ESTALMAT-*Andalucía*

TRIÁNGULOS

Pascual Jara y Ceferino Ruiz

Granada

1. Definición de triángulo

Comenzamos la Geometría viendo como organizar figuras en el plano.

Los ejemplos más sencillos de figuras a estudiar son los polígonos y, dentro de ellos, los triángulos.

Para aclararnos vamos a ver qué vamos a entender por un triángulo:

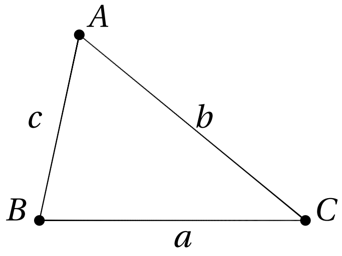
Un **triángulo** es la región (cerrada) del plano delimitada por tres segmentos que se cortan dos a dos en sus extremos.

¿Qué elementos son de destacar en un triángulo?

(1) Los **vértices**. Son los puntos de intersección de los segmentos.

(2) Los **lados**. Son los segmentos que delimitan el triángulo. Cada lado tiene una longitud que se mide en la unidad de longitud que estemos usando (milímetros, centímetros, metros, etc.) La suma de las longitudes de los tres lados de un triángulo se llama **perímetro**.

(3) Los **ángulos**. Están determinados por los lados del triángulo. Los ángulos se miden en grados o en radianes. Así tenemos que 180 grados (180^o) corresponden a π radianes. En lo que sigue los ángulos varían entre 0^o y 360^o y un ángulo de 360^o será equivalente a un ángulo de 0^o.



(Triángulo 1)

- $\triangle ABC$ es la representación para el triángulo de la figura.
- A, B, C es la representación para los vértices del triángulo.
- $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ es la representación para los lados del triángulo. Su longitud se representa por $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ó a, b, c respectivamente.
- Los ángulos del triángulo se representan por $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ ó $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ respectivamente.

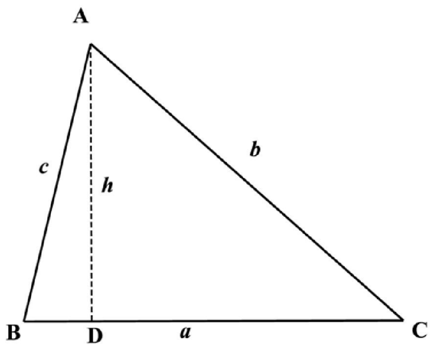
Existen otros elementos que serán útiles para el estudio de los triángulos.

(4) **Base**. Es uno cualquiera de los lados del triángulo. Fijada una base, la **altura** es el segmento perpendicular a la recta que contiene a la base y que la une con el vértice opuesto.

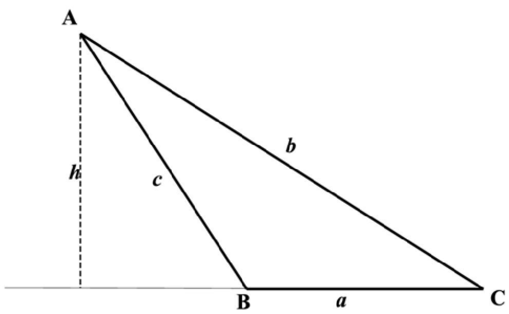
   a) En la Figura "'Triángulo IIb"se comprueba que el pie de la altura de un triángulo puede no estar en la base del triángulo.

   b) Como cada triángulo tiene tres posibles bases, también tiene tres posibles alturas.

5. **Área**. Es el número de unidades de superficie que tiene el triángulo. Se calcula como la mitad del producto de la longitud de la base por la longitud de la altura. Representamos por $\mathcal{A}(ABC)$ el área del triángulo $\triangle ABC$.



(Triángulo IIa)



(Triángulo IIb)

2. Igualdad de triángulos

Diremos que dos triángulos son **iguales** si tienen iguales sus tres lados y sus tres ángulos.

Aunque hemos incluido la igualdad de los ángulos, esta propiedad se deduce de la igualdad de los lados como afirma el tercer criterio de igualdad de triángulos que se cita a continuación.

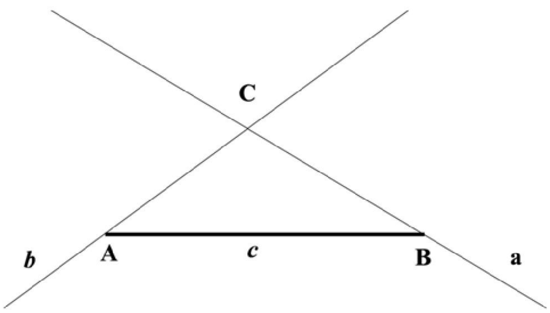
De hecho, para ver que dos triángulos son iguales tenemos los siguientes

Criterios de igualdad de triángulos

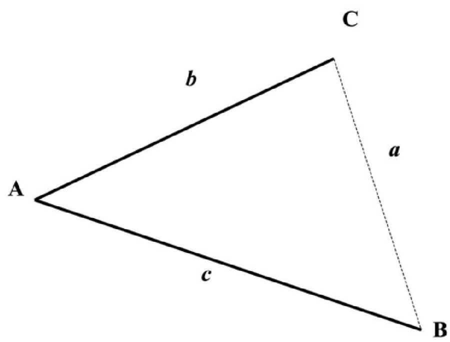
(a) Tienen iguales un lado y los dos ángulos adyacentes. Es claro que fijado el lado AB y los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$, trazando las rectas b y a, según el "Triángulo IIIa", la intersección de estas dos rectas define un punto C y los puntos A, B y C definen un único triángulo.

(b) Tienen iguales dos lados y el ángulo que forman. Si nos fijamos en el "Triángulo IIIb", existe un único segmento $a = BC$ que cierra la figura y por tanto existe un único triángulo con lados b, c conociendo el ángulo que forman.

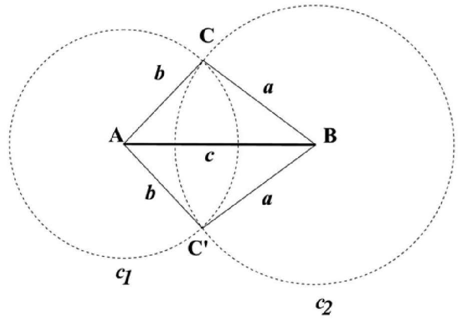
(c) Tienen iguales sus tres lados. Consideramos un lado, por ejemplo el lado AB en el "Triángulo IIIc". Trazamos la circunferencia que con centro en A tiene de radio la longitud de otro de los lados, y otra circunferencia que con centro en B tenga de radio la longitud del tercer lado. Los puntos de intersección de estas dos circunferencias definen dos puntos C y C' que junto con A y B definen dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AC'B$.



(Triángulo IIIa)



(Triángulo IIIb)



(Triángulo IIIc)

Conviene destacar que los dos triángulos que se han construido en el "Triángulo IIIc" resuelven el problema, pero pueden considerarse el mismo ya que se obtiene uno del otro haciendo una simetría con respecto a la recta que contiene el segmento AB (tienen los mismos lados y ángulos).

Vamos a destacar dos tipos especiales de triángulos:

(1) **Equiláteros**. Tienen los tres lados iguales.

(2) **Isósceles**. Tienen iguales dos lados (podemos demostrar que también tienen iguales dos ángulos).

Otra clase especial de triángulos la forman los **triángulos rectángulos**, esto es, aquellos que tienen uno de los ángulos recto (90^o ó $\pi/2$ radianes).

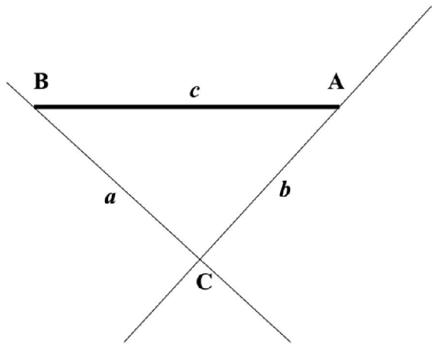
En un triángulo rectángulo se llaman **catetos** a los lados adyacentes al ángulo recto e **hipotenusa** al lado opuesto.

Los triángulos rectángulos son de interés como más adelante veremos; por esto es conveniente enunciar criterios de igualdad para esta clase de triángulos.

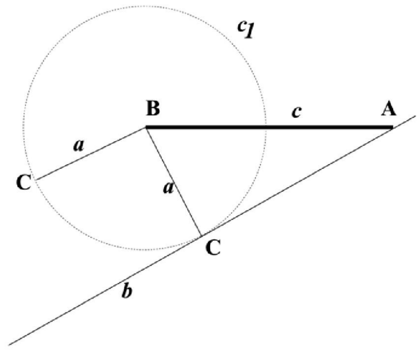
Criterios de igualdad de triángulos rectángulos

(1) Tienen iguales la hipotenusa y un ángulo adyacente. (Triángulo IVa)

(2) Tienen iguales la hipotenusa y un cateto. (Triángulo IVb)



(Triángulo IVa)

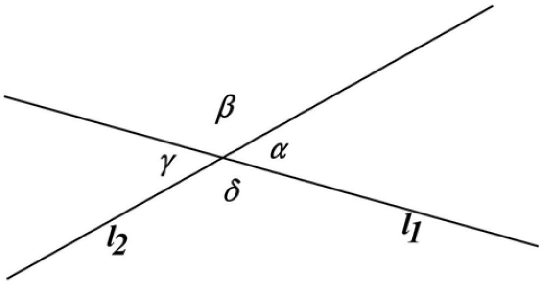


(Triángulo IVb)

En el caso del “Triángulo IVa”, si se tiene como dato el lado c y la recta a, entonces b está unívocamente determinado por ser la perpendicular a a que pasa por el punto A. En el caso del “Triángulo IVb”tenemos que el ángulo $\widehat{ACB}$ es recto, por ser la recta b tangente a la circunferencia. Veamos qué hemos hecho en el “Triángulo IVb”: con centro en B hemos trazado la circunferencia c_1 de radio a, y desde el punto A hemos trazado la tangente a c_1, que la corta en el punto C, obtenemos entonces el triángulo $\triangle ABC$. Obsérvese que hay otra posible elección de la recta tangente a c_1 que pasa por A, y que esta recta daría lugar a otro rectángulo que por simetría se prueba que es igual al anterior.

3. Ángulos determinados por rectas paralelas

Lema. 3.1.
Sean l_1 y l_2 dos rectas que se cortan y consideramos los ángulos que aparecen

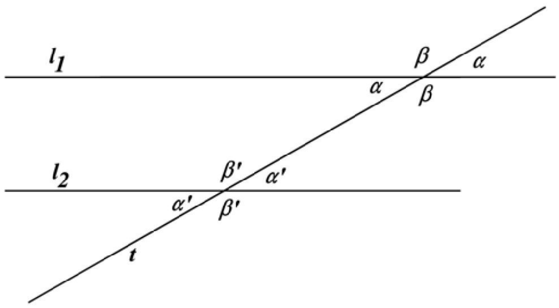


(Triángulo V)

Se verifica $\alpha = \gamma$ y $\beta = \delta$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $\alpha + \beta = 180^o$ y también $\alpha + \delta = 180^o$, entonces $\beta = \delta$. De la misma forma llegamos a que $\alpha = \gamma$. □

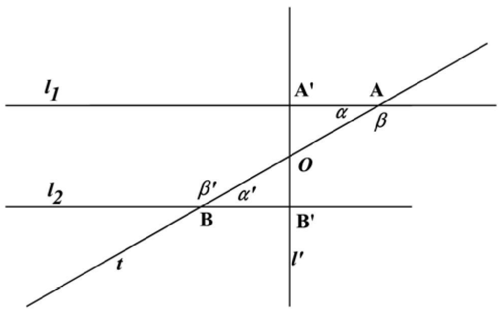
Lema. 3.2.
Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas y t una tercera recta que corta a l_1 y l_2 y consideremos los ángulos que aparecen. Se verifica $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$.



(Triángulo VI)

DEMOSTRACIÓN. Si t es perpendicular a l_1, entonces también es perpendicular a l_2 y el resultado es cierto. Si t no es perpendicular a l_1, llamamos A al punto de intersección de t y l_1, B al punto de intersección de t y l_2 y O al punto medio del segmento AB. Si trazamos la perpendicular por O a l_1 y la llamamos l', la intersección de l_1 y l' es un punto A' y la intersección de l_2 y l' es un punto B'. Los triángulos $A'OA$ y OBB' son iguales por ser rectángulos y tener iguales la hipotenusa y un ángulo adyacente. Entonces $\alpha = \widehat{A'AO} = \widehat{B'BO} = \alpha'$.

Como ejercicio probar que $\beta = \beta'$. □

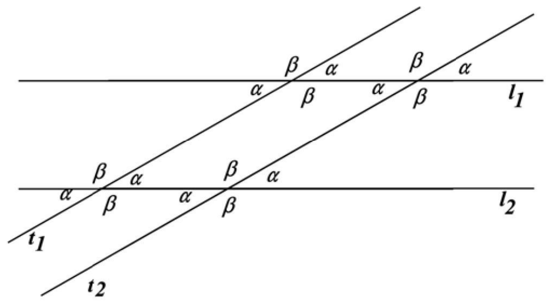


(Triángulo VII)

Ejercicio. 3.3.
Probar que el resultado recíproco también es cierto, esto es, si se verifica la igualdad de ángulos que muestra el enunciado, entonces las rectas l_1 y l_2 son paralelas.

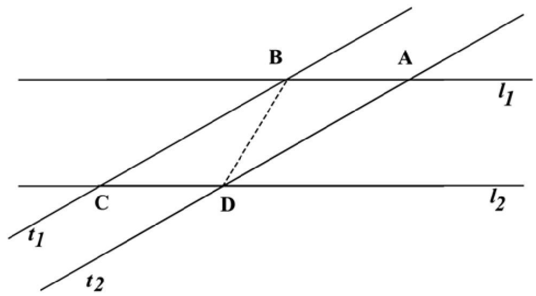
Como consecuencia del resultado del Lema 3.2. tenemos también el siguiente:

Lema. 3.4.
Sean l_1 y l_2 rectas paralelas y t_1, t_2 rectas paralelas que cortan a l_1 y l_2, entonces se verifica la igualdad de ángulos que muestra la figura.



(Triángulo VIII)

Lema. 3.5.
Sean l_1 y l_2 rectas paralelas y t_1, t_2 rectas paralelas que cortan a l_1 y l_2 según muestra la figura,



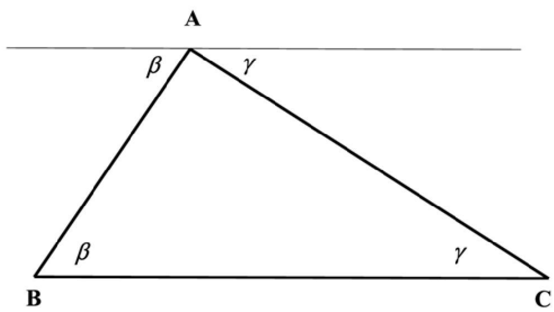
(Triángulo IX)

entonces $\overline{BA} = \overline{CD}$ *y* $\overline{BC} = \overline{AD}$.

DEMOSTRACIÓN. Si consideramos el segmento BD obtenemos triángulos ΔABD y ΔBCD que son iguales ya que tienen un lado igual e iguales los ángulos adyacentes, en consecuencia sus lados son iguales. □

Lema. 3.6.
La suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180^o.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente a la vista de la siguiente figura y el resultado del Lema 3.2.. □

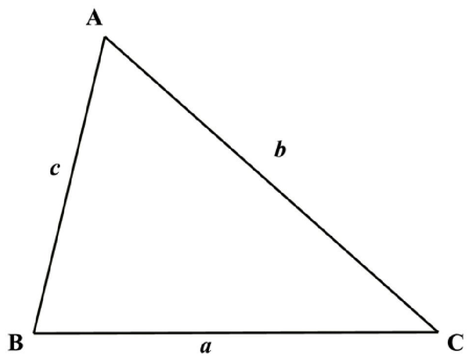


(Triángulo X)

Actividad I. Suma de los ángulos de un polígono

Para desarrollar de forma simultánea al desarrollo del apartado 3.

1.
Se considera un triángulo



Los ángulos del triángulo son: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$. Y sabemos que su suma es 180^o.
Es un buen ejercicio tratar de establecer este resultado.

2.
Si en vez de un triángulo consideramos un cuadrilátero.
¿Cuál es la suma de sus ángulos?

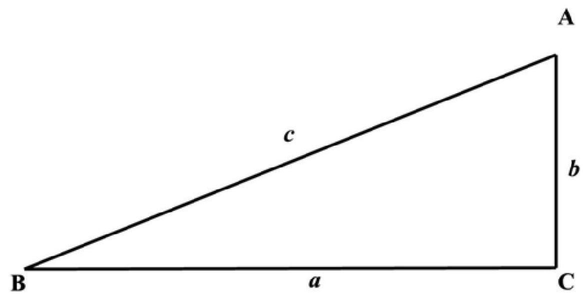
3.
Ahora estás en condiciones de plantearte el problema para un polígono de n lados, con n mayor o igual que 3.
¿Cuál es la suma de los ángulos de un polígono de n lados?

4. Triángulos rectángulos

Recordemos que un triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos mide 90^o.

Para triángulos rectángulos tenemos la siguiente relación entre sus lados.

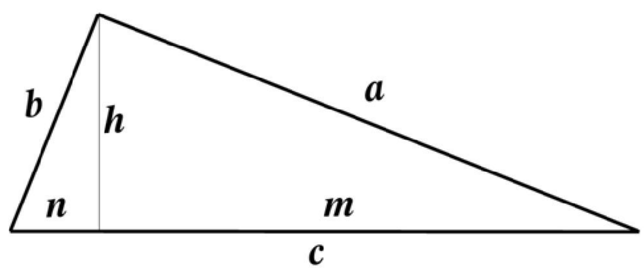
Lema. 4.1. (Teorema de Pitágoras.)
Si $\triangle ACB$ es un triángulo rectángulo, con lados a, b y c, entonces se verifica $c^2 = a^2 + b^2$.



(Triángulo XI)

Otros de los resultados sobre triángulos rectángulos es la ley de las alturas.

Lema. 4.2. (Ley de las alturas)
Dado un triángulo rectángulo, si trazamos la altura sobre la hipotenusa, ésta divide a la hipotenusa en dos partes, sean m y n las longitudes, según se indica en la figura.



(Triángulo XII)

Entonces se verifica: $h^2 = mn$.

DEMOSTRACIÓN. Como el triángulo de la derecha, de lados a, h y m, es rectángulo con hipotenusa a, se verifica: $a^2 = h^2 + m^2$. Además el triángulo exterior, de lados a, b y c es también rectángulo. luego se tiene $c^2 = a^2 + b^2$. Procedemos como sigue:

$$h^2 = a^2 - m^2 = c^2 - b^2 - m^2.$$

Por otro $c = n + m$, y se tiene $c^2 = n^2 + m^2 + 2nm$, y el triángulo de la izquierda, de lados b, h y n, es rectángulo con hipotenusa b, entonces se verifica $b^2 = h^2 + n^2$. Introduciendo estos valores en la expresión anterior se tiene:

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - m^2 = c^2 - b^2 - m^2 \\ &= n^2 + m^2 + 2nm - b^2 - m^2 \\ &= 2nm - (b^2 - n^2) = 2nm - h^2. \end{aligned}$$

Entonces $2h^2 = 2nm$ y resulta $h^2 = nm$. □

Un tercer resultado sobre triángulos rectángulos es la Ley de los catetos.

Lema. 4.3. (Ley de los catetos)
Dado el triángulo rectángulo de la "Figura XII", se tiene $a^2 = mc$ y $b^2 = nc$.

DEMOSTRACIÓN. Sumando las áreas de los triángulos interiores se tiene la del triángulo exterior, luego tenemos:

$\frac{hc}{2} = \frac{hn}{2} + \frac{hm}{2} = \frac{ab}{2}$, y se obtiene:

$$hc = hn + hm = ab$$

De la relación $c^2 = a^2 + b^2$ podemos calcular el valor de a^2, y haciendo las oportunas operaciones, y utilizando que $a^2 = h^2 + m^2$, se tiene:

$$a^2 = c^2 - b^2.$$

$$\begin{aligned} a^4 &= a^2c^2 - a^2b^2 = (ac)^2 - (ab)^2 \\ &= (ac)^2 - (hc)^2 = (a^2 - h^2)c^2 \\ &= m^2c^2. \end{aligned}$$

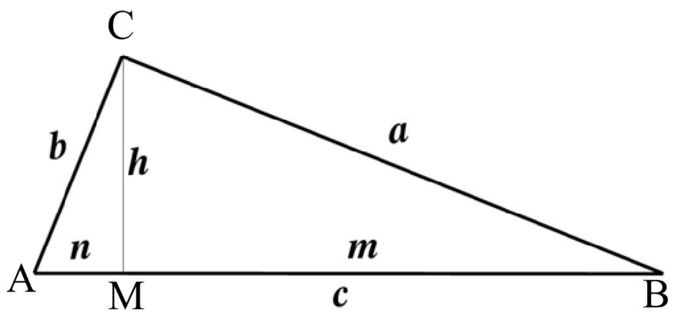
$$a^2 = mc.$$

El comprobar que $b^2 = nc$ se hace siguiendo un proceso análogo. □

5. Triángulos rectángulos. II

Vamos a desarrollar en esta sección los mismos resultados que en la anterior, pero en diferente orden para, de esta forma probar todos los resultados que allí aparecen. Utilizaremos como hecho fundamental el Teorema de Thales sobre triángulos semejantes.

Consideramos un triángulo rectángulo como el de la figura



(Triángulo XII-bis)

Tenemos el triángulo rectángulo $\triangle ACB$, y los triángulos $\triangle AMC$ y $\triangle CMB$. Todos ellos son triángulos rectángulos, y son semejantes, ya que todo sus ángulos son iguales; en efecto, $\widehat{A} = \widehat{MCB}$, $\widehat{B} = \widehat{ACM}$, entonces, por el Teorema de Thales, estos tres triángulos tiene sus lados proporcionales.

Vamos a probar la Ley de las alturas.

Lema. 5.1. (Ley de las alturas)
Dado un triángulo rectángulo, si trazamos la altura sobre la hipotenusa, ésta divide a la hipotenusa en dos partes, sean m y n las longitudes. Entonces se verifica: $h^2 = mn$.

DEMOSTRACIÓN. Al considerar los triángulos $\triangle CMB$ y $\triangle AMC$ tenemos:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} = \frac{a}{b}.$$

De las dos primeras fracciones obtenemos $h^2 = mn$. □

Utilizando esta misma figura y la semejanza antes mencionada triángulos podemos deducir la ley de los catetos.

Lema. 5.2. (Ley de los catetos)
Dado el triángulo rectángulo de la "Figura XII-bis", se tiene $a^2 = mc$ y $b^2 = nc$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar que $a^2 = mc$ utilizaremos la semejanza de los triángulos $\triangle ACB$ y $\triangle CMB$. En este caso tenemos las igualdades:

$$\frac{a}{m} = \frac{c}{a} = \frac{b}{h}.$$

De las dos primeras fracciones obtenemos $a^2 = mc$. De la semejanza de los triángulos $\triangle ACB$ y $\triangle AMC$ deducimos que $b^2 = nc$. $\square$

Podemos ahora deducir el Teorema de Pitágoras como consecuencia de la Ley de los catetos.

Teorema. 5.3. (Teorema de Pitágoras)
Dado el triángulo rectángulo de la "Figura XII-bis", se tiene $a^2 + c^2 = c^2$.

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar las dos relaciones de la Ley de los catetos: $a^2 = mc$ y $b^2 = nc$, y sumarlas: se tiene:

$$a^2 + b^2 = mc + nc = (m+n)c = c^2.$$

$\square$

Actividad II. Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

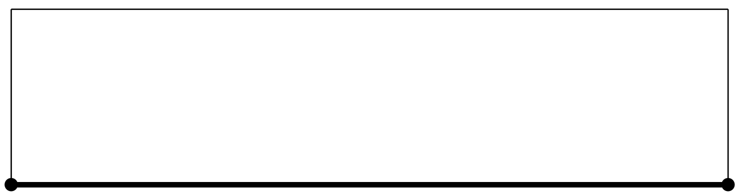
Para desarrollar de forma simultánea al desarrollo del apartado 5.

1.
Se tiene una parcela rectangular de 2.000 m^2. de superficie.

Uno de los laterales de parcela mide 90 m. y linda con un camino, por lo que este lado está identificado, no ocurre así con los restantes tres lados de la parcela.

Nuestro problema es determinar esos tres lados. Para ello se dispone de una cinta métrica que puede medir hasta 25 m., de una bobina de cuerda que mide 150 m., de varias estacas y de un martillo.

¿Podrías darnos una forma de dibujar sobre el terreno los tres lados que no conocemos?



Actividad III. El hexágono regular

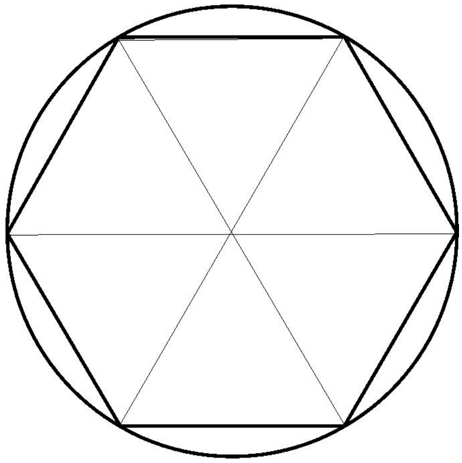
1.

Consideramos un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1.

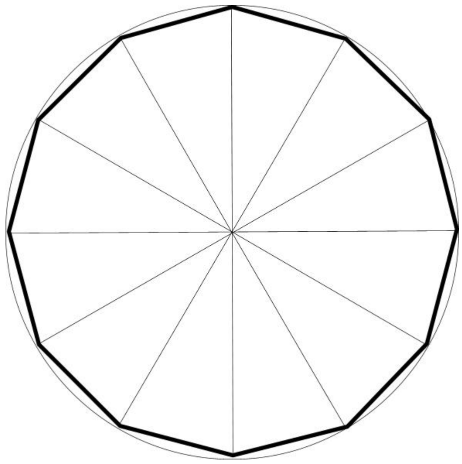
(1) Determinar el valor de cada uno de los ángulos del hexágono.

(2) Determinar la longitud del lado del hexágono.

(3) Determinar el área del hexágono.



2.
Consideramos un dodecágono (12 lados) inscrito en una circunferencia de radio 2.



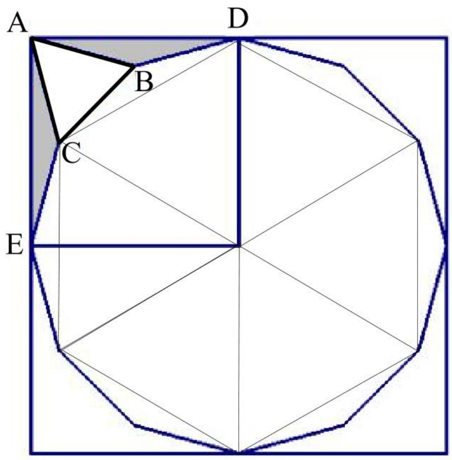
Tenéis que responder a las mismas preguntas que antes:

(1) Determinar el valor de cada uno de los ángulos del dodecágono.

(2) Determinar la longitud del lado del dodecágono.

(3) Determinar el área del dodecágono.

Responder a las preguntas (2) y (3) en el caso en que el radio de la circunferencia mida *R*.



Actividad IV. Triángulos equiláteros

Con esta actividad se muestra cómo se puede construir un razonamiento erróneo al trabajar de manera intuitiva sobre de unos dibujos particulares. Por una parte se ilustra con este ejemplo la diferencia entre Paradoja, Falacia y Demostración errónea. Y por otra parte, se ponen en juego cierta cantidad de conceptos básicos relacionados con los triángulos:

- Clasificación de triángulos por sus lados,
- mediatriz de un segmento,
- bisectriz de un ángulo,
- distancia de un punto a una recta,
- perpendicular a una recta pasando por un punto,
- igualdad de triángulos,
- teorema de Pitágoras,
- etc.

Actividad V. Paradoja, falacia y falsa demostración

Vamos a demostrar que *todos los triángulos son equiláteros*; es decir, que todos los triángulos tienen sus tres lados iguales.

Para ello, comprobemos que dos lados cualesquiera de un triángulo cualquiera son iguales. Lo cual nos llevará, primeramente, a que todos los triángulos son *isósceles*, por tener dos de sus lados iguales. Y como eso ocurrirá con cualquier par de lados, los tres lados del triángulo serán iguales.

Dibujemos un triángulo cualquiera como el de la (figura 1), y llamemos a sus *vértices*, recorriéndolos en el sentido contrario a las agujas del reloj, A, B, C. A los *lados* del triángulo los denominaremos con letras minúsculas a, b, c; siendo a el lado opuesto al vértice A, b el opuesto a B y c a C.

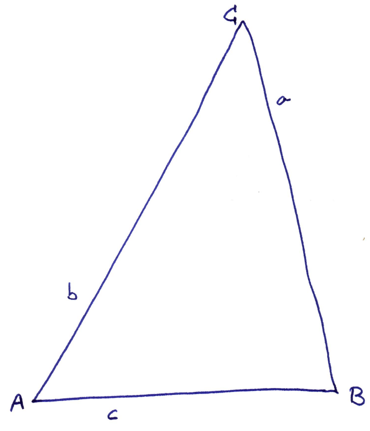


Figura 1: Triángulo realizado a mano alzada.

Tracemos, aproximadamente, la *bisectriz del ángulo C* y la *mediatriz del lado* opuesto *c* que lo cortará en el punto medio *M*. Ambas líneas, bisectriz y mediatriz se cortarán en un punto que denominaremos *P*.

Unamos ahora el punto *P* con los vértices *A* y *B* mediante segmentos, y tracemos las *perpendiculares* desde P a los lados *b* y *a*, que los cortarán en los puntos *R* y *S*, respectivamente. El resultado será un dibujo como el que muestra la figura siguiente:

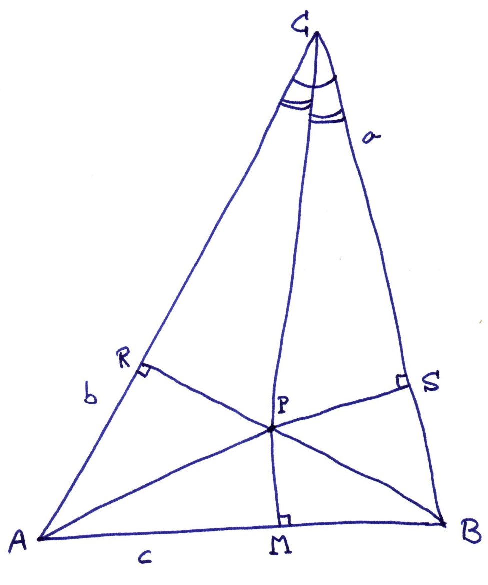


Figura 2: Descomposición del triángulo en 6 triángulos rectángulos.

Tenemos así descompuesto nuestro triángulo general $\triangle ABC$ en 6 *triángulos rectángulos*, sobre los que haremos todo el resto del razonamiento.

Comparemos los dos triángulos rectángulo superiores. La bisectriz *CP* divide al ángulo $\angle ACB$ en dos ángulos iguales, $\angle ACP = \angle PCS$. Por tanto los triángulos rectángulos $\triangle RPC$ y $\triangle SPC$ tienen los ángulos iguales, dos a dos. Como la hipotenusa *CP* es común, resulta que son *triángulos* *iguales*. En particular, se verifica $\overline{CR} = \overline{CS}$ y $\overline{PR} = \overline{PS}$.

Obsérvese que la última afirmación proporciona una demostración de que *las distancias de un punto de la bisectriz de un ángulo a cada uno de los lados de dicho ángulo, son iguales*. Es decir, la bisectriz de un ángulo es la recta formada por los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

Comparemos los dos triángulos rectángulos inferiores. Por ser M el punto medio del lado c se tiene que $\overline{MA} = \overline{MB}$. Por estar P sobre la mediatriz de segmento o lado c (que es la recta formada por los puntos que equidistan de los extremos del segmento) también se tiene que $\overline{PA} = \overline{PB}$. Luego los triángulos rectángulos $\triangle AMP$ y $\triangle PMB$ tienen los lados iguales, dos a dos. Es decir, también son triángulo iguales.

Por último, comparemos los triángulos rectángulos $\triangle PRA$ y $\triangle PBS$. Ambos tienen un cateto igual ($\overline{PR} = \overline{PS}$) y la hipotenusa igual ($\overline{PA} = \overline{PB}$). Por el *teorema de Pitágoras* tienen el otro cateto igual; es decir, $\overline{RA} = \overline{SB}$. En consecuencia los triángulos rectángulos $\triangle PRA$ y $\triangle PBS$ también son iguales.

Volvamos a la (figura 2) y observemos las siguientes relaciones

$$\overline{CA} = \overline{CR} + \overline{RA} \tag{1}$$

$$\overline{CB} = \overline{CS} + \overline{SB} \tag{2}$$

Como los sumandos de una y otra igualdad son dos a dos iguales, resulta que ¡$\overline{AC} = \overline{AB}$! Es decir, $\triangle ABC$ es isósceles.

Como este razonamiento lo hemos hecho sobre uno cualquiera de los lados, repitiéndolo son cualquier otro, llegaríamos a que los tres lados son iguales:

$$¡\,\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}\,!$$

es decir, el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero.

Si miramos de nuevo la (figura 1), observamos a simple vista que nuestro triángulo es *escaleno* y no equilátero ya que $\overline{AC} > \overline{BC} > \overline{AB}$.

¿Dónde está la trampa de esta construcción geométrica?

Solución

Antes de ver donde está el equívoco, pensemos que pasa con un triángulo equilátero o simplemente con uno isósceles.

Si el triángulo es equilátero, la bisectriz de cada ángulo coincide con la mediatriz del lado opuesto. Todas estas rectas coinciden en el centro del triángulo equilátero. Respecto de ninguno de los tres vértices el punto P de nuestra construcción está bien determinado. Podríamos coger como punto P el propio centro del triángulo y todo marcharía bien.

En el caso de un triángulo isósceles no equilátero, ocurre lo mismo para la bisectriz del ángulo desigual y para la mediatriz del lado desigual: estas dos rectas son coincidentes y el punto de intersección no está determinado. Podríamos tomar como punto P cualquier punto de esa recta, pero según donde lo tomásemos, los puntos R y S caerían fuera o dentro de los lados correspondientes. Si tomamos P en el interior del triángulo, todo marcha bien y no hay contradicción.

Para que el punto P esté determinado es necesario que estas rectas, bisectriz y mediatriz, se corten en un solo punto.

Comencemos haciendo el dibujo con un poco más de precisión, trazando con regla un triángulo claramente escaleno, y construyendo su mediatriz y bisectriz con regla y compás.

- ¿Qué nos ocurre?

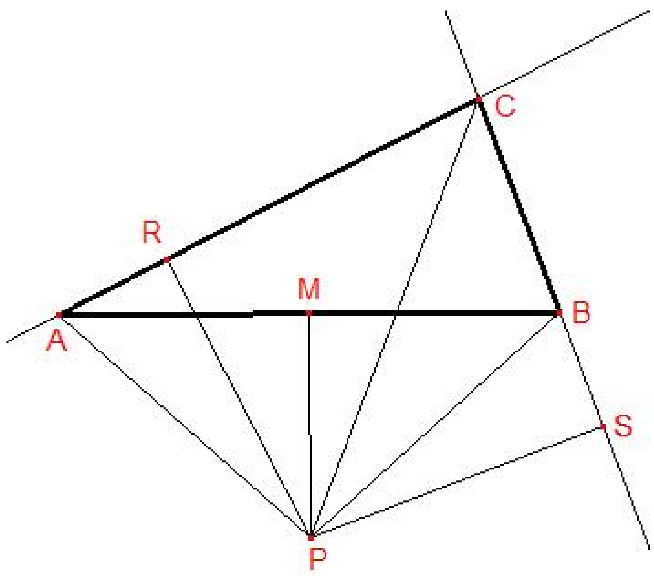


Figura 3: Dibujo con mayor precisión.

- Que el punto P está fuera del triángulo, y en nuestro dibujo lo hemos colocado por error dentro.

- Pero eso no afecta seriamente a nuestro razonamiento, pues si hacemos las perpendiculares desde P a los lados a y b y unimos P con los vértices A y B seguimos teniendo 6 triángulos rectángulos, como en la (figura 2), aunque salgan fuera del triángulo inicial, y siguen siendo dos a dos iguales.

Lo que ocurre es que en la igualdades (1) y (2) hay un pequeño error: la correspondiente al lado mayor está bien, mientras que en la correspondiente al lado menor debe una una resta de longitudes de segmentos en vez de una suma.

En el ejemplo de la (figura 3) las igualdades deben quedar se la siguiente manera:

$$\overline{CA} = \overline{CR} + \overline{RA} \tag{3}$$

$$\overline{CB} = \overline{CS} - \overline{SB} \tag{4}$$

Queda así aclarada la ficticia paradoja.

6. Puntos singulares de un triángulo

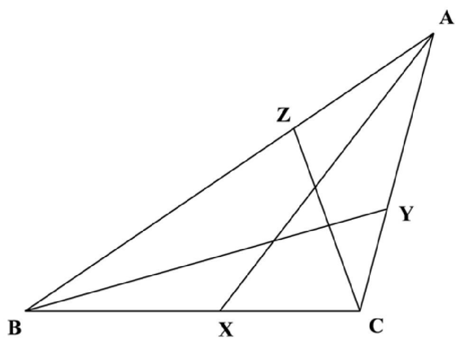
Vamos a establecer la teoría de los diversos puntos asociados a un triángulo a partir de un resultado general: el **Teorema de Ceva**. Deseamos destacar que estos resultados se pueden probar también usando otras aproximaciones a la teoría.

Dado un triángulo $\triangle ABC$, un **segmento de Ceva** *es un segmento que une un vértice con un punto del lado opuesto*. En la “Figura XIII” el segmento AX es un segmento de Ceva.

Observar que también son segmentos de Ceva los segmentos AB y AC, esto es, los lados del triángulo. Sin embargo, para evitar indefiniciones vamos a restringirnos a considerar segmentos de Ceva que sean distintos de los lados.

El principal resultado es el siguiente:

Lema. 6.1. (Teorema de Ceva)
Sea $\triangle ABC$ un triángulo y X, Y, Z puntos situados en los lados a, b y c, respectivamente (distintos de los vértices) y consideremos los segmentos de Ceva.



(Figura XIII)

Son equivalentes:

(a) Los tres segmentos de Ceva AX, BY y CZ son concurrentes;

(b)
$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\,\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}\,\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}=1.$$

En la prueba de este resultado vamos a aplicar la siguiente propiedad sobre fracciones:

Lema. 6.2.
Si a, a', b, b', k son números tales que a' y b' son distintos, y distintos de cero, y se verifica

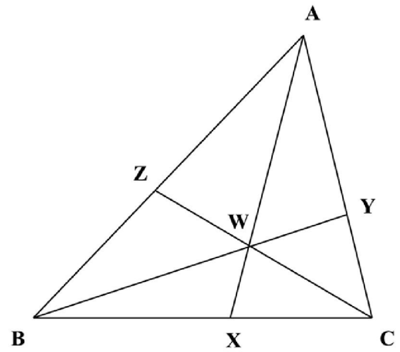
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=k,$$

entonces $\dfrac{a-b}{a'-b'}=k.$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos $a = ka'$ y $b = kb'$, entonces $a - b = ka' - kb' = k(a' - b')$ $\square$

DEMOSTRACIÓN. [Del Lema 6.1.] Supongamos primero que los tres segmentos de Ceva se cortan en un punto; llamemos W a este punto, ver "Figura XIV". Vamos a estudiar el cociente $\overline{BX}/\overline{XC}$. Primero tenemos la igualdad

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{\mathcal{A}(ABX)}{\mathcal{A}(AXC)},$$



(Figura XIV)

También tenemos

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{\mathcal{A}(WBX)}{\mathcal{A}(WXC)}.$$

Usando el Lema 6.2. tenemos

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{\mathcal{A}(ABX) - \mathcal{A}(WBX)}{\mathcal{A}(AXC) - \mathcal{A}(WXC)} = \frac{\mathcal{A}(ABW)}{\mathcal{A}(AWC)}$$

De forma similar obtenemos expresiones para las otras fracciones, esto es,

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\mathcal{A}(WBC)}{\mathcal{A}(ABW)}$$

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\mathcal{A}(AWC)}{\mathcal{A}(WBC)}$$

Multiplicando obtenemos:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\mathcal{A}(ABW)}{\mathcal{A}(AWC)} \frac{\mathcal{A}(WBC)}{\mathcal{A}(ABW)} \frac{\mathcal{A}(AWC)}{\mathcal{A}(WBC)} = 1$$

Para acabar la prueba de este resultado, vamos a suponer que es cierta la expresión

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1.$$

Llamamos W al punto de intersección de dos segmentos de Ceva, por ejemplo BY y AX. Consideramos la recta que pasa por C y W, y llamamos F al punto de intersección con el lado AB.

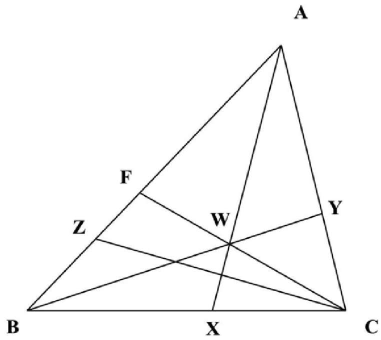
Tenemos entonces tres segmentos de Ceva: BY, AX y CF que son concurrentes. Luego se verifica:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$$

y como por hipótesis tenemos:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1.$$

Resulta pues que $\overline{AF}/\overline{FB} = \overline{AZ}/\overline{ZB}$. Por tanto los dos puntos F y Z han de coincidir. $\square$

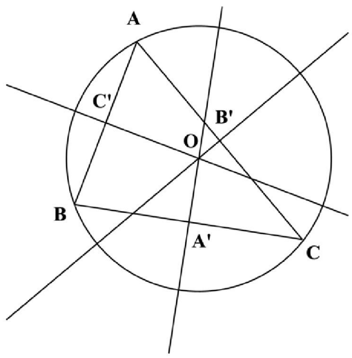


(Figura XV)

Circuncentro

Dado un segmento AB su **mediatriz** es la recta que verifica que cada uno de sus puntos dista lo mismo de A que de B, y por lo tanto la recta mediatriz es perpendicular al segmento en el punto medio.

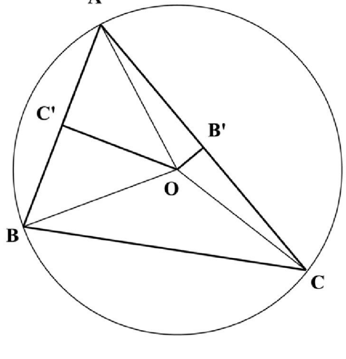
Veamos que cada triángulo $\triangle ABC$ se puede inscribir en una circunferencia, y vamos a determinar el centro de dicha circunferencia.



(Figura XVI)

Para ello procederemos como sigue: Trazamos las mediatrices de los lados AB y AC que tienen la propiedad de que sus puntos equidistan de los extremos del lado, y llamemos O al punto de intersección. Construimos los segmentos AO, BO y CO.

Nos aparecen cuatro triángulos $\triangle AC'O$, $\triangle C'BO$, $\triangle AOB'$ y $\triangle B'OC$, siendo iguales $\triangle AC'O$, $\triangle C'BO$ por un lado y $\triangle AOB'$ y $\triangle B'OC$ por otro. Entonces los segmentos BO y CO tienen la misma longitud, y por tanto la perpendicular al segmento BC que pasa por el punto O corta a este segmento justamente en el centro. Obtenemos entonces que el punto O es la intersección de las tres mediatrices y es el centro de la circunferencia que andamos buscando.



(Figura XVII)

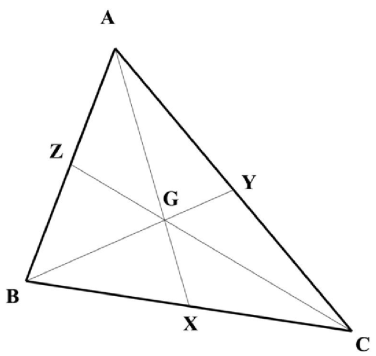
El punto O se llama el **circuncentro** del triángulo.

Baricentro

Llamamos **mediana** de un triángulo a cada uno de los segmentos que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Lema. 6.3.
Sea $\triangle ABC$ un triángulo y X, Y, Z los puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente; entonces todos los segmentos que se obtienen son concurrentes.

DEMOSTRACIÓN.



(Figura XVIII)

Ya que $\overline{BX} = \overline{XC}$, $\overline{CY} = \overline{YA}$ y $\overline{AZ} = \overline{ZB}$, se verifica: $\dfrac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\dfrac{\overline{CY}}{\overline{YA}}\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$. $\square$

El punto G se llama el **baricentro** o **centro de gravedad** del triángulo. El triángulo $\triangle XYZ$ se llama el **triángulo complementario** del triángulo $\triangle ABC$. Es claro que los segmentos XY, YZ y ZX son paralelos a los lados del triángulo AB, BC y CA respectivamente.

Lema. 6.4.
Los seis triángulos que aparecen en la "Figura XVIII" tienen todos la misma área.

DEMOSTRACIÓN. Se verifica que cada par de estos triángulos pequeños que tienen en común los puntos X, Y o Z son iguales pues tienen la misma base y la misma altura. Si consideramos ahora por un lado los triángulos $\triangle GBX$, $\triangle ZBG$ y $\triangle AZG$ y de otro los triángulos $\triangle GXC$, $\triangle YGC$ y $\triangle AGY$, entonces se verifica

$$2\mathcal{A}(ZBG) = \mathcal{A}(ZBG) + \mathcal{A}(AZG) = \mathcal{A}(YGC) + \mathcal{A}(AGY) = 2\mathcal{A}(YGC)$$

y de aquí se deduce $\mathcal{A}(ZBG) = \mathcal{A}(YGC)$. De la misma forma se prueban el resto de las igualdades. $\square$

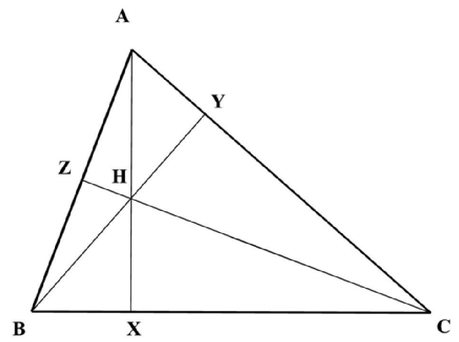
Lema. 6.5.
Con la notación anterior se verifica $2\overline{GX} = \overline{AG}$, e igual para la restantes medianas.

DEMOSTRACIÓN. Si se consideran los triángulos $\triangle AGB$ y $\triangle GBX$, al considerar las bases AG y GX respectivamente las alturas son iguales, y por tanto, como sus áreas verifican $\mathcal{A}(AGB) = 2\mathcal{A}(GBX)$, entonces sus bases están es esa misma proporción. $\square$

Ortocentro

Lema. 6.6.
Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Los tres segmentos de Ceva que se obtienen al trazar las alturas, para las tres posibles bases, son concurrentes.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos la siguiente figura:



(Figura XIX)

Se verifica entonces

$$\begin{array}{ll} \overline{AZ} = \cos\widehat{A}\cdot\overline{AC} & \overline{BZ} = \cos\widehat{B}\cdot\overline{BC} \\ \overline{AY} = \cos\widehat{A}\cdot\overline{AB} & \overline{CY} = \cos\widehat{C}\cdot\overline{BC} \\ \overline{BX} = \cos\widehat{B}\cdot\overline{AB} & \overline{CX} = \cos\widehat{C}\cdot\overline{AC} \end{array}$$

Entonces

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$

□

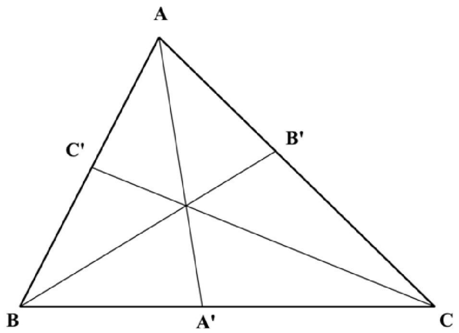
El punto H se llama el **ortocentro**. El triángulo $\triangle XYZ$ se llama el **triángulo órtico**.

Observación. 6.7.
Notar que si el triángulo no es obtusángulo, un ángulo es obtuso, entonces las alturas pueden ser exteriores al triángulos y no tendremos segmentos de Ceva.

Aunque el resultado contenido en esta sección es cierto para un triángulo arbitrario, la demostración de este hecho no sigue las líneas que se han utilizado aquí.

Incentro

Se considera el triángulo $\triangle ABC$ y las bisectrices de los ángulos (es útil destacar que las **bisectrices** son las rectas que equidistan de los lados). Llamamos A', B' y C' a las intersecciones de la bisectrices con los lados del triángulo, según la siguiente figura:



(Figura XX)

Lema. 6.8.
Las tres bisectrices de un triángulo son concurrentes.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que las longitudes $\overline{BA'}$ y $\overline{A'C}$ son proporcionales a las longitudes de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Aplicando el Lema del seno al triángulo $\triangle ABA'$ y al triángulo $\triangle AA'C$ se verifica:

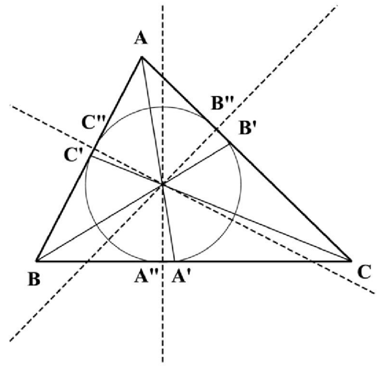
$$\overline{BA'}/\mathrm{sen}(\widehat{A}/2) = \overline{AB}/\mathrm{sen}\,\widehat{BA'A} \quad \text{y}$$
$$\overline{CA'}/\mathrm{sen}(\widehat{A}/2) = \overline{AC}/\mathrm{sen}\,\widehat{CA'A}$$

Entonces, como $\mathrm{sen}\,\widehat{CA'A} = \mathrm{sen}(\pi - \widehat{BA'A}) = \mathrm{sen}\,\widehat{BA'A}$, se verifica:

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{AB}} = \frac{\mathrm{sen}(\widehat{A}/2)}{\mathrm{sen}\,\widehat{BA'A}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AC}}$$

Llamamos O al punto de corte de las bisectrices

Consideramos ahora la distancia del punto O, corte de las bisectrices a los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$, al segmento AC. Esta distancia es igual a la distancia del punto O al segmento AB y al segmento BC, ya que el punto O está en las bisectrices. En consecuencia el punto O está también en la bisectriz del ángulo $\widehat{B}$. $\square$



(Figura XXI)

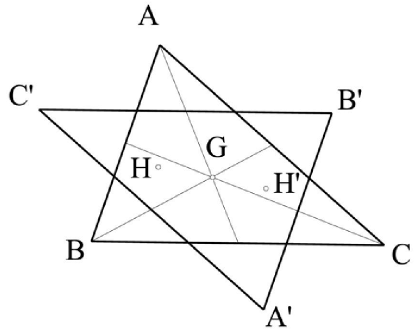
La circunferencia con centro en O y radio esta distancia es una circunferencia tangente a los tres lados. La llamamos la **circunferencia inscrita** en el triángulo. El punto O se llama **incentro** del triángulo.

Ejercicio. 6.9.
Dado un triángulo, llamamos s al ***semiperímetro*** *(mitad del perímetro) y r al radio de la circunferencia inscrita. Probar que el área del triángulo es igual al producto sr.*

Recta de Euler.

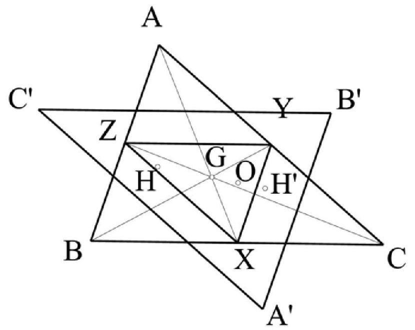
Lema. 6.10.
Dado un triángulo $\triangle ABC$, consideramos su ortocentro H (intersección de las alturas), su circuncentro O (intersección de las mediatrices) y el segmento que los une. Entonces el baricentro G (intersección de las medianas) está en este segmento a un tercio de O y dos tercios de H.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos el triángulo simétrico del triángulo $\triangle ABC$ con respecto al punto G y lo llamamos $\triangle A'B'C'$. si calculamos el ortocentro H' del triángulo $\triangle A'B'C'$, resulta que H' es el simétrico de H y además H, G y H' están alineados.



(Figura XXII)

Podemos considerar el triángulo complementario $\triangle XYZ$ de $\triangle ABC$. Entonces B, G, Y y B' están alineados y también lo están A, G, X, A' y C, G, Z, C'. Además $2\overline{GY} = \overline{GB'} = \overline{GB}$. De la misma forma tenemos: $2\overline{GX} = \overline{GA'} = \overline{GA}$ y $2\overline{GZ} = \overline{GC'} = \overline{GC}$.



(Figura XXIII)

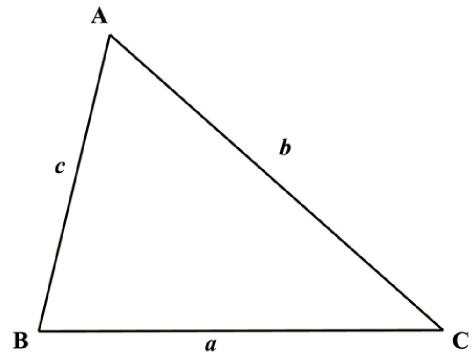
Además el triángulo $\triangle XYZ$ se puede construir también haciendo una homotecia del triángulo $\triangle A'B'C'$ de razón $1/2$ con centro G. La imagen de H' por esta homotecia es justamente la intersección de las perpendiculares a los lados del triángulo $\triangle ABC$ en sus puntos medios, esto es, el circuncentro O. Tenemos entonces que G, O y H' están alineados y en consecuencia O está en la recta determinada por G y H.

Falta ver las distancias. Tenemos $\overline{GH} = \overline{GH'}$ y $\overline{GH'} = 2\overline{GO}$ y por tanto la relación dada en el enunciado es cierta. $\square$

Aplicación.
El punto medio O_e del segmento HO se llama **centro de Euler** y llamamos **circunferencia de Euler** a la que tiene centro en O_e y radio la mitad del radio de la circunferencia circunscrita. La circunferencia de Euler contiene a los pies de las alturas del triángulo, a los puntos medios de los lados del triángulos y a los puntos medios de los segmentos que unen cada vértice con el ortocentro. La circunferencia de Euler es tangente a la circunferencia inscrita y a las circunferencias exinscritas.

7. Fórmula de Herón

Lema. 7.1.
Dado un triángulo

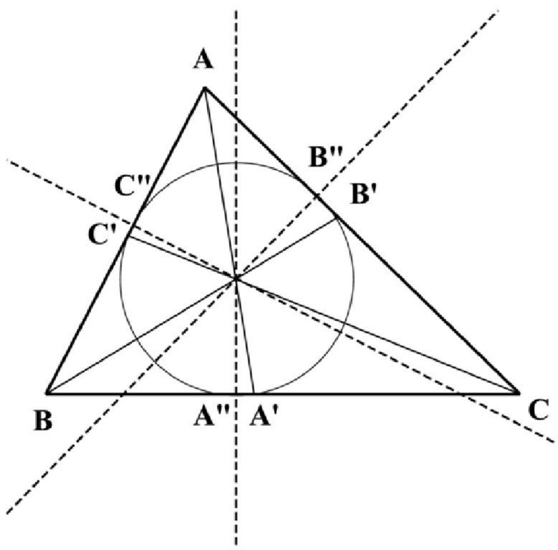


(Figura XXIV)

si s es el semiperímetro, esto es, $s = \frac{a+b+c}{2}$, entonces el área del triángulo es:

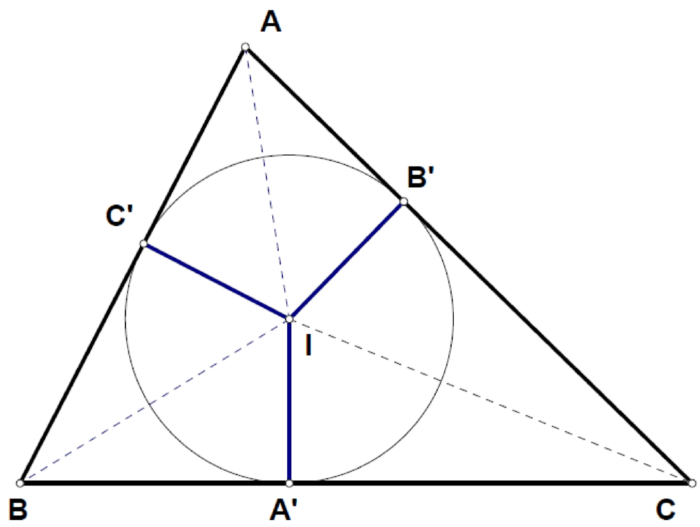
$$\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Se considera el incentro del triángulo:



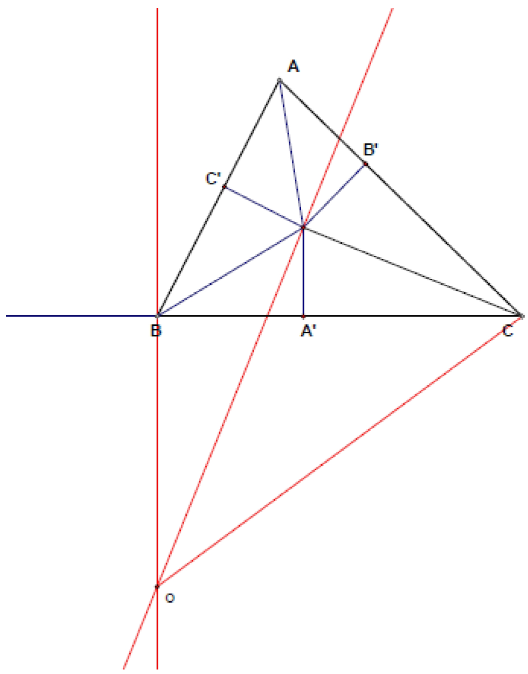
(Figura XXV)

Observa que hay seis triángulos iguales dos a dos y que el área del triángulo es rs, siendo s el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita, ver Ejercicio (6.9.).



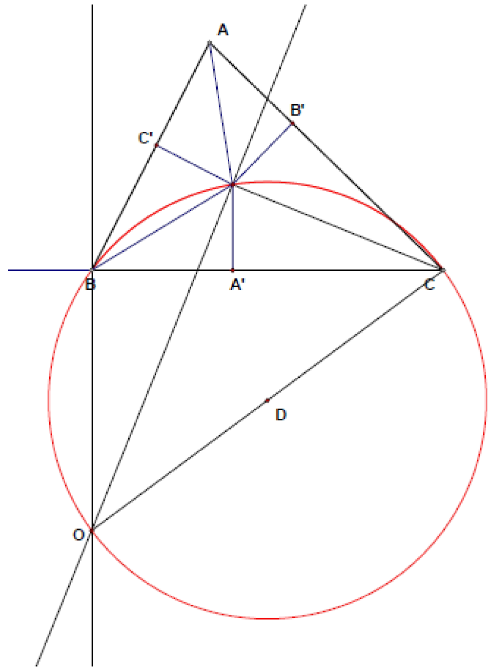
(Figura XXVI)

Construimos rectas perpendiculares a *BC*, en *B*, y a *CI*, en *I*.



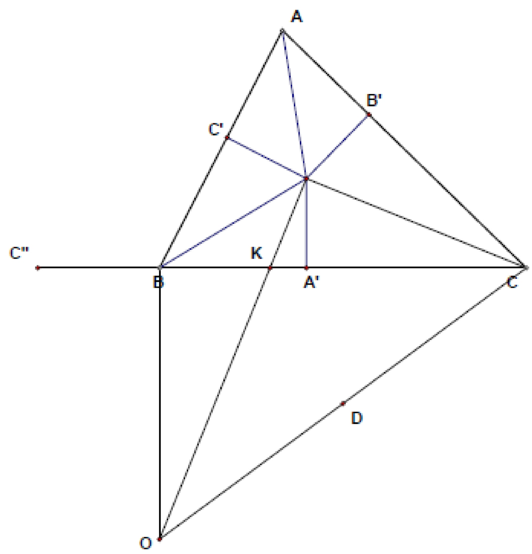
(Figura XXVII)

De esta forma tenemos un cuadrilátero *OCIB* que se inscribe en una circunferencia: entonces los ángulos opuestos suman 180^0.



(Figura XXVIII)

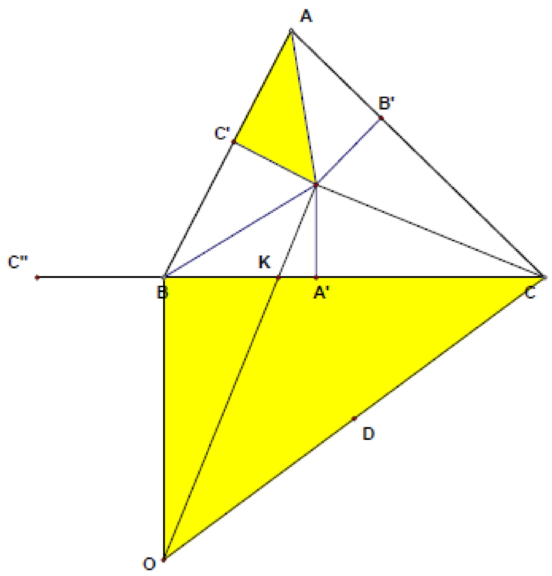
Tenemos pues la siguiente situación:



(Figura XXIX)

en donde BC" es igual a AC'. Vamos a considerar ahora diversos triángulos semejantes para comparar las diferentes longitudes.

Como los dos triángulos son semejantes,

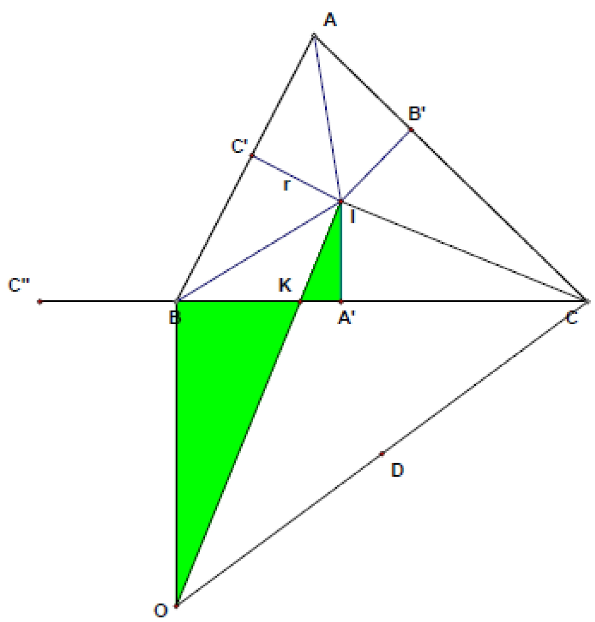


(Figura XXX)

se tiene

$$\frac{BC}{AC'} = \frac{BO}{r}.$$

Como los dos triángulos son semejantes,



(Figura XXXI)

se tiene

$$\frac{BK}{A'K} = \frac{BO}{r}.$$

De aquí resultan las siguientes igualdades:

$\frac{BC}{AC'} = \frac{BK}{A'K}$ sumando 1 se tiene:

$\frac{BC}{AC'} + 1 = \frac{BK}{A'K} + 1$

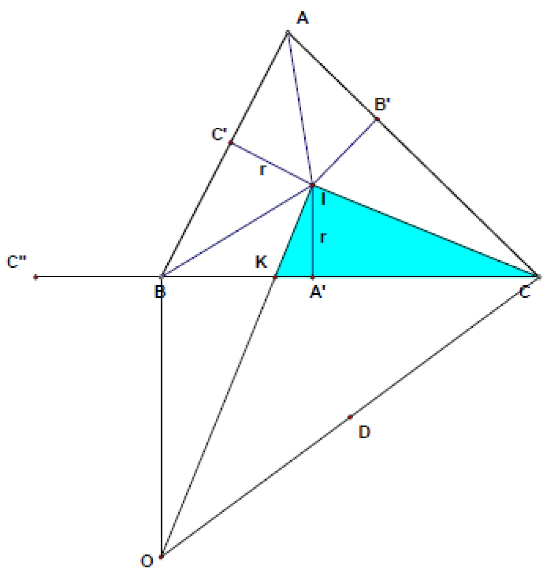
$\frac{BC+AC'}{AC'} = \frac{BK+A'K}{A'K}$

$\frac{CC''}{AC'} = \frac{BA'}{A'K}$ ajustando las fracciones:

$\frac{CC''\cdot CC''}{AC'\cdot CC''} = \frac{BA'\cdot A'C}{A'K\cdot A'C}$

$(CC'')^2 \cdot A'K \cdot A'C = CC'' \cdot AC' \cdot BA' \cdot A'C.$

Falta por identificar $A'K \cdot A'C$. esto lo conseguimos mediante el teorema del altura y el triángulo rectángulo de la figura:



(Figura XXXI)

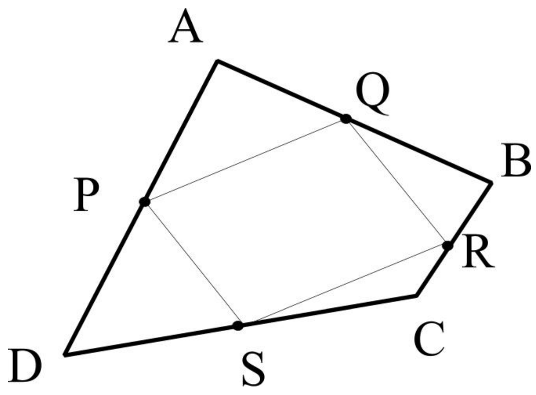
ya que se tiene: $r^2 = A'K \cdot A'C$. Como $CC'' = s$, y se tiene $AC' = s - a$, $BA' = s - b$ y $CA' = s - c$, se tiene

$$s^2 r^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

y tomando raíces resulta: Área $= sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Actividad VI. Suma de los ángulos de un polígono

1.
Dado un cuadrilátero *ABCD*, si los puntos medios de los lados son *P*, *Q*, *R* y *S*, prueba que el cuadrilátero *PQRS* es un paralelogramo.



2.
Tenemos una parcela en forma de cuadrilátero de la que conocemos los vértices. Un plano a escala de la misma es el que aparece a continuación. Determinar la superficie de la parcela.