SEGUNDO PARCIAL. CÁLCULO.
1º INGENIERO DE TELECOMUNICACIÓN.

1. (**2.25 ptos.**) Calcular el desarrollo en serie de potencias centrado en 0 de la función $arctg(x)$. Estudiar el campo de convergencia de dicha serie de potencias. Utilizando el desarrollo anterior demostrar que
$$\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$
Para calcular el desarrollo en serie de potencias de $arctg(x)$ lo que vamos a hacer es desarrollar su derivada y después integrar. Considerando que la derivada de $f(x) = arctg(x)$ es
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$
y que la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $x \in]-1,1[$ obtenemos que
$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$
y entonces
$$arctg(x) = \int (\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n})dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$$
donde C es una constante que habrá que determinar. Evaluando en 0 se tiene que $C = 0$ y $arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
Veamos cual es el radio de convergencia de dicha serie de potencias. Se puede justificar de varias formas, o bien directamente o utilizando que el radio de convergencia de la serie geométrica es 1 y por un resultado de teoría tenemos que al integrar se mantiene el mismo radio de convergencia. Por tanto el radio de convergencia es 1. Para estudiar el campo de convergencia de la serie, como ya conocemos el radio de convergencia, sabemos que la serie es convergente en $]-1,1[$ y no es convergente en $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$. Los únicos puntos donde quedan dudas son $\{-1,1\}$. Pero si evaluamos en ambos puntos obtenemos
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{2n}(-1)}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$
que es una serie alternada y por el criterio de Leibnitz es convergente. Análogamente, en el punto 1 tenemos la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ que vuelve a ser convergente por el Teorema de Leibnitz. Por tanto el campo de convergencia es $[-1,1]$.

Finalmente evaluando precisamente en 1 obtenemos que
$$\frac{\pi}{4} = arctg(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$
de donde se obtiene que $\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2. (**2 ptos.**) Calcular los extremos relativos de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=9x^3+\frac{y^3}{3}-4xy$. Razonar si los extremos relativos obtenidos son absolutos.

Al ser f una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ para calcular los puntos críticos nos basta con calcular los puntos donde las derivadas parciales valen 0. Veamos $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=27x^2-4y=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y^2-4x=0$. Despejando en la segunda ecuación obtenemos que $x=\frac{y^2}{4}$ que si lo sustituimos en la primera ecuación obtenemos $\frac{27y^4}{16}-4y=0$, es decir $0=\frac{27y^4-64y}{16}=\frac{y}{16}(27y^3-64)=0$, de donde o bien $y=0$ y por tanto $x=0$ o bien $y=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\frac{4}{3}$ y se obtiene que $x=\frac{4}{9}$. Así los puntos críticos que hemos obtenido son $P_1=(0,0)$ $P_2=(\frac{4}{9},\frac{4}{3})$.

Para ver si en estos puntos se alcanza algún extremo relativo, como la función f es de clase 2 lo que tenemos que hacer es estudiar cómo es la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de f en los puntos críticos.

Se tiene

$$H(f)(x,y)\begin{pmatrix}54x & -4\\ -4 & 2y\end{pmatrix}.$$

Por tanto $H(f)(0,0)\begin{pmatrix}0 & -4\\ -4 & 0\end{pmatrix}$, que induce una forma cuadrática indefinida. Para comprobarlo o bien estudiamos los determinantes principales o bien los valores propios de dicha matriz que son 4 y -4, de distinto signo. Por tanto en P_1 no se alcanza ningún extremo relativo. Se alcanza un punto de silla.

En P_2 se tiene $H(f)(\frac{4}{9},\frac{4}{3})\begin{pmatrix}24 & -4\\ -4 & \frac{8}{3}\end{pmatrix}$ que tiene de valores propios $\frac{4}{3}(10-\sqrt{73})$ y $\frac{4}{3}(10+\sqrt{73})$, que son ambos positivos y por tanto la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana en P_2 es definida positiva y la función f alcanza en P_2 un mínimo relativo.

Finalmente para decidir si dicho mínimo es absoluto o no basta observar que $f(x,0)=x^3$ que es una función que diverge positivamente en $+\infty$ y diverge negativamente en $-\infty$. Por tanto el mínimo alcanzado no es absoluto.

3. (**2.25 ptos.**) Consideremos el hiperboloide de ecuación $z^2-2x^2-2y^2-12=0$.

   a) Comprobar que el plano tangente al hiperboloide en el punto $(1,-1,4)$ tiene la ecuación $x-y-2z+6=0$.

   b) Calcular el punto más cercano al origen de la intersección del anterior plano tangente y la esfera de ecuación $x^2+y^2+(z-3)^2=9$.

Para calcular el plano tangente tendremos que utilizar el teorema de la función implícita. Hemos visto en clase que si tenemos $F(x,y,z)=z^2-2x^2-2y^2-12$ entonces la ecuación $F(x,y,z)=0$ define una superficie en $\mathbb{R}^3$ y para calcular el plano tangente en un punto (x_0,y_0,z_0) donde $F(x_0,y_0,z_0)=0$ es necesario que el gradiente de f en dicho punto sea distinto de 0 Veamos: $\nabla F(x,y,z)=(-4x,-4y,2z)$ y en el punto $\nabla F(1,-1,4)=(-4,4,8)$ que es un vector distinto de $(0,0,0)$. En este caso la fórmula del plano tangente es

$$\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \frac{\partial F}{\partial x}(1,-1,4)(x-1)+\frac{\partial F}{\partial y}(1,-1,4)(y+1)+\frac{\partial F}{\partial z}(1,-1,4)(z-4)=0\}=$$

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ -4(x-1)+4(y+1)+8(z-4)=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ -4(x-y-2z+6)=0\}.$$

La segunda parte es un ejercicio de extremos absolutos. Se trata de calcular el mínimo de la distancia de un punto (que cumple ciertas condiciones) al $(0,0,0)$. La distancia de un punto (x,y,z) al $(0,0,0)$ es $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Por razones prácticas no trabajaremos con la función distancia sino con su cuadrado, los puntos donde alcance extremos son los mismos, aunque evidentemente el valor no va a ser el mismo. Estas consideraciones (que ya las hemos hecho innumerables veces en clase) nos hacen estudiar la existencia de extremos de $f(x,y,z)=d^2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, condicionado a que (x,y,z) esté en la intersección del plano $x-y-2z+6=0$ y la esfera $x^2+y^2+(z-3)^2=9$. Es decir $(x,y,z)\in M$ donde

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x-y-2z+6=0,\ \ x^2+y^2+(z-3)^2=9\}.$$

Dicho de otra forma, $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ g(x,y,z)=(0,0)\}$ donde $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ está definida como $g(x,y,z)=(x-y-2z+6,x^2+y^2+(z-3)^2-9)$. Para poder aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange es necesario comprobar que las funciones f y g verifican las condiciones del método. Evidentemente tanto f como g son suficientemente diferenciables y $M\neq\emptyset$. Lo único que es digno de ser comprobado es que el rango de $g'(x,y,z)=2$. Veamos; la matriz jacobiana

$$g'(x,y,z)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 2x & 2y & 2(z-3)\end{pmatrix}.$$

Supongamos que todos los menores de orden 2 son 0. El menor formado por las dos primera columnas nos daría $2(x+y)=0$ de donde $x=-y$ y el menor formado por las columnas primera y tercera nos da $2(x+z-3)=0$ de donde $x=3-z$. Si sustituimos en la ecuación de la esfera poniendo la ecuación en función de x obtenemos $3x^2=9$, de donde $x=\sqrt{3}$ (y por tanto $y=-\sqrt{3}$ y $z=3-\sqrt{3}$) o bien $x=-\sqrt{3}$ (por tanto $y=\sqrt{3}$ y $z=3+\sqrt{3}$). En ambos casos los puntos no están en el plano. Por tanto el rango de $g'(x,y,z)=2$ en todos los puntos de M.

Bueno, sabemos que tenemos que calcular los puntos críticos de

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x-y-2z+6)+\mu(x^2+y^2+(z-3)^2-9)$$

que estén en M. Veamos:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=2x+\lambda+2\mu x=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=2y-\lambda+2\mu y=0\\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=2z-2\lambda+2\mu(z-3)=0\\ x-y-2z+6=0\\ x^2+y^2+(z-3)^2=9\end{gathered}$$

Sumando las primeras dos ecuaciones obtenemos $2(x+y)(1+\mu)=0$, de donde o bien $x=-y$ o bien $\mu=-1$. Si $\mu=-1$ y sustituimos en la primera o segunda ecuación obtenemos $\lambda=0$. Si sustituimos en la tercera ecuación obtenemos $6=0$ que evidentemente no puede ser. Así la única salida es $x=-y$. Si ponemos las dos condiciones que definen M en función de x y de z se obtiene el sistema de ecuaciones $2x-2z+6=0$ y $2x^2+(z-3)^2=9$. Si despejamos x en la primera ecuación tenemos que $x=z-3$ y si sustituimos en la segunda ecuación tenemos $3x^2=9$ de donde $x=\sqrt{3}$

(y por tanto $y=-\sqrt{3}$, $z=\sqrt{3}+3$) o bien $x=-\sqrt{3}$ (y por tanto $y=\sqrt{3}$, $z=-\sqrt{3}+3$). Tenemos dos puntos: $P_1=(\sqrt{3},-\sqrt{3},\sqrt{3}+3)$ y $P_2=(-\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{3}+3)$. Por supuesto cada uno de los puntos tendrán sus correspondientes λ y μ, pero en este caso no va a ser necesario calcularlos. La función f es continua en $\mathbb{R}^3$ y por tanto restringida a M sigue siendo continua. Además M es cerrado y acotado. Quizá esto último sea lo menos claro ya que el plano no está acotado pero es claro que la esfera si está acotada y M es un subconjunto de la esfera y por tanto acotado. El teorema de compacidad nos garantiza entonces que f alcanza en M máximo y mínimo absolutos. Evidentemente tiene que hacerlo en puntos críticos y como hemos obtenido solamente dos puntos en uno de ellos se alcanza el máximo y en el otro el mínimo. Calculando obtenemos

$$f(\sqrt{3},-\sqrt{3},\sqrt{3}+3)=18+6\sqrt{3},$$
$$f(-\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{3}+3)=18-6\sqrt{3}$$

y la distancia mínima se alcanza en P_2.

4. (**2 ptos.**) Calcular el valor de la integral

$$\int_A (xy+y^2)d(x,y),$$

siendo $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ x^2+y^2\leq 1,\ \ (x-1)^2+y^2\leq 1\ \right\}$.

Lo primero que tenemos que decidir es si para calcular la integral nos quedamos con las variables como están o hacemos un cambio de variable. En caso de hacer un cambio de variable es casi obligado cambiar a coordenadas polares. En este caso se puede hacer de ambas formas con dificultad parecida. Por un lado con el cambio a polares el conjunto donde integramos se transforma en uno más manejable pero el integrando se llena de "senos y cosenos"que hacen, si no más difícil, sí mas farragoso el cálculo. Como la mayoría lo habeis hecho con coordenadas polares vamos a hacerlo así.

Las cuatro condiciones que definen el conjunto, una vez sustituido $x=\rho cos(\theta)$ e $y=\rho sen(\theta)$ se transforman en $\rho cos(\theta)\geq 0$, $\rho sen(\theta)\geq 0$, $\rho^2\leq 1$ y $\rho^2\leq 2\rho cos(\theta)$. Teniendo en cuenta que ρ es siempre positivo, las dos primeras ecuaciones nos dan que tanto $cos(\theta)$ como $sen(\theta)$ son positivos y entonces $\theta\in[0,\pi/2]$. De la cuarta condición se obtiene (dividiendo por ρ) que $\rho\leq 2cos(\theta)$. Así tenemos dos mayoraciones sobre ρ y hay que decidir cual de las dos es más restrictiva cuando $\theta\in[0,\pi/2]$. Por una parte $\rho\leq 1$ y por otra $\rho\leq 2cos(\theta)$. Igualando se obtiene $1=2cos(\theta)\Rightarrow cos(\theta)=\frac{1}{2}$ que nos da $\theta=\frac{\pi}{3}$. Comprueba ahora que en $[0,\pi/3]$ es menor 1 mientras que en $[\pi/3,\pi/2]$ es menor $2cos(\theta)$. Como además ρ no tiene ninguna restricción por abajo tenemos que

$$\int_A (xy+y^2)d(x,y)=\underbrace{\int_0^{\pi/3}\left[\int_0^1 \rho^3\left(cos(\theta)sen(\theta)+sen^2(\theta)\right)d\rho\right]d\theta}_{I_1}+$$

$$\underbrace{\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left[\int_0^{2cos(\theta)} \rho^3\left(cos(\theta)sen(\theta)+sen^2(\theta)\right)d\rho\right]d\theta}_{I_2}.$$

Por una parte

$$I_1 = \int_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left(cos(\theta)sen(\theta) + sen^2(\theta)\right) d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \left(cos(\theta)sen(\theta) + sen^2(\theta)\right) d\theta =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \left(cos(\theta)sen(\theta) + \left(\frac{1-cos(2\theta)}{2}\right)\right) d\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{sen^2(\theta)}{2} + \frac{\theta}{2} - \frac{sen(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi/3} =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{8} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

La otra integral quedará

$$I_2 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2cos(\theta)} \left(cos(\theta)sen(\theta) + sen^2(\theta)\right) d\theta = 4\int_{\pi/3}^{\pi/2} cos^4(\theta)\left(cos(\theta)sen(\theta) + sen^2(\theta)\right) d\theta =$$

$$4\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(cos^5(\theta)sen(\theta) + cos^4(\theta)sen^2(\theta)\right) d\theta = \underbrace{4\int_{\pi/3}^{\pi/2} cos^5(\theta)sen(\theta)d\theta}_{I_{2_1}} +$$

$$\underbrace{4\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\frac{1+cos(2\theta)}{2}\right)^2 \left(\frac{1-cos(2\theta)}{2}\right) d\theta}_{I_{2_2}}.$$

$$I_{2_1} = \left[-\frac{cos^6(\theta)}{6}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{1}{96}.$$

La otra integral que queda será

$$I_{2_2} = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(1 + cos^2(2\theta) + 2cos(2\theta)\right)\left(1 - cos(2\theta)\right) d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(1 - cos(2\theta) + cos^2(2\theta) - cos^3(2\theta) + 2cos(2\theta) - 2cos^2(2\theta)\right) d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(1 + cos(2\theta) - cos^2(2\theta) - cos^3(2\theta)\right) d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(1 + cos(2\theta) - (\frac{1+cos(4\theta)}{2}) - cos(2\theta)(1 - sen^2(2\theta))\right) d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{cos(4\theta)}{2} + sen^2(2\theta)cos(2\theta)\right) d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{sen(4\theta)}{8}+\frac{sen^3(2\theta)}{6}\right]_{\pi/3}^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

Finalmente $I = I_1 + I_{2_1} + I_{2_2} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)+\frac{1}{96}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{10+8\pi-9\sqrt{3}}{96}$.

5. (**1.5 ptos.**) Decidir si es exacta la ecuación diferencial

$$e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0.$$

Resolverla.

Para que una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ sea exacta debe verificar que $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$. En nuestro caso $M(x,y) = e^y$ y $N(x,y) = xe^y + 2y$. Es inmediato comprobar que $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = e^y$. En este caso existe una función (un potencial) $F(x,y)$ de forma que $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ y la solución general de la ecuación diferencial es $F(x,y) = c$ donde c es una constante arbitraria.

Para hallar F tenemos que $F(x,y) = \int M(x,y)dx = xe^y + \phi(y)$ donde ϕ es una función que determinaremos al exigir que $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = xe^y + \phi'(y) = N(x,y) = xe^y + 2y$, de donde $\phi'(y) = 2y$ y $\phi(y) = y^2$.

Finalmente la solución general es

$$xe^y + y^2 = c.$$

Granada, 16 de junio de 2008