Universidad de Granada

Facultad de ciencias

Problemas de olimpiada sobre geometría: Movimientos y transformaciones en el plano y en el espacio

Autor:
Carlos López Molina

Tutor:
Pascual Jara Martínez

Índice

Introducción **II**

1. Movimientos en el plano **1**
1.1. Puntos y elementos dobles . . . 1
1.2. Traslaciones . . . 1
1.3. Giros . . . 2
1.4. Simetría central . . . 2
1.5. Simetría axial . . . 2
1.6. Producto de movimientos . . . 2
1.6.1. Producto de traslaciones . . . 2
1.6.2. Producto de giros del mismo centro . . . 2
1.6.3. Producto de dos simetrías axiales . . . 3
1.6.4. Producto de dos giros de diferentes centros . . . 3
1.6.5. Producto de traslación por giro . . . 3
1.7. Movimientos directos e inversos . . . 4
1.8. Congruencia . . . 4
1.9. Ejercicios propuestos . . . 4

2. Homotecia y semejanza **6**
2.1. Homotecia . . . 6
2.1.1. Propiedades de las homotecias . . . 6
2.2. Semejanzas . . . 7
2.2.1. Propiedades de las semejanzas . . . 7
2.2.2. Centro de semejanza directa . . . 7
2.3. Ejercicios propuestos . . . 8

3. La inversion en el plano **9**
3.1. Propiedades de la inversión . . . 9
3.2. Ejercicios propuestos . . . 10

4. Problemas de la fase local **11**

5. Problemas de la fase nacional **19**

6. Problemas de la olimpiada internacional **28**

Bibliografía **38**

Introducción

En este trabajo se ha intentando crear un documento que sirva para ver la relación entre la geometría y el álgebra, partiendo de problemas sobre geometría, se ha utilizado el álgebra para poder demostrarlos.

El texto comienza con unas breves notas sobre la teoría, que ayudan a reforzar algunos conocimientos e introducen conocimientos necesarios para la resolución de problemas. El objetivo de estas notas está destinado a una función práctica, es decir, no pretenden tener un gran rigor teórico, sino que su objetivo es práctico, ofrecer una serie de resultados y ayudar al lector a comprender los conceptos necesarios para poder aplicarlos a los problemas relacionados con estos temas. Se han propuesto una serie de ejercicios en dichas notas para fortalecer los conocimientos. Estas notas se han dividido en tres temas: Un primer tema dedicado a movimientos en el plano, un segundo tema dedicado a homotecias y semejanzas y un último y más breve tema dedicado a la inversión en el plano.

Además de las notas, hay una serie de problemas resueltos de olimpiadas matemáticas. Están divididos en tres secciones según su dificultad. La primera sección está destinada a problemas de la fase local, estos problemas son los de menor dificultad. La segunda sección está dedicada a problemas de la fase nacional y la tercera sección a problemas de la fase internacional, donde los ejercicios se han sacado de las short list de la IMO. La mayoría de problemas se resuelven utilizado semejanzas, aunque también hay sobre congruencias y movimientos en el plano y en menor medida sobre la inversión.

Para la realización de figuras que ayudan a comprender la teoría y sirven de apoyo para la realización de los problemas se ha utilizado el software matemático geogebra.

1. Movimientos en el plano

En general se denominan movimientos en el plano a las transformaciones del plano (como conjunto de puntos) en sí mismo tales que conservan la alineación y las distancias. También se conocen como congruencias. Usaremos como notación la general de transformaciones: mayúsculas para los puntos del plano y funcional para la transformación, de modo que f(P) designa al punto imagen u homólogo de P mediante la transformación f.

Hablaremos de transformación o movimiento producto de dos dados f y g en el sentido habitual fe la composición de funciones $f \cdot g(P) = f(g(P))$ que, en general no es conmutativa.

Para la transformación inversa usaremos f^-1, significando que para todo punto P:

$$f(f^-1(P)) = f^-1(f(P)) = P.$$

La conservación de las distancias garantiza la inyectividad de los movimientos y por tanto la existencia de movimiento inverso.

1.1. Puntos y elementos dobles

Decimos que un puntos es doble para la transformación f cuando $f(P) = P$.

Una idea muy parecida pero conceptualmente diferente es la de elementos dobles.

Diremos que un subconjunto M del plano es doble cuando:

$$\forall P \in M \Rightarrow f(P) \in M$$

Evidentemente un conjunto de puntos dobles es un elemento doble pero no a la inversa. De hecho, M puede ser doble sin que lo sea ninguno de sus puntos.

Una transformación en la que todos los puntos son dobles la llamaremos identidad, la designaremos por I y en ella I(P)=P para todo punto P.

La determinación de puntos y elementos dobles es con frecuencia muy interesante para el estudio del movimiento.

Admitiremos como algo conocido que los movimientos con la composición forman un grupo no conmutativo. Por tanto el inverso de todo movimiento es movimiento.

Es inmediato comprobar que el conjunto de movimientos que deja invariante una figura dada es un subgrupo del grupo de los movimientos.

Comenzaremos estudiando tres tipos de transformaciones: Traslaciones, giros y simetrías.

1.2. Traslaciones

Puesto que dos puntos definen un único vector libre, es evidente que una traslación queda definida conociendo un punto y su homologo.

El conjunto de traslaciones del plano forman un grupo conmutativo isomorfo al de los vectores libres del plano, ya que la traslación producto de dos dadas es otra traslación asociada al vector suma.

A pesar de su sencillez la traslación es una herramienta muy útil para la resolución de muchos problemas geométricos.

1.3. Giros

Dados un punto O fijo del plano y un ángulos α, llamaremos giro de centro o y amplitud α a la trasformación definida así:

$$g(P) = Q \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{OP} = \overline{OQ} \\ \angle POQ = \alpha \end{cases}$$

El ángulo dado α tiene signo y por ello el giro puede ser en dos sentidos considerando como es habitual el positivo en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Un giro queda definido conociendo una pareja de puntos P y Q y sus homólogos P' y Q', es decir, conociendo un segmento y su imagen mediante el giro.

La amplitud de la rotación coincide con el ángulo que forman ambos segmentos y el centro se determina cortando las mediatrices de los segmentos PP' y QQ' formados por cada punto y su homólogo.

1.4. Simetría central

Dado un punto O se llama simetría central de centro O a la transformación s_o definida así:

$$s_o(P) = Q \Leftrightarrow \text{O es el punto medio del segmento PQ.}$$

Claramente es un giro de 180º. Diremos que es involutivo (su cuadrado es la identidad) y que está determinado por un punto P y su homólogo P' ya que permite hallar el centro como el punto medio del segmento PP'.

1.5. Simetría axial

Dada una recta r llamada eje, una simetría axial es la transformación definida así:

$$s_r(P) = Q \Leftrightarrow \text{r es la mediatriz del segmento PQ.}$$

Como todo movimiento, conserva la alineación y la distancia, pero cambia el sentido. Por ello se dice que es un movimiento inverso.

También es involutivo y queda determinado conociendo un punto y su homólogo, quedando el eje definido como la mediatriz del segmento PP'.

1.6. Producto de movimientos

Es especialmente útil para la resolución de problemas estudiar la transformación resultante de la aplicación sucesiva de dos movimientos.

1.6.1. Producto de traslaciones

Dadas dos traslaciones de vectores **u** y **v** es inmediato comprobar que el producto de ambas es otra traslación de vector **u+v**.

1.6.2. Producto de giros del mismo centro

Es inmediato que el producto de dos giros del mismo centro O y amplitudes α y β es otro giro con el mismo centro y amplitud $\alpha + \beta$.

1.6.3. Producto de dos simetrías axiales

Distinguiremos dos casos:

a) Los ejes son paralelos.

Sean dos simetrías axiales de ejes r y t paralelos, y llamemos u a un vector perpendicular a ambos ejes, de módulo doble de la distancia entre ellos y sentido del primer eje al segundo. Es inmediato demostrar que el producto de las dos simetrías es una traslación de vector u. El producto no es conmutativo, $s_r s_t = -s_t s_r$, es decir, los vectores de ambas traslaciones son opuestos.

Es análogo demostrar el proceso inverso. Toda traslación puede descomponerse como producto de dos simetrías de ejes paralelos entre sí.

b) Los ejes no son paralelos.

Dadas dos simetrías de ejes r y t que se cortan en el punto O y forman un ángulo de amplitud α. Es fácil demostrar que el producto de las dos simetrías es un giro de centro O y ángulo 2α. El sentido del giro depende del orden en el que se apliquen las simetrías.

Igual que en el caso anterior podemos invertir el razonamiento: todo giro se puede descomponer en producto de dos simetrías con ejes no paralelos.

1.6.4. Producto de dos giros de diferentes centros

Sea g el giro de centro O y amplitud α y f el giro de centro O' y amplitud β.

Según se vio en el producto de simetrías de ejes no paralelos podemos descomponer un giro en producto de dos simetrías cuyos ejes concurren en el centro de giro y forman ángulo mitad de la amplitud del giro, pudiendo elegir la dirección de uno de los ejes.

El primer giro g se descompone en producto de las simetrías de ejes e_1 y e_2 siendo e_2 la recta OO' que une los centros y e_1 la que forma ángulo $\alpha/2$ con e_2

El segundo giro f se descompone en producto de las simetrías de ejes e_2 y e_3 formando entre ellas ángulo $\beta/2$.

Llamando a las simetrías por el nombre de sus ejes, obtenemos:

$$f \cdot g = e_3 \cdot e_2 \cdot e_2 \cdot e_1 = e_3 \cdot e_1$$

De aquí deducimos que el producto de dos giros de diferente centro es un giro de centro O"(punto de corte de e_1 y e_3 y amplitud $\alpha + \beta$

Si $\alpha + \beta = 360^o$ el producto da como resultado una traslación de vector perpendicular a la dirección común de e_1 y e_3 (que son paralelos), y módulo el doble de la distancia entre ambos ejes.

1.6.5. Producto de traslación por giro

Sea la traslación f de vector PP' y el giro g de centro O y amplitud α. Descomponemos la traslación en producto de dos simetrías axiales de ejes paralelos entre sí y perpendiculares al vector PP', e_1 y e_2, donde e_2 pasa por O. Análogamente descomponemos g en dos simetrías axiales e_2 y e_3 concurrentes en O y formando un ángulo $\alpha/2$. Haciendo el producto nos queda:

$$f \cdot g = e_3 \cdot e_2 \cdot e_2 \cdot e_1 = e_3 \cdot e_1$$

Con lo cual vemos que el producto nos da un giro de centro 0' y amplitud α.

1.7. Movimientos directos e inversos

Los movimientos se clasifican en directos e inversos según conserven o inviertan el sentido. Un movimiento f es directo si dados tres puntos A,B,C no alineados y sus homólogos A',B',C', el sentido del ángulo que forman los primeros es igual al que forman los segundos. En caso contrario el movimiento se denomina inverso.

Los giros y traslaciones son ejemplos de movimientos directos y las simetrías de inversos.

El conjunto de los movimientos directos es un grupo mientras que el conjunto de los movimientos inversos no lo es, ya que el producto de dos movimientos inversos es directo.

1.8. Congruencia

Diremos que dos figuras se llaman congruentes si existe algún movimiento que transforme una en otra.

Teorema 1 Dados dos triángulos ABC y A'B'C' congruentes, existe un único movimiento que transforma el primero en el segundo.

Teorema 2 Todo movimiento es producto de a lo más tres simetrías axiales.

Teorema 3 Todo movimiento con un punto invariante es producto de dos simetrías como máximo.

Teorema 4 Todo movimiento directo es o una traslación o un giro.

Teorema 5 Todo movimiento inverso es una simetría o una reflexión-deslizamiento.

1.9. Ejercicios propuestos

1. Dado un triangulo ABC, sea M el punto medio del lado AB. Sean r y s las rectas que pasan por el punto M y son paralelas las rectas BC y AC respectivamente. Sea N el punto de corte de r con AC y P el punto de corte de s con BC. Demuestra que los triángulos AMN, MBP, PNM y NPC son congruentes. ¿Qué relación puedes deducir entre los segmentos MN y BC; MP y AC; NP y AB?

2. Sea ABC un triángulo y M y N puntos pertenecientes a los lados AC y AB respectivamente. Halla un punto P sobre el lado BC para que el perímetro del triángulo MNP sea mínimo. Halla un punto Q sobre el lado BC para que el perímetro del triángulo MNP sea mínimo.

3. Sea O un puntos y r una recta, O no perteneciente a r. Sea R un punto variable de la recta r. Se construye el triángulo rectángulo isósceles ROS siendo $\angle ROS = 90^o$. Calcula el lugar geométrico de S. Encuentra la posición del punto R para que el perímetro del triangulo ROS sea mínimo. Calcular ese perímetro en función de la distancia d.

4. Se considera un triangulo ABC y sea O su circuncentro. Demuestra usando composición de simetrías axiales, que el ángulo $\angle AOC$ es el doble del ángulo formado por las mediatrices de los lados AB y BC.

5. Utiliza argumentos de congruencias de triángulos para probar la construcción con regla y compás del método para dividir un segmento indicando los movimientos en el plano que generan cada congruencia.

6. Utiliza argumentos de congruencias de triángulos para probar la construcción con regla y compás del método para bisecar un ángulo indicando los movimientos en el plano que generan cada congruencia.

7. Utiliza argumentos de congruencias de triángulos para probar la construcción con regla y compás del método para dividir un segmento en n partes iguales indicando los movimientos en el plano que generan cada congruencia.

2. Homotecia y semejanza

Los movimientos o congruencias se definieron como transformaciones puntuales del plano que conservan alineación y distancia.

Si rebajamos la condición de la conservación de la distancia de la siguiente manera:

$$\overline{f(A)f(B)} = k \cdot \overline{AB}$$

siendo k una constante, obtenemos la definición de semejanza.

2.1. Homotecia

Dado un punto O cualquiera pero fijo del plano y una constante real k≠0, llamamos homotecia de centro O y razón k a la transformación que hace corresponder cualquier punto P del plano (distinto de O) el punto P' alineado con O y con P de modo que:

$$\frac{OP'}{OP} = k$$

2.1.1. Propiedades de las homotecias

Las principales propiedades de las homotecias son:

- Si k es positivo, P' está en la semirrecta OP y si k es negativo en la opuesta.
- Dos figuras son homotéticas si sus puntos corresponden en una homotecia.
- Si k=1, la homotecia es la identidad.
- Si k=-1, la homotecia es una simetría central de centro O.
- Si k≠ 0, no hay puntos dobles exceptuando el propio O, que para todas las homotecias es punto doble.
- La homotecia mantiene la alineación.
- La transformación de una recta que no pasa por O es otra recta paralela a la anterior.
- La razón entre dos segmentos homólogos es la razón de homotecia.
- Las rectas que pasan por O son los únicos elementos dobles.
- Las homotecias conservan los ángulos.
- La transformación inversa de una homotecia es otra homotecia de mismo centro y razón 1/k.
- El producto de dos homotecias h y h' del mismo centro O y razones k y k' respectivamente, es una homotecia de mismo centro y razón k•k'. En consecuencia, las homotecias de centro O forman grupo.

2.2. Semejanzas

Se denomina semejanza a la transformación obtenida por el producto de una homotecia por un movimiento.

2.2.1. Propiedades de las semejanzas

De las propiedades de las homotecias y de los movimientos se deducen las siguientes propiedades de las semejanzas:

- Las semejanzas conservan la alineación.
- Los segmentos homólogos son proporcionales.
- Las semejanzas conservan los ángulos.
- Si el movimiento se directo la semejanza se llama directa, es decir, conserva el sentido. En caso contrario la semejanza se dice que es inversa.
- Si entre dos figuras podemos establecer una correspondencia que cumpla las tres primeras propiedades se dicen semejantes.
- Las semejanzas con el producto de transformaciones forman grupo. Las semejanzas directas forman subgrupo de estas.
- Toda semejanza queda determinada conociendo un par de segmentos orientados homólogos y la clase de semejanza

2.2.2. Centro de semejanza directa

En este apartado vamos a descomponer cada semejanza directa en una homotecia por un movimiento. Para ello vamos a buscar el punto O, que llamaremos centro de semejanza directa. Distinguiremos dos casos:

- Los segmentos que determinan la semejanza son paralelos.

  En este caso la intersección de las rectas AA' y BB' definen un punto O que es el centro de homotecia que lleva AB sobre A'B'. En este caso el movimiento es la identidad.

- Los segmentos que determinan la semejanza no son paralelos.

  En este caso, nuestro objetivo es determinar un punto O que sea a la vez centro de un giro y de una homotecia, de manera que el producto nos de la semejanza que buscamos.

  Supongamos que existe O. Por ser una semejanza directa se tiene: $\angle OBA = \angle OB'A'$; entonces, si P es la intersección de las rectas definidas por AB y A'B' la igualdad anterior se puede poner como:

  $$\angle OBP = \angle OB'P$$

  Igualdad que establece que O está en la circunferencia definida por los puntos P,B y B'. Análogamente se demuestra que O está en la circunferencia P, A y A'. Por tanto O queda determinado como el punto de intersección de las dos circunferencias anteriores que no es P.

2.3. Ejercicios propuestos

1. Demostrar que en cualquier triangulo, los puntos medios de uno de los lados forman un segmento paralelo al tercer lado e igual a la mitad de este.

2. Demostrar que dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes. Hallar la razón entre sus perímetros, sus apotemas y sus áreas.

3. Demostrar que el centro de la circunferencia circunscrita de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa.

4. En todo triángulo las medianas se cortan en proporción 1:2.

5. Sea ABC un triangulo rectángulo con $\angle ACB = 90^{o}$ny $CD \perp AB$. Demostrar que $\angle BAC = \angle BCD$.

6. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, H es el pie de altura correspondiente al vértice A. Utilizando semejanza de triángulos, demuestra que:

$$AH^2 = BH \cdot HC$$

7. En el mismo triángulo del ejercicio anterior demuestra que:

   a) $AB^2 = BH \cdot BC$

   b)$AC^2 = CH \cdot BC$

8. Sea γ una circunferencia de centro O y radio R. Sea P un punto interior a γ y AB y CD dos cuerdas cualesquiera que contienen al punto O. Usando semejanza de triángulos demuestra que:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = OP^2 - R^2$$

3. La inversion en el plano

Dada una circunferencia de centro O y radio k, la inversión de centro O y radio k es una transformación del plano que a cada punto A distinto de O, le asocia otro punto A' de la semirrecta OA cumpliendo la relación $OA \cdot OA0 = k^2$.

Es fácil ver que un punto exterior a la circunferencia se transforma en un punto interior y un punto exterior a la circunferencia se transforma en un punto interior. Los puntos de la circunferencia de inversión se invierten en sí mismos, es decir, son puntos fijos de la transformación.

Es conveniente observar que hay exactamente un punto del plano, el centro de inversión O, que se queda sin imagen por la transformación. Cuando se trabaja con inversión se supone que a todos los puntos del plano se le añade un "punto ideal.º "punto del infinitoçon lo que obtenemos el plano inversivo. Dicho punto ideal será la imagen del centro de inversión.

3.1. Propiedades de la inversión

Las propiedades de la inversión nos permiten hacer demostraciones geométricas que no son sencillas cuando se intentan con otros métodos.

1. Si A y B son puntos distintos y A' y B' sus homólogos en una inversión de centro O y radio k entonces:

$$A'B' = \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}$$

2. Si una recta pasa por el centro de inversión su homóloga es ella misma.

3. Si una recta l no pasa por el centro de inversión O, dicha recta se transforma en una circunferencia con diámetro OM', siendo M la proyección ortogonal de O sobre l y M' el inverso de M. Como se ve en la figura 1.

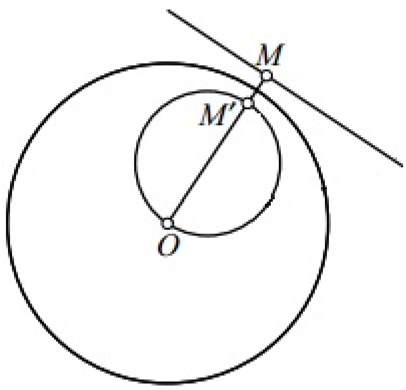

Figura 1: Recta - Circunferencia

4. Análogamente al caso anterior, si una circunferencia pasa por el centro de inversión siendo OM' un diámetro suyo entonces esa circunferencia se

transforma en la recta perpendicular a OM' por el punto M, el inverso de M'. Como se ve en la figura 1.

5. La inversión de una circunferencia de radio r y centro M que no pasa por el centro de inversión O, es otra circunferencia que para calcularla usamos los puntos de corte de la circunferencia con la recta que un O y M, que llamaremos A y B, Calculando sus homólogos A' y B' calculamos el diámetro de la circunferencia homóloga. La relación entre los radios es: $r' = \frac{r \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|}$

6. La inversión conserva los ángulos.

7. Una inversión deja fija una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión.

3.2. Ejercicios propuestos

1. Dados un punto y dos circunferencias, trazar una circunferencia que pase por el punto y sea tangente a las dos circunferencias.

2. Sea ABC un triángulo y D, E, F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la inversión de la circunferencia inscrita transforma la circunferencia circunscrita a ABC en la circunferencia de los nueve puntos de DEF.

3. (Teorema de Euler) Si R y r son los radios de las circunferencias circunscritas e inscritas a un triángulo y O e I son su circuncentro e incentro, demostrar que $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

4. Problemas de la fase local

En esta sección hemos puesto los problemas propuestos en la fase local en los que en su resolución se utiliza como herramienta movimientos y transformaciones en el plano y en el espacio.

Problema 1(1999)

Prueba que la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles es siempre igual a la suma de los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita.

Solución

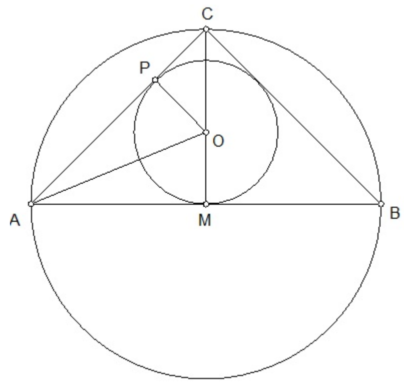

Figura 2: Problema 1

Sea ABC un triángulo rectángulo e isósceles con ángulo recto en el vértice C. Sea O el centro de la circunferencia inscrita, la cual consideramos tangente a la hipotenusa AB en su punto medio M y al lado AC en el punto P. El radio de esta circunferencia es $r = \overline{OP} = \overline{OM}$

Por ser esta circunferencia tangente a los lados del triángulo, los radios OM y OP son perpendiculares a los lados AB y AC en M y P respectivamente.

Por ser el triángulo isósceles, CO (y CM) es bisectriz del ángulo recto en C, por lo que el triángulo OCP es, también, rectángulo e isósceles (ángulo OCP de 45º); es decir, $\overline{OP} = \overline{PC}$

Por estar O en la bisectriz del ángulo CAB, los triángulos rectángulos AMO y APO son iguales (simétricos respecto a la hipotenusa), resultando que $\overline{AM} = \overline{AP}$

Por otra parte, como el triángulo es rectángulo, el punto M, punto medio de la hipotenusa, es también el centro de la circunferencia circunscrita a ABC. Por lo que $R = \overline{AM}$, es el radio de esta circunferencia.

En conclusión, la longitud del cateto AC la podemos escribir como:

$$\overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PC} = \overline{AM} + \overline{OP} = R + r$$

Problema 2(2000)

Sea P un punto del lado BC de un triángulo ABC. La paralela por P a AB corta al lado AC en el punto Q y la paralela por P a AC corta al lado AB en el punto R. La razón entre las áreas de los triángulos RBP y QPC es k^2.

Determínese la razón entre las áreas de los triángulos ARQ y ABC.

Solución

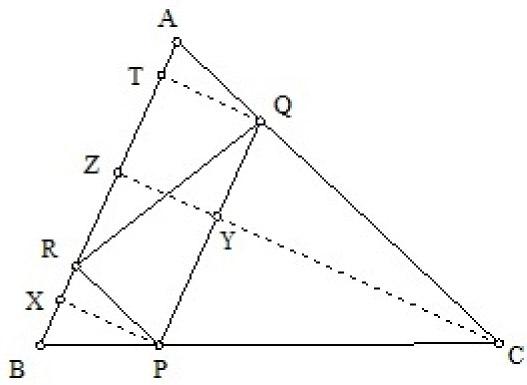

Figura 3: Problema 2

Los triángulos RBP y QPC son semejantes, de razón k. El cuadrilátero ARPQ es un paralelogramo, y PQ = RA. Si BR = x, entonces:

$$\text{PQ} = \text{RA} = \text{kx; BA} = (1 + \text{k})\text{x}.$$
$$\text{Área RBP} = \text{S} = \frac{BR}{2}$$
$$\text{PX}=\frac{xh}{2}$$
$$\text{CY} = \text{k . PX} = \text{kh; CZ} = \text{CY} + \text{YZ} = \text{CY} + \text{PX} = (1 + \text{k})\text{h}$$
$$\text{Área ABC} = (1 + k)^2\text{S}$$
$$\text{QT} = \text{YZ} = \text{PX} = \text{h}$$
$$\text{Área ARQ} = \frac{AR}{2} \cdot YZ = \frac{kxh}{2} = kS$$
$$\frac{areaARQ}{areaABC} = \frac{kS}{(1+k)^2 S} = \frac{k}{(1+k)^2}$$

Problema 3(2003)

Dado un triángulo de vértices A, B y C, y con lados de longitud , y , llamemos D al punto de intersección del lado AB con la bisectriz del ángulo C. Demuestra que: $CD = \frac{2abCos\frac{C}{2}}{a+b}$

Solución

A partir del vértice B trazamos una paralela a la bisectriz CD y prolongamos el lado AC hasta obtener el punto E.

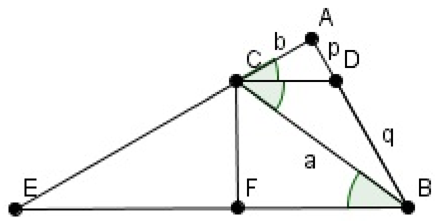

Figura 4: Problema 3

Y, también, CF perpendicular a BE

Así, CB = CE = a

Por ángulos alternos-internos, en el triángulo BCF tenemos: $Cos\frac{C}{2} = \frac{FB}{a} = \frac{EB}{2a}$. Los triángulos ACD y AEB son semejantes: $\frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EB}$

$$CD = \frac{AC \cdot EB}{AE} = CD = \frac{2abCos\dfrac{C}{2}}{a+b}$$

Problema 4(2005)

Se considera un triángulo ABC con $\angle ACB = 30^o$ y $\angle BAC = 45^o$. Si M es el punto medio del lado BC , se pide demostrar que $\angle AMB = 45^o$ y que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$.

Solución

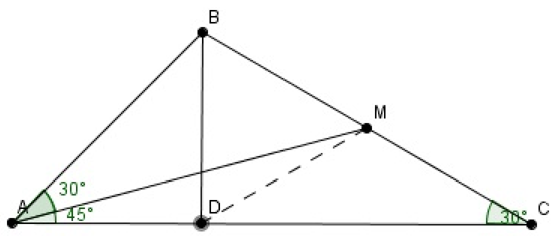

Figura 5: Problema 4

Sea D el punto de AC tal que BD⊥AC. Puesto que $\angle DBA = 90^o - \angle BAD = 90^o - 45^o = 45^o$, el triangulo ADB es isósceles con AD=DB.

Como el triangulo CDB es rectángulo en D, CM=MD y, por tanto, $\angle CDM = 30^o$. El teorema del ángulo exterior aplicado ahora al triangulo ACM en M da inmediatamente $\angle AMB = 30^o + 15^o = 45^o$.

En consecuencia, los triángulos ABC y MBA son semejantes y, por tener la misma altura, la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases:

$$\frac{AreaABC}{AreaMBA} = \frac{BC}{BM} = 2$$

Por consiguiente, la razón de semejanza vale $\sqrt{2}$. Tenemos, pues que $\frac{AC}{AM} = \sqrt{2}$ y $\frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$.

La relación que se pide resulta al multiplicar miembro a miembro las dos igualdades anteriores.

Problema 5(2007)

Demostrar que, en un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

Solución

Sean A', B', C' los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente. La circunferencia que pasa por A', B', C' (circunferencia medial) es la imagen de la circunscrita a A, B, C en la semejanza de centro el baricentro G y razón $-\frac{1}{2}$.

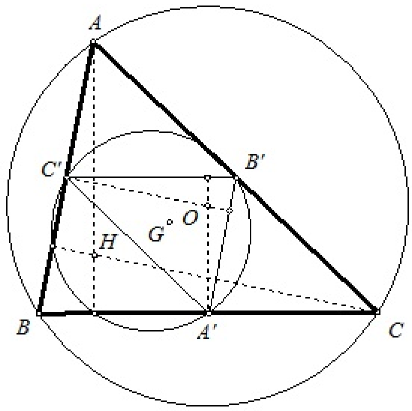

Figura 6: Problema 5

Obviamente el circuncentro O de ABC es el ortocentro de A'B'C' y se sigue el resultado al corresponderse los segmentos AH y A'O en la semejanza anterior.

Problema 6(2008)

En el interior de un paralelogramo ABCD se dibujan dos circunferencias. Una es tangente a los lados AB y AD, y la otra es tangente a los lados CD y CB. Probar que si estas circunferencias son tangentes entre sí, el punto de tangencia está en la diagonal AC.

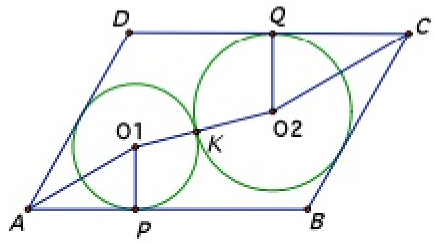

Figura 7: Problema 6

Solución

Veremos que los puntos A, K y C están alineados.

Sean O_1 y O_2 los centros de la primera y segunda circunferencia, respectivamente. Notar que AO_1, biseca el ángulo DAB, y análogamente CO_2 biseca el ángulo DCB. Como los lados son paralelos dos a dos y los ángulos O_1AK y CO_2K son iguales, entonces AO_1 es paralelo a CO_2, y, como O_1K y O_2K están alineados, los ángulos AO_1K y KO_2C son iguales.

Como O_1P $\perp$ AB y O_1Q $\perp$ CD, los triángulos APO_1 y CQO_2 son semejantes, por lo que $\frac{\overline{O_1A}}{O_1P} = \frac{\overline{O_2c}}{O_2Q}$, y como $\overline{O_1P} = \overline{O_1K}$ y $\overline{O_2Q} = \overline{O_2K}$ los triángulos AO_1K y KO_2C son semejantes, por lo que los puntos A, K y C están alineados.

Problema 7(2011)

En un triángulo llamaremos O al circuncentro, I al incentro y r al radio de la circunferencia inscrita. Si la mediatriz del segmento OI corta a la circunferencia circunscrita en L, y LI vuelve a cortarla en M, demuestra que $IM = 2r$

Solución

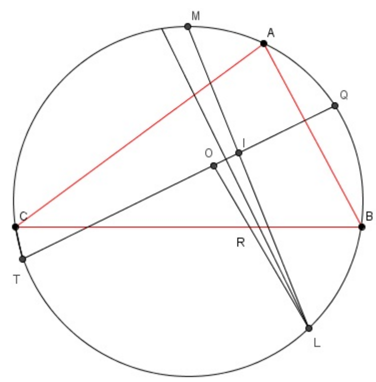

Figura 8: Problema 7

Por el Teorema de Euler, $OI^2 = R^2 - 2rR$. Sean T y Q los puntos de corte de la recta OI con la circunferencia circunscrita. Entonces tenemos

$$\text{IL}\cdot IM = IT \cdot IQ$$

Por simetría, $IL = OL = R$. Por otra parte, $IT = OI + OT = OI + R$, y también tenemos $IQ = OQ - OI = R - OI$. Por tanto, sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene:

$$R \cdot IM = (R + OI)(R - OI) = R^2 - 2OI^2 = 2rR$$

de donde $IM = 2r$.

Problema 8(2011)

Demuestra que en un triángulo se verifica: si r es una recta que pasa por su baricentro y no pasa por ningún vértice, la suma de las distancias a dicha recta de los vértices que quedan en un mismo semiplano es igual a la distancia del tercer vértice a dicha recta.

Solución

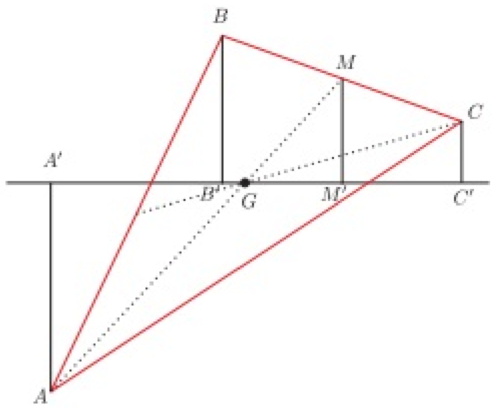

Figura 9: Problema 8

El triangulo GGM' es semejante a GAA' con razón de semejanza 2(pues AG=2GM). Por tanto, AA'=2MM'.

Por otro lado, MM' es la paralela media del trapecio BB'C'C, de donde MM'=(BB'+CC')7/2.

En consecuencia: AA'=2MM'=BB'+CC'.

Problema 9(2012)

Sea ABC un triángulo acutángulo con A = 45^o, y sea P el pie de la altura por B. Trazamos la circunferencia de centro P que pasa por C y que vuelve a cortar a AC en el punto X y a la altura P B en el punto Y . Sean r y s las rectas perpendiculares a la recta AY por P y X, respectivamente, y L, K las intersecciones de r, s con AB. Demostrar que L es el punto medio de KB.

Solución

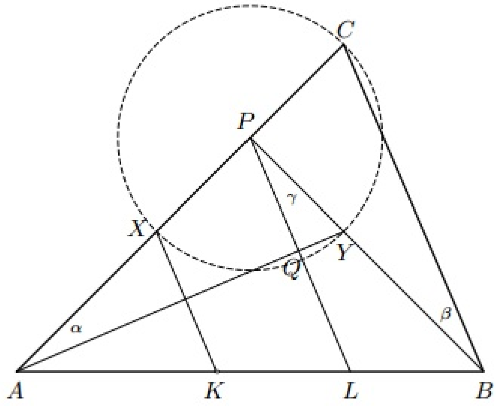

Figura 10: Problema 9

Por construcción es PX = PY = PC. Los triángulos PAY y PCB, rectángulos en P, son iguales ya que AP = P B (el triángulo rectángulo AP B es isósceles) y PY = PC. Por tanto los ángulos α y β son iguales. El triángulo rectángulo PYQ es semejante a los anteriores, de manera que el ángulo $\gamma = \angle LPB$ es igual a α. Resulta que los segmentos P L y CB son paralelos, y por el teorema de Thales queda KL=LB ya que PX=PC.

Problema 10(2012)

En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos de 30°, 60° y 90°, se eligen 25 puntos cualesquiera. Demuestra que siempre habrá 9 de ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio 3/10.

Solución

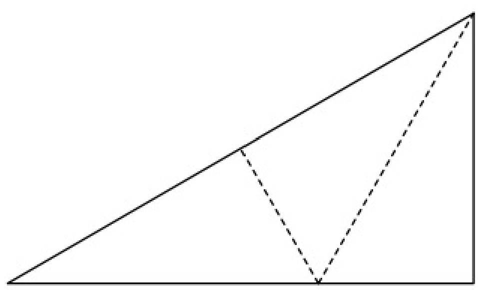

Figura 11: Problema 10

Tenemos 3 triángulos y 25 puntos. En algún triángulo habrá al menos 9 puntos. La hipotenusa de cada uno de estos triángulos semejantes al inicial mide $\sqrt{3}/3$. Los triángulos son rectángulos y por lo tanto están cubiertos por la mitad del círculo circunscrito. Esto acaba el problema ya que el radio de este círculo circunscrito, r, cumple

$$r = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{10}$$

5. Problemas de la fase nacional

En esta sección hemos puesto los problemas propuestos en la fase nacional en los que en su resolución se utiliza como herramienta movimientos y transformaciones en el plano y en el espacio.

Problema 1(1994)

El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide 2/5 de recto, siendo iguales sus ángulos B y C. La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresar la medida a del lado BC en función de la medida b del lado AC, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas.

Solución

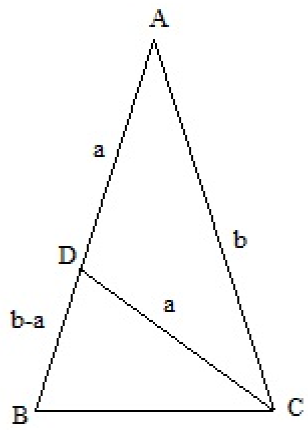

Figura 12: Problema 1

Con los datos del enunciado tenemos:

En el triángulo ABC $\angle$ BAC=36º; $\angle$ ABC= $\angle$ ACB=72º en el triángulo CBD $\angle$BCD =36º;$\angle$CDB=$\angle$BD=72º en el triángulo ADC $\angle$DAC =$\angle$ACD = 72º;$\angle$ADC = 108º por tanto los triángulos BCD y ADC son isósceles y además el triángulo BCD es semejante al triángulo ABC.

Para los lados se tiene: DC = AD = a; BD = b - a. Expresando la proporcionalidad derivada de la semejanza anterior:

$$\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a^2 = b^2 - ab \Leftrightarrow a^2 + ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow (\frac{a}{b})^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Y resolviendo queda $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es decir a es la sección áurea de b.

Problema 2(1995)

Por el baricentro G de un triángulo ABC se traza una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demuestra que:

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$$

Solución

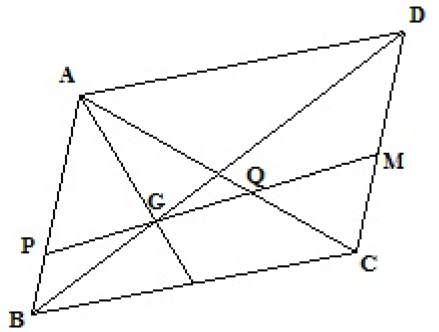

Figura 13: Problema 2

Dupliquemos el triángulo trazando AD paralela a BC y CD paralela a BA como muestra la figura y tomemos la longitud del lado AB como unidad. Llamando M a la intersección de CD con la recta PQ y x = PB; 1-x = AP, tenemos:

Por semejanza de AQP y QMC: $\frac{QC}{QA} = \frac{MC}{AP} = \frac{MC}{1-x}$

Por semejanza de GPB y GMD: $\frac{PB}{MD} = \frac{GB}{GB} = \frac{1}{2}$

Luego: MD = 2x y MC = 1 - 2x. Sustituyendo en el primer miembro de la relación del enunciado queda:

$\dfrac{PB}{PA} \cdot \dfrac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x(1-2x)}{(1-x)^2} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3x-1)^2 \geq 0$

Relación válida para cualquier x. La igualdad se alcanza para PB=x=$\frac{1}{3} \Leftrightarrow MC = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$PQ paralela al lado BC.

Problema 3(1998)

Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Solución

Los triángulos ABC y ADC son semejantes pues tienen los tres ángulos iguales ya que:

$\angle ADC = \angle BCM = \angle BAC$(la primera igualdad por ser AC y CM paralelas y la segunda por ser ∠BCM ángulo semiinscrito) y el ángulo ∠ACD es común.

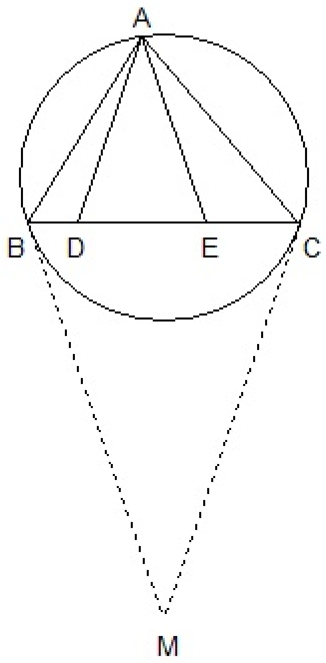

Figura 14: Problema 3

Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow CD \cdot BC = AC^2 (1)$$

De modo análogo los triángulos ABC y ABE son semejantes pues: ∠AEB = ∠EBM = ∠BAC y el ángulo ∠ABE es común. Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow BE \cdot BC = AB^2 (2)$$

Dividiendo las igualdades (1) y (2) se obtiene el resultado.

Problema 4(2001)

Sea P un punto, en el interior del triángulo ABC, de modo que el triángulo ABP es isósceles. Sobre cada uno de los otros dos lados de ABC se construyen exteriormente triángulos BCQ y CAR, ambos semejantes al triángulo ABP. Probar que los puntos P, Q, C y R o están alineados o son los vértices de un paralelogramo.

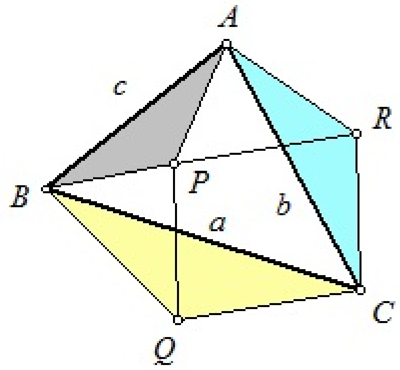

Figura 15: Problema 4

Solución

Los triángulos ABC y PBQ son semejantes pues tienen un ángulo igual $\angle$ABC = $\angle$PBQ y los lados que lo forman proporcionales:

$$\frac{c}{a} = \frac{BP}{BQ}$$

De modo análogo, ABC es semejante a APR , por tanto PBQ y APR son semejantes (y al ser PB = PA son iguales).

En particular: $\angle ARP = \angle ACB$ y $\angle BQP = \angle ACB$ Llamando $\alpha = \angle BAP = \angle ABP$, resulta:

$$\angle QPR = 360^o - (180^o - 2\alpha) - (A + B) = 180^o + 2\alpha - (180^o - \angle ACB) = 2\alpha + \angle ACB$$

$$\angle QCR = \angle ACB + 2\alpha$$

$$\angle PRC = 180^o - 2\alpha - \angle ARP = 180^o - 2\alpha - \angle ACB$$

$$\angle PQC = 180^o - 2\alpha - \angle BQP = 180^o - 2\alpha - \angle ACB$$

Las cuatro igualdades establecen que los dos pares de ángulos opuestos del cuadrilátero PQCR son iguales y es un paralelogramo.

La alineación es un caso particular y se producirá cuando$\angle ACB + 2\alpha = 180^o$, es decir cuando

$$\alpha = \frac{180^o - \angle ACB}{2}$$

Problema 5(2004)

ABCD es un cuadrilátero cualquiera, P y Q los puntos medios de las diagonales BD y AC respectivamente. Las paralelas por P y Q a la otro diagonal se cortan en O. Si unimos O con las cuatro puntos medios de los lados X, Y, Z y T se forman cuatro cuadriláteros, OXBY, OYCZ, OZDT y OTAX. Probar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.

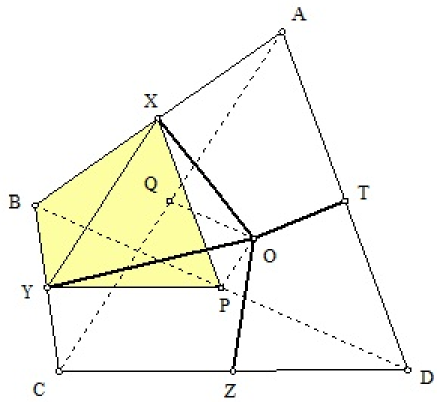

Figura 16: Problema 5

Solución

Al ser OP paralela a AC, los triángulos OXY, PXY tienen la misma base e igual altura y por tanto la misma área. De ahí que los cuadriláteros OXBY, PXBY también tienen la misma área, pero el área de PXBY (en amarillo en la figura) es la cuarta parte del cuadrilátero inicial al ser semejantes con razón 2 del grande al pequeño.

Problema 6(2005)

Diremos que un triángulo es multiplicativo si el producto de las longitudes de dos de sus lados es igual a la longitud del tercer lado. Sea ABC...XYZ un polígono regular de n lados con todos sus lados de longitud 1. Las n − 3 diagonales que salen del vértice A dividen al triángulo ZAB en n − 2 triángulos más pequeños. Probar que cada uno de esos triángulos es multiplicativo.

Solución

En la figura 6 hemos representado el caso de un octógono ABCDEFGH, pero el razonamiento es válido para cualquier polígono.

Consideremos una inversión con centro A y radio r=1. La circunferencia circunscrita al polígono pasa por el centro de inversión, por lo que su imagen es una recta, la recta BH que pasa por los puntos de intersección de ambas.

Consideremos los triángulos AUV y ACD, y apliquemos la fórmula que relaciona las longitudes de segmentos transformados por una inversión.

$$1 = CD = UV \cdot \frac{r^2}{AU \cdot AV} = \frac{UV}{AU \cdot AV}$$

Entonces $UV = AU \cdot AV$ y el triángulo AUV es multiplicativo.

Problema 7(2006)

ABC es un triángulo isósceles con AB = AC. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y a AC en C. Pongamos a, b y c

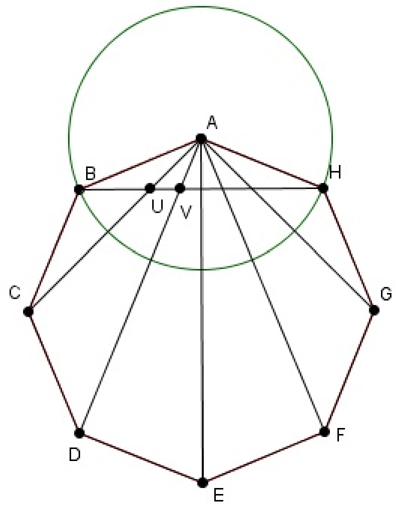

Figura 17: Problema 6

a las distancias desde P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que:

$$a^2 = b \cdot c$$

Solución

Pongamos m = PB; n = PC, Q, R y S las proyecciones de P sobre cada lado y sea P' el punto diametralmente opuesto a P . Por la semejanza de los triángulos PB' y PBS se tiene:

$$\frac{m}{c} = \frac{2r}{m} \Leftrightarrow m^2 = 2cr(1)$$

De modo análogo por la semejanza de PCP' y PBC se cumple:

$$\frac{n}{b} = \frac{2r}{n} \Leftrightarrow n^2 = 2br(2)$$

Por el teorema de los senos en PBC:

$$sen(\angle PBC) = \frac{n}{2r}$$

y en el triángulo rectángulo PQB:

$$sen(\angle PBQ) = \frac{a}{m}$$

de donde a=$\frac{mn}{2r} \Leftrightarrow a^2 = \frac{m^2n^2}{4r^2}$ y por (1) y (2) queda finalmente:

$$a^2 = b \cdot c$$

Problema 8(2007)

Sea O el circuncentro de un triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple:

$$\overline{AP}^2 + \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2 = bc$$

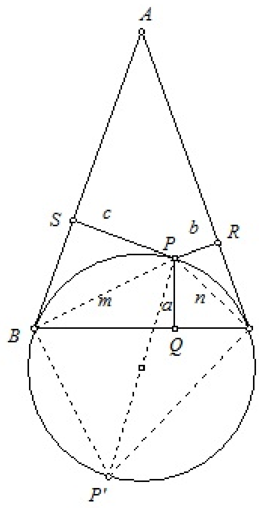

Figura 18: Problema 7

Solución

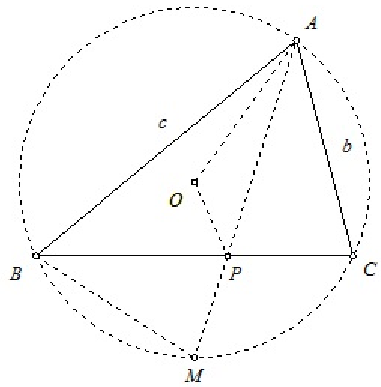

Figura 19: Problema 8

Prolongamos $\overline{AP}$ hasta que corte en M al circuncírculo. Los triángulos ABM y APC son semejantes al tener dos ángulos iguales.($\angle$ACB =$\angle$ AMB por inscritos en el mismo arco y $\angle$BAN = $\angle$CAN por bisectriz). Entonces:

$$\frac{c}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AP}}{b} \Leftrightarrow bc = \overline{AM} \cdot \overline{AP}$$

como $\overline{AM} = \overline{AP} + \overline{PM}$, queda:

$$bc = \overline{AP}(\overline{AP} + \overline{PM}) = \overline{AP}^2 + \overline{AP} \cdot \overline{PM}$$

$\overline{AP} \cdot \overline{PM}$ es la potencia de P respecto de la circunferencia circunscrita y su valor es $\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2$. Sustituyendo llegamos a:

$$\overline{AP}^2 + \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2 = bc$$

Problema 9(2008)

Dada una circunferencia y en ella dos puntos fijos A, B, otro variable P y una recta r; se trazan las rectas PA y PB que cortan a r en C y D respectivamente. Determina dos puntos fijos de r, M y N, tales que el producto CM·DN sea constante al variar P.

Solución

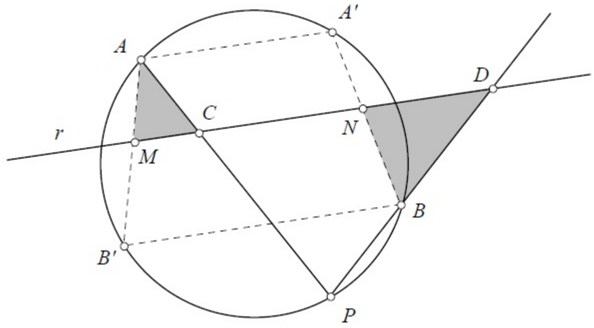

Figura 20: Problema 9

Trazamos las paralelas a r por A y B que cortan a la circunferencia en A' y B' respectivamente de modo que AA'BB' es un trapecio isósceles. Las intersecciones de AB' y BA' con r determinan los puntos M y N buscados. En efecto, los triángulos AMC y DNB (sombreados en la figura) son semejantes ya que tienen dos ángulos iguales:

$$\angle MAC = \angle B'BP = \angle NDB$$

donde la primera igualdad es cierta por ser ángulos inscritos en el mismo arco y la segunda por ser BB' paralela a r.

$$\angle AMC = \angle AB'B = \angle DNB$$

con argumentos análogos a los anteriores.

Estableciendo la proporcionalidad de los lados resulta

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{BN}} \Leftrightarrow \overline{MC} \cdot \overline{ND} = \overline{AM} \cdot \overline{BN}$$

Cantidad que no depende de P. Se observa que si la recta r pasa por el punto A, M = A = C, no se forma el triángulo AMC. En este caso $\overline{CM} = 0$ y el producto $\overline{CM} \cdot \overline{DN} = 0$, es constante. Análogamente este producto es cero si la recta r pasa por B o por los puntos A y B en cuyo caso $\overline{CM} = \overline{DN} = 0$

Problema 10(2010)

Sea P un punto cualquiera de la bisectriz del ángulo A en el triángulo ABC, y sean A', B', C' puntos respectivos de las rectas BC, CA, AB, tales que PA' es perpendicular a BC, PB' es perpendicular a CA y PC' es perpendicular a AB. Demuestra que PA' y B'C' se cortan sobre la mediana AM, siendo M el punto medio de BC.

Solución

Solución

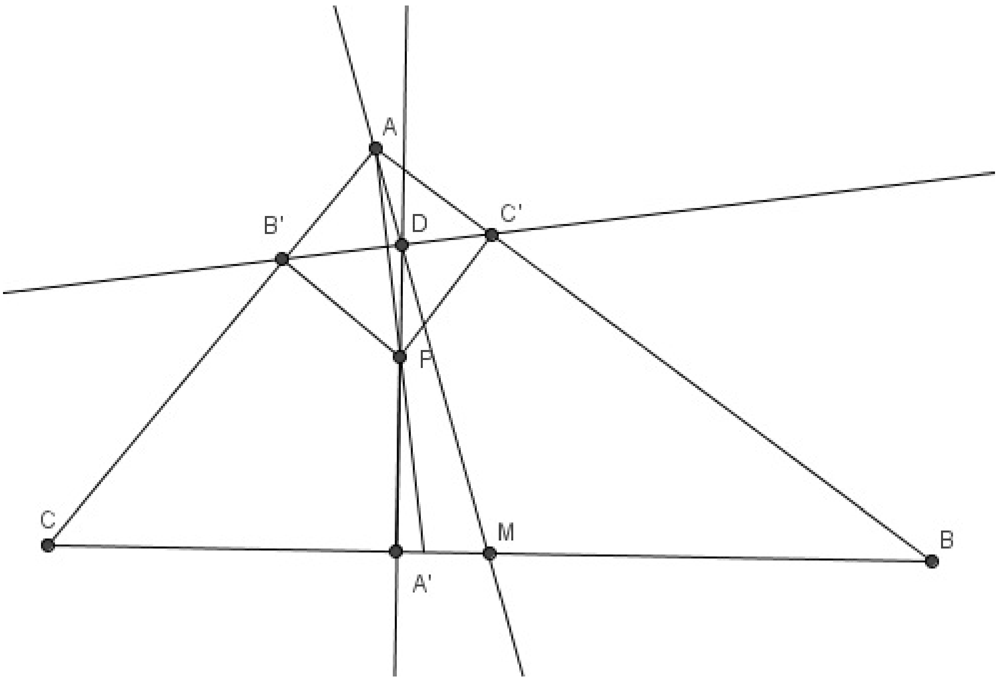

Figura 21: Problema 10

Sea E el punto de intersección de PA' y B'C'. Si P se mueve sobre la bisectriz AI (I es el incentro), la figura PB'C'E es homotética de sí misma con respecto al punto A. Luego E describe una recta que pasa por A. La bisectriz AI corta a la circunferencia circunscrita a ABC en F, que se proyecta en el punto medio A_m de BC; si P = F, la recta B'C' es la recta de Simson de F, luego el lugar geométrico de E es la mediana AA_m.

6. Problemas de la olimpiada internacional

En esta sección hemos puesto los problemas propuestos en la olimpiada internacional en los que en su resolución se utiliza como herramienta movimientos y transformaciones en el plano y en el espacio.

Problema 1(2006)

Sea ABCDE un pentágono convexo tal que $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ y $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$.

Las diagonales BD y CE se cortan en P. Demuestra que la recta AP divide al lado CD en dos partes iguales.

Solución

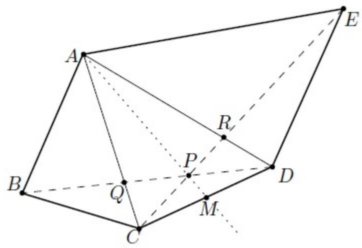

Figura 22: Problema 1

Sea Q la intersección de las diagonales AC y BD, R la intersección de las diagonales AD y CE y M el punto de corte de AP. Lo que queremos probar entonces es que CM=MD.

La idea es mostrar que Q y R dividen a AC y AD con la misma proporción, es decir:

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{AR}{RD}$$

Las igualdades de ángulos dadas implican que los triángulos ACD, ABC y ADE son semejantes. Entonces tenemos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$

Puesto que $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle CAD + \angle DAE = \angle CAE$, se deduce a partir de $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ que los triángulos ABD y ACE son también semejantes. Sus bisectrices en A son AQ y AR respectivamente, entonces

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AQ}{AR}$$

Porque $\frac{AB}{AC} = \frac{AQ}{AR}$, obtenemos $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ que es equivalente a $\frac{AQ}{QC} = \frac{AR}{RD}$. Aplicando el teorema de Ceva al triangulo ACD:

$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DR}{RA} = 1$$

Lo cual nos lleva a CM=MD, que completa la demostración.

Problema 2(2006)

Sea ABCD un trapecio con lados paralelos AB>CD. Sean K y L puntos en los segmentos AB y CD, respectivamente, tales que AK/KV=DL/LC. Suponemos que existen los puntos P y Q en el segmento KL tales que

$$\angle APB = \angle BCD \text{ y } \angle CQD = \angle ABC$$

Demostrar que los puntos P, Q, B y C son concíclicos.

Solución

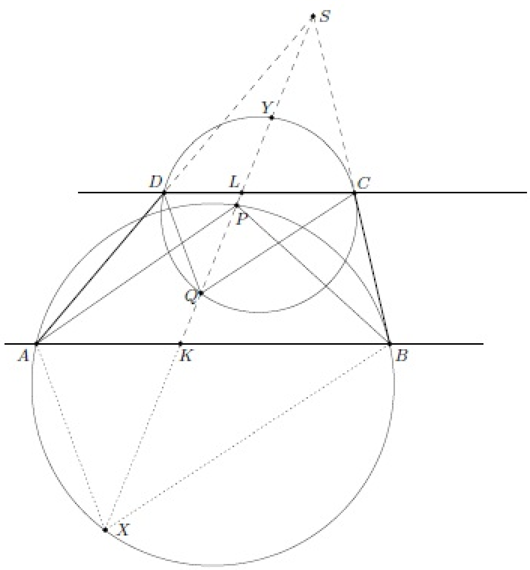

Figura 23: Problema 2

Como $AB \parallel CD$, la relación AK/KV=DL/LC implica que las rectas AD, BC y KL tienen un punto en común S.

Sean X e Y los puntos de intersección de la recta SK con los círculos circunscritos a ABP y CDQ respectivamente. Puesto que APBX es un cuadrilátero cíclico y $AB \parallel CD$, tenemos

$$\angle AXB = 180^{\rm o} - \angle APB = 180^{\rm o} - \angle BCD = \angle ABC$$

Esto demuestra que BC es tangente al círculo circunscrito al triángulo ABP en B. Análogamente se demuestra que BC es tangente al círculo circunscrito al triángulo CDQ. Entonces $SP \cdot SX = SB^2$ y $SQ \cdot SY = SC^2$.

Sea h la homotecia con centro S y razón SC/SB. Como h(B)=C implica que h transforma el círculo circunscrito al triángulo ABP en el círculo circunscrito CDQ. También h relaciona AB con CD y fácilmente se demuestra que h(P)=Y, h(X)=Q, donde SP/SY=SB/SC=SX/SQ.

Las igualdades $Sp \cdot SX = SB^2$ y SQ/SX=SC/SB implican que $SP \cdot SQ = SB \cdot SC$ que es equivalente a que P, Q, B y C sean concíclicos.

Problema 3(2007)

En un triángulo ABC, la bisectriz del vértice C es cortada por la circunferencia circunscrita y por las mediatrices de los lados BC y CA en los puntos R, P y Q, respectivamente. S y T son los puntos medios de los lados BC y CA, respectivamente. Demuestra que los triángulos RQT y RPS tienen la misma área.

Solución

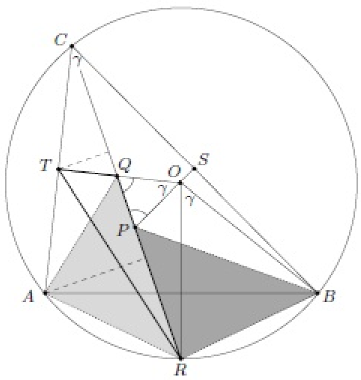

Figura 24: Problema 3

Si AC=BC el triángulo ABC es isósceles, Los triángulos RQT y RPS son simétricos respecto la bisectriz de C y por lo cual su área es la misma. Por lo cual, suponemos que AC<BC, sin perder generalidad. Llamamos O a la circunferencia circunscrita y γ al ángulo de C. Los triángulos rectángulos CTQ y CSP tienen el mismo ángulo en el vértice C , ya que son semejantes. Además $\angle OPQ = \angle OQP = 90^o - \frac{\gamma}{2}$. Entonces el triángulo OPQ es isósceles, OP=OQ y además $\angle POQ = \gamma$.

También es conocido que R es el punto medio del arco que une AB y que $\angle ROA = \angle BOR = \gamma$.

Consideremos el giro de centro O y ángulo γ. Esta transformación lleva A en R, R en B y Q en P, entonces los triángulos RQA y BPR son congruentes y tienen el mismo área.

Los triángulos RQT y RQA tienen a RQ como lado común, así que la proporción entre sus áreas es

$$\frac{area(RQT)}{area(RQA)} = \frac{d(T, CR)}{d(A, CR)} = \frac{CT}{CA} = \frac{1}{2}$$

Análogamente se demuestra que

$$\frac{area(RPS)}{area(BPR)} = \frac{CS}{CB} = \frac{1}{2}$$

Por lo cual

$$area(RQT) = \frac{1}{2}area(RQA) = \frac{1}{2}area(BPR) = area(RPS)$$

Problema 4(2007)

Las diagonales del trapezoide ABCD cortan en el punto P. El punto Q es el punto de corte de las paralelas BC y AD tal que $\angle AQD = \angle CQB$, y la recta CD separada de los puntos P y Q. Prueba que $\angle BQP = \angle DAQ$.

Solución

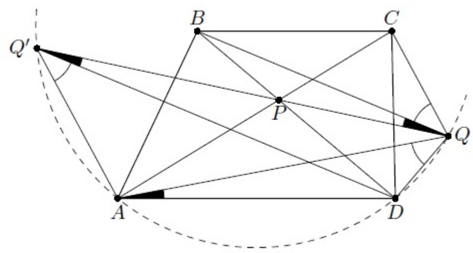

Figura 25: Problema 4

Sea t=$\frac{AD}{BC}$. Consideramos la homotecia h con centro P y razón -t. Los triángulos PDA y PBC son semejantes con razón t, entonces h(B)=D y h(C)=A.

Sea Q'=h(Q). Los puntos Q,P y Q' están alineados. Los puntos Q y P se encuentran en el mismo lado de AD, así como en el mismo lado de BC. Por lo tanto Q' y P están también en el mismo lado de h(BC)=AD, y por lo cual Q y Q' están en el mismo lado de AD. Además, los puntos Q y C están en el mismo lado de BD mientras que Q' y A están en el lado contrario.

Por la homotecia, $\angle AQ'D = \angle CQD = \angle AQD$, por lo cual el cuadrilátero AQ'QD es cíclico. Entonces

$$\angle DAQ = \angle DQ'Q = \angle DQ'P = \angle BQP$$

Problema 5(2009)

Sea ABC un triangulo y O su circuncentro. Los puntos P y Q son puntos interiores de los lados CA y AB respectivamente. La circunferencia k pasa por los puntos medios de las segmentes BP, CQ y PQ. Prueba que si la recta PQ es tangente a la circunferencia k entonces OP=OQ.

Solución

Sean K, L, M, B' y C' los puntos medios de BP, CQ, PQ, CA y AB respectivamente. Como CA$\|$ LM, tenemos que $\angle QPA = \angle LMP$. Como k toca el segmento PQ en M, obtenemos que $\angle LMP = \angle LKM$. Entonces $\angle QPA = \angle LKM$. De forma similar obtenemos que $\angle PQA = \angle KLM$ gracias a que AB$\|$ MK. Entonces los triángulos APQ y MKL son similares entonces:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{\frac{QB}{2}}{\frac{PC}{2}} = \frac{QB}{PC}$$

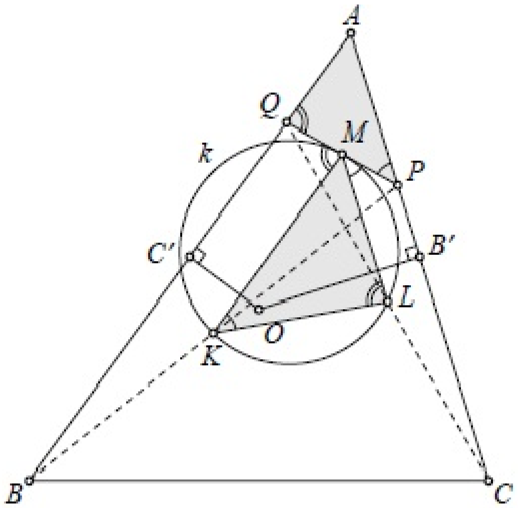

Figura 26: Problema 5

De aquí obtenemos que $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$ que significa que la potencia de los puntos P y Q respecto de la circunferencia circunscrita al triangulo ABC es la misma, entonces OP=OQ.

Problema 6(2010)

Sea ABC un triángulo, I su incentro y Γ su circunferencia circunscrita. La recta AI corta de nuevo a Γ en D. Sean E un punto en el arco formado por BDC y F un punto en el lado BC tales que

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$$

Sea G el punto medio del segmento IF. Demuestre que las rectas DG y EI se cortan sobre Γ.

Solución

Sea X el segundo punto de intersección de la recta EI con Γ, y L el pie de la bisectriz del ángulo BAC. Sean G' y T los puntos de intersección del segmento DX con las rectas IF y AF respectivamente. Tenemos que probar que G=G' o IG'=G'F. Por el teorema de Menelao aplicado al triangulo AIF y la recta DX, tenemos:

$$1 = \tfrac{G'F}{IG'} = \tfrac{TF}{AT} \cdot \tfrac{AD}{ID}, \text{ or } \tfrac{TF}{AT} = \tfrac{ID}{AD}$$

Sea K el punto de intersección de la recta AF con Γ, $K \neq A$. Entonces $\angle BAK = \angle CAE$ y tenemos que $\overline{BK} = \overline{CE}$ y por lo cual, $KE \parallel BC$. Por otro lado $\angle IAT = \angle DAK = \angle EAD = \angle EXD = \angle IXT$ así que los puntos I, A, X, T son cíclicos. Entonces $\angle ITA = \angle IXA = \angle EXA = \angle EKA$, por lo cual, $IT \parallel KE \parallel BC$. De aquí obtenemos que $\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI}$

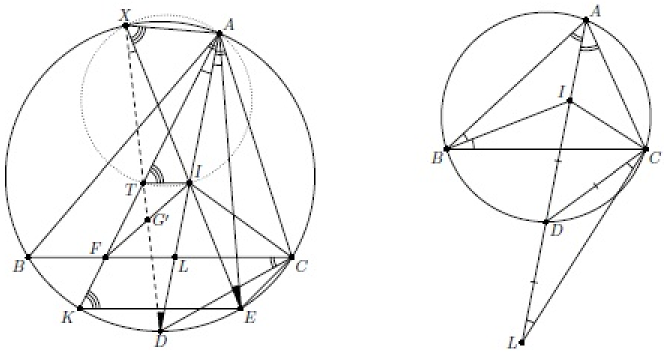

Figura 27: Problema 6

Como CI es la bisectriz del ángulo ACL, tenemos $\frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC}$. Además $\angle DCL = \angle DCB = \angle DAB = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAK$, entonces los triángulos DCL y DAC son semejantes, por lo cual $\frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD}$. Finalmente, es conocido que el punto medio D del arco BD es equidistante de los puntos I, B, C, entonces $\frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}$.

Uniendo todas estas igualdades llegamos a la conclusión $\frac{TF}{AT} = \frac{ID}{AD}$ como queríamos.

Problema 7(2010)

El punto P se encuentra en el interior del triángulo ABC. Las rectas AP, BP, CP cortan a la circunferencia circunscrita al triangulo ABC en los puntos K, L, M, respectivamente. La tangente a la circunferencia circunscrita en C corta a la recta AB en S. Demostrar que SC=SP si y sólo si MK = ML.

Solución

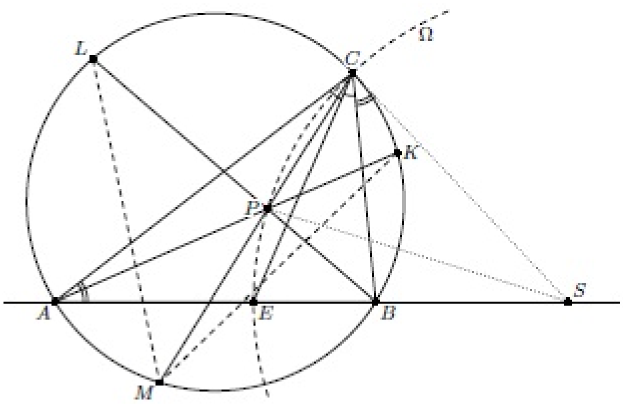

Figura 28: Problema 7

Asumimos que CA>CB, así que el punto S corta en la recta AB.

Por la semejanza de los triángulos PKM y PCA y los triángulos PLM y PCB tenemos que $\frac{PM}{KM} = \frac{PA}{CA}$ y $\frac{LM}{PM} = \frac{CB}{PB}$. Multiplicando estas dos igualdades tenemos que:

$$\frac{LM}{KM} = \frac{CB}{CA} \cdot \frac{PA}{PB}$$

Donde la relación MK=ML es equivalente a $\frac{CB}{CA} = \frac{PA}{PB}$

Llamamos E al pie de la bisectriz del ángulo B en el triangulo ABC. Recordemos que el lugar geométrico de los puntos X tales que $\frac{XB}{XA} = \frac{CA}{CB}$ es la circunferencia de Apolonio Ω con centro Q en la recta AB, y pasa por los puntos C y E. Entonces tenemos que MK=ML si y solo si P esta en Ω, es decir, QP=QC.

Ahora probaremos que S=Q resolviendo así el problema. Tenemos que $\angle CES = \angle CAE + \angle ACE = \angle BCS + \angle ECB = \angle ECS$ así que SC=SE. Entonces el punto S se encuentra en el punto de corte de la recta AB con la mediatriz de CE y por tanto coincide con Q.

Problema 8(2011)

Sea ABC en triangulo acutángulo con circunferencia circunscrita Ω. Sea B_0 el punto medio del AC y C' el punto medio de AB. Sea B el pie de altura de A y G el baricentro del triangulo ABC. Sea ω una circunferencia que pasa por B_0 y C' que es tangente a Ω en el punto $X \neq A$. Demuestra que los puntos D, G y X están alineados.

Solución

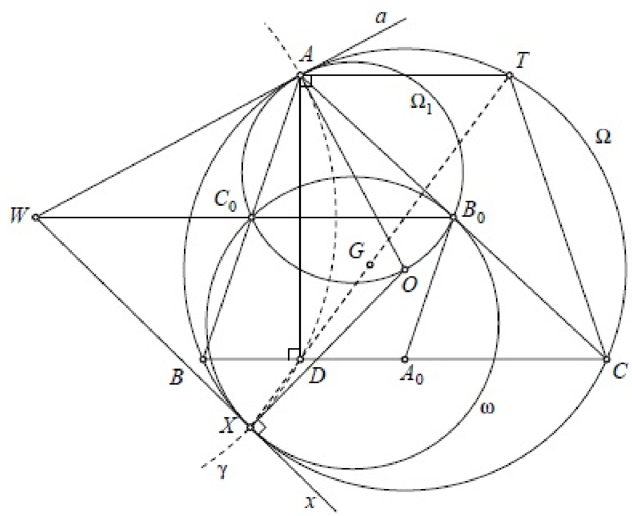

Figura 29: Problema 8

Si AB=AC, la demostración es trivial. Supondremos sin perdida de que generalidad que AB<AC. Llamemos a las tangentes de Ω en los puntos A y X, a y x respectivamente.

Ω_1 la circunferencia circunscrita al triangulo AB_0C_0. Las circunferencias Ω y Ω_1 son homotéticas con centro A, así que la tangente a A y a es su eje radical. Las rectas a, x y B_0C_0 son los tres ejes radicales de las tres circunferencias Ω, Ω_1 y ω. Entonces estas tres rectas son concurrentes en un punto W.

Los puntos A y D son simétricos respecto de la recta B_0C_0, por lo cual WX=WA=WD. Esto significa que W es el centro de la circunferencia circunscrita γ del triangulo ADX. Además, $\angle WAO = \angle WXO = 90^o$, donde O denota el centro de Ω. Por lo cual $\angle AWX + \angle AOX = 180^o$.

Sea T la segunda intersección de Ω y la recta DX. Notemos que O pertenece a Ω_1. Usando las circunferencias Ω y γ, tenemos que $\angle DAT = \angle ADX - \angle ATD = \frac{1}{2}(360^o \; - \angle AQX) - \frac{1}{2}\angle AOX = 180^o \; - \frac{1}{2}(\angle AWX + \angle AOX) = 90^o$. así que $AD \perp AT$, y por lo cual AT$\|$ BC. Entonces ATCB es un trapecio isósceles inscrito en Ω.

Llamemos A_0 al punto medio de BC, y consideremos la imagen de ATCB bajo la homotecia H con centro G y razón $-\frac{1}{2}$. Entonces h(A)=A_0, h(B)=B_0 y h(C)=C_0. Por la simetría sobre B_0C_0 tenemos que $\angle TCB = \angle CBA = \angle B_0C_0A = \angle DC_0B_0$. Usando AT$\|$ DA_0 concluimos que h(T)=D. Entonces los puntos D, G y T están alineados y X pertenece a esta recta.

Problema 9(2012)

Sea ABCD un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales cortan en el punto E. La extensión de los lados AD y BC por A y B corta en el punto F. Sea G el punto tal que ECGD es un paralelogramo y sea H la imagen de E bajo la reflexión en AD. Demuestra que D, H, F y G son concíclicos.

Solución

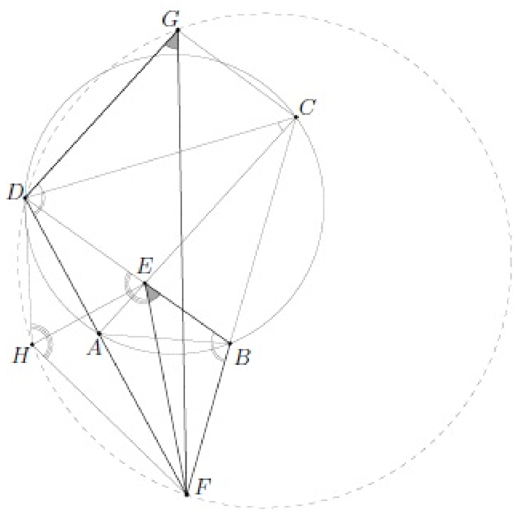

Figura 30: Problema 9

Vamos a demostrar primero que los triángulos FDG y FBE son semejantes. Puesto que ABCD es cíclico, los triángulos EAB y EDC son semejantes, por lo cual FAB y FCD también lo son. Por ser ECGD paralelogramo, GD=EC y $\angle CDG = \angle DCE$, también $\angle DCE = \angle DCA = \angle DBA$ por ser ángulos inscritos.

Entonces

$$\angle FDG = \angle FDC + \angle CDG = \angle FBA + \angle ABD = \angle FBE$$

$$\frac{GD}{EB} = \frac{CE}{EB} = \frac{CD}{AB} = \frac{FD}{FB}$$

Por lo cual FDG y FBE son semejantes y $\angle FGD = \angle FEB$.

Puesto que H es la reflexión de E con respecto de FD, concluimos que

$$\angle FHD = \angle FED = 180^{\circ} - \angle FEB = 180^{\circ} - \angle FGD.$$

Esto demuestra que D, H, F y G son concíclicos.

Problema 10(2012)

Dado un triangulo ABC, el punto J es el centro del excírculo opuesto al vértice A. Este excírculo es tangente al lado BC en M, y a las rectas AB y AC en K y L, respectivamente. Las rectas LM y BJ se cortan en F, y las rectas KM y CJ se cortan en G. Sea S el punto de intersección de las rectas AF y BC, y sea T el punto de intersección de las rectas AG y BG. Demostrar que M es el punto medio de ST.

Solución

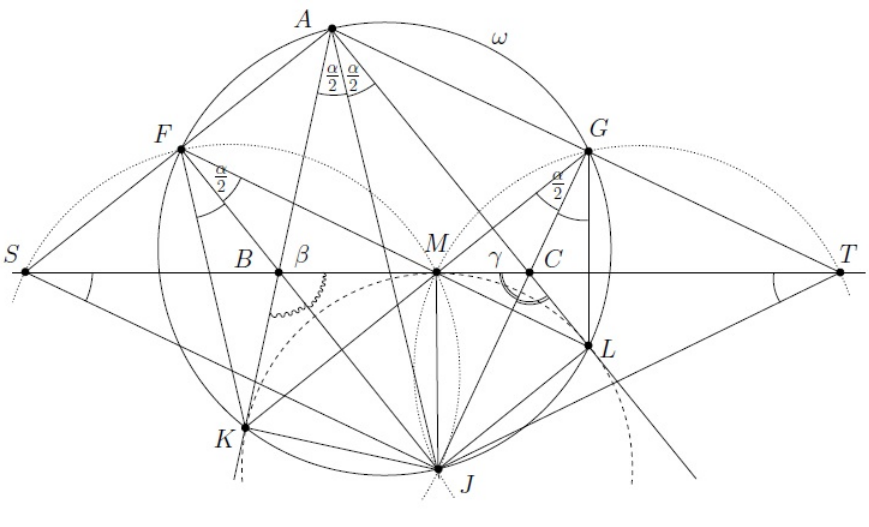

Figura 31: Problema 10

Sea $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ y $\gamma = \angle BCA$. La recta AJ es la bisectriz de $\angle CAB$ así que $\angle JAK = \angle JAL = \frac{\alpha}{2}$. Por $\angle AKJ = \angle ALJ = 90^{\circ}$ los puntos K y L están en el circulo ω con diámetro AJ.

Como BM y BK son las tangentes al excírculo, el triángulo KNM es isósceles. Puesto que BJ es la bisectriz de $\angle KBM$, tenemos que $\angle MBJ = 90^{\text{o}} - \frac{\beta}{2}$ y $\angle BMK = \frac{\beta}{2}$. Igualmente se deduce que $\angle CML = \frac{\gamma}{2}$. Entonces $\angle BMF = \angle CML$, por lo cual

$$\angle LFJ = \angle MBJ - \angle BMF = (90^{\text{o}} - \tfrac{\beta}{2}) - \tfrac{\gamma}{2} = \tfrac{\alpha}{2} = \angle LAJ.$$

Entonces F esta en el circulo ω. (Por el cálculo del ángulo, F y A están en el mismo lado de BC.) Análogamente, G también está en ω. Puesto que AJ es el diámetro de ω, obtenemos que $\angle AFJ = \angle AGJ = 90^{\text{o}}$.

Las rectas AB y BC son simétricas con respecto a la bisectriz externa BF. Como $AF \perp BF$ y $KM \perp BF$, los segmentos SM y AK son simétricos con respecto de BF, entonces SM=AK. Por simetría TM=AL. Puesto que AK y Al son iguales como tangentes del excírculo, SM=TM, y por lo cual la demostración esta completa.

Referencias

[1] Sánchez-Rubio Garcia, Cristóbal, Ripollés Amela, Manuel: Manual de matemáticas para la preparación olímpica. Universitat Jaume I, 2000.

[2] Sessions de preparació per a l'olimpíada matemática. Societat catalana de matemátiques, 2000.

[3] García Capitán, Francisco J.Inversión en olimpiadas. Revista escolar de la olimpíada iberoamericana de matemática, 2005.