Hay cinco tetraminos

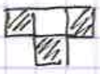
Prueba que no se puede construir un rectángulo con estas piezas

El rectángulo sería 4x5 = 20 y por tanto tendría 20 casillas

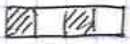
Si coloreamos el rectángulo como el tablero de ajedrez tendremos 10 casillas coloreadas de blanco y 10 casillas coloreadas de negro

Al colocar cada una de las piezas sobre el rectangulo nos casillas estarían coloreadas como se indica en la figura

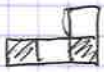
2B y 2N



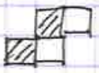
3B y 1N ó bien 1B y 3N



2B y 2N



2B y 2N



2B y 2N

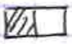
Por lo tanto tendríamos un número impar de casillas blancas y un número impar de casillas negras, lo que es una contradicción

¡NOTAS DE TRABAJO MANUSCRITAS.
ES NECESARIO REVISARLAS!

Si en un tablero de ajedrez 8x8 se eliminan dos casillas del mismo color, entonces no se puede cubrir con piezas 1x2

Al quitar dos casillas del mismo color, por ejemplo dos casillas blancas, quedan 32 casillas negras y 30 casillas blancas.

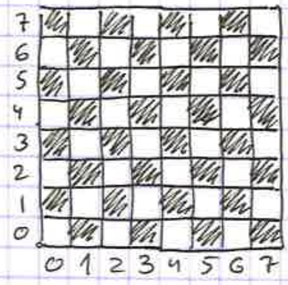
Al colocar una pieza 1x2 en el tablero, esta ocupará una casilla blanca y otra negra



Como el tablero mutilado se recubrirá con 31 piezas, tendremos ocupadas 31 casillas blancas y 31 casillas negras, lo que es una contradicción.

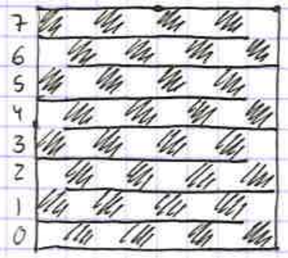
Si en un tablero de ajedrez 8x8 se eliminan dos casillas de distinto color, prueba que siempre se puede cubrir con piezas 1x2

Consideramos el tablero coloreado de la siguiente forma



Observa que las casillas blancas están determinadas por pares (a,b) verificando que $a+b$ es par. En cambio si la casilla es negra está determinada por un par (c,d) con $c+d$ impar

Si eliminamos dos casillas, una blanca (a,b) y una negra (c,d), consideramos cuatro posibles caminos que recorren todas las casillas. Uno de la casilla (0,0) a la casilla (0,7), siguiendo las filas, tal y como se indica en la figura, y otro el correspondiente siguiendo las columnas.



Un tercero de la casilla (0,7) a la casilla (7,7) siguiendo las filas y un cuarto siguiendo las columnas. También podemos considerar los caminos inversos, de forma que en total tenemos ocho posibles caminos.

Consideramos un orden entre los pares (x,y), definido por

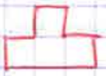
$$(x_1,y_1) \le (x_2,y_2) \quad \text{si} \quad x_1 < x_2 \quad \text{y}$$
$$\text{si} \quad x_1 = x_2 \quad \text{entonces} \quad y_1 \le y_2$$

De esta forma para el camino primero tenemos un orden en las casillas. Si $(a,b) \le (c,d)$ entonces el camino $(0,0) \longrightarrow (a,b)$ tiene un nº par de casillas hasta la anterior (a,b), ya que ésta es negra. De la casilla siguiente a (a,b), que es negra, a la casilla anterior a la (c,d) hay un número par de casillas, ya que ésta última es blanca, y de la casilla posterior a la (c,d) a la casilla (0,7) hay un número par de casillas, por lo tanto se puede recubrir el tablero mutilado

Si $(c,d) \leq (a,b)$ entonces este argumento no es válido, pero si lo es si utilizamos el orden inverso, esto es, comenzando en $(0,7)$ y acabando en $(0,0)$.

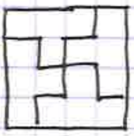
Este argumento es válido para cualquier otro orden y su correspondiente orden inverso.

Determina para qué valores de m y n es posible construir un rectángulo $m \times n$ con piezas del tipo



Este problema aparece en la OME-34 de 1998 para el caso de cuadrados de lado n.

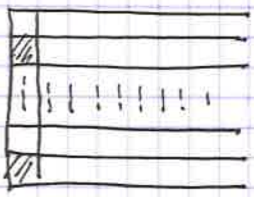
Primero observa que podemos construir un cuadrado 4×4 mediante la siguiente configuración



Por lo tanto podemos completar rectángulos del tipo $4k \times 4h$

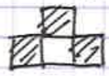
Si podemos recubrir un rectángulo $m \times n$, necesitaremos $\frac{mn}{4}$ piezas.

Si coloreamos el rectángulo como un tablero de ajedrez, como $4 \mid mn$ podemos suponer que m es par, sea $m = 2t$ entonces podemos suponer que el rectángulo tiene m filas y que la primera columna es



El número de casillas blancas es igual al número de casillas negras, e igual a $mn/2$.

Cada pieza al colocarla sobre el tablero ocupa casillas blancas y casillas negras según la siguiente configuración

 3 negras y 1 blanca  1 negra y 3 blancas

Si colocamos a piezas del tipo primero y b del tipo segundo, los números a y b verifican las siguientes relaciones

$$\left.\begin{array}{l} a+b = mn/4 \\ 3a+b = mn/2 \\ a+3b = mn/2 \end{array}\right\}$$

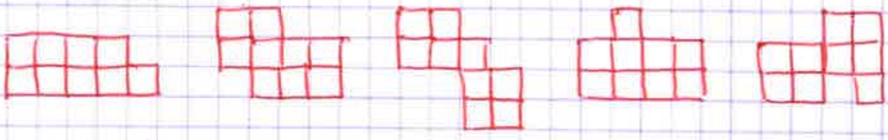
$mn/2 = 2\,mn/4 = 2(a+b)$, y por tanto $a=b$. En consecuencia $2a = mn/4 \Rightarrow 8 \mid mn$

En el caso de un cuadrado $n=m \Rightarrow 8 \mid m^2$, luego $4 \mid m$ y los posibles cuadrados son $4k \times 4h$ como ya hemos visto.

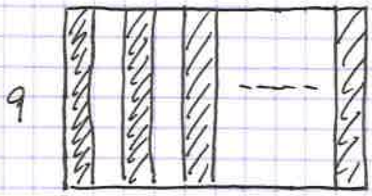
Cuando el rectángulo no es un cuadrado tenemos que los únicos rectángulos que se pueden cobrir sean los del tipo $4k \times 4h$. Una demostración aparece en

D. W. Walkup, Covering a rectangle with T-tetrominoes Amer Math. Monthly 72 (1965), 986-988.

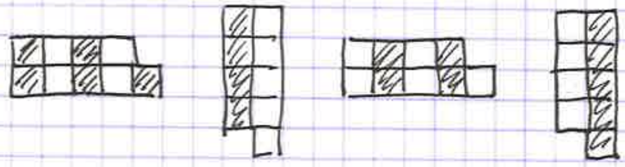
Determina para que valores de n (impar) es posible recubrir una cuadrícula $9\times n$, con los siguientes 9-minos



Dado el rectángulo $9\times n$ coloreamos con dos colores, blanco y negro, por columnas



Si suponemos que n es impar tenemos $(n+1)/2$ columnas negras y $(n-1)/2$ columnas blancas. Por otro lado al colocar cada una de las piezas en la cuadrícula sus casillas tomarán los colores de la retícula y por tanto existen dos tipos de coloraciones para cada pieza



Una tiene 5 casillas negras y la otra tiene solo 4. Si a es el número de piezas con 5 casillas negras y b es el número de piezas con 4 casillas negras, se verifican las siguientes relaciones

$$\left.\begin{aligned} a+b &= n \\ 5a+4b &= (n+1)/2 \\ 4a+5b &= (n-1)/2 \end{aligned}\right\}$$

Que tiene como única solución $n=0$, $a=1/2$, $b=-1/2$ Por lo tanto no es posible recubrir rectángulos $9\times n$ siendo n impar.

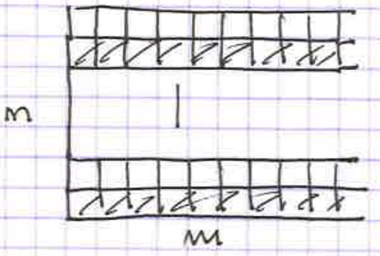
Determina los enteros positivos m y n para los que un rectángulo m x n puede cubrirse con L-tetraminos

Propuesto por Golomb en Amer. Math. Monthly, 69 (1962), p. 920

Resuelto por Klarner en Amer. Math. Monthly 70 (1963).

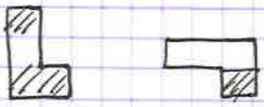
Se tiene $4 \mid mn$ y $mn/4$ es el número total de piezas necesarias

Entonces m ó n es un número par. Supongamos que m es par y consideramos la colocación por filas



Tenemos $m/2$ filas blancas y por tanto $mn/2$ casillas blancas, y el mismo número de negras

Dado un L-tetramino , al colocarlo sobre la retícula tiene básicamente las colocaciones



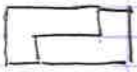
y sus inversas

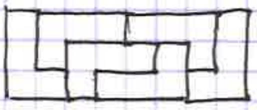
Tenemos pues que cada pieza tiene 3 casillas negras y una blanca o 3 casillas blancas y una negra. Llamamos a al número de piezas del primer tipo y b al número de piezas del segundo

Al contar tenemos las siguientes relaciones

$$\left.\begin{array}{l} a+b = mn/4 \\ 3a+b = mn/2 \\ a+3b = mn/2 \end{array}\right\}$$

De donde resulta que $a=b$ y de aquí $2a = mn/4$, esto es $8 \mid mn$

Es claro que el menor rectángulo es  que es 2x4 y por tanto tendremos rectángulos $2 \times (4h)$.

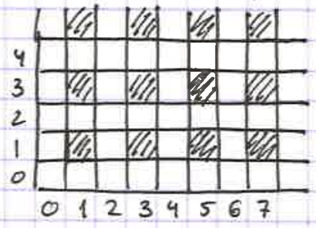
También tenemos un rectángulo  que es 3x8

Entonces podemos recubrir cualquier rectángulo $8 \times k$ con $k \geq 2$ y por lo tanto cualquier rectángulo

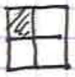
Prueba que una cuadricula rectangular 4 x 11 no puede recubrirse con L-tetraminos

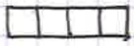
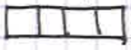
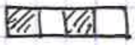
Una cuadrícula rectangular está cubierta por piezas 2x2 y 1x4. Prueba que si se quita una pieza de un tipo y se sustituye por una del otro, no es posible recubrir de nuevo la cuadrícula con estas piezas.

Observa que si coloreamos la cuadrícula al modo del ajedrez, no obtenemos diferencias entre las dos piezas. Vamos pues a colorear del siguiente modo



esto es, coloreamos de negro las casillas (i,j) con $i j$ impar.

Dada la pieza , ésta sólo se puede colorear de un modo 

En cambio la pieza  se puede colorear de dos formas diferentes:  y 

Por tanto al cambiar una pieza de un tipo por una del otro estamos cambiando el número de casillas coloreadas de negro.

Puede una cuadricula 6×6 cubrirse con piezas 1×4

La respuesta es no Coloreamos la cuadricula con cuatro colores 1, 2, 3, 4 del siguiente modo

1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

De esta forma al colocar una pieza 1×4, ésta estará coloreada con los cuatro colores.

Para cubrir el cuadrado necesitamos $36/4 = 9$ piezas y por tanto tendremos 9 casillas coloreadas de cada uno de los colores; pero en la cuadricula la distribución de colores es

$1 \longrightarrow 9$

$2 \longrightarrow 10$

$3 \longrightarrow 9$

$4 \longrightarrow 8$

Por lo tanto no se puede recubrir la cuadricula.

Dados enteros positivos k, n, m, determina para qué valores de n y m es posible recubrir un rectángulo $n \times m$ con piezas $1 \times k$.

Es claro que si $k | n$ ó $k | m$ entonces es posible recubrir el rectángulo.

Supongamos que $k \nmid n$ y $k \nmid m$ En este caso tendremos una distribución de bloques del rectángulo $n \times m$ utilizando cajas $k \times k$

$m = kq + s$

$n = kq' + r$

m

n

k×k	k×k	---	k×k	k×s
k×k	k×k	——	k×k	k×s
⋮	⋮		⋮	⋮
k×k	k×k	---	k×k	k×s
r×k	r×k	---.	r×k	r×s

Coloreamos en diagonal comenzando por la esquina superior izquierda Así un bloque $k \times k$ se colorea

$$\begin{array}{|l|}\hline 1\ 2\ 3\ ----k \\ 2\ 3\ --\ k\ 1 \\ 3\ --\ k\ 1\ - \\ --\ k\ 1\ -- \\ \cdot\ k\ 1\ --- \\ k\ 1\ ---\ k\text{-}1 \\ \hline\end{array}$$

y en cada fila y columna aparece una vez cada uno de los números 1 --- k

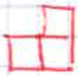
Un bloque $k \times s$ ó $r \times k$ se colorea

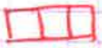
$$\begin{array}{|l|}\hline 1\ 2\ 3\ --\ s \\ 2\ 3\ --\ s\ 1 \\ 3\ --\ s\ 1\ k \\ --\ s\ 1\ k \\ -\ s\ 1\ k \\ s\ 1\ k \\ \vdots\ k \\ k \\ \hline\end{array}$$

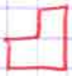
en cada fila aparece una vez cada uno de los números 1 --- k.

Para el bloque $r \times k$ se hace igual, pero ahora con las columnas

En el bloque $r \times s$ el número de 1, 2, — k es diferente y por lo tanto al colocar piezas $1 \times k$ nuestro rectángulo no quedará cubierto salvo que $r \times s = 0$, esto es, n ó m sea múltiplo de k

Dado un tablero de ajedrez 8x8 y los triminos  y  Si eliminamos una casilla,

1) ¿Es posible completar el tablero con piezas del tipo ?

2) ¿Y con piezas  y ?

Analizar según la posición de la casilla eliminada

Hacemos la siguiente coloración

0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2

Nº de casillas

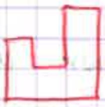
0 → 21

1 → 22

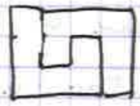
2 → 21

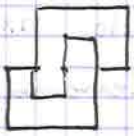
Si eliminamos una casilla con color 0 ó 2 entonces no se puede cubrir el resto con piezas 1x3.

Si la casilla eliminada es una con el color 1, entonces el número de casillas coloreadas coincide. Hay que buscar una estrategia para completar el tablero.

Se define una "jota" como un hexamino . Determinar los rectángulos m×n que se pueden cubrir con "jotas".

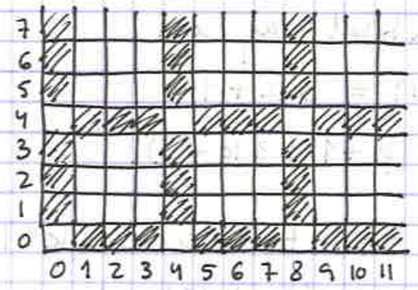
Observa que las dos únicas formas de unir dos jotas son las siguientes





Con la primera podemos completar rectángulos 3k×4h

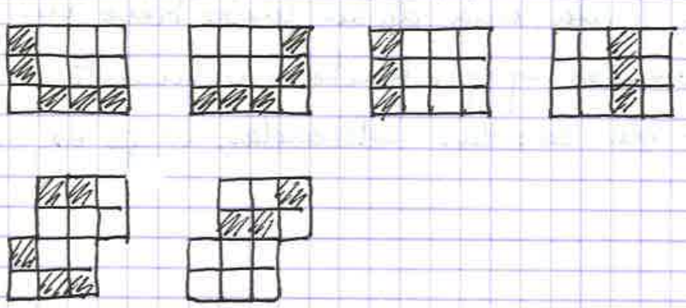
Consideramos la siguiente coloración del rectángulo



$(a,b) \to 1$ si $4|a$ ó $4|b$ pero no ambos

$\to 0$ en otro caso

Cada una de las composiciones anteriores ocupa un número impar de casillas coloreadas



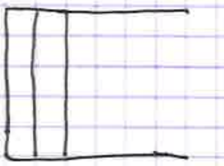
Tenemos $12|mn$, y podemos suponer que $2|m$.

Veamos el caso en el que $4|m$.

Cuando $3|m$ tenemos solución componiendo rectángulos 3×4

Veamos el caso en el que $12|n$

Tenemos ge es posible recubrir un rectángulo 12×7, y en general cualquier rectángulo $m(3a+4b)$; nos quedan por analizar $m = 1,2,5$. El caso m×1 y m×2 son imposibles, y el caso m×5 también es imposible, pues no podríamos cobrir la primera columna



Queda por analizar el caso en el qe $4\nmid n$ y $4\nmid m$

Tenemos entonces que n y m son pares, ya qe $4|nm$ y el número de piezas dobles qe tenemos qe colocar es $nm/12 = (nm/4)/3$ que es un entero impar.

Tenemos que el rectangulo $n\times m$ tiene un número par de casillas coloreadas. Tenemos que contar las casillas (a,b) con $0\leq a<m$ y $0\leq b<n$. Como $2|n,m$ y $4\nmid n,m$, podemos suponer $n=4k+2$ y $m=4h+2$

$4|a \Rightarrow a=0,4,\_\_,4h$ en total hay $h+1$

$4|b \Rightarrow b=0,4,\_\_,4k$ en total hay $k+1$

$4\nmid b \Rightarrow$ hay $4k+2-(k+1) = 3k+1$

Pares para colorear hay $(h+1)(3k+1)$.

En el caso en el que $4|b$ y $4\nmid a$ tenemos $(k+1)(3h+1)$.
En total tenemos $(h+1)(3k+1)+(k+1)(3h+1)$ que es par.

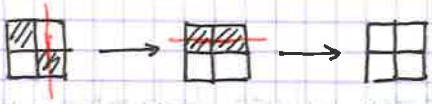
Por otro lado, como $nm/12$ es impar, necesitamos un número impar de piezas dobles, cada una de las cuales tiene un número impar de casillas coloreadas y por tanto finalmente tendremos un número impar de casillas coloreadas, lo qe es una contradicción

JUEGO

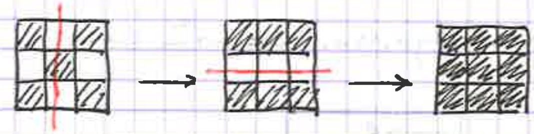
Tenemos un tablero de ajedrez mxm coloreado del modo habitual. Se puede seleccionar un rectángulo dentro del tablero e invertir el color de todas sus casillas. Determina el número mínimo de selecciones que tenemos que hacer para que todas las cuadrículas tengan el mismo color

USAMO - 1998 Problema 4

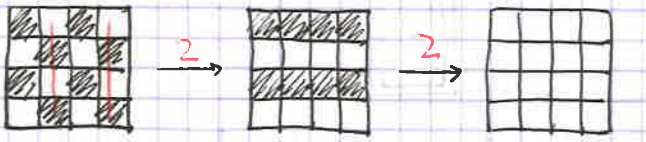
Veamos algunos ejemplos



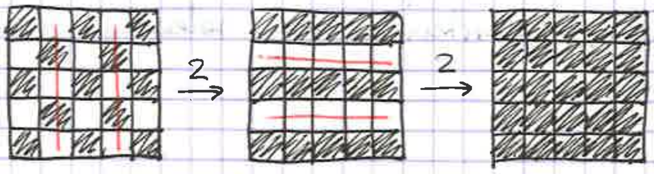
Son necesarias dos selecciones



Son necesarias dos selecciones

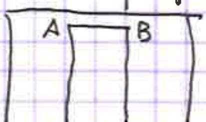


Son necesarias 4 selecciones, al igual que el caso 5x5



Tenemos pues un posible valor para el caso mxm; Si $m=2k$ ó $m=2k+1$, el número de selecciones es $2k$ y para esto trabajamos con las columnas pares (k) y después con las filas pares (k). En total $2k$

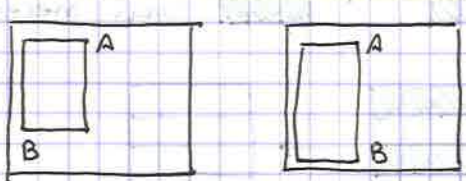
Para probar que este es el número optimo, consideramos las casillas del borde del tablero. Tenemos en total $4(m-1)$
Vamos a contar los cambios de color que se producen cuando las recorremos (por ejemplo en el sentido de las agujas del reloj).
Al inicio tenemos exactamente $4(m-1)$ cambios y al final tenemos que tener 0.
Observa que cuando un rectángulo contiene alguna de estas casillas, las del interior cambian de color, y podemos tener entonces 4 posibles cambios de color en A, B, C, ó D; también puede ocurrir



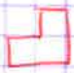
que dos casillas contiguas tuviesen el mismo color y tras el cambio estas sean distintas precisamente por estar una en el interior y otra en el exterior del rectangulo. Por tanto, en el caso más favorable tenemos 4 cambios en cada selección y en consecuencia al menos necesitamos $n-1$ selecciones

Si n es impar entonces tenemos una estrategia para conseguir el resultado en $n-1$ seleccione

Si n es par, como las esquinas tienen colores distintos, al menos una seleccion debe contener una esquina. En este caso



unicamente se produciran dos cambios y por tanto no alcanzariamos el valor $4(n-1)$, es decir, necesitamos una seleccion adicional y por tanto son necesarias n.

Si en una cuadrícula $2^n \times 2^n$ se quita una casilla, prueba que ésta puede ser cubierta por triminos de la forma 

Teorema de Golomb. Hacer por inducción

Tenemos un tablero de damas 5x5. Siguiendo las reglas del juego de damas y teniendo en cuenta que una pieza puede saltar sobre otra si hay un hueco y que esto lo puede hacer horizontal y verticalmente, pero no en diagonal, quedando eliminada la pieza sobre la que se salta. Estudiar si es posible dejar una sola pieza en el tablero en los siguientes casos

1) La posición inicial es

O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O		O	O
O	O	O	O	O

2) La posición inicial tiene el hueco en la casilla central

Coloreamos el tablero en la siguiente forma

1	2	3	1	2
2	3	1	2	3
3	1	2	3	1
1	2	3	1	2
2	3	1	2	3

A 1 ⟶ 8 ⟶ P

A 2 ⟶ 9 ⟶ I

A 3 ⟶ 8 ⟶ P

Un movimiento cualquiera afecta a tres casillas consecutivas

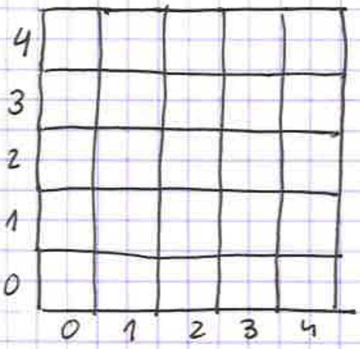
A	B	C
a	b	c

Si A salta sobre B y ocupa C tenemos que eliminar a y b y agregar c, por lo tanto la paridad de los conjuntos A_1. A_2 y A_3 cambia.

2) Si eliminamos la pieza central, la distribución original de números es $|A_1| = 8$, $|A_2| = 8$, $|A_3| = 8$, luego tenemos una terna (Par, Par, Par). Como tenemos que eliminar 23 piezas hacemos 23 movimientos o cambios de paridad; siendo finalmente la paridad (Impar, Impar, Impar). En consecuencia en este caso no podemos acabar con una sola pieza

1) En este caso la distribución original es $|A_1| = 8$, $|A_2| = 9$, $|A_3| = 7$ luego (P, I, I) y tras 23 movimientos quedará (I. P. P). luego puede ser que el juego acabe con una sola pieza en el tablero.

Un ejemplo de juego es el siguiente



1º (2,3) / (2,2)
2º (2,0) / (2,1)
3º (4,3) / (3,3)
4º (2,3) / (2,2)
5º (4,0) / (3,0)
6º (4,3) / (3,3)
7º (2,1) / (2,2)
8º (2,4) / (2,3)
9º (4,1) / (3,1)
10º (4,4) / (3,4)

11º (2,1) / (2,2)
12º (0,2) / (2,2)
13º (2,3) / (2,1)
14º (0,4) / (0,3)
15 (1,4) / (1,3)
16 (0,2) / (2,2)
17 (2,1) / (2,2)
18 (2,4) / (2,3)
19 (1,0) / (2,0)
20 (0,1) / (1,1)
21 (2,2) / (2,1)
22 (3,0) / (2,0)
23 (0,0) / (1,0)

Cuál es el número mínimo de casillas que tenemos que pintar de una cuadrícula 8x8 para qe al colocar una pieza 1x3 siempre esté sobre una casilla pintada

Dada la cuadrícula la coloreamos según la figura

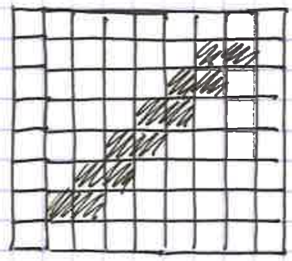
0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2

0 → 21
1 → 22
2 → 21

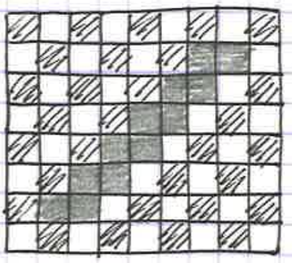
De esta forma al colocar una pieza 1x3 siempre tendrá en sus casillas los números 0, 1 y 2. Podemos colorear sólo las casillas con 0 y de esta forma obtenemos que el número mínimo de casillas es 21. También podemos colorear las casillas con 2, obteniendo el mismo resultado.

¿Cuál es el número máximo de dominós que podemos colocar en las casillas del siguiente tablero 8×9 si seis de ellos han sido ya colocados como se indica en la figura.

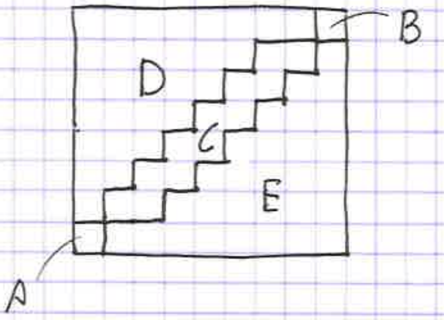
Olimpiada Canadá 2007



Coloreamos el tablero según un tablero de ajedrez



Tenemos cinco regiones distintas en este tablero



La region B está coloreada de negro y la región A está coloreada de blanco

La region C tiene 6 casillas negras y 6 blancas

La region D tiene 16 casillas negras y 13 casillas blancas

La region E tiene 16 casillas blancas y 13 casillas negras

La region $A \cup D$ tiene 16 casillas negras y 14 casillas blancas

La region $B \cup E$ tiene 16 casillas blancas y 14 casillas negras.

Además en cada una de estas regiones podemos acomodar 14 piezas

Por tanto el resultado es $2 \times 14 + 6 = \underline{34}$