Ejercicio 1

Calcula las raíces de la ecuación $z^4 + iz = 0$.

Solución 1 Como $z^4 + iz = z(z^3 + i) = 0$, las soluciones son 0 y las tres raíces cúbicas de $-i$, esto es,

$$z_k = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \; k = 0, 1, 2.$$

Si desarrollamos,

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \\ z_1 &= \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{6}\right) = i \\ z_2 &= \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 2

a) Calcula el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1\cdot 2\cdots n)}{n\ln(n)}$.

b) Calcula

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a + \mathrm{sen}(x)}{a - \mathrm{sen}(x)}\right)^{1/x}$$

con $a > 0$.

Solución 2

a) Aplicamos el criterio de Stolz

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)) - \ln(1\cdot 2\cdots n)}{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1) + n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

dvidimos por $\ln(n+1)$ y usamos que $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln(n+1)}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 1.$$

b) Tenemos una indeterminación del tipo “1^∞”. Aplicamos la regla del número e:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a + \mathrm{sen}(x)}{a - \mathrm{sen}(x)}\right)^{1/x} = e^L \iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a + \mathrm{sen}(x)}{a - \mathrm{sen}(x)} - 1\right) = L.$$

Resolvemos el segundo límite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a+\operatorname{sen}(x)}{a-\operatorname{sen}(x)}-1\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a+\operatorname{sen}(x)-a+\operatorname{sen}(x)}{a-\operatorname{sen}(x)}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x)}{x(a-\operatorname{sen}(x))} = \frac{2}{a},\end{aligned}$$

usando que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a+\operatorname{sen}(x)}{a-\operatorname{sen}(x)}\right)^{1/x}=e^{2/a}.$$

Ejercicio 3

Sea f una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 es

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en cero de la función $g(x)=xf(x)$.

Solución 3 Recordemos que el polinomio de grado 3 de la función f centrado en 0 es

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

Despejando en la fórmula anterior se tiene que $f(0)=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=1$ y $f'''(0)=2$. Para calcular el polinomio de Taylor de la función $g(x)=xf(x)$ centrado en el origen y de orden 3 necesitamos el valor de las 3 primeras derivada en 0:

$$\begin{aligned} g(x)=xf(x) &\implies g(0)=0,\\ g'(x)=f(x)+xf'(x) &\implies g'(0)=f(0)+0\cdot f'(0)=1\\ g''(x)=2f'(x)+xf''(x) &\implies g''(0)=2, \text{ y}\\ g'''(x)=3f''(x)+xf'''(x) &\implies g'''(0)=3.\end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio de orden 3 de g es

$$g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2}x^2+\frac{g'''(0)}{3!}x^3=x+x^2+\frac{1}{2}x^3.$$

Ejercicio 4

Demostrar que, para cualquier $x\in\mathbb{R}^+$, se verifica que

$$\int_1^{\cosh(x)}\sqrt{t^2-1}\,dt=\frac{\cosh(x)\operatorname{senh}(x)}{2}-\frac{x}{2}.$$

Solución 4 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\int_1^{\cosh(x)}\sqrt{t^2-1}\,dt-\frac{\cosh(x)\operatorname{senh}(x)}{2}+\frac{x}{2}.$$

Para comprobar que f vale constantemente cero, vamos a ver que, en primer lugar, f es constante. Para ello comprobamos que su derivada se anula:

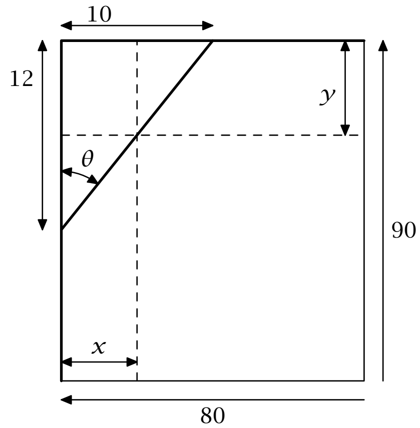
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{\cosh^2(x)-1}\right)\operatorname{senh}(x) - \frac{1}{2}\left(\operatorname{senh}^2(x)+\cosh^2(x)\right) + \frac{1}{2}\\
&= \operatorname{senh}^2(x) - \frac{1}{2}\left(\operatorname{senh}^2(x)+\cosh^2(x)\right) + \frac{1}{2}\\
&= -\frac{1}{2}\left(-\operatorname{senh}^2(x)+\cosh^2(x)\right) + \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

Una vez que sabemos que f es constante, podemos averiguar dicha constante evaluando en un punto cualquiera. Por ejemplo, es inmediato comprobar que $f(0) = 0$.

Ejercicio 5

A un espejo rectangular de medidas 80x90 cm. se le rompe (accidentalmente) por una esquina un triángulo de lados 10x12 cm. como indica el dibujo. Calcula las medidas del espejo de mayor área de forma rectangular que se puede obtener del la pieza restante.

Solución 5
Hay distintas formas de plantear el problema aunque la solución es la misma. El área del trozo de espejo que queremos maximizar es $(80-x)(90-y)$. Podemos relacionar x e y mediante la tangente del ángulo θ:



$$\frac{x}{12-y} = \frac{10}{12} \implies y = 12 - \frac{6}{5}x$$

Por tanto, tenemos que buscar el máximo de la función $f(x) = (80-x)(78+\frac{6}{5}x)$ con $x \in [0,10]$. Calculamos los puntos críticos:

$$f'(x) = -78 - \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}(80-x) = -\frac{12}{5}x + 18 = 0 \iff x = \frac{15}{2}.$$

Como $f''\left(\frac{15}{2}\right) = -\frac{12}{5} < 0$, la función alcanza un máximo relativo en dicho punto. El máximo absoluto se alcanza en este punto, en $x = 0$ o en $x = 10$. Como

$$f(0) = 6240, \quad f\left(\frac{15}{2}\right) = 6307.5 \text{ y } f(10) = 6300$$

el máximo absoluto se alcanza en $x = \frac{15}{2}$.

Ejercicio 6

Calcular la longitud de la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x)$ entre los puntos que tienen de abscisas $x = -\ln(2)$ y $x = 0$.

Solución 6 La longitud es

$$
\begin{aligned}
\ell(f) &= \int_{-\ln(2)}^{0} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_{-\ln(2)}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = [e^x = t] \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = [t = \operatorname{sen}(y)] = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\operatorname{sen}(y)} = [\cos(y) = z] \\
&= \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dz}{1-z^2}
\end{aligned}
$$

descomponemos en fracciones simples

$$
= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) dz = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ln(2+\sqrt{3})
$$

Ejercicio *7*

Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$.

Solución *7* El término general es decreciente y con límite cero. Para ello podemos estudiar el signo de la derivada de la función $f(x) = (\ln(x))^{\ln(x)}$ y se comprueba que es creciente si $x > e^e$. El criterio de condensación nos dice que la serie tiene el mismo carácter que la serie

$$
\sum \frac{2^n}{(\ln(2^n))^{\ln(2^n)}} = \sum \frac{2^n}{n^{n\ln(2)}(\ln(n))^{n\ln(2)}}
$$

Para estudiar la convergencia de esta serie aplicamos el criterio de la raíz:

$$
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^{n\ln(2)}(\ln(2))^{n\ln(2)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\ln(2)}(\ln(2))^{\ln(2)}} = 0 < 1.
$$

En consecuencia, la serie es convergente.