NOTAS DE TRABAJO, 66

PARADOJAS

Pascual Jara Martínez

Departamento de Álgebra. Universidad de Granada

Granada, 2008–2009

Primera redacción: 2008.

Introducción

El término Paradoja viene del griego ”paraʔ ”doxos”, y significa ”más allá de lo creíble”.

`http://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja#Paradojas_ver.C3.ADdicas`

Vamos a desarrollar aquí una colección de paradojas y las vamos a agrupar por el temas de las matemáticas sobre el que se basan. Esta colección es simplemente indicativa de las muchas paradojas que se pueden construir, fundamentalmente en la Matemática.

Agradecemos al lector de este texto que nos comunique las posibles erratas u omisiones que pueda detectar en este texto, para lo que remitimos a la página Web

`http://www.ugr.es/local/anillos/textos/paradojas.htm`

Índice general

Capítulo I

Paradojas Matemáticas

1. Sobre frases y sentencias

1.1. UN ENUNCIADO Y SU CONTRARIO

Enunciado:

"Esta frase consta de siete palabras".

Está claro que el enunciado es falso, ya que consta de seis palabras. Por tanto, su contrario debería ser verdadero. ¿Es esto correcto?

Discusión:

¡Es falso! La oración contraria es:

"Esta frase no consta de siete palabras"

que está formada exactamente por siete palabras. ¿Cómo resolver estos raros dilemas?

En realizada no se pueden resolver estos dilemas, ya que son sentencias que no son enunciados matemáticos.

1.2. LA PARADOJA DEL MENTIROSO

Enunciado:

Se atribuye a Epiménides haber afirmado:
“Todos los cretenses son mentirosos”.

Sabiendo que él mismo era cretense, ¿decía Epiménides la verdad?

Discusión:

Si la sentencia de Epiménides es cierta, entonces Epiménides es mentiroso y no estaría diciendo la verdad. Por el contrario, si la sentencia de Epiménides no es cierta, entonces ocurre que algún cretense dice la verdad y, por supuesto, éste no es el caso de Epiménides.

1.3. LOS TRES ENUNCIADOS FALSOS

Enunciado:

Tenemos aquí tres enunciados falsos. ¿Será capaz Vd. de descubrir cuáles?

1) $2+2=4$

2) $3\times 6=17$

3) $8/4=2$

4) $13-6=5$

5) $5+4=9$

Discusión:

Únicamente son falsos los enunciados (2) y (4). Por tanto, la afirmación de hay tres enunciados falsos es falsa. Tenemos así el tercero de los enunciados falsos. ¿No es verdad?

1.4. ¿APROBARÁ EL EXAMEN?

Enunciado:

El siguiente relato ocurrió en un examen oral.

PROFESOR: De las siete preguntas de que consta el examen, ya te has equivocado en tres preguntas, y sólo nos queda una. Tu aprobado o suspenso depende completamente de si aciertas o no la próxima pregunta. ¿Te das cuenta?
ALUMNO: Sí. Me doy cuenta.
PROFESOR: El estar nervioso no te ayudará.
ALUMNO: Ya lo sé. Trataré de tranquilizarme.
PROFESOR: Y ésta es la pregunta. Recuerda: todo depende de si contestas esto bien o mal.
ALUMNO: Sí, sí, ¡ya lo sé!
PROFESOR: La pregunta es ésta: ¿Aprobarás este examen?
ALUMNO: ¿Cómo voy a saberlo?
PROFESOR: Eso no es una respuesta. Debes darme una respuesta clara, sí o no. Si contestas bien, aprobarás; si no, suspenderás. ¡Así de simple!

La cuestión no le parecía nada simple al alumno. La verdad es que cuanto más pensaba en ello más confuso se sentía. Y de repente cayó en la cuenta de algo muy interesante. Si contestaba una cosa, el profesor tendría la posibilidad de aprobarlo o suspenderlo, como más le complaciera. Si contestaba lo otro, sería imposible que el profesor le aprobara o le suspendiera sin contradecir sus propias reglas. Como el alumno tenía más interés en no suspender que en aprobar, eligió la segunda alternativa, y contestó de una manera que confundió por completo al profesor.

¿Qué respuesta dio?

Discusión:

Supongamos que contestara que sí. En este caso el profesor podría suspenderlo o aprobarlo, como prefiriese.

Si le suspendía y el alumno preguntaba por qué, el profesor podría decir “Contestaste mal la última pregunta, después de todo dijiste que ibas a aprobar y no fue así, y como la última pregunta estaba mal, tienes que suspender”. Pero el profesor podría igualmente aprobarlo y decir “Dijiste que aprobarías, y como ha sido así, tenías razón, así que contestaste bien la última pregunta, y por eso apruebas”.

Desde luego los dos razonamientos son circulares, pero ninguno de los dos es peor que el otro.

En cambio, si el alumno contestara que no, el profesor no podría ni suspenderlo ni aprobarlo.

Si le aprobaba, el alumno habría contestado mal y habría suspendido. Si le suspendía, el alumno habría contestado bien y habría aprobado. Así que el profesor no podía ni aprobarlo ni suspenderlo.

Como el alumno tenía más interés en no suspender que en aprobar, contestó “No¿ fastidió al profesor por completo.

1.5. UNA DE LAS DOS

Enunciado:

He aquí dos afirmaciones. Una de ellas es falsa. ¿Cuál?

Discusión:

La primera es cierta: hay dos afirmaciones, ella misma y la segunda.

¿Y la otra? Si fuese falsa, ella misma habría de decir que no hay ninguna falsa (al ser falsa) y si fuese verdadera, ¿dónde está la falsa? Por lo que nos introducimos en una clara contradicción.

1.6. ERRORES

Enunciado:

En éste acertijo se cometen tres errores.

- París es la capital de Francia.
- Dos más dos es igual a cinco.
- América fue descubierta en 1492.

¿Cuáles son los errores?

Discusión:

Hay exactamente dos errores; uno es la frase que dice “Dos más dos es igual a cinco”. El otro es: “En este acertijo se cometen tres errores”.

1.7. HORRORES

Enunciado:

En éste acertijo se cometen dos errores.

- Roma es la capital de Italia.
- Dos por dos es igual a cinco.
- Hillary escaló el Everest.

¿Cuáles son los errores?

Discusión:

Se trata de una paradoja. Si suponemos que el único error es “Dos por dos es igual a cinco”, entonces la primera frase debe ser correcta; pero no puede serlo, porque afirma que los errores son dos. Y si suponemos que los errores son, efectivamente, dos, la primera frase debe estar equivocada; pero no puede estarlo, porque afirma precisamente que los errores son tantos como supusimos. Luego este acertijo no tiene solución lógica.

1.8. PARADOJA TEMPORAL

Enunciado:

Un español en 1987 llamó por teléfono a otro que se encontraba en 1986, y le dijo:

- Mañana te telefonearé de nuevo.
- De acuerdo. ¡Hasta mañana!

¿Podría darse esta situación un tanto paradójica en la vida real?

Discusión:

Por paradójica que parezca es posible con la condición de que el primer español se encuentre en la Península y el otro en las Islas Canarias y que la llamada se realice en la Península después de las 12 de la noche del 31 de diciembre y antes de la una de la madrugada del día 1 de enero.

1.9. EL ASCENSOR

Enunciado:

Don Juan Carlos sale de casa todos los días a las siete de la mañana para comprar el periódico. Entra en el ascensor y pulsa el botón correspondiente que lo lleva a la planta baja, da un pequeño paseo y tras comprar el periódico vuelve a tomar el ascensor. Pulsa el botón correspondiente, se baja en la quinta planta y sube las escaleras hasta su piso que está situado en la séptima planta.

¿Por qué crees que Don Juan Carlos sube todos los días las escaleras que separan las dos plantas?

Discusión: Tiene que ver con la altura de Don Juan Carlos. El pobre era tan bajito que no llegaba a pulsar el botón de la planta séptima.

2. Paradojas aparentes

2.1. LA PARADOJA DEL CUMPLEAÑOS

Enunciado:

La paradoja del cumpleaños establece que si hay 23 personas reunidas, hay una probabilidad del 50,7 % de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día. Para 60 o más personas la probabilidad es mayor del 99 %. Obviamente es del 100 % para 366 personas (sin tener en cuenta los años bisiestos).

En sentido estricto esto no es una paradoja ya que no es una contradicción lógica; es una paradoja en el sentido que es una verdad matemática que contradice la común intuición. Mucha gente piensa que la probabilidad es mucho más baja, y que hacen falta muchas más personas para que se alcance la probabilidad del 50 %.

¿Cómo razonarías estos hechos?

Discusión:

Calcular esta probabilidad es el **problema del cumpleaños**. La teoría fue descrita en American Mathematical Monthly en 1938 en la Teoría de Estimación del total de población de peces en un lago de Zoe Emily Schnabel, bajo el nombre de captura-recaptura estadística.

La clave para entender la paradoja del cumpleaños es pensar que hay muchas probabilidades de encontrar parejas que cumplan años el mismo día. Específicamente, entre 23 personas, hay $\dfrac{23 \times 22}{2} = 253$ pares, cada uno de ellos un candidato potencial para cumplir la paradoja.

Hay que entender que si una persona entrase en una habitación con 22 personas, la probabilidad de que cualquiera cumpla años el mismo día que quien ingresa, no es del 50 %, es mucho más baja. Esto es debido a que ahora sólo hay 22 pares posibles. El problema real de la paradoja del cumpleaños consiste en preguntar si el cumpleaños de cualquiera de las 23 personas coincide con el cumpleaños de alguna de las otras personas.

Calculemos la probabilidad aproximada de que en una habitación de n personas al menos dos cumplan años el mismo día, desechando los años bisiestos y las personas gemelas, y asumimos que existen 365 cumpleaños que tienen la misma probabilidad. El truco es calcular primero la probabilidad de que n cumpleaños sean diferentes. Esta probabilidad es dada por

$$p = \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{365 - n + 1}{365}$$

porque la segunda persona no puede tener el mismo cumpleaños que el primero $\frac{364}{365}$, la tercera personas no puede tener el mismo cumpleaños que las dos primeras $\frac{363}{365}$, etc. Usando notación factorial, puede ser escrita como

$$p = \frac{364!}{365^n \times (365 - n)!}$$

para $2 \leq n \leq 365$, y 0 para $n > 365$. Ahora, $1 - p$ es la probabilidad que al menos dos personas tengan el mismo día de cumpleaños. Para $n = 23$ se obtiene una probabilidad de alrededor de 0,507.

En contraste, la probabilidad de que al menos uno en una habitación de n personas tenga tu mismo día de cumpleaños está dada por

$$q = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n,$$

que para $n = 22$ es da alrededor de 0,059, y se necesitaría al menos una n de 253 para dar un valor de 0,5.

2.2. PARADOJA DE GALILEO

Enunciado:

La paradoja de Galileo es una demostración de una de las sorprendentes propiedades de los conjuntos infinitos. El carácter paradójico se da por poner en entredicho el principio de que el todo es mayor que sus partes.

En su último trabajo científico titulado, *Dos nuevas ciencias*, Galileo Galilei hizo dos afirmaciones aparentemente contradictorias acerca de los números enteros positivos.

- Algunos números tienen la propiedad de ser un cuadrado perfecto (esto es, el cuadrado de un entero, desde ahora llamado simplemente cuadrado), mientras que otros no la tienen. Por ello, el conjunto de todos los números, incluyendo tanto a los cuadrados como a los no cuadrados, tiene que ser mayor que el conjunto de los cuadrados.
- Sin embargo, por cada cuadrado hay exactamente un número que es su raíz cuadrada, y por cada número hay exactamente un cuadrado. Por lo tanto, no puede haber más de un tipo que de otro.

¿Por qué esta aparente contradicción no es tal?

Discusión:

Este es uno de los primeros usos, aunque no el primero, de demostración a través de una función biyectiva. Galileo llegó a la conclusión de que los conceptos de menor, igual y mayor sólo se aplicaban a conjuntos finitos, y no tenían sentido aplicados a conjuntos infinitos. En el siglo XIX, Cantor, usando los mismos métodos, demostró que a pesar de que el resultado de Galileo era correcto si se aplicaba a los números enteros, o incluso a los racionales, la conclusión general no era cierta: algunos conjuntos infinitos son mayores que otros, en el sentido que no se pueden relacionar mediante una correspondencia uno–a–uno.

2.3. EL HOTEL MÁS GRANDE DEL MUNDO

Enunciado:

Dos grandes hoteleros que querían construir el hotel más grande del mundo se reunieron a dialogar sobre el asunto y comenzaron por el primer y más obvio tema a discutir: cuántas habitaciones tendría el hotel.

— ¿Qué te parece si construimos un hotel con 1.000 habitaciones?

— No, porque si alguien construyera uno de 2.000 habitaciones, nuestro hotel ya no sería tan grande. Mejor hagámoslo de 10.000.

— Pero podría ser que alguien construyera uno de 20.000 y volveríamos a quedarnos con un hotel pequeño. Construyamos un hotel con 1.000.000 de habitaciones, ése sería un hotel grande.

— Y qué tal si alguien construyera uno con...”

Como siempre podría llegar a haber un hotel más grande, llegaron a la conclusión de que era necesario hacer un hotel con un **número infinitos** de habitaciones de manera que ningún otro hotel del mundo pudiera superar su tamaño. Lo llamaron Hotel Infinito y aseguraron que en él cualquier cliente podría disponer siempre de habitación con la condición de que tendría que cambiar de habitación cada vez que se le pidiera.

1.

Estando el Hotel Infinito al completo llegó un nuevo huésped al hotel. El hombre pidió su habitación y el recepcionista, consciente de que no habría ningún problema, tomó un micrófono por el que avisó a todos los huéspedes que por favor revisaran el número de su habitación, le sumaran uno y se cambiaran a la habitación de ese número. De esta manera el nuevo huésped pudo dormir tranquilamente en la habitación número 1. Pero, ¿qué pasó entonces con el huésped que se encontraba en la última habitación? Sencillamente no hay última habitación.

2.

Estando el Hotel Infinito al completo llegó un representante de una agencia de viajes, su problema era que tenía una excursión de infinitos turistas que necesitarían hospedarse esa noche en el hotel. Se trataba por lo tanto de hacer sitio a infinitos huéspedes en un hotel con infinitas habitaciones, todas ellas ocupadas en aquellos momentos. Pero el recepcionista no tuvo ningún problema en aceptar a los nuevos turistas. Cogió el micrófono y pidió a todos los huéspedes que se mudaran a la habitación correspondiente al resultado de multiplicar por 2 el número de su habitación actual. De esa forma todos los huéspedes se mudaron a una habitación par, y todas las habitaciones impares quedaron libres. Como hay infinitos números impares, los infinitos turistas pudieron alojarse sin más problema.

3.

En otra ocasión estando el Hotel Infinito al completo llegó otro representante de la misma agencia de viajes aún más preocupado que el primero pues la agencia tenía un infinito número de excursiones con un infinito número de turistas cada una. "¡Qué enorme problema se presenta ahora!", pensaban los representantes de la agencia de viajes. ¿Cómo podrían hospedar a un número infinito de infinitos turistas?

El recepcionista permaneció inmutable. Tomó tranquilamente el micrófono y se comunicó solamente con las habitaciones cuyo número fuera primo o alguna potencia de éstos, les pidió que elevaran el número 2 al número n de la habitación en la que se encontraban y se cambiaran a la habitación 2^n.

Entonces asignó a cada una de las excursiones un número primo p (mayor de 2), y a cada uno de los turistas de cada una de las excursiones un número t. Asignó a cada uno de los nuevos huéspedes la habitación con número p^t.

Existiendo un número infinito de números primos y un número infinito de números impares, fácilmente se logró hospedar a un número infinito de infinitos huéspedes dentro de un hotel que sólo tiene un número infinito de habitaciones.

Discusión:

http://es.wikipedia.org/wiki/Hotel_infinito

2.4. PARADOJA DE LA BANDA ELÁSTICA

Enunciado:

La paradoja de la banda elástica no es una paradoja en sentido estricto, pero choca con nuestro sentido común debido a que tiene una solución que parece imposible.

Nos encontramos con una esfera perfectamente lisa con un millón de veces el tamaño de nuestro Sol. Una banda de acero abraza estrechamente a esta esfera alrededor del ecuador.

A esta banda de acero se le agrega un metro, de manera que se eleve de la esfera a igual altura en todo su contorno. ¿Esto dejará la banda despegada de la esfera a una altura suficiente como para poder:

1. ¿Deslizar un papel bajo la banda?
2. ¿Deslizar una mano bajo la banda?
3. ¿Deslizar una pelota de tenis bajo la banda?

Discusión:

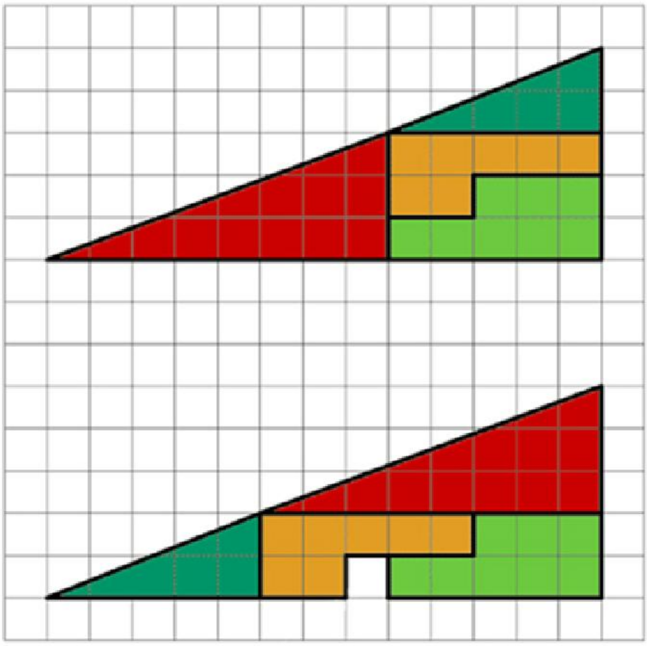
Aunque a priori la respuesta que daríamos es que es imposible siquiera que un papel pase bajo la banda, la respuesta correcta es que se puede incluso pasar la pelota de tenis, ya que la banda se despega de la esfera unos 16 cm.

La altura a la que se elevará la banda de la esfera es la misma independientemente del tamaño de la esfera, por muy grande que sea. El porqué de este hecho es el siguiente: Cuando la banda de la esfera está tensa alrededor de la esfera, es la circunferencia de un círculo con un radio que es el radio de la esfera. Sabemos a partir de la geometría plana que la circunferencia de un círculo es igual a su diámetro (que es el doble de su radio) multiplicado por el número $\pi = 3,141592...$, es decir, ligeramente mayor que 3. Por tanto, si aumentamos la circunferencia de cualquier círculo en un metro, debemos incrementar el diámetro un poquito menos que el tercio de metro, es decir, algo más de 31 cm. Eso significa que el radio aumentará aproximadamente en 16 cm.

Esto funciona con esferas de cualquier tamaño, ya sean del tamaño del Sol o del tamaño de una canica.

2.5. ¿DONDE SE HA METIDO EL CUADRADO QUE FALTA?

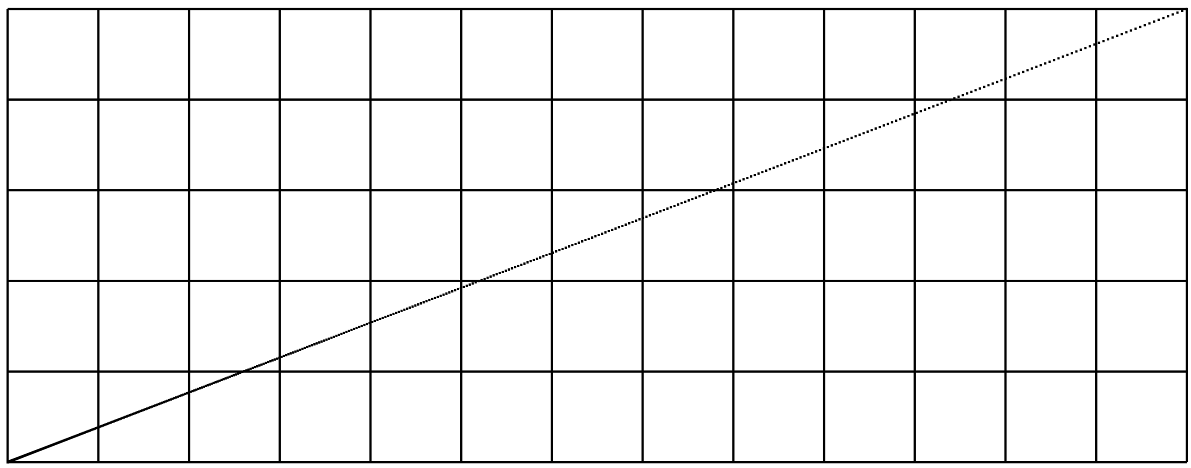
Considera las siguientes figuras.



Aparentemente se ha perdido un cuadrado. ¿Sabes donde está?

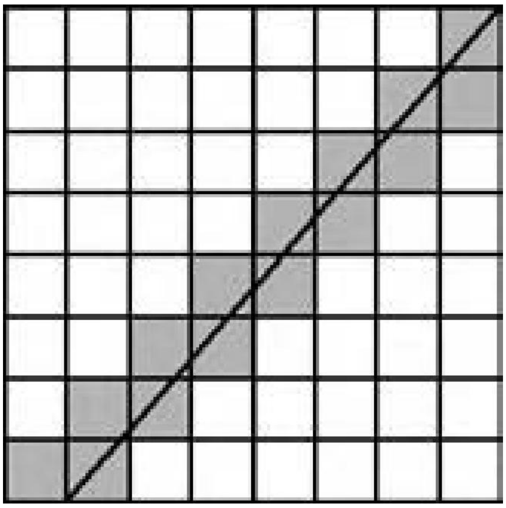
Discusión:

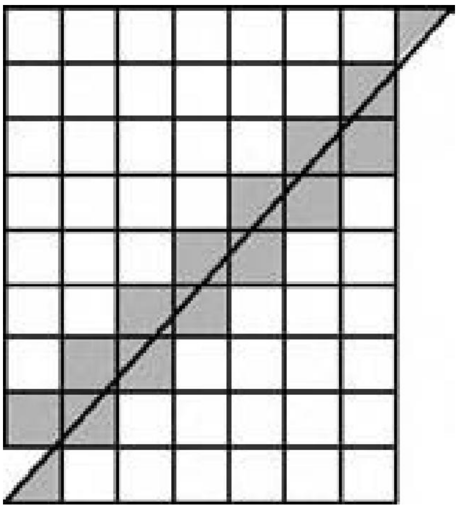
La razón es que la línea oblicua no corta precisamente en los puntos de la retícula.



2.6. ¿DONDE SE HA METIDO EL CUADRADO QUE FALTA?

Considera las siguientes figuras.

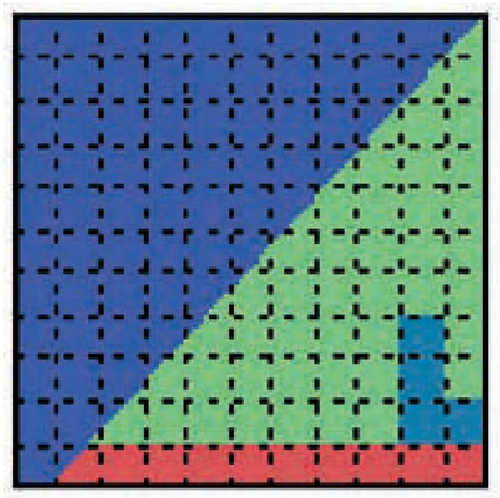


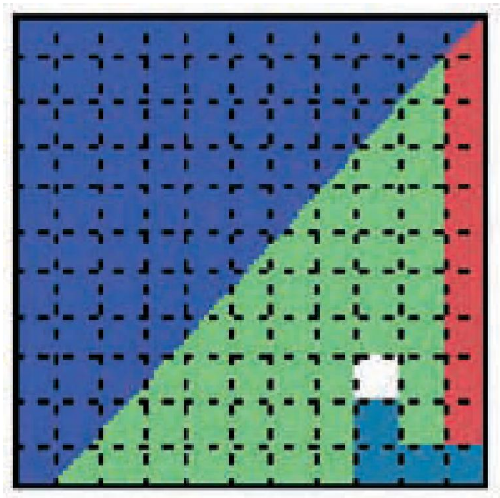


Aparentemente se ha perdido un cuadrado de color. ¿Sabes cómo?

2.7. ¿DONDE SE HA METIDO EL CUADRADO QUE FALTA?

Considera las siguientes figuras.

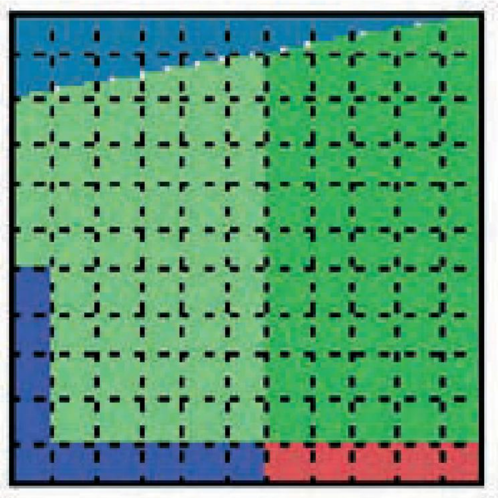


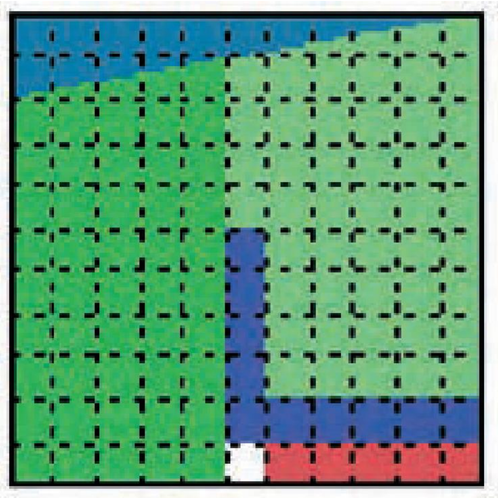


Aparentemente se ha ganado un cuadrado. ¿Sabes cómo?

2.8. ¿DONDE SE HA METIDO EL CUADRADO QUE FALTA?

Considera las siguientes figuras.

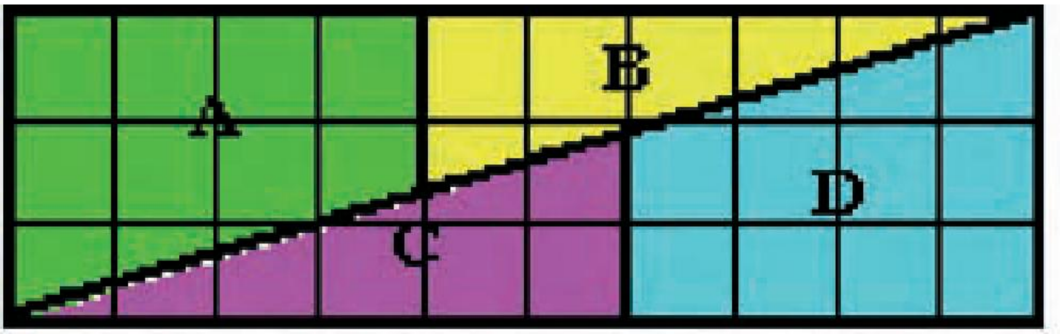


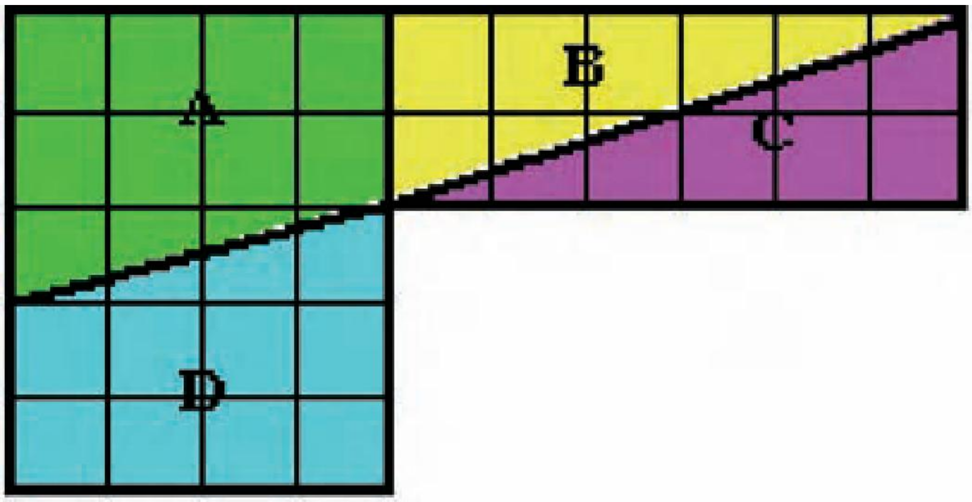


Aparentemente se ha perdido un cuadrado de color. ¿Sabes cómo?

2.9. ¿CÓMO SACAR CUADRADOS DE LA MANGA?

Considera las siguientes figuras.





Aparentemente la figura superior tiene treinta cuadrados, mientras que la inferior tiene treinta y dos. ¿Sabes por qué?

3. Paradojas semánticas

3.1. PARADOJA DE GRELLING–NELSON

Enunciado:

La paradoja utiliza las palabras inventadas “autológicoz “heterológico”. Una palabra es autológica si se describe a sí misma. Por ejemplo
“corto.es autológica, ya que la palabra “corto.es corta.
“Sofisticado”también es autológica.

Las palabras que no son autológicas se denominan heterológicas.
“Largo.es una palabra heterológica, al igual que “monosilábico”.

La pregunta, que aparece inmediatamente, es: ¿Es “heterológico”heterológico?.

Discusión:

No hay una respuesta consistente a la pregunta planteada: si lo es, entonces no lo es, y si no lo es, entonces lo es.

La Paradoja de Grelling–Nelson es una paradoja verbal formulada en 1908 por Kurt Grelling y Leonard Nelson. Es una reformulación de la paradoja del barbero y la paradoja de Russell.

3.2. PARADOJA DE RUSSELL

Enunciado:

La paradoja de Russell ha sido expresada en varios términos más cotidianos, el más conocido es la paradoja del barbero que se puede enunciar de la siguiente manera:

En un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet diestro en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y en poner sanguijuelas. Un día el emir se dio cuenta de la falta de barberos en el emirato, y ordenó que los barberos sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas. Cierto día el emir llamó a As-Samet para que lo afeitara y él le contó sus angustias:

— En mi pueblo soy el único barbero. Si me afeito, entonces puedo afeitarme por mí mismo, por lo tanto no debería de afeitarme el barbero de mi pueblo ¡que soy yo! Pero si por el contrario, no me afeito, entonces algún barbero me debe afeitar ¡pero yo soy el único barbero de allí!

El emir pensó que sus pensamientos eran tan profundos, que lo premió con la mano de la más virtuosa de sus hijas. Así, el barbero As-Samet vivió por siempre feliz.

Discusión:

La paradoja de Russell o paradoja del barbero, descrita por Bertrand Russell en 1901, demuestra que la teoría original de conjuntos formulada por Cantor y Frege es contradictoria.

Supongamos un conjunto que consta de elementos que no son miembros de sí mismos. Un ejemplo descrito, es el conjunto que consta de ïdeas abstractas.es miembro de sí mismo porque el conjunto es él mismo una idea abstracta, mientras que un conjunto que consta de “libros”no es miembro de sí mismo porque el conjunto no es un libro. Russell preguntaba (en carta escrita a Frege en 1902), si el conjunto de los conjuntos que no forman parte de ellos mismos forma parte de sí mismo. La paradoja consiste en que si no forma parte de sí mismo, pertenece al tipo de conjuntos que no forman parte de sí mismos y por lo tanto forma parte de sí mismo. Es decir, formará parte de sí mismo sólo si no forma parte de sí mismo.

Los conjuntos son reuniones de cosas, por ejemplo de coches, libros, personas, etc. y en este sentido los llamaremos conjuntos normales.

La característica principal de un conjunto normal es que no se contienen a sí mismos. Pero también existen conjuntos de conjuntos, como $\mathcal{P}(M)$, que es el conjunto de subconjuntos de M.

Un conjunto de conjuntos es normal salvo si podemos hacerlo que se contenga a sí mismo. Esto último no es difícil si tenemos el conjunto de todas las cosas que NO son libros y como un conjunto no es un libro, el conjunto de todas las cosas que NO son libros formará parte del conjunto de todas las cosas que NO son libros. Estos conjuntos que se contienen a sí mismos se llaman conjuntos singulares.

Está claro que un conjunto dado o bien es normal o bien es singular, no hay término medio, o se contiene a sí mismo o no se contiene. Ahora tomemos el conjunto C como el conjunto de todos los conjuntos normales. ¿Qué clase de conjunto es C? ¿Normal o Singular?

Si es normal, estará dentro del conjunto de conjuntos normales, que es C luego ya no puede ser normal. Si es singular, no puede estar dentro del conjunto de conjuntos normales, luego no puede estar en C, pero si no está en C entonces es normal.

Cualquier alternativa nos produce una contradicción, ésta es la paradoja.

3.3. PARADOJA DE CURRY

Enunciado:

Intuitivamente, la paradoja de Curry es: “si no me equivoco, Y es verdad”, donde Y puede ser cualquier declaración lógica (“el negro es blanco”, “$1 = 2$”, “Gödel existe”, “el mundo terminará en una semana”).

Si llamamos esta declaración X, entonces tenemos que X afirma: “Si X es verdad, entonces Y es verdad”.

Consideramos la declaración X dada por “Si esta declaración es verdad, el mundo terminará en una semana”, que será abreviada como “si X es verdad, entonces Y”.

Por lo tanto, al asumir X, Y es verdad. Esta declaración se puede reformular “si X es verdad, entonces Y”.

Como esta declaración verdadera es equivalente a X, X es verdad. Por lo tanto, Y es verdad, y el mundo terminará en una semana.

Cualquier cosa se puede “probar”de forma semejante vía la paradoja de Curry. Observa que a diferencia de la paradoja de Russell, esta paradoja no depende de qué modelo de la negación se utiliza, pues es totalmente libre de negación. Así las lógicas para-consistentes todavía necesitan tener cuidado. La resolución de la paradoja de Curry es un tema contencioso porque las resoluciones no triviales (tales como rechazo de X directamente) son difíciles y no intuitivas. En las teorías de conjuntos que permiten la comprensión sin restricción, podemos probar cualquier declaración lógica Y a partir del conjunto

$$X \equiv \{x \mid x \in X \to Y\}$$

La prueba es:

$$\begin{array}{l} X \in X \Leftrightarrow (X \in X \to Y) \text{ definición de } X \\ X \in X \to (X \in X \to Y) \\ X \in X \to Y \\ (X \in X \to Y) \to X \in X \\ X \in XY \end{array}$$

Discusión:

Llamada así por Haskell Curry, la paradoja de Curry ocurre en teoría ingenua de conjuntos o en lógicas ingenuas.

3.4. PARADOJA DEL MENTIROSO

Enunciado:

La paradoja del mentiroso es un concepto relacionado con la filosofía y la lógica, que se refiere a afirmaciones paradójicas que se autocontradicen.

Las dos versiones más conocidas son: .Estoy mintiendoz .Esta oración es falsa".

Esta paradoja muestra que es posible construir oraciones perfectamente correctas según las reglas gramaticales y semánticas pero que pueden no tener un valor de verdad según la lógica tradicional.

Consideremos una de las formas más simples de esta paradoja: .Esta oración es falsa":

- Si suponemos que esa afirmación es verdadera, entonces lo que dice es verdadero. Ya que la oración afirma que es falsa, entonces debe ser falsa. Por tanto, si suponemos que es verdadera, alcanzamos una contradicción.
- Si suponemos que la oración es falsa, entonces lo que afirma debe ser falso. Ya que afirma que la oración es falsa, entonces la oración debe ser verdadera. De nuevo, si suponemos que es falsa, alcanzamos una contradicción.

La versión más antigua de la paradoja del mentiroso se atribuye al filósofo griego Eubulides de Mileto, que vivió en el siglo IV a. C. Supuestamente Eubulides dijo:

Un hombre afirma que está mintiendo. ¿Lo que dice es verdadero o falso?

Discusión:

La paradoja no existente - Análisis sobre la Paradoja del mentiroso

No nos equivoquemos creando paradojas causadas por las carencias del lenguaje; ignorar esta realidad solo producirá paradojas insignificantes. Por ejemplo, en la célebre paradoja del mentiroso: si digo "soy un mentirosoz efectivamente lo soy, entonces estoy diciendo la verdad, por lo que no soy un mentiroso. Pero, EN REALIDAD ESTA FRASE CARECE DEL TIEMPO CORRECTO AL CUAL SE REFIERE SI HA DE SER VERDAD, es decir, o el mentiroso nos ha mentido nuevamente, pues para ser verdad lo que dijo debió haber dicho "he sido mentiroso.º acaba de dejar de ser un mentiroso al aceptar su pasado. De esta forma se ve que en realidad no existe paradoja aquí.

HA DEJADO DE SER MENTIROSO: Si digo “soy un mentirosoz efectivamente lo soy. ¡DETENTE AHÍ ! ¡Efectivamente no lo puedes ser si ya has dicho la verdad! Debías haber dicho “Fui un mentiroso”.

SE HA CONFIRMADO MENTIROSO: Si digo “soy un mentirosoz efectivamente lo soy, resulta que soy un rotundo mentiroso y que simplemente he vuelto a confírmalo, pues en el momento que dije esta “verdad”he vuelto a mentir ya que en ese instante presente no lo he sido.mentiroso.

Ahora, la supuesta paradoja del mentiroso está resuelta y se muestra que nunca fue paradoja. ¿Cuántas supuestas paradojas habrán sido producidas por este error? ¿Cuántas paradojas tendrán esta solución ahorrando interminables horas de análisis filosófico ?

Ahora ya sabes lo que pasó cuando el mentiroso se confesó con el sabio:

El mentiroso se sincera y dice “soy un mentiroso”, luego pregunta al sabio: ¿fui mentiroso por decir la verdad? El sabio responde: ”Has dejado de ser mentiroso desde el momento que dijiste ser un mentiroso, pero ahora aprende a hablar con propiedad, pues fue en tu pasado que fuiste mentiroso”

¡Finalmente el mentiroso ha sido librado de su mentira!

Una versión doble

Es posible construir esta paradoja de modo que una afirmación no se refiera directamente a su propio valor de verdad. Existen de este modo varias versiones equivalentes:

1. La más simple: “La oración posterior es ciertaz “La oración anterior es falsa”.
2. Una tarjeta, en una de cuyas caras aparece: “Lo que está escrito en la otra cara es ciertoz en la otra: “Lo que está escrito en la otra cara es falso”.
3. Un libro, que en la página 23 tiene escrito “Lo que está escrito en la página 24 es ciertoz en la página 24: “Lo que está escrito en la página 23 es falso”.

En realidad se trata de una cuestión de autorreferencia. Ejemplo clásico es el del libro en cuya nota final afirma “todo lo escrito en este libro es falso”. Lo cual deja abierta la posibilidad de que aquella última afirmación también lo sea, y en ese caso el resto sería verdadero o, por el contrario, si aquella afirmación fuera verdadera el resto del libro sería falso. Pero como la última afirmación se encuentra dentro del mismo libro la interpretación sobre el alcance de la misma deja a la veracidad del libro librada hacia el infinito. Así, sólo es posible salir del circuito de la autorreferencia tomando como punto de partida un punto de vista apartado del objeto que se valore.

3.5. PARADOJA DE BERRY

Enunciado:

La Paradoja de Berry es la aparente contradicción que deriva de frases como ésta:

El menor entero positivo que no se puede definir con menos de quince palabras.

El siguiente argumento parece probar que este frase define un único entero positivo N. El número de frases que se pueden formar con menos de quince palabras es finito. Algunas de éstas frases pueden describir un entero positivo específico, por ejemplo "mil trescientos veintisiete", "el primer número primo mayor que cien millones.º "dos elevado a trece". Sin embargo, otras de las frases describen cosas que no son enteros, por ejemplo "William Shakespeare" o "Torre Eiffel". En cualquier caso, el conjunto A de enteros que se pueden definir con menos de quince palabras es finito. Puesto que A es finito, no puede contener a todos los enteros positivos, de modo que tiene que haber un número entero positivo N que sea el menor de todos los números enteros positivos que no están contenidos en A.

Pero la frase que define el número N, tiene sólo catorce palabras.

Esto es claramente paradójico, y parece sugerir que "que no se puede definir con menos de quince palabras"no está bien definido. Sin embargo, es posible construir una expresión análoga con lenguaje matemático formal, como ha hecho Gregory Chaitin. A pesar de que la expresión análoga en lenguaje formal no lleva a una contradicción lógica, sí tiene ciertos resultados imposibles, incluyendo un teorema de incompletitud similar al Teorema de la incompletitud de Gödel.

La paradoja de Berry fue propuesta por Bertrand Russell (Russell, 1906). Russell a su vez, la atribuyó a G. G. Berry, biblitecario en jefe de la biblioteca Bodleian de la Universidad de Oxford (cf. Russell and Whitehead 1910), que había sugerido la idea de estudiar la paradoja asociada a la expresión "el primer número ordinal que no se puede definir".

Discusión:

Se suele aceptar que la paradoja de Berry y otras paradojas similares (como la paradoja de Richard) provienen de la interpretación de conjuntos de expresiones que se autorreferencian. De acuerdo con (Russell and Whitehead, 1910) estas paradojas "encarnan falacias de círculo vicioso". Resolver una de éstas paradojas significa localizar exactamente dónde comienza el error en el uso del lenguaje y restringirlo para evitarlas.

Algunas expresiones de éste tipo no presentan la paradoja:

El menor entero positivo que no se puede definir con menos de dos palabras.

que bajo cualquier uso razonable del idioma español describe al 31, ya que ”Treinta y uno”son tres palabras y cualquier definición indirecta de ese número (como “el número de días en enero”, o incluso “El menor entero positivo que no se puede definir con menos de dos palabras”) tienen necesariamente dos o más palabras.

3.6. PARADOJA DE LA SUERTE

Enunciado:

Es de mala suerte ser supersticioso

Discusión:

4. Paradojas de definición

Estas paradojas se basan en definiciones ambiguas, sin las cuales no alcanzan una contradicción. Este tipo de paradojas constituye un recurso literario, en cuyo empleo se ha destacado el escritor inglés G. K. Chesterton, a quién se llamó el "príncipe de las paradojas". Sirviéndose de los múltiples sentidos de las palabras, buscaba marcar contrastes que llamaran la atención sobre alguna cuestión comúnmente poco considerada. Estas paradojas, como en su libro "Las paradojas de Mr. Pond"(1936), se resuelven en el trascurso de los relatos al clarificar un sentido o añadir alguna información clave.

4.1. PARADOJA DEL MONTÓN

Enunciado:

¿En qué momento un montón de arena deja de serlo cuando se van quitando granos?

La paradoja del montón (o la paradoja sorites, sorites en Griego significa "pila, montón") es una paradoja que aparece cuando la gente utiliza el "sentido común"sobre conceptos vagos.

Más específicamente, la paradoja se produce porque mientras el sentido común sugiere que los montones de arena tienen las siguientes propiedades, estas propiedades son inconsistentes:

1. Dos o tres granos de arena no son un montón. item Un millón de granos de arena sí son un montón.
2. Si n granos de arena no forman un montón, tampoco lo serán (n+1) granos.
3. Si n granos de arena son un montón, también lo serán (n-1) granos.

Si se aplica la inducción matemática, se comprueba que la tercera propiedad junto con la primera implican que un millón de granos de arena no forman un montón, contradiciendo la segunda propiedad. De modo análogo, combinando la segunda y la cuarta propiedad se demuestra que dos o tres granos sí son un montón, contradiciendo la primera propiedad.

¿Qué produce esta contradicción? Para descubrirlo, examinemos las propiedades anteriores. Las dos últimas expresan claramente la idea de que no hay una separación clara entre lo que es un montón y lo que no es un montón. Observa, sin embargo, que las cuatro juntas implican que un conjunto de granos de arena puede clasificarse sin ningún problema como "montón.º "no montón". (Esto de nuevo se obtiene a través de inducción matemática).

Lo que muestra la paradoja es que estas dos ideas son contradictorias. Esto es, que una persona no puede afirmar, cuando está clasificando X's:

1. que no hay un límite claro que separa las X's que son Y de las X's que no son Y
2. que cada una de las X's se puede clasificar como Y o como no-Y

Discusión:

El argumento sorites es una de las diversas paradojas atribuidas a Eubulides de Mileto, filósofo griego de la escuela megárica. Algunas fuentes la remontan a Zenón de Elea. En la época helenística, los escépticos emplearon la paradoja para mostrar las debilidades de sistemas dogmáticos como el estoicismo.

4.2. PARADOJA DE TESEO

Enunciado:

La Paradoja de Teseo, también conocida como El barco de Teseo, es un paradoja de reemplazo. Se basa en la pregunta de si cuando a un objeto se le reemplazan todas sus partes, este sigue siendo el mismo.

Leyenda griega

Según una leyenda griega recogida por Plutarco: "El barco en el cual volvieron (desde Creta) Teseo y los jóvenes de Atenas tenía treinta remos, y los atenienses lo conservaban desde la época de Demetrio de Falero, ya que retiraban las tablas estropeadas y las reemplazaban por unas nuevas y más resistentes, de modo que este barco se había convertido en un ejemplo entre los filósofos sobre la identidad de las cosas que crecen; un grupo defendía que el barco continuaba siendo el mismo, mientras el otro aseguraba que no lo era."

Lo que se puede traducir en la siguiente pregunta: Al final, ¿estaríamos en presencia del mismo barco si se hubieran reemplazado cada una de las partes del barco una a una?

Existe además una pregunta adicional: si las partes reemplazadas se almacenasen, y luego se usasen para reconstruir el barco ¿cual de ellos - si lo es alguno - sería el barco original de Teseo?

El río de Heráclito

El filósofo griego Heráclito tomó una visión opuesta de la identidad metafísica afirmando que:

"Ningún hombre puede cruzar el mismo río dos veces, porque ni el hombre ni el agua serán los mismos."

Plutarco también nos informa de la declaración de Heráclito de pararse dos veces en el mismo río, citando que eso no se puede hacer porque "se dispersa y se junta de nuevo, y se acerca y retrocede."

Los calcetines de Locke

John Locke propuso un escenario concerniente a un calcetín favorito al que le sale un agujero. El reflexionaba sobre si el calcetín podría aún ser el mismo después de que se aplicara un parche en él. Si así era, ¿podría entonces seguir siendo el mismo calcetín después de que se le aplicara un segundo parche? ¿podría, en efecto, seguir siendo el mismo calcetín varios años después, incluso después de que todo el material del calcetín fuera reemplazado por parches?

La vieja hacha del abuelo

“La vieja hacha del abuelo” es una expresión coloquial de origen desconocido que describe algo a lo que le queda poco del original: “ha tenido tres nuevas cabezas y cuatro nuevos mangos pero aun es la misma vieja hacha.”La frase también ha sido usada en bromas como: “Esta es el hacha original de George Washington...”, mientras se sostiene un hacha evidentemente nueva.

Otros ejemplos

Uno puede pensar muchos ejemplos de objetos que pueden caer presas de la paradoja de Teseo: edificios y automóviles, por ejemplo, pueden sufrir un reemplazamiento completo y aún mantener algún aspecto de su identidad. Negocios, colegios y universidades cambian frecuentemente de direcciones y residencias, reemplazando.ªsí completamente su antigua estructura material por una nueva, y siguen manteniendo el mismo propósito y frecuentemente la misma gente que mantenía a la organización funcionando como lo hacía. Si dos negocios se juntan, sus identidades se juntan (o uno es consumido por el otro). De manera similar, el cuerpo humano constantemente crea, a partir de los materiales construidos, nuevas partes componentes, células, mientras las células viejas mueren. El promedio de edad de las células en un cuerpo adulto puede ser de menos de diez años.

Si relacionamos la identidad a las acciones o fenómenos, la identidad se vuelve incluso más difícil de comprender. Dependiendo de la perspectiva escogida por uno de qué es lo que identifica o continúa un huracán, si un huracán Evan se desata en un lugar concreto y entonces otro huracán se forma en el mismo lugar o cerca de él, una persona puede ser totalmente coherente en escoger llamar al huracán final igual que al primer, o escoger llamar a ese último con un nuevo nombre: “Frank”, “Georgia.º “Bashi”.

Discusión:

Las causas de Aristóteles

De acuerdo con el sistema filosófico de Aristóteles y sus seguidores, hay cuatro causas o razones que describen una cosa; éstas causas pueden ser analizadas para conseguir una solución a la paradoja. La Causa Formal o forma es el diseño de una cosa, mientras que la Causa Material es la materia de la que esta hecha la cosa. El Barco de Teseo, en un sentido limitado, podría ser descrito como el mismo barco, debido a que la causa formal, o diseño, no cambia, incluso aunque el material usado para construirlo pueda variar con el tiempo. De la misma manera, un río tiene la misma causa formal, aunque la causa material (el agua contenida en él) cambie con el tiempo. Otra de las causas de Aristóteles es el fin o Causa Final, el cual es el propósito previsto de una cosa. El Barco de Teseo podría tener el mismo fin, esto es, transportar a Teseo, incluso pese a que su causa material pudiera cambiar con el tiempo. La Causa Eficiente es como y por quien esta hecha una cosa, por ejemplo, como artesanos fabricaron y montaron alguna cosa; en el caso de El Barco de Teseo, los trabajadores que construyeron el barco en primer lugar podrían haber usado las mismas herramientas y técnicas para reemplazar los tablones en el barco.

Definiciones de "lo mismo".

Un argumento común fundado en la literatura filosófica está en el caso de, en que el rio de Heráclito nos tropezamos con 2 definiciones de "lo mismo". Por un lado, las cosas pueden ser cualitativamente iguales, solo por el hecho de tener las mismas propiedades. Por otro lado, ellas podrían ser numéricamente las mismas siendo üna". Como ejemplo, considere 2 bolas de bolos que se ven idénticas. Ellas son cualitativamente pero no numéricamente las mismas. Si una de las bolas fuese entonces pintada de un color diferente, ésta sería numéricamente la misma que existía antes, pero no cualitativamente igual a su pareja.

Dado este argumento, el río de Heráclito es cualitativamente, pero no numéricamente, diferente para el momento en que uno da el segundo paso dentro de él. Para la paradoja de Teseo se cumple la misma verdad.

El principal problema de esta solución propuesta, es que si nosotros construimos nuestra solución para los problemas de identidad es que si nosotros construimos nuestra propia definición de identidad lo suficientemente amplia, la identidad cualitativa colapsa en la identidad numérica. Por ejemplo, si unas de las cualidades de la bola de bolos es una ubicación espacio-temporal, entonces no existirán dos bolas de bolos que se encuentre en diferentes lugares y tiempos que puedan ser alguna vez cualitativamente idénticas. Igualmente, en el caso del río, dado que tiene diferentes propiedades en cada punto del tiempo - tales como diferentes caudales, y diferencias en las ondas de la superficie, y cambios en la cantidad de agua debido a la evaporación - este nunca podrá ser cualitativamente idéntico en diferentes puntos de la línea de tiempo. Dado que nada puede ser cualitativamente diferente, sin también tener que ser numéricamente diferente, el río tiene que ser numéricamente diferente en diferentes puntos en el tiempo.

Diferencias Culturales

Este concepto puede diferir en culturas diferentes. Como muestra esta anécdota, parecería que en Asia esto no constituye una paradoja. Douglas Adams en su libro Last chance to see relata:

Yo recuerdo que una vez en Japón, fui de visita al Gold Pavilion Temple en Kyoto y me sorprendí al observar lo bien que el templo había resistido el paso del tiempo desde que fuera construido en el siglo catorce. Entonces me explicaron, que en realidad el edificio no había resistido, ya que de hecho se había quemado hasta los cimientos dos veces durante este siglo. Por lo que le pregunté a mi guía japonés ”¿O sea que no es el edificio original?”.

.Al contrario, por supuesto que es el original”, me contestó, un tanto sorprendido por mi pregunta.

“¿Pero no se incendió?”.

“Sí”.

“Dos veces”.

“Muchas veces”.

“Y fue reconstruido”.

“Por supuesto. Es un edificio histórico importante”.

“Con materiales completamente nuevos”.

“Por supuesto. ¡Si se había incendiado!”.

“Pero entonces, ¿cómo es posible que sea el mismo edificio?”

“Siempre es el mismo edificio.”

Y tuve que admitir que este era un punto de vista perfectamente racional, solo que partía de un postulado completamente inesperado. La idea del edificio, la finalidad del mismo, y su diseño, son todos conceptos inmutables y son la esencia del edificio. El propósito de los constructores originales es lo que sobrevive. La madera de la que está construido decae y es reemplazada todas las veces que sea necesario. El preocuparse por los materiales originales, que solo son recuerdos sentimentales del pasado es no saber apreciar al edificio.”

4.3. PARADOJA DE BOIXNET

Enunciado:

Pienso, luego existo, mas cuando no pienso, ¿no existo?

Discusión:

4.4. EJEMPLOS DE PARADOJA EN CHESTERTON

Enunciado:

"Era un extranjero muy deseable, y a pesar de eso no lo deportaron".

"Una vez conocí a dos hombres que estaban tan completamente de acuerdo que, lógicamente, uno mató al otro".

Discusión:

5. Paradojas condicionales

5.1. PARADOJA DE NEWCOMB

Enunciado:

Cómo jugar contra un oponente omnisciente

La paradoja de Newcomb es el estudio de un juego entre dos jugadores, uno de los cuales puede predecir el futuro.

La paradoja de Newcomb se considera una paradoja porque lleva a una autocontradicción. La causalidad inversa está definida en el problema, por lo que no puede haber libre albedrío. Al mismo tiempo, el libre albedrío está definido en el problema, de otro modo, el jugador no estaría realizando una verdadera elección.

Esta paradoja fue formulada por William Newcomb, del laboratorio "Lawrence Livermore" en la Universidad de California. Robert Nozick la dio a conocer a la comunidad filosófica en 1969, y apareció en la columna de Martin Gardner en Scientific American en 1974.

Formulación

En este juego hay dos participantes: un oráculo capaz de predecir el futuro y un jugador normal. Al jugador se le presentan dos cajas: una abierta que contiene $1000 y una cerrada que contiene, o $1.000.000 o $0. El jugador debe decidir si quiere recibir el contenido de ambas cajas o sólo el de la caja cerrada.

La complicación consiste en que anteriormente, el oráculo ha vaticinado lo que va a escoger el jugador. Si vaticina que el jugador se llevará sólo la caja cerrada, pondrá $1.000.000 dentro de esa caja. Si vaticina que el jugador se llevará las dos cajas, dejará vacía la caja cerrada. El jugador conoce el mecanismo del juego, pero no la predicción, que ya ha sido realizada.

¿Debería el jugador llevarse ambas cajas o sólo la cerrada?

La matriz de pagos del juego es la siguiente:

	El oráculo vaticina que el jugador escogerá la caja cerrada	El oráculo vaticina que el jugador escogerá ambas cajas
El jugador escoge la caja cerrada	\$1.000.000	\$0
El jugador escoge ambas cajas	\$1.001.000	\$1.000

Si el oráculo acierta el 100 % de las veces, si el jugador se lleva sólo la caja cerrada, obtendrá \$1.000.000. Si el jugador se lleva ambas cajas, la caja cerrada estará vacía, por lo que sólo se llevará \$1.000. Según este razonamiento, el jugador deberá escoger siempre la caja cerrada.

Pero en el momento en el que el jugador se acerca a las cajas para hacer su elección, su contenido ya está definido. La caja cerrada o tiene algo o no lo tiene, pero es demasiado tarde para cambiar su contenido. El jugador debe llevarse el contenido de ambas cajas, ya que tenga lo que tenga la caja cerrada obtendrá \$1000 más, porque de todos modos se llevará la cerrada. Según este razonamiento, el jugador debe escoger siempre llevarse las dos cajas.

En su artículo de 1969, Nozick comenta que "Casi todo el mundo tiene claro lo que debe hacer. El problema consiste en que la gente se divide casi a la mitad sobre cuál es la solución al problema, con un gran porcentaje que cree que la otra mitad está equivocada."

Discusión:

<u>Comentario</u>

Los filósofos han propuesto muchas soluciones a esta paradoja.

Algunos han sugerido que una persona racional escogerá ambas cajas, y una irracional sólo la cerrada, de modo que las personas irracionales tienen ventaja en el juego.

Otros han afirmado que una persona racional escogerá ambas cajas, mientras que una irracional sólo la cerrada, de modo que las personas racionales tienen ventaja en el juego (ya que un oráculo perfecto no puede existir).

Otros dicen que en un mundo con oráculos perfectos (o máquinas del tiempo, ya que una máquina del tiempo puede usarse como mecanismo para hacer los vaticinios) la causalidad puede invertirse. Si una persona conoce realmente el futuro, y este conocimiento afecta a sus acciones, entonces los eventos en el futuro causarán efectos en el pasado. La elección del jugador habrá causado la acción del oráculo. Algunos han concluido que si las máquinas del tiempo o los oráculos perfectos existiesen, entonces no puede haber libre albedrío y el jugador escogerá lo que está destinado a escoger. Otros afirman que la paradoja muestra que es imposible conocer el futuro.

Algunos filósofos encuentran equivalente esta paradoja a la paradoja del viaje en el tiempo. En ella, una persona viaja atrás en el tiempo, lo que produce una cadena de eventos que evitan que eso suceda.

Un análisis desde la perspectiva de la mecánica cuántica elude la incompatibilidad del libre albedrío y la causalidad inversa poniendo a la caja cerrada, como al gato de Schrödinger, en un estado de superposición hasta el momento en el cuál se realiza la elección. La caja está al mismo tiempo llena y vacía.

Un cosmólogo que cree en múltiples mundos, concluiría que la acción del oráculo da como resultado dos flujos temporales paralelos: uno en el que ha puesto algo en la caja u otro donde la ha dejado vacía. La teoría de los mundos paralelos lleva generalmente a la conclusión de que tanto el libre albedrío como la causalidad son ilusiones creadas por la correspondencia entre la consciencia y una memoria específica del flujo temporal.

La urna de cristal

Hay una extensión de la paradoja de Newcomb, en la cual se pregunta cómo cambiaría el resultado si la caja cerrada fuese una urna de cristal. ¿Qué debería escoger el jugador?

Si ve $1.000.000 en la urna, entonces debería coger ambas cajas, y llevarse tanto los $1.000.000 como los $1.000. Si ve la urna vacía, puede enfadarse cuando se ve privado de una posibilidad de llevarse el premio gordo, y escoger sólo la urna para demostrar que el juego es un fraude. En ambos casos, sus acciones pueden ser opuestas a lo que había sido vaticinado, lo que contradice la premisa de que la predicción es siempre correcta.

Algunos filósofos dicen que la versión con la urna de cristal de la paradoja de Newcomb es prueba de que:

- Es imposible conocer el futuro
- El conocimiento del futuro sólo es posible en casos en los que dicho conocimento no impida ese futuro
- El universo conspirará para prevenir los bucles causales autocontradictorios (a través de, por ejemplo, el principio de autoconsistencia de Novikov).
- El jugador puede, accidentalmente, hacer la elección equivocada, o puede malinterpretar las reglas, o la máquina del tiempo/vaticinio puede fallar.

El oráculo no tiene un conocimiento especial del futuro

Supón que el oráculo no tiene un conocimiento especial del futuro, y el jugador lo sabe. Se puede aplicar entonces un análisis mediante teoría de juegos para el caso de múltiples rondas con memoria.

Si el jugador quiere maximizar su beneficio y el oráculo quiere maximizar el acierto de sus vaticinios, el jugador debe escoger siempre la caja cerrada. Sin embargo, si el jugador deserta de esa estrategia y escoge ambas cajas, se beneficiará esa ronda, pero el oráculo se equivocará y probablemente se vengará. El equilibrio de Nash (donde cada deserción de las estrategias escogidas no da beneficios) surge cuando el jugador escoge siempre llevarse las dos cajas y el oráculo predice siempre que escogerá las dos cajas (esto da un beneficio de $1000 y una predicción perfecta cada vez) o cuando ambos escogen siempre la caja cerrada (lo que da un beneficio de $1.000.000 y una predicción perfecta siempre). Un jugador inteligente tratará de moverse del primer equilibrio al segundo.

Ahora considera un caso distinto: el oráculo no tiene un conocimiento especial del futuro, pero el jugador cree que lo tiene. Los lectores del artículo en Scientific American respondieron, en una proporción de 5 a 2, a favor de escoger sólo la caja cerrada. Un oráculo que trabaje con esos datos (y suponiendo que el jugador sea un lector de Scientific American) puede decidir que puede alcanzar una tasa de aciertos del 71 % vaticinando que el jugador escogerá la caja cerrada.

En este caso, el problema se convierte rápidamente en un análisis de preferencias estadísticas en la tolerancia hacia el riesgo. Esto puede verse más fácilmente si se cambia el valor de los premios. Por ejemplo, si el contenido de la caja abierta se reduce a $1, casi todos los jugadores escogerían la caja cerrada (el valor reducido, aunque seguro, del dólar no justifica el riesgo). Casi todos los jugadores escogerían ambas cajas si el contenido de la caja abierta fuese de $900.000.

5.2. PARADOJA DE SAN PETERSBURGO

Enunciado:

Se propone un juego de azar en el que pagas una apuesta inicial fija. Consiste en el lanzamiento de una moneda repetidamente hasta que aparece la primera “cara”. Una vez aparece, ganas 1 centavo si la cara aparece en el primer lanzamiento, 2 centavos si aparece en el segundo, 4 centavos si aparece en el tercero, 8 en el cuarto, etc., doblando el premio en cada lanzamiento adicional. Así, ganarías 2^{k-1} centavos si la moneda debe lanzarse k veces.

¿Cuánto estarías dispuesto a pagar para jugar a este juego?

Discusión:

La gente solo arriesgará una pequeña cantidad para obtener una recompensa de valor infinito.

En teoría de probabilidad y teoría de decisiones, la Paradoja de San Petersburgo es una paradoja que muestra una variable aleatoria cuyo valor es, con una probabilidad alta, muy bajo, pero con un valor esperado infinito. En esta situación, la teoría de decisiones parece recomendar una acción que ninguna persona racional seguiría. Esa apariencia desaparece cuando se tiene en cuenta la utilidad.

La paradoja fue enunciada por Daniel Bernoulli en 1738.

La probabilidad de que la primera “cara.ªparezca en el lanzamiento k es de:

$$p_k = \frac{1}{2^k}.$$

La probabilidad de que ganes más de \$10.24 (por ejemplo, 2^10 centavos) es menor que una entre mil. La probabilidad de que ganes más de \$1 es menor que una entre cien. A pesar de ello ¡el valor esperado del premio es infinito!

Para calcularlo:

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} p_k 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

Esta suma diverge a infinito. Así, de acuerdo a la teoría tradicional del valor esperado, no importa cuanto pagues por entrar en el juego, porque saldrás ganando a largo plazo (imagina pagar 1 billón cada vez, para ganar la mayor parte de las veces sólo un par de centavos). Su idea consiste en que las raras ocasiones en las que ganes una cantidad elevada pagarán con creces los cientos de trillones que habrás tenido que pagar para jugar.

Teoría de la utilidad

La idea que sugerida el valor esperado es engañosa. Si se aplica ingenuamente la teoría de decisiones sin tener en cuenta la utilidad, se obtiene que merecería la pena pagar cualquier apuesta inicial.

Se debe considerar además que nadie tiene ni el tiempo ni el dinero necesario para jugar una y otra vez para llegar al largo plazo, o siquiera a una aproximación buena del mismo.

5.3. PARADOJA DEL VIAJE EN EL TIEMPO

Enunciado:

La paradoja del viaje en el tiempo, o paradoja del abuelo es una paradoja que se cree expresada por primera vez por el escritor francés de ciencia ficción René Barjavel en su libro Le voyageur imprudent (El viajero imprudente, 1943).

Se parte del supuesto que una persona realiza un viaje a través del tiempo y mata al padre biológico de su padre/madre biológico (abuelo del viajero), antes de que éste conozca a la abuela del viajero y puedan concebir. Entonces, el padre/madre del viajero (y por extensión, ese viajero) nunca habrá sido concebido, de tal manera que no habrá podido viajar en el tiempo; al no viajar al pasado, su abuelo entonces no es asesinado, por lo que el hipotético viajero sí es concebido; entonces sí puede viajar al pasado y asesinar a su abuelo, pero entonces no sería concebido..., y así indefinidamente.

Se alude a ella como paradoja del abuelo cuando el viajero del tiempo conoce a su abuela en el pasado, y altera los actos que dieron lugar a que ésta conociera a su futuro marido; con lo cual, no tienen hijos, y éstos no tienen al viajero temporal.

En la película del año 2002, basada en novela La máquina del tiempo, de H. G. Wells (en la novela original este suceso no aparece), se sugiere que los actos que ocurren en el universo son inevitables y suceden en todas sus líneas temporales. Así, la mujer del protagonista muere de muchas maneras diferentes en cada uno de los viajes al pasado de éste. También ocurre algo similar en la primera película de Terminator, donde un integrante de la resistencia contra los robots viaja al pasado para proteger a la futura madre del líder de la resistencia, y termina engendrando con ella (Sara Connor) al futuro líder John Connor. (Se produce así una paradoja similar: si él viajó a defender a un futuro líder, no puede ser él mismo en el mismo viaje el que produjo su existencia puesto que si en el viaje él no lo engendraba nunca hubiese existido por lo cual no habría razón por la cual viajar a protegerlo a él o a su futura madre).

Esta paradoja ha sido usada para argumentar que el viaje hacia atrás en el tiempo debe ser imposible. Sin embargo, en la ciencia ficción se han sugerido algunas soluciones.

Discusión:

¿Qué pasaría si viajas en el tiempo y matas a tu abuelo antes de que conozca a tu abuela?

Paradojas

Si algún día se resuelven los problemas de ingeniería implicados en su construcción, la fabricación de una máquina del tiempo arrojará numerosas paradojas, como las ya mencionadas.

La paradoja surge porque el estado actual del mundo está determinado por sus estados anteriores, de manera que cambiar uno de estos estados propaga incontroladamente efectos hacia el estado actual. El viajero del tiempo debería conformarse únicamente con formar parte del pasado, sin intentar cambiarlo. Si viaja al pasado y salva a una niña de ser asesinada, y esa niña llega a ser su abuela, el lazo causal es consistente y no paradójico, pues en este caso las acciones del viajero estarían ya incorporadas en la sucesión de acontecimientos que conduce del pasado al presente. La congruencia causal impone así restricciones a lo que el viajero del tiempo pueda hacer, pero no excluye la posibilidad misma del viaje. O sea, si alguien realiza una acción en el pasado, en este caso un viajero que viaja desde el futuro, y la logra pues entonces no es paradoja porque ya la acción había sido realizada por el mismo viajero anteriormente.

Hipótesis en la ciencia ficción

En la serie televisiva de ciencia ficción Star Trek, la paradoja del viaje en el tiempo se ha llamado también ”paradoja de Pogo”por una frase del personaje de historietas llamado Pogo (Walt Kelly, 1971): ”Hemos conocido al enemigo, y éste es... nosotros”(We have met the enemy and he is us).

Solución de los universos paralelos

Pueden existir universos paralelos, y en el momento en el que viajas en el tiempo y matas a tu abuelo, lo harás en un universo paralelo en el que nunca serás concebido. Sin embargo, seguirás existiendo en tu universo original, pero no existirás en el universo que se originó al matar a tu abuelo.

La historia de Alfred Bester, The Men Who Murdered Mohammed (’los hombres que asesinaron a Mahoma’) y la de John Boyd, La última astronave de la tierra, utilizan esta premisa. También se usa en la novela de James P. Hogan, Thrice Upon a Time, y en la novela de Michael Crichton, Rescate en el tiempo (adaptada a la gran pantalla con el título original de la novela, Timeline).

Solución de las líneas temporales relativas

Es posible que el universo no tenga una línea temporal absoluta que permanece inalterada una vez que los sucesos ocurren (o —desde un punto de vista determinista— desde el comienzo del tiempo). En su lugar, cada partícula tendría su propia línea temporal y, por ello, los humanos también la tendrían. Esto puede considerarse similar a la teoría de la relatividad, excepto que afecta a la historia de una partícula, en lugar de a su velocidad.

Las fuerzas físicas afectan a las partículas físicas. Si todas las partículas físicas de un ser humano viajaran atrás en el tiempo, esa persona podría matar a su propio abuelo (ninguna fuerza física se lo impediría). Como resultado no obtendría nada físico, porque no hay fuerzas físicas que puedan entender lo que ha pasado, y esta nueva línea temporal se desarrollaría simplemente porque el universo no tiene ningún mecanismo para deshacerla. El yo futuro de esa persona no necesita nacer para cumplir el destino de volver atrás en el tiempo, porque no hay líneas temporales "absolutas"que deban cumplirse. Si esa persona fuese capaz de encontrar y observar las versiones actuales de sus partículas futuras, éstas seguirán también leyes físicas, y por tanto no se convertirán en su yo futuro (porque uno de sus padres no estará allí para crearlo).

Esta teoría es similar a la teoría de los universos paralelos, excepto que ocurre en un solo universo. Cabe aclarar que esta teoría está ganando adeptos entre los científicos, sobre todo quienes afirman que los diferentes estados cuánticos posibles existen simultáneamente, y que al examinarlos y colapsar la función de ondas lo que se logra es escoger en qué universo quedarse. En otras palabras, el Gato de Schrödinger está vivo en un universo y muerto en otro.

Una manera de entender esto podría ser la teoría de Einstein de que la energía se convierte en otra cosa, no desaparece. Si uno viaja en el tiempo y evita el propio nacimiento no tiene por qué desaparecer como por arte de magia, seguiría existiendo pero quizá con alguna diferencia, tal vez uno mismo sea el único que tiene consciencia de su existencia, y todos los demás jamás se habrían enterado que uno existió.

Solución del acceso restringido

Otra solución, de la que puede tomarse como ejemplo el principio de autoconsistencia de Novikov, sostiene que si uno viajase atrás en el tiempo, las leyes naturales prohibirían cualquier acción que diese como resultado que su viaje en el tiempo sucediese. Esta teoría puede llevar a dudas sobre la existencia del libre albedrío (en este modelo, el libre albedrío puede ser una ilusión). Esta teoría también asume que la causalidad debe ser constante, esto es, que nada puede suceder si no tiene una causa, mientras que otras teorías mantienen que un evento puede mantenerse a pesar de que sus causas iniciales desaparezcan. Es también posible que la acción pretendida por el viajero se complete, pero nunca con el suficiente éxito como para resultar en una cancelación.

Creación de nuevo futuro

Es posible también que a partir del momento en que se logra viajar al pasado en realidad se esté creando un nuevo futuro, en donde el viajero no modifique el pasado, sino el futuro (su futuro). En un universo/cuerda paralelo donde no modificaría ni el presente ni el pasado del universo original del viajero.

Ésta es la trama principal de la película Regreso al Futuro II. Biff Tanen del futuro se encuentra con Marty McFly quien ha viajado al futuro, al año 2015 concretamente, Marty adquiere un almanaque deportivo con los resultados de los últimos 50 años, acto seguido, Biff Tannen tras saber de la existencia de una máquina del tiempo, coge el almanaque deportivo de Marty McFly y roba la máquina del tiempo del cientifico Emmett L. Brown para entregárselo a sí mismo de joven. Cuando Marty McFly vuelve a su época descubre que la vida ha cambiado, resultado de un futuro alternativo; Biff se había hecho rico y se casó con la madre de Marty.

Algo parecido se puede ver en la película "Dejá vù: Cambiando el pasado", donde el protagonista Doug Carlin consigue viajar al pasado para salvar a una chica. Se crea un futuro alternativo y al final Doug consigue salvar a la chica, pero acaba muriendo en una explosión de un coche que había caído al agua con ellos dos dentro. Cuando la chica es rescatada, los agentes de policía le dicen que llegará alguien a hablar con ella, y en ese momento aparece el Doug Carlin del pasado, quien todavía no conocía a la chica, pero cuando le pregunta a esta si se conocen, ella dice que si. De esta manera, el futuro se ha modificado: En el "primer"futuro, Doug Carlin investigaba a partir de la muerte de la chica y de un accidente en un ferry, acabando por viajar al pasado para cambiar los hechos. En este "segundo"futuro creado, la chica está viva y el accidente del ferry había sido evitado por el Doug Carlin que murió, pero el Doug Carlin de la línea normal del tiempo sigue vivo, y llega al lugar de los hechos para interrogar a la chica que él mismo había salvado minutos antes.

Solución de la otra personalidad

En historias de ciencia ficción se ha planteado que es posible que un sujeto viaje en el tiempo y asesine a su padre si ese sujeto ha tomado otra identidad. Un ejemplo se cita en el juego Prince of Persia: Warrior Within, donde el protagonista viaja en el tiempo para evitar que él mismo cometa un error en sus viajes por el tiempo. Para esto, consigue hacerse de una máscara que lo transforma en otra identidad, con la que le es posible regresar en el tiempo para evitar cometer su error.

Contrasacción Espectral

En libros de ciencia ficción y en novelas, también se ha planteado la idea de que, si nosotros los viajantes vamos al pasado, no somos parte del pasado del cual no vivimos, sino que aparecemos en forma de espectros (fantasmas). Esa teoría se puede dar en el juego The Dig, de Lucas Arts; así como en la trama del libro Harry Potter, con el Pensadero de Dumbledore. Sin embargo, estaríamos viendo el pasado, pero no podemos cambiar ni tampoco participar en los hechos que suceden allí. Seríamos invisibles a los residentes del pasado.

Mensajes en el tiempo

En la película Deja vu, Doug Carlin del futuro, en su tiempo cuando empieza a investigar el caso de la chica asesinada, empieza a ver rompecabezas que no tienen sentido. Como el mensaje que se encuentra en la nevera que dice ”tu puedes salvarla”, la toalla con sangre en el fregadero, el número de teléfono, la llamada, etc. Son mensajes subliminales de él mismo, que supuestamente si la condición de viajar al pasado es verdadera, entonces los mensajes que él dejó del pasado, permanecerán constantes en su universo. Cuando él viaja al pasado, y salva a la chica de ser asesinada, esos mensajes se convierten en verdaderos, porque él mismo los ideo y los construyo. Sería una paradoja extraña, porque nos estaríamos mandando mensajes a nosotros mismos de un pasado, que supuestamente nosotros no tenemos certeza de que existe o existió alguna vez. Es como que la condición de que si nosotros estuviéramos por viajar al pasado en un futuro, estaría en pie en nuestro subconsciente, pero nosotros no se nos ocurriría viajar al pasado, al menos que sucediera algún hecho principal que nos obligase viajar al pasado en su universo.

En la película “Doce monos”Bruce Willis, que interpreta al personaje principal (James Cole), es condenado a prisión pero se le puede perdonar la condena si participa en una serie de viajes al pasado. En uno de esos viajes el conoce a una mujer de cabello negro de la cual se enamora por lo que el decide no regresar a su presente y decide quedarse en el pasado, para esto, Cole tiene una serie de sueños en los cuales ve imágenes de un suceso del cual el fue testigo cuando era niño: una mujer rubia acompañada por un hombre de pelo largo con bigotes, luego ve que la mujer desesperada pide ayuda y lo mira mientras el hombre de cabello largo queda tendido en el suelo agonizando luego de haber sido disparado. Debido a que Cole había decidido no volver a su presente los encargados de enviarlo en los viajes van a buscarlo por lo que él, que es calvo, tiene que disfrazarse poniéndose una peluca y bigotes y la mujer poniéndose una peluca rubia; ambos habían planeado escaparse tomando un avión, en el momento en el que están a punto de abordar el avión un hombre se acerca y le dispara entonces aparece la mujer rubia gritando desesperada y allí estaba el niño (James Cole) observando lo que sucedía, es decir, viendo su propia muerte. Esto nos da a entender que el niño que es el mismo James Cole crecería y seria condenado, de nuevo viajaría en el tiempo, moriría y el estaría en ese momento presente y sucedería lo mismo sucesivamente dando a entender que si viajáramos al pasado este se relacionaría con nuestro presente de alguna manera, por lo que el yo del futuro y el yo del pasado terminarían compartiendo el mismo presente.

6. Paradojas sobre estadística y probabilidad

6.1. PARADOJA DE SIMPSON

Enunciado:

La paradoja de Simpson (o efecto Yule-Simpson) describe la desaparición de una asociación o comparación significativa de dos variables cuando los datos son desagregados por grupos. También referida como el cambio en el sentido de una asociación entre dos variables (cuantitativas o cualitativas) cuando se controla el efecto de una tercera variable o variable de confusión.

Recibe el nombre en honor de Edward Simpson, quien la describió en 1951, aunque fue previamente descrita por el estadístico británico G. Udny Yule a inicios de 1900.

La paradoja de Simpson puede ocurrir siempre que los datos que estudiamos están agregados (combinados). Si los datos están combinados, y no desagregados (v.g. por edad, raza, grados, etc.), el efecto global puede no representar lo que realmente pasa.

Discusión:

`http://plato.stanford.edu/entries/paradox-simpson/`

6.2. PARADOJA DE ARROW

Enunciado:

El Teorema de Imposibilidad de Arrow, también llamado Paradoja de Arrow y, con escasa precisión, Teorema de la Imposibilidad de la democracia, demuestra que no es posible diseñar reglas para la toma de decisiones sociales o políticas que obedezcan a un cierto conjunto de criterios razonables". Fue enunciado y demostrado por primera vez por el Premio Nobel de Economía Kenneth Arrow, como parte de su tesis doctoral Social choice and individual values, y popularizado en su libro del mismo nombre editado en 1951. El artículo original, A Difficulty in the Concept of Social Welfare, fue publicado en The Journal of Political Economy, Vol. 58(4), pp. 328-346, en Agosto de 1950.

Discusión:

http://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Arrow

6.3. Problema de Monty Hall

Enunciado:

El Problema de Monty Hall es un problema matemático de probabilidad que está inspirado por el concurso televisivo estadounidense Let's Make a Deal (Hagamos un trato). El nombre del problema tiene su origen en el nombre del presentador del concurso: Monty Hall.

Discusión:

`http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Monty_Hall`