$ en $Z(R)^*$, distintos, ocurre uno de los siguientes casos:

- $xy = 0$.
- $xz = zy = 0$.
- $xz_1 = z_1z_2 = z_2y = 0$.

En cuanto al girth, se conjetura que $\mathrm{girth}(\Gamma(R)) < 5$ ó $\infty$ y se puede precisar aún más si $R$ es Artiniano:

**Teorema. 1.3.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo Artiniano. Si $\Gamma(R)$ contiene un ciclo, entonces girth$(\Gamma(R)) \leq 4$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\Gamma(R)$ contiene un ciclo. Sabemos por [9, Theorem 8.7] que $R$ es un producto directo de anillos locales artinianos. Primero supongamos que $R$ es local con ideal maximal no nulo $M$. Entonces $M = \mathrm{Ann}(x)$ para cierto $x \in M^*$ [14, Theorem 82]. Si existen distintos $y, z \in M^* - \{x\}$ con $yz = 0$ entonces $y - x - z - y$ es un triángulo. De no ser así, $\Gamma(R)$ no contendría ciclos, una contradicción. En este caso, girth$(\Gamma(R)) = 3$. Supongamos ahora que $R = R_1 \times R_2$. Si ambos $|R_1| \geq 3$ y $|R_2| \geq 3$, entonces, podemos elegir $a_i \in R_i - \{0, 1\}$. Entonces $(1, 0) - (0, 1) - (a_1, 0) - (0, a_2) - (1, 0)$ es un cuadrado. Luego en este caso, girth$(\Gamma(R)) \leq 4$. Por tanto podemos asumir que $R_1 = \mathbb{Z}_2$. Si $|Z(R_2)| \leq 2$, entonces $\Gamma(R)$ no contiene ciclos, una contradicción. Por tanto, $|Z(R_2)| \geq 3$. Dado que $\Gamma(R_2)$ es conexo, existen elementos distintos $x, y \in Z(R_2)^*$ con $xy = 0$. Luego $(0, x) - (1, 0) - (0, y) - (0, x)$ es un triángulo. Por tanto en este caso, girth$(\Gamma(R_2)) = 3$. Y ya tenemos que girth$(\Gamma(R)) \leq 4$ en todos los casos. □

En la demostración anterior se observa que un anillo finito $R$ tiene girth$(\Gamma(R)) = 4$ si, y solo si, se verifica una de las siguientes proposiciones:

- $R \cong F \times K$ para cuerpos finitos $F$ y $K$ con $|F|, |K| \geq 3$.
- $R \cong F \times A$ para $F$ un cuerpo finito con $|F| \geq 3$ y $A$ un anillo finito con $|Z(A)| = 2$.

Además, se puede observar que girth$(\Gamma(R)) = \infty$ si, y solo si, se verifica una de las siguientes proposiciones:

- $|\Gamma(R)| \leq 2$.
- $|\Gamma(R)| = 3$ y $\Gamma(R)$ no es completo.
- $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ para $A$ un cuerpo finito o un anillo finito con $|Z(A)| = 2$.

También se puede observar que el grafo linea de $n$ vértices solo es realizable como $\Gamma(R)$ si $n \leq 3$.

Lo siguiente que nos va a interesar observar es **cuando $\Gamma(R)$ posee un elemento adyacente a todos los demás**, y en particular cuando es completo o estrellado.

**Teorema. 1.4.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo. Entonces existe un vértice de $\Gamma(R)$ adyacente a todos los demás si, y solo si, $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ donde $A$ es un dominio integral o $Z(R)$ es un ideal anulador de $R$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $Z(R)$ no es un ideal anulador y que $0 \neq a \in Z(R)$ es adyacente a cualquier otro vértice. Entonces $a \notin \text{Ann}(a) = I$, dado que de no ser así, $Z(R) = I$ y sería un ideal anulador. Por tanto $I = \text{Ann}(a)$ es maximal entre los ideales anuladores y como consecuencia es primo. Si $a$ no es un idempotente de $R$, $a^2 \neq a$, entonces $a^3 = a^2a = 0$, puesto que $a$ es adyacente al vértice $a^2$, lo que implica que $a \in I$ o que $a^2 \in I$ lo que implica que $a \in I$ en cualquier caso puesto que $I$ es primo, y eso es una contradicción. Por tanto $a^2 = a$, lo que implica que $R = Ra \oplus R(1-a)$. Esto nos permite asumir que $R = R_1 \times R_2$ con $a = (1,0)$ adyacente a cada otro vértice. Ahora si $1 \neq c \in R_1$ entonces $(c,0) = (c,0)(1,0) = (0,0)$, por lo que $c = 0$ y $R_1 = \mathbb{Z}_2$. Además, $R_2$ debe ser un dominio integral, puesto que de no serlo, existiría un divisor de cero suyo $b \neq 0$ tal que $(1,b) = (1,b)(1,0) = (1,0)$ lo que es absurdo, pues $(1,0)$ es adyacente a todos los elementos de $R$. Por tanto $R_2$ es un dominio integral.

La otra implicación es trivial. □

Cabe destacar de la demostración que si un elemento $a$ es adyacente al resto, entonces, o es idempotente con $Ra = \{0, a\}$ un ideal primo de $R$ o el conjunto de divisores de cero de $R$ es $Z(R) = \text{Ann}(a)$.

**Corolario. 1.5. (Caso Noetheriano)**
*Sea R un anillo Noetheriano conmutativo. Entonces, existe un vértice de $\Gamma(R)$ adyacente a todos los demás si, y solo si, $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$, donde A es un dominio integral Noetheriano o $Z(R)$ es un ideal primo de R. Si además $dim(R) = 0$, entonces $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$, donde A es un cuerpo o $\{0\}$ es un ideal primario de R.*

Determinaremos ahora el caso finito:

**Corolario. 1.6. (Caso finito)**
*Sea R un anillo conmutativo finito. Entonces existe un vértice de $\Gamma(R)$ adyacente a todos los demás si, y solo si, $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ donde $F$ es un cuerpo finito o R es local. Además, para algún primo p y un entero $n \geq 1$, $|\Gamma(R)| = |F| = p^n$ si $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$, y $|\Gamma(R)| = p^n - 1$ si R es local.*

Lo siguiente que vamos a determinar es cuando el grafo es completo.

**Teorema. 1.7.**
*Sea R un anillo conmutativo. Entonces $\Gamma(R)$ es completo si, y solo si, $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ o $xy = 0$ para todo $x, y \in Z(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\Gamma(R)$ es completo pero existe $x \in Z(R)$ con $x^2 \neq 0$. Podemos ver que $x^2 = x$. En caso de que no sea así, $x^3 = x^2 x = 0$ de donde se deduce que $x^2(x + x^2) = 0$ con $x^2 \neq 0$, por lo que $x + x^2 \in Z(R)$. Si $x + x^2 = x$, entonces $x^2 = 0$, una contradicción. Por tanto $x + x^2 \neq x$ lo que implica que $x^2 = x^2 + x^3 = x(x + x^2) = 0$, dado que $\Gamma(R)$ es completo, lo que es una contradicción. Por tanto $x^2 = x$. Como en la demostración del teorema [1.4.], obtenemos que $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ y en este caso $A \cong \mathbb{Z}_2$. □

Este hecho lo podemos visualizar como un caso particular de la relación natural asociada a la adyacencia en el grafo:

**Corolario. 1.8.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo. Para $x, y \in Z(R)$ definimos $x \sim y$ si $xy = 0$ o $x = y$, y definimos $x \sim^* y$ si $xy = 0$. Entonces:*

- *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia si, y solo si, $\Gamma(R)$ es un grafo completo.*
- *La relación $\sim^*$ es una relación de equivalencia si, y solo si, $\Gamma(R)$ es un grafo completo y $R \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce de los teoremas [1.2.] y [1.7.]. □

Veamos ahora el caso finito:

**Teorema. 1.9.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo finito. Si $\Gamma(R)$ es completo, entonces se verifica una de las siguientes proposiciones:*

- *$R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*
- *$R$ es local con $\mathrm{char}(R) = p$ o $p^2$ y $|\Gamma(R)| = p^n - 1$, donde $\mathrm{char}(R)$ indica la característica de $R$, $p$ es primo y $n \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Para un cuerpo $F$, el grafo $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times F)$ no es completo salvo que $F = \mathbb{Z}_2$. Por tanto, supongamos que $R \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Por el corolario [1.6.], $R$ debe ser un anillo local con ideal maximal $M$. Por tanto, $\mathrm{char}(R) = pm$ para algún primo $p$ y algún $m \geq 1$. Si $m \geq 3$, entonces $R$ tendría divisores de cero no adyacentes, contradicción. Por tanto $\mathrm{char}(R) = p$ o $p^2$. Dado que $M$ es un $p$-grupo, $|\Gamma(R)| = p^n - 1$ para algún primo $p$ y un entero $n \geq 1$. □

Ahora veremos **cuando $\Gamma(R)$ tiene exactamente un vértice que es adyacente a todos los demás**.

**Lema. 1.10.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo finito. Si $\Gamma(R)$ tiene exáctamente un vértice adyacente a cualquier otro vértice y no hay mas vértices adyacentes, entonces $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ donde $F$ es un cuerpo finito con $|F| \geq 3$ o $R$ es un anillo local con ideal maximal $M$ verificando $R/M \cong \mathbb{Z}_2$, $M^3 = 0$ y $|M^2| \leq 2$. Por tanto $|\Gamma(R)|$ es $p^n$ o $2^n - 1$ para cierto primo $p$ y entero $n \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $R \ncong \mathbb{Z}_2 \times F$, entonces $R$ es local con ideal maximal $M$ por corolario [1.6.]. Luego $M = \mathrm{Ann}(x)$ para un único $x \in M$. Sea $k$ el menor entero positivo con $M^k = 0$. Entonces $M = \mathrm{Ann}(y)$ para cualquier elemento no cero $y \in M^{k-1}$. Por tanto $M^{k-1} = \{0, x\}$, y $|M^{k-1}/M^k| = 2$, de donde $R/M \cong \mathbb{Z}_2$. Si $k \geq 4$ entonces $|M^{k-2}| \geq 4$. Por tanto, para cualquiera $a, b \in M^{k-2} - M^{k-1}$ distintos, $ab \in M^{2k-4} \subset M^k$, de donde $ab = 0$, lo que es una contradicción. Como consecuencia $M^3 = 0$ y $|M^2| \leq 2$. □

Para acabar veamos **cuando $\Gamma(R)$ es estrellado.**

**Teorema. 1.11.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo finito con $|\Gamma(R)| \geq 4$. Entonces $\Gamma(R)$ es un grafo estrellado si, y solo si, $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$, donde $F$ es un cuerpo finito. Recíprocamente, cada grafo estrellado de orden $p^n$ se puede realizar como grafo de divisores de cero de un anillo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\Gamma(R)$ es un grafo estrellado y $R \ncong \mathbb{Z}_2 \times F$. Por el corolario [1.6.] y el lema [1.10.] podemos suponer que $(R, M)$ es un anillo local con $|M| = 2^k$ para cierto $k \geq 3$ (Dado que $M$ es un 2-grupo y $|\Gamma(R)| \geq 4$) y $|M^2| = 2$. Sea $M = \mathrm{Ann}(x)$ y elijamos $a, b, c, d \in M^* - \{x\}$ distintos. Entonces $ab = ac = ad = x$ puesto que $M^2 = \{0, x\}$ y no hay otras posibles relaciones entre divisores de cero. Por tanto $a(b - c) = a(b - d) = 0$. Como $\mathrm{Ann}(a) = \{0, x\}$ entonces $b - c = b - d = x$. Por tanto $c = d$ lo que es una contradicción.

Para la vuelta, solo hay que observar que si $F$ es un cuerpo finito, entonces $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times F)$ es un grafo estrellado de orden $|F|$. □

# 2. Invariantes

Una de las consecuencias mas útiles de nuestra teoría reside en la gran variedad de nuevos invariantes propios de los grafos que podemos asignar a nuestros anillos (y viceversa, aunque en menor medida). Por ejemplo, en la sección anterior hemos visto que el diámetro y del grafo de divisores de cero de un anillo era relativamente pequeño. Estos invariantes proporcionarán nuevos mecanismos para clasificar los grafos y anillos y además permitirán (posiblemente) observar propiedades de estas estructuras que hayan pasado desapercibidas hasta ahora.
A continuación enumeraremos algunos de estos invariantes:

- Diámetro y girth.
- Número cromático y número de clique (Se tratarán estos temas en el capítulo siguiente).
- Número cromático de aristas.

  El resultado más importante en relación a este invariante es:

**Teorema. 2.1.**
*Si $R$ es un anillo finito y $\Gamma(R)$ su grafo de divisores de cero, entonces el número cromático de arista de $\Gamma(R)$ coincide con el máximo de los grados de incidencia de aristas de $\Gamma(R)$, salvo que $\Gamma(R)$ sea un grafo completo de orden impar.*

  (más información en [1]).

- Vértices de corte de grafos (más información en [10]).
- Conjuntos de corte de grafos.

  El resultado más importante en relación a este invariante es:

**Teorema. 2.2.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo finito no local no isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times F$ donde $F$ es un cuerpo y escribamos $R$ como $R \cong R_1 \times \ldots \times R_n \times F_1 \times \ldots \times F_m$ donde cada $R_i$ es un anillo local y cada $F_j$ es un cuerpo, entonces:*

*(1)* $A = \{(0,\ldots,0,r_i,0,\ldots,0) | r_i \in Ann(r) \backslash \{0\}\}$ *es un conjunto de corte en* $\Gamma(R)$ *donde* $Ann(r)$ *es un ideal anulador minimal de* $R_i$.

*(2)* $A = \{(0,\ldots,0,f_i,0,\ldots,0) | r_i \in F_j \backslash \{0\}\}$ *es un conjunto de corte en* $\Gamma(R)$.

*Además, cada conjunto de corte en* $\Gamma(R)$ *tiene la forma de* (1) *ó* (2).

(más información en [13]).

- Relación entre automorfismos del grafo y los automorfismos del anillo (más información en [8, Section 3]).
- Anillos cuyo grafo es plano.
- Anillos cuyo grafo es hamiltoniano.
- etc.

En los capítulos siguientes veremos un ejemplo de estudio de alguno de estos invariantes y observaremos la importancia de otros en nuestra teoría.

# Capítulo II

# Coloraciones

La teoría de grafos de divisores de cero de anillos la inició Beck en [12]. Su objetivo original era estudiar coloraciones para anillos conmutativos, considerando el anillo un grafo y que dos elementos distintos eran adyacentes si su producto era cero. Esta sección será por tanto un ejemplo de estudio de un invariante.

## 3. Definiciones básicas

El grafo que definió Beck para trabajar estas cuestiones es algo distinto al definido en la sección anterior:

**Definición 3.1 (Grafo de Beck)**
*Sea $R$ un anillo Conmutativo. Definimos su grafo (de Beck) asociado, $\Gamma_0(R)$ o simplemente $R$, como el grafo tal que:*

- *Su conjunto de **vértices** es el conjunto de elementos de $R$.*
- *Hay una **arista** entre dos vértices $x, y \in R$ si $xy = 0$.*

Como se puede observar, las diferencias con el grafo definido en la sección anterior son mínimas y se pueden señalar fácilmente:

- $\Gamma_0(R)$ tiene más vértices que $\Gamma(R)$, pues los elementos que no son divisores de cero y el cero están en él.
- Los elementos no nulos que no están en $\Gamma(R)$ están conectados solamente con el cero y éste está conectado con todos los elementos.

El hecho de considerar al cero como elemento del grafo hace que la discusión de cuestiones como la conexión de $\Gamma_0(R)$ y su diámetro se vuelvan triviales (el grafo es siempre conexo y su diámetro es dos si no es un anillo trivial o dominio por tener cero, uno y al menos un divisor de cero no nulo). Por eso en la sección anterior es muy importante eliminarlo.

Sin embargo, cuestiones como el número cromático (que definimos a continuación) son de idéntico tratamiento con ambos grafos, con la salvedad de que el grafo con cero necesita un color más para el cero (dos más si el anillo es un dominio no nulo). Por ello, podremos trabajar perfectamente con el grafo definido por Beck sin preocuparnos de cómo afectarían estos resultados a nuestro grafo, pues es fácilmente deducible en cada caso.

Definamos ahora el número cromático de un grafo:

**Definición 3.2 (Número Cromático)**
*Sea $\Gamma$ un grafo simple. Llamaremos una coloración del grafo a una aplicación entre el conjunto de vértices y un conjunto de números suficientemente grande tal que dos vértices adyacentes no tienen la misma imagen.*

*Si existe una coloración tal que el cardinal del conjunto imagen sea mínimo, diremos que este cardinal es el número cromático del grafo.*

*Si no existe tal cardinal, entonces diremos que el número cromático es infinito, que en particular significa que el grafo es infinito.*

Al número cromático de un anillo $R$ lo denotaremos $\chi(R)$.

**Definición 3.3 (Clique)**
*Un subconjunto $C = \{x_1, ..., x_s\} \subset R$ es llamado un clique de $R$ si $x_i x_j = 0$ para $i \neq j$.*

Si $R$ posee un clique con $n$ elementos y todo clique tiene como mucho $n$ elementos, entonces diremos que clique$(R) = n$.

Si los tamaños de los cliques en $R$ no están acotados, diremos que clique$(R) = \infty$ y en este caso obtendremos que es posible obtener un clique infinito.

Dado un grafo arbitrario, en general se verifica que su número de clique es menor o igual a su número cromático. Es decir, en general $\chi(R) \geq$ clique$(R)$.

El objetivo principal de la Teoría de Beck consistía en probar la siguiente conjetura:

**Conjetura 3.1**
*Dado un anillo $R$ se verifica que clique$(R) = \chi(R)$.*

Por desgracia, esta conjetura resultó ser **FALSA**. Sin embargo, hay una gran cantidad de anillos que la verifican.

Un anillo que verifique la conjetura de Beck se llamará anillo cromático:

**Definición 3.4 (Anillo Cromático)**
*Un anillo $R$ tal que clique$(R) = \chi(R)$ se dirá que es **cromático**.*

El objetivo principal de esta sección será por tanto ver algunas familias de anillos que son cromáticos.

# 4. Anillos con número cromático 1 y 2

Para comenzar, caracterizaremos los anillos que poseen números cromáticos muy pequeños.

**Proposición. 4.1. (1 color)**
*$\chi(R) = 1$ si, y solo si, $R$ es el anillo cero.*

**Proposición. 4.2. (2 colores)**
*$\chi(R) = 2$ si, y solo si, $R$ es un dominio integral, $R \cong \mathbb{Z}_4$ o $R \cong \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\chi(R) = 2$ y que $R$ no es un dominio integral. Sea $xy = 0$ donde $x$ e $y$ son no nulos. Entonces $\{0, x, y\}$ es un clique y como clique$(R) \leq \chi(R) = 2$ obtenemos que $x = y$. Por lo que $x \neq 0$ y $x^2 = 0$. El ideal $Rx$ es un clique y concluimos que su cardinal es 2.
Sea $z \in \text{Ann}(x)$. Entonces $\{0, x, z\}$ es un clique y $z \in Rx = \{0, x\}$. Por tanto $\text{Ann}(x) = Rx$. De la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ann}(x) \longrightarrow R \longrightarrow Rx \longrightarrow 0$$

Obtenemos que $|R| = 4$.
Sabiendo esto, podemos deducir el resultado deseado. □

Es fácil ver que estos anillos tienen número de clique igual a dos.
Otro resultado de interés es obtener los números cromáticos y los números de clique de los anillos de clases de resto $\mathbb{Z}_n$.

**Proposición. 4.3. ($\mathbb{Z}_N$)**
*Sean $p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_r$ numeros primos distintos y $N = p_1^{2n_1}...p_k^{2n_k}q_1^{2m_1+1}...q_r^{2m_r+1}$ Entonces $\chi(\mathbb{Z}_N) =$ clique$(\mathbb{Z}_N) = p_1^{n_1}...p_k^{n_k}q_1^{m_1}...q_r^{m_r} + r$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $y_0 = p_1^{n_1}...p_k^{n_k}q_1^{m_1+1}...q_r^{m_r+1}$. Entonces $y_0^2 = 0$ en $\mathbb{Z}_N$, por lo que $\mathbb{Z}_N y_0$ es un clique que tiene $p_1^{n_1}...p_k^{n_k}q_1^{m_1}...q_r^{m_r}$ elementos.
Si ponemos $y_i = y_0/q_i$,$1 \leq i \leq r$. El conjunto $C = \mathbb{Z}_N y_0 \cup \{y_1, ..., y_r\}$ es un clique que contiene $t = p_1^{n_1}...p_k^{n_k}q_1^{m_1}...q_r^{m_r} + r$ elementos. Por tanto clique$(\mathbb{Z}_N) \geq t$.
Para mostrar que el número cromático de $\mathbb{Z}_N$ es menor igual que $t$, asignaremos un color distinto a cada elemento del clique $C$. Más aún, si $x_i = N/p_i^{n_i}, 1 \leq i \leq k$. Obtenemos que $x_1, ...x_k$ pertenecen a

$C$ y por tanto tienen un color asignado. Llamemos $f(y)$ al color de un elemento $y$. Coloreamos los elementos de $\mathbb{Z}_N$ que quedan como sigue:
Tomamos $x$ que no esté en $\mathbb{Z}_N y_0$. Si $p_1^{n_1}...p_k^{n_k}$ divide a $x$, definimos $f(x) = f(y_j)$, donde $j = \min\{i | q_i^{m_i+1} \nmid x\}$, y si no lo divide definimos $f(x) = f(x_j)$, donde $j = \min\{i : p_i^{n_i} \nmid x\}$. Se observa que esta coloración es correcta, por lo que obtenemos el resultado deseado. $\square$

# 5. Anillos de número cromático finito

Nos va a resultar de especial interés estudiar aquellos anillos cuyo número cromático sea finito. En esta sección trataremos de caracterizarlos.
Para comenzar, diremos que un **elemento** $x \in R$ **es finito** si el ideal $Rx$ es un conjunto finito.

**Lema. 5.1.**
*Supongamos que $R$ tiene un conjunto infinito de elementos finitos. Entonces $R$ contiene un clique infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_1, ..., x_n, ...$ elementos finitos diferentes de $R$. Los elementos $x_1x_2, ..., x_1x_n, ...$ pertenecen al ideal finito $Rx_1$. Por ser $x_1$ finito, obtenemos que existe una subsucesión $\{a_n\}$ de $\{2, ..., n, ...\}$ de donde obtenemos $x_1x_{a_1} = x_1x_{a_2} = ...$ Considerando ahora la subsucesión $x_{a_1}, ..., x_{a_n}, ...$ podemos repetir el proceso y construir una subsucesión de la sucesión original, $y_1, ..., y_n, ...$ tal que $y_iy_j = y_iy_k$ cuando $j, k > i$.
Tomando $z_{i,j} = y_i - y_j$ obtenemos que $z_{i,j}z_{k,r} = 0$ si $i < j < k < r$. Esto nos permite construir un clique infinito.
Tomamos $z_{1,2}z_{3,4} = z_{1,2}z_{3,5}$. Puesto que $z_{3,4} \neq z_{3,5}$ entonces al menos uno de ellos es diferente de $z_{1,2}$. Pongamos pues que $\{z_{1,2}z_{3,5}\}$ es un clique con dos elementos.
Ahora, como $z_{6,7}, z_{6,8}, z_{6,9}$ son distintos, al menos uno de ellos será distinto de los elementos del clique. Por lo que, por ejemplo, $\{z_{1,2}, z_{3,5}, z_{6,9}\}$ es un clique. Podemos continuar el proceso hasta obtener un clique infinito. □

**Lema. 5.2.**
*Sea $I$ un ideal finito en $R$. El anillo $R$ contiene un clique infinito si, y solo si, $R/I$ tiene un clique infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Si $R$ tiene un clique infinito $C$, su imagen por la proyección al cociente $R/I$ es un clique, que al ser $I$ finito, será infinito.
Para la otra implicación, sea $\{\overline{x}_i\}_1^\infty$ un clique infinito en $R/I$. Tomando preimágenes, sabemos que $x_ix_j \in I$ cuando $i \neq j$. Por ser $I$ finito, hay un conjunto finito de productos de este tipo, por lo que podemos usar técnicas similares al las usadas en el lema anterior para obtener un clique en $R$. □

**Lema. 5.3.**
*Si el anillo $R$ contiene un elemento nilpotente que no es finito, entonces $R$ contiene un clique infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x^n = 0$. La prueba es por inducción sobre $n$. Si $x^2 = 0$ y $Rx$ es infinito, entonces $R$ contiene un clique infinito pues $Rx$ es un clique. Supongamos ahora que el lema es cierto para elementos de grado de nilpotencia $n-1$. Entonces $x^n = 0, n \geq 3$, y asumamos que $Rx$ es infinito. Llamemos $y = x^2$. Entonces $y^{n-1} = 0$. Si $Ry$ es infinito, podemos concluir que $R$ tiene un clique infinito. Si $Ry$ es finito entonces $Rx/Ry$ es infinito. Obtenemos que este cociente es un clique infinito en $R/Ry$. Puesto que $Ry$ es finito, podemos usar el lema [5.2.] para obtener el resultado deseado. □

**Lema. 5.4.**
*Si el nilradical $J$ de $R$ es infinito entonces $R$ tiene un clique infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Si el nilradical $J$ es infinito y todos sus elementos son finitos, el lema [5.1.] asegura que $R$ contiene un clique infinito. Si algún elemento de $J$ no es finito, el lema [5.3.] asegura que contiene un clique infinito. □

Los resultados de estos lemas aseguran que si tenemos un anillo $R$ que no tenga un clique infinito, su nilradical $J$ será finito y $R/J$ no tendrá un clique infinito. Esto nos permite centrar un poco nuestra atención en anillos reducidos, es decir, anillos con nilradical cero ó sin elementos nilpotentes no nulos.
En estos anillos veremos que se obtiene una curiosa propiedad:

**Lema. 5.5.**
*Sea $R$ un anillo reducido que no contiene un clique infinito. Entonces $R$ tiene condición de cadena ascendente en ideales de la forma $\mathrm{Ann}(x)$ (donde $\mathrm{Ann}(x)$ denota al anulador de $x$, es decir, el conjunto de $r \in R$ tal que $rx = 0$).*

DEMOSTRACIÓN. Asumamos que $\mathrm{Ann}(a_1) \subset \mathrm{Ann}(a_2) \subset \ldots$. Sea $x_i \in \mathrm{Ann}(a_i) \setminus \mathrm{Ann}(a_{i-1})$, $i = 2, 3, \ldots$. Los elementos no nulos $y_n = x_n a_{n-1}, n = 2, 3, \ldots$ forman un clique y podemos afirmar que $y_i \neq y_j$ cuando $i \neq j$. Obtenemos que $y_i y_j = 0$. La igualdad $y_i = y_j$ nos permite obtener que $y_i^2 = y_j^2 = 0$. Esto completa el lema. □

Necesitaremos un lema adicional. En él utilizaremos el concepto de ideal residual. Dados dos ideales de $R$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, llamaremos ideal residual de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ al ideal $(\mathfrak{A} : \mathfrak{B}) = \{r \in R | r\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}\}$.

**Lema. 5.6.**
*Sean $x$ e $y$ elementos en $R$ tales que* $\mathrm{Ann}(x)$ *y* $\mathrm{Ann}(y)$ *son ideales primos diferentes. Entonces* $xy = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $xy \neq 0$. Entonces $x \notin \mathrm{Ann}(y)$, $y \notin \mathrm{Ann}(x)$. Puesto que $\mathrm{Ann}(x)$, $\mathrm{Ann}(y)$ son ideales primos, obtenemos que $\mathrm{Ann}(x) : y = \mathrm{Ann}(x)$ y que $\mathrm{Ann}(y) : x = \mathrm{Ann}(y)$. Sin embargo, $\mathrm{Ann}(x) : y = \mathrm{Ann}(y) : x = \mathrm{Ann}(xy)$. Por tanto, obtenemos que $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y)$. □

**Teorema. 5.7.**
*Sea $R$ un anillo reducido. Equivalen:*

1. $\chi(R)$ *es finito.*
2. *clique*$(R)$ *es finito.*
3. *El ideal cero de $R$ es una intersección finita de ideales primos.*
4. *$R$ no contiene un clique infinito.*

DEMOSTRACIÓN. $(1. \Rightarrow 2.)$,$(1. \Rightarrow 4.)$ y $(2. \Rightarrow 4.)$ son evidentes.

$(3. \Rightarrow 1.)$ Sea $(0) = P_1 \cap \ldots \cap P_k$ donde los $P_1, \ldots, P_k$ son ideales primos. Podemos definir una coloración en $R$ poniendo $f(0) = 0$ y $f(x) = \min\{i | x \notin P_i\}$ para $x \notin 0$ obtenemos que $\chi(R) \leq k+1$.

$(4. \Rightarrow 3.)$ Suponiendo que $R$ es reducido y no contiene un clique infinito. Entonces $R$ admite condición de cadena ascendente en ideales de la forma $\mathrm{Ann}(a)$ por [5.5.]. Sean $\mathrm{Ann}(x)_i$, $i \in \Lambda$ los elementos maximales de la familia $\{\mathrm{Ann}(a) | a \neq 0\}$. Cada ideal $\mathrm{Ann}(x)_i$ es primo. Por el lema [5.6.] el conjunto $\Lambda$ es finito. Tomando $x \in R$, $x \neq 0$. Entonces $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(x)_i$ para algún $i \in \Lambda$. Si $xx_i = 0$ entonces $x_i \in \mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(x)_i$ y obtenemos que $x_i^2 = 0$, por lo que $x_i = 0$. Podemos concluir que $xx_i \neq 0$. y por eso $x \notin \mathrm{Ann}(x)_i$. Por tanto $\bigcap_\Lambda \mathrm{Ann}(x)_i = (0)$ y hemos terminado. □

**Teorema. 5.8.**
*Sea $R$ un anillo reducido no nulo. Si $\chi(R) < \infty$ entonces $R$ tiene solo un número finito de ideales primos minimales. Si $n$ es este número, entonces $\chi(R) =$ clique$(R) = n+1$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\chi(R) < \infty$. Entonces el teorema [5.7.] implica que (0) es una intersección finita de ideales primos y por tanto $R$ solo tiene un número finito de ideales primos minimales, $P_1, ..., P_n$. Además $(0) = P_1 \cap ... \cap P_n$ y obtenemos que $\chi(R) \leq n+1$ como en la demostración de [5.7.]. Elegimos $x_i$ tal que $x_i \in P_j$ para $j \neq i$ y $x_i \notin P_i$. Entonces $0, x_1, ..., x_n$ es un clique. Por tanto $\text{clique}(R) \geq n+1$. □

Podemos entonces establecer este resultado para anillos generales.

**Teorema. 5.9.**
*Las siguientes condiciones equivalen para un anillo $R$:*

1. *$\chi(R)$ es finito.*
2. *clique$(R)$ es finito.*
3. *El nilradical de $R$ es finito y es igual a una intersección finita de ideales primos.*
4. *$R$ no contiene un clique infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Las implicaciones ($1. \Rightarrow 2.$),($1. \Rightarrow 4.$) y ($2. \Rightarrow 4.$) son triviales.
Para ver que ($3. \Rightarrow 1.$) sea $J = P_1 \cap ... \cap P_k$ donde $P_1, ..., P_k$ son ideales primos. Si $x \notin J$ sea $f(x) = \min\{i | x \notin P_i\}$. Esto es una coloración de los elementos que no están en $J$. Puesto que $J$ es finito, necesitaremos como mucho un conjunto finito adicional para colorear $R$.
Para ver que ($4. \Rightarrow 3.$) supondremos que $R$ no contiene un clique infinito. Por los lemas [5.2.] y [5.4.] esto implica que $J$ es finito y $R/J$ no contiene un clique infinito. Deducimos por tanto del teorema [5.7.] que $J$ es una intersección finita de ideales primos. □

**Teorema. 5.10.**
*Sea $R$ un anillo que contiene un ideal finito que es intersección finita de ideales primos.*
*Entonces el radical de cualquier ideal finito es finito y es igual a una intersección finita de ideales primos. Más aún, el anillo tiene solo un número finito de ideales finitos.*

DEMOSTRACIÓN. Si $R$ contiene un ideal finito que es intersección finita de ideales primos, entonces $\chi(R) < \infty$ por el argumento usado al probar ($3. \Rightarrow 1.$) en [5.9.].
Sea $K$ un ideal finito en $R$. Entonces $R/K$ no contiene un clique infinito [5.2.], por lo que $\chi(R/K) < \infty$ [5.9.]. Además, por [5.9.] obtenemos que $\text{rad}(K/K)$ (el nilradical de $R/K$) es finito y por tanto $\text{rad}(K)$ (ideal de $R$) es una intersección finita de ideales primos. Puesto que $\text{rad}(K/K)$ es finito y $K$ es finito, podemos concluir que $\text{rad}(K)$ es finito.

Sea $A = (\{x |$ x es finito $\})$. Puesto que clique$(R) < \infty$ obtenemos de [5.1.] que $A$ es un ideal finito. Puesto que $A$ contiene cada ideal finito, el número de ideales finitos es finito. $\square$

El último teorema de esta sección puede encontrarse en [2, Theorem 3.6].

**Teorema. 5.11.**
*Sea R un anillo noetheriano. Entonces R tiene número cromático finito si, y solo si, R es un subanillo de un producto directo finito de cuerpos y un anillo finito.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 = Q_1 \cap ... \cap Q_n$ una descomposición primaria normal para 0 donde $Q_i$ es $P_i$-primario. Ahora $R \subset R/Q_1 \times ... \times R/Q_n$. Si $P_i$ no es maximal, entonces $Q_i = P_i$ y $R/Q_i$ es un dominio integral y por tanto un subanillo de su cuerpo de fracciones. Supongamos que $P_i$ es maximal. (Podemos suponer que $Q_i \neq P_i$, dado que si $Q_i = P_i$ entonces $R/Q_i$ es un cuerpo). Entonces $R/Q_i$ es un anillo local de dimensión cero con cuerpo residual $R/P_i$ y por tanto $R/Q_i$ es finito. $\square$

# 6. Coloraciones

Puesto que ya tenemos caracterizados los anillos con número cromático finito, vamos a ver algunas de sus propiedades.

**Definición 6.1**
*Diremos que un anillo R es una **coloración** si tiene número cromático finito.*

**Lema. 6.1.**
*Si $I$ es un ideal finito en un anillo $R$, entonces $(I : x)/\operatorname{Ann}(x)$ es un $R$-módulo finito.*

DEMOSTRACIÓN. Si consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ann}(x) \longrightarrow (I : x) \xrightarrow{f} (I : x)x \longrightarrow 0,$$

donde $f(t) = tx$. Puesto que $(I : x)x \subset I$ obtenemos que $(I : a)/\operatorname{Ann}(x)$ es finito. □

**Teorema. 6.2.**
*Una coloración tiene condición de cadena ascendente en ideales de la forma* $\operatorname{Ann}(a)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $R$ una coloración y supongamos que $\operatorname{Ann}(x_1) \subset \operatorname{Ann}(x_2) \subset \ldots$ El nilradical $J$ es finito y podemos asumir que $x_i \notin J$ para $i = 1, 2, \ldots$. Por [5.7.] tenemos que $J = P_1 \cap \ldots \cap P_n$ intersección de ideales primos. Para un elemento $x \in R$ obtenemos

$$(J : x) = (P_1 : x) \cap \ldots \cap (P_n : x).$$

Esto muestra que la familia $\{(J : x) | x \in R\}$ es finita. Por tanto, existe una subsucesión $\{y_j\}$ de $\{x_i\}$ para la que $(J : y_1) = (J : y_2) = \ldots$.
Consideramos $\operatorname{Ann}(y_1) \subset \operatorname{Ann}(y_2) \subset \ldots \subset J : y_1$, lo que contradice el hecho de que $J : y_1/\operatorname{Ann}(y_1)$ es finito.
Por tanto, obtenemos la a.c.c. para ideales de la forma deseada. □

Para el siguiente teorema necesitamos un par de conceptos previos.
Dado un anillo $R$, diremos que un ideal primo $P$ de $R$ es un ideal **primo asociado** a $R$, $P \in Ass(R)$, si $P$ es de la forma $\operatorname{Ann}(x)$ para cierto $x \in R$.
Diremos que un ideal primo es un **primo minimal** si no contiene a ningún otro ideal primo.
Un anillo $R$ diremos que es un **anillo local** si admite un único ideal maximal.
Dado un anillo $R$ y un ideal primo $P$ denotaremos como $R_P$ a la localización de $R$ en $P$.

**Teorema. 6.3.**
*Sea $R$ una coloración. Entonces $\mathrm{Ass}(R)$ es un finito y $Z(R)=\bigcup_{P\in AssR} P$. Además, cualquier ideal primo minimal $P$ es un ideal primo asociado y $R_P$ es un cuerpo o un anillo finito.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $R$ es una coloración. Entonces clique$(R)<\infty$ y el lema [5.6.] implica que $\mathrm{Ass}(R)$, el conjunto de primos asociados de $R$, es finito.
Sea $x\in Z(R)$. Entonces $x\in \mathrm{Ann}(y)$ para algún ideal maximal $\mathrm{Ann}(y)$ [6.2.] y $\mathrm{Ann}(y)$ es un ideal primo asociado.
Si $P$ es un ideal primo minimal, tomamos $x\notin P$. Entonces $\mathrm{Ann}(x)\subset P$. Elegimos $\mathrm{Ann}(t)$ maximal en la familia $\{\mathrm{Ann}(y)|\,\mathrm{Ann}(y)\subset P\}$. Afirmamos que $\mathrm{Ann}(t)$ es un ideal primo y establecemos que $\mathrm{Ann}(t)=P$.
Asumamos que $ab\in \mathrm{Ann}(t)$, $a\notin \mathrm{Ann}(t)$, y $b\notin \mathrm{Ann}(t)$. Si $a\notin P$, consideramos $\mathrm{Ann}(ta)$. Se observa fácilmente que $\mathrm{Ann}(t)\subset \mathrm{Ann}(ta)\subset P$ y llegamos a contradicción. Si $a\in P$ consideramos $\mathrm{Ann}(ta)$. Si $\mathrm{Ann}(ta)\subset P$ seguimos teniendo contradicción. Por tanto, existe $c\in \mathrm{Ann}(ta)$ tal que $c\notin P$ y si consideramos $\mathrm{Ann}(t)c$, obtenemos la contradicción $\mathrm{Ann}(t)\subset \mathrm{Ann}(t)c\subset P$.
Sea $P$ un ideal primo minimal. Hemos demostrado que $P=\mathrm{Ann}(x)$ para algún $x$. Si $X\notin P$ obtenemos que $PR_P=(0)$ y $R_p$ es un cuerpo. Si suponemos que $x\in P$, Sea $J=P\cap P_1\cap\ldots\cap P_k$, donde $P_1,\ldots,P_k$ son los restantes ideales primos minimales. Tomamos $y\in P_1\cap\ldots\cap P_k\backslash P$. Entonces $yP\subset J$ y dado que $y\notin P$ concluimos que $PR_P=JR_P$. El ideal $J$ es finito y además $PR_P$ es finito.
Obviamente $R/P\cong Rx$. Puesto que $x\in P=\mathrm{Ann}(x)$ obtenemos que $x^2=0$. Por tanto $Rx$ es finito. Así obtenemos $Rx\otimes_R R_P\cong (R/P)\otimes_R R_P\cong R_P/PR_P$ es finito, por lo que $R_P$ es finito. □

**Teorema. 6.4.**
*Sea $P$ un ideal primo asociado en una coloración. Entonces $R_P$ es un cuerpo o $P$ es un ideal maximal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathrm{Ann}(x)=P$. Supongamos que $x\in P$. Entonces $x^2=0$ y por tanto $Rx$ es finito. Pero entonces $R/P(\cong Rx)$ es finito, por lo que $R/P$ es un cuerpo. Por tanto $P$ es un ideal maximal.
Si $x\notin P$ y $\mathrm{Ann}(x)=P$, entonces $PR_P=(0)$ y $R_P$ es un cuerpo. □

**Corolario. 6.5.**
*Un ideal primo asociado en una coloración es un ideal maximal o un ideal primo minimal.*

# 7. Derivados de una coloración

En esta sección veremos que en caso de saber que un anillo es una coloración, sabremos que muchos anillos relacionados con este son también coloraciones. Tenemos pues una forma de construir nuevos anillos coloración

**Teorema. 7.1. (Subanillo de coloración)**
*Un subanillo de una coloración es una coloración.*

DEMOSTRACIÓN. Trivial □

**Teorema. 7.2. (Cociente por ideal finito)**
*Sea $I$ un ideal finito de una coloración $R$. Entonces $R/I$ es una coloración.*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce de [5.2.] y [5.9.] □

**Lema. 7.3. (Cociente por anulador)**
*Sea $x$ un elemento en una coloración $R$. Entonces $R/\operatorname{Ann}(x)$ es una coloración.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_n$ un clique en $R/\operatorname{Ann}(x)$. Entonces $r_i r_j x = 0$ $(i \neq j)$. Además $r_1 x, \ldots, r_n x$ son elementos distintos en $R$. Concluimos que $\operatorname{clique}(R/\operatorname{Ann}(x)) \leq \operatorname{clique}(Rx)$ y por el teorema [5.9.] obtenemos que $R/\operatorname{Ann}(x)$ es una coloración. □

**Teorema. 7.4. (Generalización a ideales residuales)**
*Sea $I$ un ideal finito en una coloración $R$ y supongamos que $x \in R$. Entonces $R/(I : x)$ es una coloración.*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema [7.3.], $R/\operatorname{Ann}(x)$ es una coloración y por el lema [6.1.] concluimos que $(I : x)/\operatorname{Ann}(x)$ es un ideal finito en $R/\operatorname{Ann}(x)$. Aplicando el teorema [7.2.] obtenemos que $R/(I : x)$ es una coloración. □

**Teorema. 7.5. (Producto de coloraciones)**
*Un producto finito de coloraciones en una coloración.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente considerar el producto $R = R_1 \times R_2$ de las coloraciones $R_1$ y $R_2$. Si ponemos $\text{clique}(R_1) = n$ y $\text{clique}(R_2) = m$. Es fácil ver que $\text{clique}(R_1 \times R_2) \leq nm$ y por el teorema [5.9.] deducimos que $R$ es una coloración. $\square$

**NOTA**: Aunque sepamos que el producto finito de coloraciones es una coloración, no tenemos manera de saber cuál es su número cromático conociendo los números cromáticos de los factores.

**Teorema. 7.6.**
*Sea $I$ un ideal finitamente generado en una coloración. Entonces $R/\operatorname{Ann}(I)$ es un coloración.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $I = (x_1, ..., x_n)$. Entonces $\operatorname{Ann}(I) = \operatorname{Ann}(x_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(x_n)$. Tenemos una aplicación inyectiva $R/\operatorname{Ann}(I) \longrightarrow R/\operatorname{Ann}(x_1) \times \cdots \times R/\operatorname{Ann}(x_n)$. Cada uno de los $R/\operatorname{Ann}(x_i)$ en una coloración y por [7.1.] y [7.5.] la prueba está completa. $\square$

**Corolario. 7.7.**
*Sea $R$ un anillo Noetheriano cuyo nilradical es finito. Entonces $rad(\operatorname{Ann}(I))/\operatorname{Ann}(I)$ es finito para cualquier ideal $I$.*

**Teorema. 7.8.**
*Sea $S$ un conjunto multiplicativo cerrado en una coloración $R$ Entonces $R_S$ es una coloración. Además, $\chi(R_S) \leq \chi(R)$ y $clique(R_S) \leq clique(R)$.*

# 8. Elementos separables

En esta sección obtendremos algunas propiedades que nos permitirán probar la conjetura de Beck para anillos con número cromático pequeño.

Una de las ideas más importantes a la hora de hablar de coloraciones de un anillo $R$ reside en que, si tenemos un ideal primo $P$, el numero de colores necesarios para colorear $R$ será como mucho uno más que el numero necesario para colorear $P$. Esto se debe a que, al ser $P$ primo, si $xy = 0$ entonces $x \in P$ o $y \in P$.

Este hecho nos va a llevar a estudiar cierto tipo de elementos especiales del anillo, a los que llamaremos separables.

**Definición 8.1**
*Un elemento $x$ en $R$ se dice separable si $x \neq 0$ y $ab = 0$ implica $xa = 0$ o $xb = 0$.*

**Definición 8.2**
*Sea $I$ un ideal. Un elemento $x \in I$ se dice $I$-separable si $xI \neq (0)$ y si $ab = 0$ para $a, b \in I$ entonces $xa = 0$ o $xb = 0$.*

Notas:

- Si $x$ se separable, entonces es $R$-separable.
- No es necesario que $a \neq b$ en las definiciones anteriores.
- Un elemento $R$-separable que esté en $I$ no es $I$-separable si $xI = (0)$, aunque el recíproco es cierto.

Es decir, los elementos separables son aquellos que están conectados con todas las aristas, en el sentido de que si un elemento no está conectado con ellos, estará conectado con alguien conectado a él.

Veamos algunas propiedades de estos elementos:

**Proposición. 8.1.**
*Si $\operatorname{Ann}(x)$ es un ideal primo entonces $x$ es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Trivial □

**Proposición. 8.2.**
*Un ideal no nulo $I$ en una coloración contiene un elemento separable.*

DEMOSTRACIÓN. Como $R$ tiene condición de cadena ascendente para anuladores (por [6.2.]), es fácil ver que $I$ contiene un elemento $x$ tal que $\mathrm{Ann}(x)$ es un ideal primo. Por la proposición [8.1.] se deduce el resultado □

**Teorema. 8.3.**
*Sea $I$ un ideal en una coloración no contenido en el nilradical. Entonces $I$ contiene un elemento $I$-separable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in I$ tal que $\mathrm{Ann}(x)$ es un ideal primo $P$ con $I \nsubseteq P$. Entonces $x$ es $R$-separable y $xI \neq (0)$ puesto que $\mathrm{Ann}(x) = P \nsupseteq I$. □

**Teorema. 8.4.**
*Sea $I$ un ideal principal en una coloración. Si $I^2 \neq (0)$ entonces $I$ contiene un elemento $I$-separable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $I = Rx$ y supongamos que $x^2 \neq 0$. Dado que $R$ tiene a.c.c. en anuladores, es fácil ver que $(0 : x^2t)$ es un ideal primo para algún $t \in R$. Afirmamos que $xt$ es $I$-separable.
Sean $a, b \in I$ y asumamos que $ab = 0$. Escribimos $a = rx$ y $b = sx$. Entonces $rsx^2 = 0$. Por tanto, $rs$ está contenido en el ideal primo $(0 : x^2t)$. Si $r \in 0 : x^2t$ obtenemos que $(rx)(xt) = 0$. Más aún, $(tx)x - tx^2 \neq 0$ prueba que $(tx)I \neq 0$. □

Estos teoremas sobre elementos separables nos van a permitir demostrar el siguiente lema:

**Lema. 8.5.**
*Sea $I$ un ideal en una coloración y asumamos que $x \in I$ es $I$-separable. Llamemos $I' = \mathrm{Ann}(x) \cap I$.*

1. *Si $x^2 = 0$ entonces clique$(I')$ = clique$(I)$ y $\chi(I') = \chi(I)$.*

2. *Si $x^2 \neq 0$ entonces clique$(I')$ = clique$(I) - 1$ y $\chi(I') = \chi(I) - 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $x^2 = 0$. Entonces $x \in I'$. Sea clique$(I) = n$ y elijamos un clique maximal $C = \{y_1, ..., y_n\}$ en $I$. Si $x \in C$, llamamos $x = y_1$, entonces $y_2, ..., y_n \in I'$ y como $x \in I'$ tenemos que $C \subset I'$, por lo que clique$(I') = n$. Si $x \notin C$, $xC \neq (0)$ por ser $C$ maximal en $I$. Suponiendo que $xy_1 \neq 0$. entonces $xy_i = 0$ para $2 \leq i \leq m$ dado que $x$ es $I$-separable. Por tanto $\{x, y_2, ..., y_n\}$ es un clique contenido en $I'$, por lo que clique$(I') = n$. Ahora, si coloreamos $I'$ y tomamos $y \in I - I'$,

podemos asignar a $y$ el mismo color que a $x$, por lo que $\chi(I') = \chi(I)$ (recordemos que $x$ es $I$-separable).
Ahora supongamos que $x^2 \neq 0$, por lo que $x \notin I'$. Claramente clique$(I') \leq$ clique$(I) - 1$ dado que todo clique en $I'$ se le puede añadir $x$ para obtener un clique en $I$. Por otro lado, si $C = \{y_1, ..., y_n\}$ es un clique maximal en $I$, entonces, si $x \in C$, $x = y_1$ por ejemplo, entonces $\{y_2, ..., y_n\}$ es un clique en $I'$, por lo que clique$(I') =$ clique$(I) - 1$. Fácilmente se deduce que $\chi(I') = \chi(I) - 1$. □

**Teorema. 8.6.**
*Sea $I$ un ideal en una coloración y $\{x_1, ..., x_n\}$ un clique de elementos $I$-separables. Llamemos $k$ al cardinal del conjunto $\{i | x_i^2 \neq 0\}$ y $I' = I \cap \mathrm{Ann}(x_1, ..., x_n)$. Entonces clique$(I') =$ clique$(I) - k$ y $\chi(I') = \chi(I) - k$.*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce de manera análoga al lema anterior [8.5.] □

**Teorema. 8.7.**
*Sean $P_1, ..., P_n$ los primos minimales en una coloración $R$. Sea $\epsilon(R) = |\{i | R_{P_i}$ es un cuerpo$\}|$.*
*Entonces clique$(R) =$ clique$(J) + \epsilon(R)$ y $\chi(R) = \chi(J) + \epsilon(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 : x_i = P_i$ [6.3.]. Entonces $\{x_1, ..., x_n\}$ es un clique de elementos $R$-separables. Por el teorema [8.6.] y observando que $R_{P_i}$ es un cuerpo si, y solo si, $x_i^2 \neq 0$ deducimos el resultado. □

**NOTA:**
La consecuencia más interesante de este teorema reside en que clique$(R) = \chi(R)$ si, y solo si, clique$(J) = \chi(J)$. Esto nos permite obtener muchos resultados para anillos reducidos.

**Teorema. 8.8.**
*Sea $R$ una coloración reducida. Entonces clique$(I) = \chi(I)$ para cualquier ideal $I \subset R$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema [8.3.] $I$ contiene un elemento $I$-separable $x$. Dado que $x^2 \neq 0$, la prueba se completa usando inducción sobre el clique$(I)$ [8.5.]. □

**Teorema. 8.9.**
*Sea $R$ una coloración que es un anillo de ideales principales. Entonces $\chi(I) = clique(I)$ para cualquier ideal $I$ en $R$.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos reducirnos al caso $I \subset J$. Sea $P_1, ..., P_n$ los ideales primos minimales de $R$. Si $I \nsubseteq P_1$ entonces existe un elemento $y_1 \in I$ tal que $\mathrm{Ann}(y_1) = P_1$. Por lo que $y_1$ es $I$- separable. Definimos $I_1 = I \cap \mathrm{Ann}(y_1) = I \cap P_1$ y observamos que por el lema [8.5.] $\chi(I) = \mathrm{clique}(I)$ si, y solo si, $\chi(I') = \mathrm{clique}(I')$. Debería ser evidente que podemos hacer la reducción al casi $I \subset J$.
Suponiendo que $I = Rx \subset J$. Si $I^2 = (0)$ entonces el clique $I = \chi(I) = |I|$. Si $I^2 \neq (0)$, el ideal $I$ contiene un elemento $I$-separable $y_1$, por el teorema [8.4.]. Sea $I_1 = I \cap \mathrm{Ann}(y_1) < I$. Obtenemos del lema [8.5.] que $\chi(I) = \mathrm{clique}(I)$ si, y solo si, $\chi(I_1) = \mathrm{clique}(I_1)$. Esto completa la prueba dado que el suceso terminará por llegar a un ideal $I_n$ para el cual $I_n^2 = (0)$, en cuyo caso $\chi(I_n) = \mathrm{clique}(I_n)$. □

**Teorema. 8.10.**
*Sea $R$ una coloración con la propiedad de que cualquier ideal $I$ de cuadrado no nulo contiene un elemento $I$-separable. Entonces $\chi(I) = clique(I)$ para cualquier ideal $I$ en $R$.*

DEMOSTRACIÓN. Observando la demostración de [8.9.], vemos que el último párrafo resuelve también este teorema. □

**Teorema. 8.11.**
*Sea $R$ una coloración que es un producto finito de anillos reducidos y anillos de ideales principales. Entonces $\chi(I) = clique(I)$ para cualquier ideal $I \subset R$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $I$ es un ideal de $R$ que verifica $I = I_1 \oplus I_2$, si $I_1$ contiene un elemento $I_1$-separable $x_1$, entonces $x_1$ es también $I$-separable. Dado que los anillos reducidos y de ideales principales verifican ambos las hipótesis de lema anterior [8.10.], $R$ verificará también esas hipótesis, obteniéndose el resultado esperado. □

**Teorema. 8.12.**
*Sea $R$ un anillo local y coloración cuyo ideal maximal es un ideal principal. Entonces $R$ es reducido o un anillo de ideales principales.*

DEMOSTRACIÓN. Si $R$ es finito, entonces $R$ es un anillo local artiniano cuyo ideal maximal es principal. Por tanto, $R$ es un anillo de ideales principales.

Si $R$ no es finito y no es reducido, entonces, llamemos $I$ al ideal generado por el conjunto de elementos finitos. Este ideal es finito y es el único ideal maximal finito.

Si tomamos $x \in I$ tal que $\mathrm{Ann}(x) = P$, donde $P$ es un ideal primo. Dado que $R/P \cong Rx$, observamos que $R/P$ es un dominio integral finito. Por tanto $P$ es igual al ideal maximal $M = Rt$.

Sea $B = (I : t) \supset I$. Dado que $I \subset Rt$ obtenemos que $I = Bt$.

El elemento $x \in I$ anula $t$, puesto que la aplicación $I \xrightarrow{t} I$ no es inyectiva.

Dado que $I$ es finito, concluimos que $tI \subset I$, mostrando que $B \supset I$.

El ideal $(0 : t) = \mathrm{Ann}(M)$ es finito. Por el lema [6.1.] concluimos que $B \supset I$ es finito, por lo que contradecimos la maximalidad de $I$. $\square$

**Lema. 8.13.**
*Sea R una coloración indescomponible. Asumamos que cada ideal maximal que es igual a* $\mathrm{Ann}(x)$ *para cierto* $x \in J$ *es principal. Entonces R es reducido o un anillo finito local de ideales principales.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $R$ no es reducido ni finito. Es fácil ver que un ideal finito no contenido en el nilradical contiene un idempotente $e \neq 0$. Asumiendo que $R$ es indescomponible, concluimos que $J$ es el único ideal maximal finito.

Sea $M = \mathrm{Ann}(x)$ un ideal maximal, $x \in J$. Asumamos que $M = Rt$. Podemos afirmar que $(0 : t) = \mathrm{Ann}(M) \subset J$ y esto prueba que $(0 : t)$ es finito.

Dado que $M$ es un ideal maximal, $\mathrm{Ann}(M)$ está contenido en cada ideal primo excepto quizás $M$. Si $\mathrm{Ann}(M) \nsubseteq M$ entonces $\mathrm{Ann}(M) + M = R$ y $\mathrm{Ann}(M)M = (0)$. Por tanto $R \cong M \oplus \mathrm{Ann}(M)$ contradiciendo que $R$ es indescomponible.

Por tanto $(0 : t)$ es finito y el lema [6.1.] nos permite obtener que $(J : t)$ es finito. Pero $(J : t) \supset J$ puesto que $(J : t)t = J$ y $tJ \subset J$. Por tanto hemos probado que $R$ es finito o reducido.

Si $R$ es finito e indescomponible, entonces $R$ es local. $\square$

**Teorema. 8.14.**
*Para una coloración R equivalen:*

1. *Todo ideal maximal que es igual a* $\mathrm{Ann}(x)$ *para algún* $x \in J$ *es principal.*
2. *R es isomorfo a un producto de anillos reducidos con anillos de ideales principales finitos.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que el número de clique de $R$ es finito, $R$ es un producto finito de anillos indescomponibles. En cada uno de estos anillos indescomponibles podemos aplicar lema [8.13.] y así obtener (1. $\Rightarrow$ 2.).

La otra implicación es trivial. $\square$

En esta sección hemos observado la importancia del nilradical $J$ de un anillo a la hora de saber si es cromático o no. En particular hemos visto que una coloración $R$ es un anillo cromático si, y solo si, clique$(J) = \chi(J)$.

Ahora veremos que toda coloración con $J^2 = (0)$ es un anillo cromático:

**Teorema. 8.15.**
*Sea $R$ una coloración con nilradical $J$. Sea $\epsilon(R)$ el número de ideales primos minimales $P \subset R$ con $R_P$ un cuerpo.*

1. *Si $J^2 = 0$ entonces $R$ es un anillo cromático y $\chi(R) =$ clique$(R) = |J| + \epsilon(R)$.*
2. *Si $J^2 \neq 0$ entonces $\chi(R) \geq$ clique$(R) \geq |J \cap (0:J)| + \epsilon(R) + 1$.*
   *Si clique$(R) = |J \cap (0:J)| + \epsilon(R) + 1$, entonces $\chi(R) =$ clique$(R)$, es decir, $R$ es cromático.*

DEMOSTRACIÓN. (1.) Por [8.6.] sabemos sabemos que clique$(R) =$ clique$(J) + \epsilon(R)$ y que $\chi(R) = \chi(J) + \epsilon(R)$. Si $J^2 = 0$, entonces clique$(J) = |J| = \chi(J)$, de donde se deduce el resultado.

(2.) Si $J^2 \neq (0)$, entonces $J \supsetneq J \cap (0:J)$. Para $j \in J - J \cap (0:J)$, $J \cap (0:J) \cup \{j\}$ es un clique. Por esto, clique$(J) \geq |J \cap (0:J)| + 1$. Supongamos que clique$(J) = |J \cap (0:J)| + 1$. Entonces para $x, y \in J \backslash (0:J)$ con $x \neq y$, $xy \neq 0$. Por tanto, los elementos de $J \backslash (0:J)$ pueden ser coloreados con el mismo color, por lo que $\chi(J) = |J \cap (0:J)| + 1$ $\square$

Gracias a este teorema, ya hemos encontrado tres grandes familias de coloraciones que son anillos cromáticos:

1. Las coloraciones reducidas. [8.8.]
2. Los anillos de ideales principales. [8.9.]
3. Las coloraciones con $J^2 = 0$ . [8.15.]

Vamos a intentar condensar esta información en un único teorema que nos permitirá generalizarla.

Para ello vamos a necesitar algunos lemas y teoremas adicionales:

El siguiente teorema generaliza el caso de anillos $\mathbb{Z}_n$.

**Teorema. 8.16.**
*Sean $R_1,...,R_k,R_{k+1},...,R_{k+r}$ coloraciones. Llamemos $R = R_1 \times ... \times R_k \times R_{k+1} \times ... \times R_{k+r}$. Sea $J_i$ el nilradical de $R_i$ (que será finito pues $R_i$ es coloración). Supongamos que el índice de nilpotencia de $J_i$ (el menor $n \in \mathbb{N}$ al que hay que elevar $J_i$ para que $J_i^n = 0$) es $2n_i$ para $i = 1,...,k$, y $2m_i - 1$ para $i = k+1,...,k+r$, con $n_i, m_i \geq 1$. Entonces*

$$|J_1^{n_1}|...|J_k^{n_k}||J_{k+1}^{m_{k+1}}|...|J_{k+r}^{m_{k+r}}| + r \leq clique(R) \leq \chi(R).$$

*Además, si para cada $i$, la siguiente condición $(\triangle)$ se mantiene:*
*$(\triangle)$:*

- *Para $1 \leq i \leq k$, si $x,y \in R_i$ con $xy = 0$ entonces $x \in J_i^{n_i}$ o $y \in J_i^{n_i}$ y si $x \notin J_i^{n_1+1}$, entonces $y \in J_i^{n_i}$.*
- *Para $k+1 \leq i \leq k+r$, si $x,y \in R_i$ con $xy = 0$ entonces $x \in J_i^{m_i}$ o $y \in J_i^{m_i}$*

*Entonces $\chi(R) = clique(R) = |J_1^{n_1}|...|J_k^{n_k}||J_{k+1}^{m_{k+1}}|...|J_{k+r}^{m_{k+r}}| + r$.*

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $S = J_1^{n_1} \times ... \times J_k^{n_k} \times J_{k+1}^{m_{k+1}} \times ... \times J_{k+r}^{m_{k+r}}$. Para cada $i$ con $k+1 \leq i \leq k+r$ podemos elegir $\overline{y}_i \in J_i^{m_i-1}$ y llamar $y_i = (0,...,0,\overline{y}_i,0,...,0)$ donde cada coordenada es 0 salvo la $i$-ésima. Claramente, si $i \neq j$ entonces $y_i y_j = 0$ y por ser el índice de nilpotencia de $J_i$ el que es, $y_i S = 0$ y $S^2 = 0$. Por tanto, $C = S \cup \{y_{k+1},...,y_{k+r}\}$ es un clique con $|S| + r$ elementos. Esto nos proporciona el primer resultado.

Si se da $(\triangle)$, entonces, podemos colorear $C$. Sea $f$ la aplicación que da la coloración. Vamos a extenderla a $R$. Para $i = 1,...,k$, dado $\overline{x}_i \in J_i^{n_i} \backslash J_i^{n_i+1}$ definimos $x_i = (0,...,0,\overline{x}_i,0,...,0) \in C$. Sea $z = (z_1,...,z_{k+r}) \in R \backslash C$.

Si $z_i \in J_i^{n_i}$ para $i = 1,...,k$, entonces, como $z \notin S$, existe una coordenada $l$ con $k+1 \leq l \leq k+r$ con $z_l \notin J_l^{m_l}$. Definimos $f(z) = f(y_j)$ donde $j$ es el más pequeño de los $l$ obtenidos.

Si para algún $i = 1,...,k$ se verifica que $z_i \notin J_i^{n_i}$, entonces, definimos $f(z) = f(x_j)$ donde $j$ es el más pequeño de los $i$ anteriores.

Esto es una coloración: Tomemos dos elementos distintos de $R$, $a = (a_1,...,a_{k+r}), b = (b_1,...,b_{k+r})$ con mismo color, por lo que al menos uno no está en $C$. Necesitamos que $ab \neq 0$, por lo que $a_i b_i \neq 0$ para algún $i$.

Suponiendo que $f(a) = f(b) = f(y_j)$, entonces $a_j \notin J_j^{m_j}$ y $b_j \notin J_j^{m_j}$, por lo que $(\triangle)$ implica que $a_j b_j \neq 0$.

Suponiendo que $f(a) = f(b) = f(x_j)$, entonces si $a \neq x_j$ y $b \neq x_j$ tenemos que $a_j \notin J_i^{n_i}$ y que $b_j \notin J_j^{n_j}$, por lo que $a_j b_j \neq 0$. Y si $a = x_j$ entonces $a_j = \overline{x}_j \in J_j^{n_j} - J_j^{n_j+1}$ y $b \notin J_j^{n_j}$ pues $b \neq x_j$. Por $(\triangle)$ obtenemos $a_j b_j \neq 0$.

Por tanto, $f$ es una coloración y hemos terminado. $\square$

**Lema. 8.17.**
*Sea $R$ un anillo y $A$ un superanillo de $R$. Entonces clique$(R)$ = clique$(A)$ y $\chi(R) = \chi(R)$. En particular, $R$ es una coloración si, y solo si, $T(R)$, su anillo total de fracciones, es una coloración y de ser el caso clique$(R)$ = clique$(T(R))$ y $\chi(R) = \chi(T(R))$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que $R \subset A \subset T(R)$, sabemos que clique$(R) \leq$ clique$(A) \leq$ clique$(T(R))$ y $\chi(R) \leq \chi(A) \leq \chi(T(R))$. Pero dado que $T(R)$ es una localización de $R$ en los elementos regulares, obtenemos que clique$(T(R)) \leq$ clique$(R)$ y $\chi(T(R)) \leq \chi(R)$. □

Con esto podemos enunciar el resultado principal de la sección.

**Corolario. 8.18.**
*Sea $R$ una coloración que es un producto directo finito de anillos, anillos de ideales principales y anillos finitos con índice de nilpotencia 2. Entonces $\chi(R)$ = clique$(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema [8.17.] podemos asumir que $R$ es un anillo total de fracciones. Primero, notemos que una coloración reducida que es un anillo total de fracciones es un producto directo de cuerpos. En segundo lugar, un anillo de ideales principales es un producto directo de dominios de ideales principales y anillos de ideales principales especiales (que son anillos Artinianos locales de ideales principales). En tercer lugar, un anillo finito con índice de nilpotencia 2 es un producto directo de cuerpos y anillos locales con índice de nilpotencia 2. Pero cada tipo de estos anillos satisface $(\triangle)$ del teorema [8.16.]. Por tanto, por el teorema [8.16.] su producto satisface $\chi(R)$ = clique$(R)$. □

## 9. Coloraciones con número cromático bajo

En esta sección veremos que toda coloración con número cromático bajo (menor o igual que cinco) es un anillo cromático.

**Proposición. 9.1.**
*Dada una coloración* $R$*, entonces si* $clique(R) \leq 2$ *o* $\chi(R) \leq 2$ *se verifica que* $\chi(R) = clique(R)$*.*

**Proposición. 9.2.**
*Sea* $R$ *una coloración. Entonces* $clique(R) = 3$ *si, y solo si,* $\chi(R) = 3$*.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\chi(R) \geq \text{clique}(R)$ es suficiente probar que $\chi(R) > 3$ implica que $\text{clique}(R) > 3$.

Sea $R^* = R - \{0\}$ y asumamos que $\chi(R) > 3$. Entonces $\chi(R^*) \geq 3$. Dado que el grafo $R^*$ no es 2-coloreable, contiene un ciclo impar $x_1, \ldots, x_n$. Sea $n$ la longitud minima de un ciclo de longitud impar en $R^*$ y asumamos $n \geq 5$.

Obtenemos que $x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 0$. Supongamos que $x_1x_k = 0$ para algún $k \neq 1, 2, n$. Entonces $x_1, \ldots, x_k$ y $x_k, \ldots, x_n, x_1$ son ciclos de longitud $< n$ y uno de ellos tiene longitud impar. Obtenemos que $x_ix_j = 0$ solo si $x_i$ y $x_j$ son vecinos en el ciclo.

Pongamos que $y = x_1x_3$. Entonces $yx_2 = yx_4 = yx_n = 0$. Dado que $y$ es adyacente a tres de los elementos del ciclo $x_1, \ldots, x_n$ concluimos que $y$ no pertenece a el. Podemos por tanto construir un ciclo impar $y, x_4, \ldots, x_n$ de longitud $n-2$. Esto prueba que $R^*$ contiene un ciclo impar de longitud 3 y por tanto clique $R \geq 4$. $\square$

Con el siguiente teorema obtenemos el resultado principal de esta sección, y es, por desgracia, el resultado más fino que se puede obtener.

**Teorema. 9.3.**
*Sea* $R$ *una coloración y* $k$ *un entero* $\leq 4$*. Entonces* $\chi(R) = k$ *si, y solo si,* $clique(R) = k$*. Además,* $\chi(R) = 5$ *implica* $clique(R) = 5$*.*

La demostración puede encontrarse en [12, Theorem 7.3].

# 10. El contraejemplo de la conjetura de Beck

Existe un contraejemplo de la conjetura de Beck que afirmaba que para todo anillo clique$(R) = \chi(R)$.

**Ejemplo 10.1**
*Sea* $R = \mathbb{Z}_4[X,Y,Z]/(X^2-2, Y^2-2, Z^2, 2X, 2Y, 2Z, XY, XZ, YZ-2)$.
*Se verifica que clique*$(R) = 5$ *pero* $\chi(R) = 6$.

El contraejemplo detallado puede verse en [2, Section 2].

# Capítulo III

# De grafos a anillos

Hasta ahora hemos visto que los grafos de divisores de cero asociados a anillos artinianos tienen propiedades peculiares, como por ejemplo, que $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) \in \{0,1,2,3\}$ o que $\operatorname{girth}(\Gamma(R)) \in \{3,4,\infty\}$. Por ello no es de extrañar que dado un grafo finito arbitrario, no exista en general un anillo cuyo grafo de divisores de cero sea el grafo dado.

Sin embargo, para estos anillos existe un teorema que dice que todo anillo artiniano es producto finito de anillos locales artinianos, y esto permite tratar este caso de forma especial.

En este capítulo veremos que si tenemos un grafo que sabemos que es el grafo de divisores de cero de un anillo finito, entonces podemos descomponerlo de manera que obtengamos los grafos de divisores de cero de los factores de la descomposición de en locales. Esto permite reconstruir un anillo desde su grafo de divisores de cero conociendo los anillos locales cuyo grafo de divisores de cero es igual a uno dado.

También veremos algunas condiciones que podremos exigirle a un anillo para estar caracterizado por su grafo de divisores de cero.

## 11. Recuperación de anillo desde un grafo de divisores de cero

En esta sección veremos el teorema fundamental del capítulo. Para ello necesitamos definir antes un concepto de grafos:

**Definición 11.1**
*Sea $G$ un grafo conexo. Un subconjunto $A$ del conjunto de vértices de $G$ se dice que es un conjunto de corte si existen un par de vértices $x$ e $y$ de $G$ tales que todo camino entra $x$ e $y$ para por $A$ y $A$ es minimal verificando esta condición. Si $A$ contiene único vértice $z$, entonces se dice que $z$ es un vértice de corte.*

Ya podemos enunciar el teorema.

**Teorema. 11.1. (Recuperación del anillo)**
*Sea $G$ un grafo con cuatro vértices o más que es el grafo de divisores de cero de algún anillo conmutativo finito con 1. Entonces $G$ está asociado con el anillo $R \cong R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_m$, donde cada $R_i$ es un anillo local, y se verifica que $\Gamma(R) \cong G$. Esta asociación es única salvo elementos de la misma clase de divisores de cero. Es decir, si $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_t$ con cada $S_i$ local y $\Gamma(S) \cong G$, entonces $m = t$ y (tras posibles reordenaciones) $R_i \cong S_i$ o $R_i$ y $S_i$ son ambos anillos locales con el mismo grafo de divisores de cero (están en la misma clase de divisores de cero).*

DEMOSTRACIÓN. La demostración completa puede verse en [15, Theorem 2.1]. □

Los puntos clave de la demostración son utilizar el teorema de descomposición local de anillos artinianos [9, Theorem 8.7], que asegura que si $R$ es un anillo artiniano, entonces $R \cong R_1 \times \ldots \times R_m$ con $R_i$ anillos locales artinianos y encontrar conjuntos de corte disjuntos que nos permitan obtener subgrafos asociados a la descomposición.
Además, si $\Gamma$ es el grafo de divisores de cero de un anillo artiniano finito con al menos cuatro vértices, entonces la demostración proporciona un algoritmo que nos permite obtener un anillo artiniano finito $R$ que verifique $\Gamma = \Gamma(R)$:

(1) Si $\Gamma$ tiene un vértice adyacente a todos los demás y tiene al menos un ciclo, entonces $R$ es un anillo local. Si $\Gamma$ es un grafo estrellado, entonces $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$, donde $F$ es un cuerpo con $|\nu(\Gamma)|$ elementos. En cualquier otro caso, pasamos al siguiente paso.

(2) Identificamos los conjuntos de corte de $\Gamma$. Si $m$ es el máximo número de conjuntos de corte disjuntos que podemos obtener, conjuntos que denotaremos como $A_i$, entonces, por [2.2.], $R \cong R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_m$, donde cada $R_i$ es un anillo local artiniano o un cuerpo.

    Estos $A_i$ se corresponderán con cierto ideal anulador minimal de cada $R_i$ cuando $R_i$ sea un anillo local.

(3) Elegimos un conjunto de corte $A_j$ cuyo factor $R_j$ queremos detectar. Para ello, tomamos otro conjunto de corte distinto $A_i$ y eliminamos vértices del grafo en tres pasos:

    (a) Eliminamos $A_i$.
    (b) Eliminamos los vértices que nos son adyacentes a ningún vértice de los $A_i$.
    (c) Eliminamos los vértices que no son adyacentes a ningún vértice eliminado en el paso anterior.
    (d) Definimos el subgrafo $H$ inducido de este proceso.

    Con este proceso hemos eliminado todos los vértices del grafo que no toman el valor cero en la componente $R_i$ y por tanto nos ha quedado un grafo $H$ que contiene al grafo de $R_1 \times \ldots \times R_{i-1} \times R_{i+1} \times \ldots \times R_m$ y no es isomorfo, por el hecho de que tiene elementos que no son divisores de cero suyos que hay que detectar.

(4) Si $R_1 \times \ldots \times R_{i-1} \times R_{i+1} \times \ldots \times R_m$ tiene más de un factor, el grafo $H$ tendrá alguna arista, y eliminando sus vértices aislados obtenemos el grafo de $R_1 \times \ldots \times R_{i-1} \times R_{i+1} \times \ldots \times R_m$. Podemos ahora repetir el paso (3) con otros conjuntos de corte hasta eliminar todos los factores salvo $R_i$, obteniendo cierto grafo $H$ que no será generalmente el grafo de divisores de cero de $R_i$.

(5) Si el grafo $H$ tiene alguna arista, entonces podemos eliminar los vértices aislados y obtenemos el grafo de $R_i$.

(6) Si el grafo $H$ no tiene aristas y $|v(H)| \neq 1$ ó 3, entonces el factor $R_i$ es $\mathbb{F}_n$, un cuerpo con $n = |v(H)| + 1$ elementos.

(7) Si el grafo $H$ no tiene aristas y tiene tres vértices, entonces tenemos que tomar el grafo obtenido antes de la última iteración del paso (3), es decir, el grafo de $R_i \times R_k$ para cierto $k$. Este grafo tendrá dos conjuntos de corte, $A_i, A_k$. Si $A_k$ tiene 3 vértices, $R_i$ es $\mathbb{F}_4$. Si $A_k$ tiene un vértice, $R_i$ es $\mathbb{Z}_4$ o $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$.

(8) Si el grafo $H$ tiene solo un vértice, consideramos de nuevo $A_k$.

- Si $|A_k| \geq 2$ y no tiene aristas entre los vértices, entonces $R_i$ es $\mathbb{Z}_4$ o $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$.
- Si $|A_k| \geq 2$ y hay al menos una arista entre los vértices, entonces el factor es $\mathbb{Z}_2$.
- Si $|A_k| = 1$ y el $\Gamma(R_i \times R_k)$ no es isomorfo a $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$, el factor $R_i$ es $Z_2$.
- Si $|A_k| = 1$ y el grafo de $\Gamma(R_i \times R_k)$ es isomorfo a $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$, entonces sea $A_k = \{a\}$. Si $a$ tiene grado 2 antes del paso (3), entonces $R_i$ es $\mathbb{Z}_2$. Si el grado es 3, entonces el factor $R_i$ es $\mathbb{Z}_4$ o $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$.

(9) Una vez hecho esto, el factor $R_i$ ha quedado determinado, y podemos repetir el algoritmo con otro $i$ hasta obtener todos los factores.

Este teorema en particular nos permite obtener un par de corolarios muy interesantes:

**Corolario. 11.2.**
*Para anillos conmutativos finitos, el grafo de divisores de cero de un anillo local con cuatro o más vértices no es isomorfo al grafo de divisores de cero de un anillo no local.*

**Corolario. 11.3.**
*Para anillos conmutativos finitos, el grafo de divisores de cero de un anillo reducido con cuatro o más vértices no es isomorfo al grafo de divisores de cero de un anillo no reducido.*

Estos resultados no se pueden utilizar cuando hay 3 o menos vértices por el siguiente motivo:

**Proposición. 11.4.**
*Para anillos conmutativos finitos, los siguientes son los únicos casos salvo isomorfismo en los que el grafo de divisores de cero de un anillo reducido es isomorfo al grafo de divisores de cero de un anillo local:*

*(1)* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ *y* $\mathbb{Z}_8$ *ó* $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3)$ *ó* $\mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2 - 2)$.

*(2)* $\mathbb{Z}_2 \times Z_2$ *y* $\mathbb{Z}_9$ *ó* $\mathbb{Z}_3[X]/(X^2)$.

(Para más detalles sobre estas cuestiones véase [15]

# 12. Cuando $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ implica que $R \cong S$

En general, conocidos los grafos de divisores de cero de dos anillos $R$ y $S$ tales que $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ no podemos asegurar que $R \cong S$. Sería interesante saber qué condiciones hay que exigirle a $R$ y $S$ para $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ implique $R \cong S$.

El resultado principal referente a esta cuestión es el siguiente, que nos dice que para anillos finitos (reducidos) la teoría es buena.

**Teorema. 12.1.**
*Sean $R$ y $S$ anillos reducidos finitos que no sean cuerpos. Entonces $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ si, y solo si, $R \cong S$.*

Ver la referencia [7].

Este resultado se puede refinar un poco más cuando uno de los anillos es finito (reducido), entonces tenemos información muy útil.

**Teorema. 12.2.**
*Sea $R$ un anillo reducido finito y $S$ un anillo tal que $S$ no es un dominio integral. Si $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ entonces $R \cong S$, salvo que $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6$ y $S$ sea un anillo local.*

Ver la referencia [1].

# Capítulo IV

# Extensión de la teoría: Otros grafos asociados a anillos

En esta memoria hemos estudiado, en detalle, un grafo asociado a un anillo. De una lectura atenta de la misma se deduce que los tipos de grafos en consideración son muy especiales; sin embargo en la teoría expuesta se puede apreciar la cantidad de información que contiene el grafo de divisores de cero. Por esta razón numerosos investigadores e han lanzado a la tarea de asociar nuevos grafos a anillos, conmutativos y no conmutativos, con la esperanza de poder obtener resultados de interés sobre la teoría de estructura y sobre la clasificación de estos anillos. Este es el tema de estudio propuesto a continuación del que vamos a hacer solo un breve repaso mostrando algunos de estos grafos y algunas de sus propiedades, aunque un trabajo similar al realizado hasta el presente se puede realizar para cada uno de ellos, lo que da una idea aproximada de las aplicaciones que tiene la teoría. Nos gustaría destacar la bondad de la misma aún cuando solo permite construir invariantes asociados a anillos y no permite reconstruir los mismos, salvo en casos muy determinados; esta dificultad es precisamente la que hace interesante el estudio, pues determinar tipos de anillos con condiciones (sobre los grafos) dadas nos permitiría avanzar en la clasificación de los mismos.

Como solamente queremos indicar la variedad de grafos que es posible construir, en este capítulo nos limitaremos a introducir estos y a mostrar algunas de sus propiedades más interesantes.

## 13. Grafo total asociado a un anillo

**Definición 13.1 (Total Graph)**
*Sea $R$ un anillo conmutativo, Reg$(R)$ su conjunto de elementos regulares, $Z(R)$ su conjunto de divisores de cero y Nil$(R)$ su ideal de elementos nilpotentes. Definimos como el grafo total de un anillo $R$, denotado $T(\Gamma(R))$, al grafo que tiene como:*

- *vértices todos los elementos de $R$.*
- *hay una arista entre dos vertices distintos $x, y \in R$ si, y solo si, $x + y \in Z(R)$.*

A este grafo se le pueden asociar varios subgrafos inducidos:

- $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$, el subgrafo inducido de $T(\Gamma(R))$ cuyos vértices están en $\mathrm{Reg}(R)$.
- $Z(\Gamma(R))$, el subgrafo inducido de $T(\Gamma(R))$ cuyos vértices están en $\mathrm{Reg}(R)$.
- $\mathrm{Nil}(\Gamma(R))$ el subgrafo inducido de $T(\Gamma(R))$ y de $Z(\Gamma(R))$ cuyos vértices están en $\mathrm{Nil}(R)$.

A la hora de estudiar estos grafos es conveniente realizar una separación en casos:

- $Z(R)$ es un ideal de $R$.
- $Z(R)$ no es un ideal de $R$.

### Caso $Z(R)$ es un ideal de $R$

El primer hecho a destacar es que si $x, y \in R$ con $xy \in Z(R)$, entonces $x \in Z(R)$ o $y \in Z(R)$, luego si $Z(R)$ es un ideal, es un ideal primo. Esto implica que $R/Z(R)$ es un dominio integral, lo que se traducirá en buenas propiedades para el grafo. En particular, si $R$ es finito y $Z(R)$ es un ideal de $R$, entonces $R$ es un anillo local con $Z(R) = \mathrm{Nil}(R)$ su ideal maximal.

Los teoremas más importantes que tenemos en esta situación son:

**Teorema. 13.1.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ es un ideal de $R$. Entonces $Z(\Gamma(R))$ es un subgrafo inducido completo de $T(\Gamma(R))$ y es disjunto de Reg$(\Gamma(R))$*

Este hecho permiten que en el caso de que $Z(R)$ sea un ideal, el estudio del grafo pueda reducirse a estudiar $\mathrm{Reg}(R)$.

**Teorema. 13.2.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ es un ideal de $R$, y sea $|Z(R)| = \alpha$ y $|R/Z(R)| = \beta$. Entonces:*

1. *Si $2 \notin Z(R)$, entonces Reg$(\Gamma(R))$ es la unión de $\beta - 1$ grafos completos de $\alpha$ vértices.*
2. *Si $2 \notin Z(R)$, entonces Reg$(\Gamma(R))$ es la unión de $(\beta - 1)/2$ grafos bipartitos completos de $\alpha, \alpha$ vértices.*

**Teorema. 13.3.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ es un ideal de $R$. Entonces:*

1. *$Reg(\Gamma(R))$ es completo si, y solo si, $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ o $R \cong \mathbb{Z}_3$.*
2. *$Reg(\Gamma(R))$ es conexo si, y solo si, $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ o $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$.*
3. *$Reg(\Gamma(R))$ es completamente disconexo si, y solo si, $R$ es un dominio integral con $char(R) = 2$.*

**Teorema. 13.4.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ es un ideal de $R$. Entonces:*

1. (a) *$diam(Reg(\Gamma(R))) = 0$ si, y solo si, $R \cong \mathbb{Z}_2$.*
   (b) *$diam(Reg(\Gamma(R))) = 1$ si, y solo si, $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ y $R \ncong \mathbb{Z}_2$, o $R \cong \mathbb{Z}_3$.*
   (c) *$diam(Reg(\Gamma(R))) = 2$ si, y solo si, $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$ y $R \ncong \mathbb{Z}_3$.*
   (d) *En cualquier otro caso $diam(Reg(\Gamma(R))) = \infty$.*
2. (a) *$girth(Reg(\Gamma(R))) = 3$ si, y solo si, $2 \in Z(R)$ y $|Z(R)| \geq 3$.*
   (b) *$girth(Reg(\Gamma(R))) = 4$ si, y solo si, $2 \notin Z(R)$ y $|Z(R)| \geq 2$.*
   (c) *En cualquier otro caso $girth(Reg(\Gamma(R))) = \infty$.*
3. (a) *$girth(T(\Gamma(R))) = 3$ si, y solo si, $|Z(R)| \geq 3$.*
   (b) *$girth(T(\Gamma(R))) = 4$ si, y solo si, $2 \notin Z(R)$ y $|Z(R)| = 2$.*
   (c) *En cualquier otro caso $girth(T(\Gamma(R))) = \infty$.*

**Teorema. 13.5.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ es un ideal de $R$. Entonces, equivalen:*

1. *$Reg(\Gamma(R))$ es conexo.*
2. *$x + y \in Z(R)$ o $x - y \in Z(R)$ para todo $x, y \in Reg(R)$.*
3. *$x + y \in Z(R)$ o $x + 2y \in Z(R)$ para todo $x, y \in Reg(R)$.*
4. *$R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ o $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$.*

### Caso $Z(R)$ no es un ideal de $R$

Cuando $Z(R)$ no es un ideal de $R$, no tenemos tan buenas propiedades como en el caso anterior. Sin embargo, si tendremos que $Z(\Gamma(R))$ será conexo y que $Z(\Gamma(R))$ y $\text{Reg}(\Gamma(R))$ no serán nunca disjuntos. Los resultados más importantes son:

**Teorema. 13.6.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ no es un ideal de $R$. Entonces:*

1. $Z(\Gamma(R))$ *es conexo con* $diam(Z(\Gamma(R))) = 2$.
2. *Alguno vértice de* $Z(\Gamma(R))$ *es adyacente a un vértice de* $Reg(\Gamma(R))$. *En particular, los subgrafos* $Z(\Gamma(R))$ *y* $Reg(\Gamma(R))$ *de* $T(\Gamma(R))$ *no son disjuntos.*
3. *Si* $Reg(\Gamma(R))$ *es conexo, entonces* $T(\Gamma(R))$ *es conexo.*

**Teorema. 13.7.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ no es un ideal de $R$. Entonces $T(\Gamma(R))$ es conexo si, y solo si, $(Z(R)) = R$. En particular, si $R$ es un anillo conmutativo finito y $Z(R)$ no es un ideal de $R$, entonces $T(\Gamma(R))$ es conexo.*

**Teorema. 13.8.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ no es un ideal de $R$ y $(Z(R)) = R$. Sea $n \geq 2$ el menor entero positivo tal que $R = (z_1, \ldots, z_n)$ para $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$. Entonces $diam(T(\Gamma(R))) = n$. En particular, si $R$ es un anillo conmutativo finito y $Z(R)$ no es un ideal de $R$ entonces $diam(T(\Gamma(R))) = 2$.*

**Corolario. 13.9.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ no es un ideal de $R$ y supongamos que $T(\Gamma(R))$ es conexo. Entonces*

1. $diam(T(\Gamma(R))) = d(0, 1)$
2. *Si* $diam(T(\Gamma(R))) = n$ *entonces* $diam(Reg(\Gamma(R))) \geq n - 2$.

**Corolario. 13.10.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo. Si $R$ tiene un idempotente no trivial, entonces $T(\Gamma(R))$ es conexo con diam$(T(\Gamma(R))) = 2$.*

**Teorema. 13.11.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ no es un ideal de $R$. Entonces $T(\Gamma(T(R)))$ es conexo con diam$(T(\Gamma(T(R)))) = 2$. En particular, si $R$ es un anillo conmutativo finito y $Z(R)$ no es un ideal de $R$, entonces $T(\Gamma(R))$ es conexo con diam$(T(\Gamma(R))) = 2$.*

**Teorema. 13.12.**
*Sean $P_1$ y $P_2$ ideales primos de un anillo conmutativo $R$ tal que $xy = 0$ para algún $x \in P_1 - P_2$, y sea $S = R - (P_1 \cup P_2)$. Entonces $T(\Gamma(R_S))$ es conexo con diam$(T(\Gamma(R_S))) = 2$.*

**Lema. 13.13.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ no es un ideal de $R$. Entonces $char(R) = 2$ si, y solo si, $2Z(R) = 0$.*

**Teorema. 13.14.**
*Sea $R$ un anillo conmutativo tal que $Z(R)$ no es un ideal de $R$. Entonces:*

1. *girth$(Z(\Gamma(R))) = 3$ o girth$(Z(\Gamma(R))) = \infty$. Además, si girth$(Z(\Gamma(R))) = \infty$ entonces $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ por lo que $Z(\Gamma(R))$ es un grafo estrella $K^{1,2}$ con centro $0$.*

2. *girth$(T(\Gamma(R))) = 3$ si, y solo si, girth$(Z(\Gamma(R))) = 3$.*

3. *girth$(T(\Gamma(R))) = 4$ si, y solo si, girth$(Z(\Gamma(R))) = \infty$.*

4. *Si* $char(R) = 2$ *entonces* $girth(Reg(\Gamma(R))) = 3$ *o* $\infty$. *En particular* $girth(Reg(\Gamma(R))) = 3$ *si* $char(R) = 2$ *y* $Reg(\Gamma(R))$ *contiene un ciclo.*

5. $girth(Reg(\Gamma(R))) = 3, 4$ *o* $\infty$. *En particular.* $girth(Reg(\Gamma(R))) \leq 4$ *si* $Reg(\Gamma(R))$ *contiene un ciclo.*

Para más información sobre este grafo ver [5].

# 14. Grafo total generalizado

En la sección anterior vimos la definición del grafo total y algunas de sus propiedades. Este grafo puede generalizarse como veremos a continuación.

**Definición 14.1 (Subconjunto primo-multiplicativo)**
*Sea $R$ un anillo conmutativo con identidad no nula. Decimos que un subconjunto suyo $H$ es un subconjunto primo-multiplicativo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$ab \in H$ para todo $a \in H$ o $b \in R$.*
2. *Si $ab \in H$ entonces $a \in H$ o $b \in H$.*

*En particular, si $H$ es un ideal, entonces es un ideal primo.*

Es sencillo encontrar ejemplos de estos conjuntos :

- $H$ es primo-multiplicativo si es un ideal primo
- $H$ es primo-multiplicativo si es una unión de ideales primos
- $H$ es primo-multiplicativo si $H = R - U(R)$, donde $U(R)$ denota las unidades de R.
- $H$ es primo-multiplicativo si $H = R - \mathrm{Reg}(R) = Z(R)$.
- En general, $H$ es primo-multiplicativo si, y solo si, $R - H$ es un subconjunto multiplicativo cerrado saturado de $R$.

Ya podemos definir el grafo total generalizado.

**Definición 14.2**
*Sea $R$ un anillo y $H$ un subconjunto primo-multiplicativo suyo. Se define el grafo total generalizado de $R$ en $H$, $GT_H(R)$, como el grafo que verifica:*

1. *Su conjunto de vértices es $R$*
2. *Hay una arista entre dos vértices distintos $x, y \in R$ si, y solo si, $x + y \in H$*

*Dado $A$ subconjunto de $R$, se denotará como $GT_H(A)$ al subgrafo inducido con vértices $A$.*

Como podemos observar, el grafo total generalizado extiende la noción del grafo total cuando queremos centrar nuestra atención en otros conjuntos que no sean necesariamente el conjunto de divisores de cero.
Para más información sobre este grafo véase [6].

# 15. Grafo anulador de un anillo conmutativo

Hasta ahora, los grafos que hemos visto se generaban utilizando las propiedades aritméticas básicas de los elementos del anillo. Sin embargo, esto no tiene por que ser necesariamente así y el grafo anulador es un ejemplo de ello.

**Definición 15.1 (Grafo Anulador)**
*Sea $R$ un anillo conmutativo con identidad no nula, $Z(R)$ su conjunto de divisores de cero y $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$. Llamaremos grafo anulador de $R$, $AG(R)$ al grafo que verifica:*

1. *Su conjunto de vértices es $Z(R)^*$.*
2. *Dos vértices distintos $x, y \in Z(R)^*$ son adyacentes si, y solo si, $\mathrm{Ann}(xy) \neq \mathrm{Ann}(x) \cup \mathrm{Ann}(y)$.*

Este grafo está relacionado con el grafo de divisores de cero $\Gamma(R)$. En particular toda arista de $\Gamma(R)$ es una arista de $AG(R)$.

El detalle más interesante en la definición de este grafo es que, aunque estamos asociando elementos, lo que estamos comparando son anuladores, es decir, ideales. Por tanto, esto nos lleva a pensar que será posible asociar grafos coherentes a anillos de manera que los vértices del grafo no se correspondan a elementos del anillo, sino a ideales suyos, y así poder trabajar en situaciones en las que el anillo no sea finito sin que automáticamente gran parte de los invariantes del mismo se vuelvan triviales.

Para más información sobre este grafo, ver [11].

# 16. Grafo de divisores de cero generalizado para módulos

Para acabar este capítulo y la memoria vamos a ver que, de la misma forma que para anillos, es posible definir grafos asociados a módulos. Podemos hacer esto, bien considerando como vértices elementos o ideals del anillo, bien considerando como vértices elementos o submódulos del propio módulo; tal vez por la novedad que supone, vamos a ver un ejemplo en el que los vértices son elementos del módulo; para ello tenemos que definir una relación o producto en el mismo.

**Definición 16.1 (Relación en módulo)**
*Sea $R$ un anillo con unidad no cero y sea $M$ un $R$-módulo con unidad. Para cada par de elementos no nulos $x, y \in M$, decimos que $x * y = y * x = 0$ si*

$$x(yR : M) = 0 \text{ ó } y(xR : M) = 0.$$

Dado un $R$-módulo $M$, llamaremos $Z(M)$, al conjunto de elementos $x \in M$ tales que $x * y = 0$ para algún $y \in M$ no nulo. Diremos que $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$. Con esto ya podemos definir el grafo para módulos:

**Definición 16.2**
*Sea $M$ un $R$-módulo. Llamaremos $\Gamma(M_R)$ o sencillamente $\Gamma(M)$ al grafo que verifica:*

1. *Su conjunto de vértices es $Z(M)^*$*
2. *Dos vértices distintos $x, y \in Z(M)^*$ son adyacentes si, y solo si, $x * y = y * x = 0$.*

*En particular, si $M = R$ tenemos que $\Gamma(R) = \Gamma(R_R)$, por lo que la notación no es confusa.*

Para más información ver [16].

# Bibliografía


[1] S. Akbari and A. Mohammadian, *On the zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra **274** (2004), 847–855. 2, 12

[2] D. D. Anderson and M. Naseer, *Beck's coloring of a conmutative ring*, J. Algebra **159** (1993), 500–514. 5, 10

[3] D. F. Anderson, *On the total graph of a commutative ring without the zero element*, J. Algebra Appl. **11** (2012), 1250074.

[4] D. F. Anderson and A. Badawi, *On the zero-divisor graph of a ring*, Communications in Algebra **36** (2008), 3073–3092.

[5] ———, *The total graph of a commutative ring*, J. Algebra **320** (2008), 2706–2719. 13

[6] ———, *The generalized total graph of a commutative ring*, J. Algebra Appl. **12** (2013), 1250212. 14

[7] D. F. Anderson, A. Franzier, A. Lauve, and P.S. Livingston, *The zero divisor graph of a commutative ring, ii*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **220** (2001), 61–72. 12

[8] D. F. Anderson and P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra **217** (1999), 434–447. I, 2

[9] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introducción al álgebra conmutativa*, Reverté, Barcelona, 1980. 1, 11

[10] M. Axtell, N. Baeth, and J. Stickles, *Cut vertices in zero-divisor graphs of finite commutative rings*, Comm. Algebra **39** (2011), 2179–2188. 2

[11] A. Badawi, *On the annihilator graph of a commutative ring*, Comm. Algebra **42** (2013), 108–121. 15

[12] I. Beck, *Coloring of commutative rings*, J. Algebra **118** (1988), 208–226. II, 9

[13] B. Cote, C. Ewing, M. Huhn, C.M. Plaut, and D. Weber, *Cut-sets in zero-divisor graphs of finite commutative rings*, Comm. Algebra **39** (2011), 2849–2861. 2

[14] I. Kaplansky, *Commutative rings*, Chicago Univ. Press, 1974. 1

[15] S. P. Redmond, *Recovering rings from zero-divisor graphs*, J. Algebra Appl. **12** (2013), 1350047. 11, 11

[16] S. Safaeeyan, M. Baziar, and E. Momtahan, *A generalization of the zero-divisor graph for modules*, J. Korean Math Soc. **51** (2014), 87–98. 16