Cálculo – 1º Ing. Telecomunicaciones. Primer parcial.

1. (**1 pto.**) Estudia para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $(1+i)^n = (1-i)^n$.

   Solución. Podemos desarrollar ambos miembros utilizando la fórmula de De Moivre o, más sencillo, si pasamos a un lado dividiendo

$$(1+i)^n = (1-i)^n \iff \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1 \iff i^n = 1 \iff n = 4k,\ k \in \mathbb{N}.$$

2. (**2 ptos.**) Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{1+2x_n} - 1.$$

   Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right\}$.

   Solución.

   a) Vamos a comprobar que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona y acotada.

      1) Veamos, en primer lugar, que la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente. Utilizaremos el principio de inducción.
         - Es inmediato comprobar que $x_1 = 1 > x_2 = \sqrt{3} - 1$.
         - Supongamos que $x_n > x_{n+1}$, entonces

$$2x_n + 1 > 2x_{n+1} + 1 \Rightarrow \sqrt{1+2x_n} - 1 > \sqrt{1+2x_{n+1}} - 1,$$

           o, lo que es lo mismo, $x_{n+1} > x_{n+2}$

      2) Comprobemos que todos los términos son positivos de nuevo por inducción:
         - Es evidente que que $x_1 > 0$ y,
         - si $x_n > 0$, $\sqrt{1+2x_n} > 1$ o, lo que es lo mismo, $x_{n+1} > 0$.

      Resumiendo $\{x_n\}$ es decreciente y está acotada inferiormente y, por tanto, es convergente. Si llamamos L al límite, se cumple que $L = \sqrt{1+2L} - 1$ de donde se deduce que $L = 0$.

   b) Para calcular el límite de la sucesión $\left\{\frac{x_n}{x_{n+1}}\right\}$, multiplicamos y dividimos por $\sqrt{1+2x_n} + 1$ y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_n}{\sqrt{1+2x_n} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+2x_n} + 1}{\sqrt{1+2x_n} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\sqrt{1+2x_n} + 1) = 1.$$

3. (**2 ptos.**) Calcula el máximo absoluto de la función $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{x-1} (e^{-t^2} - e^{-2t})\, dt.$$

Sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - 1)$, calcula el mínimo absoluto de f.

Solución.

a) Estudiamos la monotonía de la función f. Para ello veamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = e^{-(x-1)^2} - e^{-2(x-1)} = 0 \iff (x-1)^2 = 2(x-1) \iff x = 1, 3.$$

Por tanto, f es estrictamente monótona en $[1, 3]$ y en $[3, +\infty]$. Como $f'(2) > 0$ y $f'(4) < 0$, se tiene que f es estrictamente creciente en $[1, 3]$ y estrictamente decreciente en $[3, +\infty]$. En particular, la función alcanza su máximo absoluto en 3.

b) Dado que $f(1) = 0 < \lim_{x\to+\infty} f(x)$, f alcanza su mínimo absoluto en 1.

4. (**1.5 ptos.**) Calcula $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}}$.

Solución. Calculamos a qué tiende la base aplicando la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(x) - 3\cos(x) + 3x\sin(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Dado que tenemos una indeterminación del tipo "1^∞", se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}} = e^L \iff \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3} - 1 \right) = L.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3} - 1 \right) = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - 3x\cos(x) - x^3}{x^4}$$

aplicando la 1ª regla de L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - 3x}{4x^2}$$

aplicamos la primera regla de L'Hôpital de nuevo

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(x) - 3}{8x}$$

una última vez...

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3\sin(x)}{8} = 0$$

con lo que $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{3\sin(x)-3x\cos(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

5. (**1.5 ptos.**) Calcula $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)\tan(x/2)}{\sin(x)(\sin(x)+\cos(x))}\,dx.$

Solución. Utilizamos el cambio de variable $t = \tan(x/2)$ con lo que

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{y } dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

y la integral vale

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)\tan(x/2)dx}{\sin(x)(\sin(x)+\cos(x))} &= \int_0^1 \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot t \cdot \frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \\
&= \int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2-2t-1}\,dt \\
&= \int_0^1 \left(1+\frac{2t}{t^2-2t-1}\right)dt.
\end{aligned}$$

La integral de la función constantemente igual a 1 es inmediata y nos queda por resolver

$$\int_0^1 \frac{2t}{t^2-2t-1}\,dt.$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2t}{t^2-2t-1} = \frac{2t}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})} = \frac{A}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{B}{t-1+\sqrt{2}}$$

Desarrollando obtenemos que $A = \frac{\sqrt{2}}{2}+1$ y que $B = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, con lo que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2t}{t^2-2t-1}\,dt &= \int_0^1 \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{t-1-\sqrt{2}}\,dt + \int_0^1 \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{t-1+\sqrt{2}}\,dt \\
&= \left[(\frac{\sqrt{2}}{2}+1)\ln\left|t-1-\sqrt{2}\right| + (1-\frac{\sqrt{2}}{2})\ln\left|t-1+\sqrt{2}\right|\right]_0^1 \\
&=(\frac{\sqrt{2}}{2}+1)(\ln(\sqrt{2})-\ln(1+\sqrt{2})) + (1-\frac{\sqrt{2}}{2})(\ln(\sqrt{2})-\ln(\sqrt{2}-1)).
\end{aligned}$$

Sólo falta simplificar la expresión anterior para obtener la integral pedida.

6. (**2 ptos.**) Sea $f(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 \cos(t^2)\ dt$.

   a) Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en 0 de dicha función.

   b) Utiliza el polinomio anterior para aproximar el valor de $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cos(x^2)\, dx$. Da una cota razonada del error cometido.

Solución.

1. El polinomio de Taylor de orden 2 centrado en 0 es $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$. Para calcularlo, calculemos las correspondientes derivadas

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 \cos(x^2) \Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) &= 2x\cos(x^2) - 2x^3 \sin(x^2) \Rightarrow f''(0) = 0 \end{aligned}$$

   Por tanto $P_2(x) = 0$.

2. La aproximación que da el polinomio anterior de la integral es $P_2(1) = 0$ y la fórmula de Taylor nos dice que el error es

$$R_2(1) = \frac{f'''(c)}{3!}(1-0)^3 = \frac{f'''(c)}{3!},$$

   siendo c un número entre 0 y 1. Acotando usando la desigualdad triangular obtenemos que como

$$\begin{aligned} f'''(x) =& 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) - 6x^2\sin(x^2) - 4x^4\cos(x^2) \\ =& 2\cos(x^2) - 10x^2\sin(x^2) - 4x^4\cos(x^2), \end{aligned}$$

   se tiene que

$$|R_2(1)| = \frac{1}{6}\left|2\cos(c^2) - 10c^2\sin(c^2) - 4c^4\cos(c^2)\right| \leq \frac{16}{6} = \frac{8}{3}\,.$$

Granada a 6 de febrero de 2009