

Inmersiones armónicas de superficies de Riemann en \mathbb{R}^3

Antonio Alarcón • Francisco J. López •

Resumen En estas notas repasamos algunas propiedades globales de las inmersiones armónicas de superficies de Riemann en el espacio euclidiano tridimensional, enfatizando aquellas relacionadas con la aplicación de Gauss.

1. Introducción

La interrelación entre los conceptos de inmersión mínima, inmersión conforme e inmersión armónica de superficies de Riemann en el espacio euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 es un asunto crucial en la teoría de superficies. Sabemos que una inmersión conforme es mínima si y sólo si es armónica, y en este caso su aplicación de Gauss es también conforme. Sin embargo, una inmersión armónica no tiene que ser necesariamente conforme como muestra la siguiente parametrización del helicoido, o para ser más precisos, de una mitad de ésta superficie con borde su eje:

$$X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(z) = \Re(e^z, ie^z, iz).$$

Ciertamente, la familia de inmersiones armónicas de superficies de Riemann en \mathbb{R}^3 es muy amplia y difícil de tratar de forma sistemática. Sin embargo, la subfamilia de tales inmersiones con aplicación de Gauss cuasiconforme da lugar a una teoría muy rica que engloba a la clásica de superficies mínimas. En estas notas haremos un repaso breve de algunos de los resultados globales obtenidos recientemente por los autores en [1] para esta familia de superficies. Muchos de ellos representarán una clara generalización de lo conocido para el caso mínimo, en especial en lo relativo al tamaño de la imagen esférica de la superficie.

No quisiéramos acabar esta introducción sin dedicar unas palabras a nuestro añorado compañero Florentino García Santos. Florentino fue para muchos un ejemplo de

Antonio Alarcón
Depto. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada
alarcon@ugr.es

Francisco J. López
Depto. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada
fjlopez@ugr.es

rigor y dedicación a su profesión, y aunque nuestra relación se circunscribió al ámbito de lo estrictamente profesional, en nosotros permanecerán imborrables tanto su inquebrantable compromiso con toda la comunidad universitaria como su sencillez y cercanía hacia aquellos que tuvimos la fortuna de conocerle.

2. Inmersiones armónicas y representación de Weierstrass

Sea M una superficie de Riemann y $X = (X_j)_{j=1,2,3} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión de M en \mathbb{R}^3 . Por definición, la inmersión X se dice armónica si X es una aplicación armónica (esto es, si X_j es armónica, $j = 1, 2, 3$). En este caso, también se dice que $S = X(M)$ es una superficie armónica con parametrización X .

Una superficie armónica puede admitir diferentes parametrizaciones armónicas, como ocurre en el caso del helicoido:

$$\begin{aligned} Y_1 : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}^3, & Y_1(z) &= \Re(e^z, \imath e^z, \imath z), \\ Y_2 : \{\Re(z) > 0\} &\rightarrow \mathbb{R}^3, & Y_2(z) &= \Re(\sinh(z), \imath \cosh(z), \imath z) \end{aligned} \quad (1)$$

Obsérvese que Y_2 es conforme, mientras que Y_1 no lo es.

Como consecuencia del principio del máximo para funciones armónicas, las superficies armónicas no tienen puntos elípticos, esto es, su curvatura de Gauss es no positiva en toda la superficie. Nótese que la composición de una inmersión armónica con una transformación lineal proporciona otra inmersión armónica, que en lo que sigue se dirá linealmente equivalente a la anterior.

Sea $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión armónica.

Por la armonicidad de X , la 1-forma vectorial $\Phi = (\Phi_j)_{j=1,2,3} := (\partial_z X_j)_{j=1,2,3}$ es holomorfa sobre M . La pareja (M, Φ) es referida como la representación de Weierstrass de X . La 2-forma holomorfa sobre M dada por $\mathfrak{H} := \sum_{j=1}^3 \Phi_j^2$ es conocida en la literatura como la *diferencial de Hopf* de X . Una inmersión armónica es mínima si y sólo si su diferencial de Hopf es nula.

La métrica conforme $\|\Phi\| := \left(\sum_{j=1}^3 |\Phi_j|^2\right)^{1/2}$ fue introducida por Klotz en [3] y satisface la desigualdad $ds^2 \leq \|\Phi\|^2$, donde ds^2 es la métrica riemanniana en M inducida vía X por la métrica euclidiana de \mathbb{R}^3 . La desigualdad $|\mathfrak{H}| < \|\Phi\|^2$ se satisface sobre M y expresa simplemente el hecho de que X es una inmersión.

Este proceso es reversible. En efecto, la construcción de una inmersión armónica $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ pasa por dotar a la superficie de Riemann M de una tripleta holomorfa *sin periodos reales* $\Phi = (\Phi_j)_{j=1,2,3}$ satisfaciendo la condición $|\sum_{j=1}^3 \Phi_j^2| < \sum_{j=1}^3 |\Phi_j|^2$. Con esos ingredientes, basta con definir

$$X : M \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(P) = \Re\left(\int^P \Phi\right).$$

Llamaremos $\mathfrak{G} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ a la aplicación de Gauss de X que preserva la orientación (o de jacobiano positivo). No es difícil ver que

$$\mathfrak{G} = \frac{\Im(\Phi_2\bar{\Phi}_3, \Phi_3\bar{\Phi}_1, \Phi_1\bar{\Phi}_2)}{\|\Im(\Phi_2\bar{\Phi}_3, \Phi_3\bar{\Phi}_1, \Phi_1\bar{\Phi}_2)\|} = \frac{\imath\Phi \wedge \bar{\Phi}}{\|\imath\Phi \wedge \bar{\Phi}\|}. \quad (2)$$

Si $\xi : \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\xi(x_1, x_2, x_3) = (x_1/(1 - x_3), x_2/(1 - x_3))$ es la proyección estereográfica, la aplicación $g := \xi \circ \mathfrak{G}$ es conocida como la aplicación de Gauss compleja de X . Si $X(M)$ no es un plano, \mathfrak{G} es una aplicación abierta de rango máximo salvo en un conjunto discreto de puntos donde presenta ramificaciones topológicas. Además, para cualquier $\nu \in \mathbb{S}^2$, el conjunto $\mathfrak{G}^{-1}(\{\nu, -\nu\})$ coincide con el conjunto de ceros de la 1-forma $\langle \nu, \Phi \rangle$ sobre M , siendo el orden de cada cero igual a la ramificación de \mathfrak{G} en ese punto.

Si fijamos una parametrización conforme $(U, z = u + \imath v)$ en M y escribimos $\Phi_j|_U = \phi_j(z)dz$, $j = 1, 2, 3$, y $\Phi = \phi(z)dz$, se tiene que

$$\mathcal{K} = -4 \frac{|\langle \mathfrak{G}, \phi' \rangle|^2}{\|\phi \wedge \bar{\phi}\|^2}, \quad H = -2 \frac{\langle \mathfrak{G}, \Re(\bar{h}\phi') \rangle}{\|\phi \wedge \bar{\phi}\|^2},$$

donde \mathcal{K} es la curvatura de Gauss de (M, ds^2) , H la curvatura media de X en la dirección de \mathfrak{G} y $h := \mathfrak{H}/|dz|^2 = \sum_{j=1}^3 \phi_j^2$.

Los datos de Weierstrass de X se pueden reescribir en términos de \mathfrak{H} y g como sigue:

$$(W.1) \quad \Phi_1 = \frac{\Re(g)(1 - |g|^2)}{|g|(1 + |g|^2)} \lambda - \imath \frac{\Im(g)}{|g|} \sqrt{\lambda^2 - \mathfrak{H}},$$

$$(W.2) \quad \Phi_2 = \frac{\Im(g)(1 - |g|^2)}{|g|(1 + |g|^2)} \lambda + \imath \frac{\Re(g)}{|g|} \sqrt{\lambda^2 - \mathfrak{H}}, \text{ y}$$

$$(W.3) \quad \Phi_3 = \frac{2|g|}{1 + |g|^2} \lambda,$$

donde $\lambda := \frac{\Phi_3(1+|g|^2)}{2|g|}$. Además,

$$\frac{\partial_{\bar{z}}g}{\partial_zg} = -\frac{g(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mathfrak{H}})}{\bar{g}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mathfrak{H}})}, \quad \left| \frac{\partial_{\bar{z}}g}{\partial_zg} \right| \leq 1, \quad \text{y} \quad \frac{|\mathfrak{H}|}{|\lambda|^2 + |\lambda^2 - \mathfrak{H}|} < 1. \quad (3)$$

Como consecuencia, $\|\Phi\|^2 = |\lambda|^2 + |\lambda^2 - \mathfrak{H}|$.

Recíprocamente, supongamos que M está dotada de una 2-forma holomorfa \mathfrak{H} , una 1-forma holomorfa Φ_3 y una aplicación diferenciable preservando la orientación $g : M \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. Asumamos que (3) se sostiene para $\lambda = \frac{1+|g|^2}{2|g|}\Phi_3$, y la 1-forma vectorial $\Phi = (\Phi_j)_{j=1,2,3}$ dada como en ((W.j)) $_{j=1,2,3}$ no tiene periodos reales. Entonces Φ es holomorfa y la aplicación $Y : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $Y = \Re(f \Phi)$, es una inmersión armónica con diferencial de Hopf \mathfrak{H} y aplicación de Gauss compleja g .

2.1. Inmersiones armónicas cuasiconformes

Le geometría de las inmersiones armónicas está fuertemente influenciada por las propiedades de su aplicación de Gauss. Por ejemplo, una inmersión armónica $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es conforme (luego mínima) si y sólo si su aplicación de Gauss $\mathfrak{G} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ es conforme, y en este caso la aplicación de Gauss compleja g es meromorfa. Resulta por tanto natural preguntarse acerca de las propiedades geométricas de las inmersiones con aplicación de Gauss cuasiconforme. Dado que la proyección estereográfica es conforme, \mathfrak{G} es cuasiconforme si y sólo si lo es g , esto es, si y sólo si $|\mu| < 1 - \epsilon$, $\epsilon > 0$, donde $\mu := \frac{\partial_{\bar{z}}g}{\partial_z g}$ es el coeficiente de Beltrami de g (una expresión explícita de $|\mu|$ puede encontrarse en la ecuación (3)).

Definición 2.1 *La inmersión armónica $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice cuasiconforme si \mathfrak{G} (o equivalentemente g) es cuasiconforme.*

Es importante resaltar que una superficie armónica puede admitir parametrizaciones cuasiconformes y no cuasiconformes. Por ejemplo, el helicoides admite parametrizaciones armónicas y conformes (es una superficie mínima), mientras que la parametrización armónica de esta superficie presentada en la introducción no es cuasiconforme. Esto significa que el calificativo “cuasiconforme” debe entenderse asociado a la inmersión armónica de la superficie de Riemann, nunca relativo a su imagen dentro de \mathbb{R}^3 .

Dada una función acotada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, escribamos

$$\limsup_{P \rightarrow \infty} f(P) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \sup_{M - C_n} f,$$

donde $C_1 \subset C_2 \subset \dots$ es cualquiera sucesión de compactos en M tal que $\cup_{j=1}^{\infty} C_j = M$. Si como siempre denotamos por Φ y \mathfrak{H} a los datos de Weierstrass y a la diferencial de Hopf de X , respectivamente, llamaremos

$$i_X := \limsup_{P \rightarrow \infty} |\mu|, \quad i^X := \limsup_{P \rightarrow \infty} \frac{|\mathfrak{H}|}{\|\Phi\|^2}.$$

No es difícil probar que $i_X \leq i^X \leq \frac{2i_X}{1 + i_X^2} \leq 1$.

Estos números reales deben ser interpretados como índices de conformidad de la inmersión. La cuasiconformidad de X puede reescribirse de forma más operativa como se indica en cualquiera de los tres siguientes enunciados equivalentes:

- $i^X < 1$.
- $\sup_M |\mathfrak{H}| / \|\Phi\|^2 < 1$.
- $i_X < 1$.

Desde el punto de vista de la teoría de Teichmüller, es interesante resaltar que X es cuasiconforme si y sólo si $\text{Id} : M \rightarrow M^{\mathcal{E}}$ es cuasiconforme, donde $M^{\mathcal{E}}$ denota a la superficie de Riemann con soporte topológico M y la estructura conforme inducida por las parametrizaciones isotermas de X .

De otra parte, Osserman [5] introdujo el concepto de superficie *cuasimínima* para referir a aquellas superficies de \mathbb{R}^3 cuyas curvaturas principales k_1, k_2 satisfacen una desigualdad del tipo

$$0 < \delta \leq -k_1/k_2 \leq \delta$$

en todo punto donde no se anulen simultáneamente. Por la fórmula clásica de Rodrigues, la diferencial de la aplicación de Gauss aplica circunferencias en elipses con semi-ejes menor y mayor de longitudes $|k_1|$ y $|k_2|$, respectivamente. En particular, la propiedad de ser cuasimínima es equivalente a la de tener curvatura de Gauss no positiva y aplicación de Gauss cuasiconforme, donde en este caso la superficie se entiende dotada de la estructura conforme inducida por las parametrizaciones isotermas.

Aunque cuasiminimalidad y cuasiconformidad no son propiedades equivalentes, sí que están estrechamente relacionadas. De hecho, si $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es cuasiconforme entonces la superficie $X(M)$ es cuasimínima (lo contrario, como se deduce de lo comentado anteriormente para el helicoido, es falso).

3. Algunos resultados de tipo Bernstein

En esta sección enunciaremos algunos de los resultados obtenidos por los autores acerca de la aplicación de Gauss de superficies armónicas. Como en el caso de las superficies mínimas, pueden entenderse como generalizaciones del teorema de Bernstein.

Teorema 3.1 ([1]) *Sea M una superficie de Riemann abierta, y sea $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión armónica completa. Supongamos que la imagen por la aplicación de Gauss de la superficie está contenida en la región esférica $\mathbb{S}^2 \cap \{x_3 > \epsilon\}$ para algún $\epsilon > 0$.*

Entonces $X(M)$ es un plano.

La imagen gaussiana de la trompeta armónica (ver la figura 1) es, salvo movimientos rígidos, $\mathbb{S}^2 \cap \{x_3 > 0\} - \{(0, 0, 1)\}$. En este sentido, el anterior teorema es fino.

En el caso cuasiconforme podemos dar más información. Por ejemplo, es conocido que los únicos grafos enteros (no necesariamente armónicos) en \mathbb{R}^3 con aplicación de Gauss cuasiconforme son los planos, ver [8]. El siguiente resultado es una generalización de lo probado por Klotz para inmersiones armónicas en [3]:

Teorema 3.2 ([1]) *Sea M una superficie de Riemann abierta, y sea $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión armónica completa y cuasiconforme. Supongamos que la imagen por la aplicación de Gauss de la superficie está contenida en la región esférica $\mathbb{S}^2 \cap \{|x_3| < 1 - \epsilon\}$ para algún $\epsilon > 0$.*

Entonces $X(M)$ es un plano.

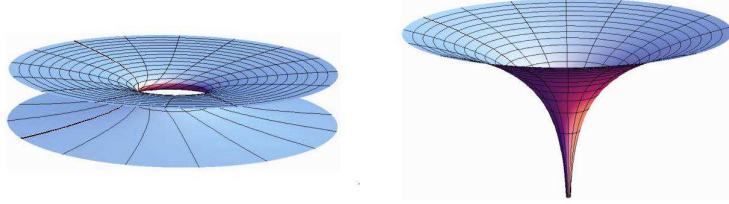


Figura 1: Dos superficies armónicas rotacionales (ver [1]). A la izquierda un catenoide armónico y a la derecha una trompeta armónica.

4. Inmersiones armónicas con curvatura total finita

Una inmersión armónica $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice *algebraica* si M es biholomorfa a una superficie de Riemann compacta \overline{M} menos una cantidad finita de puntos llamados finales (esto es, M tiene tipo conforme finito), y sus datos de Weierstrass Φ extienden de forma meromorfa a \overline{M} con polos efectivos en los finales topológicos de M . Si $P \in \overline{M} - M$ es un final arbitrario de M , escribiremos

$$I_P := \max\{\text{Ord}_P(\Phi_j), j = 1, 2, 3\} - 1 \geq 0,$$

donde $\text{Ord}_P(\cdot)$ significa “orden del polo en P ”.

Es interesante observar que existen inmersiones armónicas algebraicas no completas. Por ejemplo, consideremos $X : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(z) = \Re(z, iz, 1/z)$, y notemos que $X(c)$ tiene longitud finita, donde c es la curva divergente dada por $c : [-1, 0[\rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$, $c(t) = it$.

Definición 4.1 *La inmersión X se dice de curvatura total finita si $\int_M \|\sigma\|^2 dS < +\infty$, donde σ es la segunda forma fundamental de X y dS es el elemento de área de ds^2 .*

Obviamente, la condición $-\int_M \mathcal{K} dS = \int_M |\mathcal{K}| dS < +\infty$ es más débil que la de tener curvatura total finita (recordemos que $\|\sigma\|^2 = 4\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{K}$). Sin embargo es posible probar que:

Teorema 4.2 ([1]) *Sea $X = (X_j)_{j=1,2,3} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión armónica, donde M es una superficie de Riemann abierta, y denotemos por $\Phi = (\Phi_j)_{j=1,2,3}$ sus datos de Weierstrass. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (i) X es completa y de curvatura total finita.
- (ii) X es completa y algebraica, y su aplicación de Gauss $\mathfrak{G} : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ extiende de forma continua a la compactificación \overline{M} de M .

(iii) X es algebraica, y para cada final topológico $P \in \overline{M} - M$ se tiene que $I_P \geq 1$ y existe una isometría lineal $R_P \in O(3, \mathbb{R})$ tal que

$$\text{Ord}_P((R_P \circ \Phi)_3) < \text{Ord}_P((R_P \circ \Phi)_2) = \text{Ord}_P((R_P \circ \Phi)_1) = I_P + 1$$

y

$$\frac{(R_P \circ \Phi)_2}{(R_P \circ \Phi)_1}(P) \notin \mathbb{R}.$$

(iv) X es completa, algebraica y cuasiconforme.

(v) X es completa, cuasiconforme y $\int_M |\mathcal{K}| dS < +\infty$.

Además, si X es completa y de curvatura total finita, entonces X es una inmersión propia que vista desde el infinito $X(M)$ se corresponde con una colección finita de planos (con multiplicidad) que pasan por el origen.

El anterior teorema generaliza los bien conocidos resultados de Osserman [6] y Jorge-Meeks [2] para superficies mínimas en \mathbb{R}^3 . Este teorema facilita la construcción de inmersiones armónicas completas y de curvatura total finita (ver la figura 2).

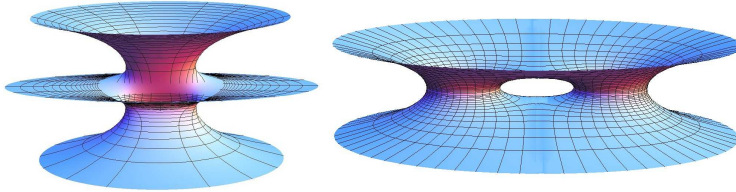


Figura 2: Dos ejemplos de embebimientos propios y armónicos de superficies en \mathbb{R}^3 (ver [1]). A la izquierda una esfera con tres finales y a la derecha un toro con dos finales. No existen superficies mínimas en \mathbb{R}^3 con estas características (ver [4, 7]).

Una de las consecuencias más significativas del teorema anterior es que la fórmula de Jorge-Meeks [2] sigue siendo válida para este tipo de inmersiones:

Corolario 4.3 ([1]) *Sea M una superficie de Riemann abierta, y sea $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión armónica completa no llana de curvatura total finita. Denotemos por $\{Q_1, \dots, Q_k\} = \overline{M} - M$ a los finales topológicos de M . Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(a) *La aplicación de Gauss de X , $\mathcal{G} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$, es un recubridor topológico ramificado con un número finito de hojas.*

- (b) Q_j es un punto de ramificación de \mathfrak{G} de orden $I_{Q_j} - \text{Ord}_{Q_j}(\langle \Phi, G(Q_j) \rangle)$, donde $\Phi = (\Phi_j)_{j=1,2,3}$ son los datos de Weierstrass de X , $j = 1, \dots, k$.
- (c) Si escribimos por ν el género topológico de \overline{M} entonces

$$\int_M \mathcal{K}dS = -4\pi \text{Deg}(\mathfrak{G}) = -2\pi(2\nu - 2 + \sum_{j=1}^k (I_{Q_j} + 1)),$$

donde $\text{Deg}(\mathfrak{G})$ es el grado topológico de \mathfrak{G} .

Agradecimientos

Investigación parcialmente financiada por el proyecto MTM2007-61775 del MCYT-FEDER y por el grupo P09-FQM-5088 de la Junta de Andalucía.

Referencias

- [1] A. Alarcón and Francisco J. López, On harmonic quasiconformal immersions of surfaces in \mathbb{R}^3 . *En preparación*.
- [2] L.P. Jorge and W.H. Meeks III, The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature, *Topology* **22** (1983), 203-221.
- [3] T. Klotz Milnor, Mapping surfaces harmonically into E^n , *Proc. Amer. Math. Soc.* **78** (1980), 269-275.
- [4] F.J. López and A. Ros, On embedded complete minimal surfaces of genus zero, *J. Differential Geom.* **33** (1991), 293-300.
- [5] R. Osserman, On complete minimal surfaces, *Arch. Rational Mech. Anal.* **13** (1963), 392-404.
- [6] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n , *Ann. of Math.* (2) **80** (1964), 340-364.
- [7] R. Schoen, Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces, *J. Differential Geom.* **18** (1983), 791-809.
- [8] L. Simon, A Hölder estimate for quasiconformal maps between surfaces in Euclidean space. *Acta Math.* **139** (1977), 19-51.