Examen Final. Cálculo.
1º Ingeniero de Telecomunicación.

1. *a*) (**1 pto.**) Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{sen}(x)+e^{-x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Respuesta. Veamos. Si tenemos en cuenta que tanto la función seno como la exponencial son continuas en 0 y que $\operatorname{sen}(0)=0$ y que $e^0=1$ entonces estamos ante una indeterminación de la forma 1^∞. Por tanto

$$e^L=\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{sen}(x)+e^{-x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\operatorname{sen}(x)+e^{-x}-1\right).$$

Vamos a resolver el segundo límite. Estamos en condiciones de aplicar la primera regla de L'Hôpital al cociente de las funciones $\operatorname{sen}(x)+e^{-x}-1$ en el numerador y x^2 en el denominador; ambas son derivables en todo $\mathbb{R}\setminus 0$ y continuas en $\mathbb{R}$ y las dos valen 0 en 0. Además la derivada del denominador x^2 es $2x$ que vale distinto de 0 cuando $x\neq 0$. Sin embargo al hacer el límite de las derivadas en 0 obtenemos $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-e^{-x}}{2x}$, que responde de nuevo a la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ y otra vez hay que aplicar la primera regla de L'Hôpital. Se comprueba que seguimos estando en las condiciones necesarias para poder aplicarla y entonces se trata de calcular el $\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}=L$. Por tanto el límite buscado es $e^L=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

b) (**1 pto.**) Estudiar la convergencia de la sucesión definida como $a_1=2$ y $a_{n+1}=\frac{a_n^2+5}{6}$, para $n\geq 1$.

Respuesta. En este caso se trata de estudiar la convergencia de una sucesión que viene definida de forma recurrente. Sabemos que si demostramos que la sucesión es monótona y acotada entonces es convergente (el reciproco no es en general cierto; si es convergente sí que es acotada pero no tiene por qué ser monótona). Veamos si es monótona. Si hay algún tipo de monotonía esa monotonía se intuirá en los primeros términos. Teniendo en cuenta que $a_1=2$ obtenemos que $a_2=\frac{2^2+5}{6}=\frac{3}{2}<2=a_1$. Aún no hemos demostrado nada, bueno hemos demostrado que en caso de ser monótona será decreciente. Veamos que sí lo es. Razonando por inducción tendremos que demostrar que $a_2<a_1$ (eso es justamente lo que acabamos de hacer) y que si, para un $n\in\mathbb{N}$, se tiene que $a_{n+1}<a_n$ entonces $a_{n+2}<a_{n+1}$. Bueno, pues supongamos que para un natural n se tiene ciertamente que $a_{n+1}<a_n$, entonces $a_{n+1}^2<a_n^2$ y por tanto $\frac{a_{n+1}^2+5}{6}<\frac{a_n^2+5}{6}$, es decir $a_{n+2}<a_{n+1}$, que era lo que queríamos demostrar.
Algunos comentarios: realmente hemos demostrado que la sucesión es estrictamente decreciente. No era necesario demostrarlo pero es que es así. Otro comentario es que el anterior razonamiento no está justificado del todo. En un momento hemos dicho que si $a_{n+1}<a_n$, entonces $a_{n+1}^2<a_n^2$. Esto no es cierto en general pero si los dos números son mayores o iguales a 0 entonces si que lo es. Pero, claramente, es muy fácil observar que $a_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Se tiene que $a_1=2>0$ y $a_{n+1}=\frac{a_n^2+5}{6}>0$. Pero el hecho de que $a_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ ya nos da también la acotación ya que al ser la sucesión decreciente para demostrar que está acotada sólo

necesitamos demostrar que está minorada y lo acabamos de hacer ya que hemos demostrado que 0 es una cota inferior de los términos de la sucesión.

Entonces la sucesión es convergente y todas sus parciales convergen al mismo límite que ella, al que le vamos a llamar L.

Es decir

$$L = \text{lím}(a_{n+1}) = \text{lím}\left(\frac{a_n^2+5}{6}\right) = \frac{\text{lím}(a_n^2)+5}{6} = \frac{L^2+5}{6},$$

y se tiene que el límite L cumple la ecuación $L = \frac{L^2+5}{6} \Rightarrow L^2 - 6L + 5 = 0$ que tiene como soluciones $L = 5$ y $L = 1$. Pero como la sucesión es decreciente y el primer término vale 2 la única posibilidad para el límite es $L = 1$.

2. (**1.5 ptos.**) Calcular la integral de la función $f(x,y,z) = z^2$ en el conjunto

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 \leq 4, \; x^2+y^2 \geq 1\right\}.$$

Respuesta. Está claro que en este caso se requiere un cambio de variables, ya sea a coordenadas cilíndricas o esféricas. De las dos formas se puede hacer, aunque según he visto en las respuestas al examen, parece menos lioso el cambio a coordenas cilíndricas. Si llamamos $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\,\text{sen}(\theta)$ obtenemos que las condiciones que definen el conjunto A se convierten en $\rho^2 + z^2 \leq 4$ y $\rho^2 \geq 1$. Sobre θ no hay ninguna restricción así que θ variará entre 0 y 2π. Ahora tenemos que elegir (en este caso podemos) cuál de las dos variables (ρ o z) variamos entre dos números y la otra variable la hacemos variar entre dos funciones de la primera. Por una parte, de las desigualdades anteriores, tenemos que $1 \leq \rho \leq \sqrt{4-z^2}$ y ninguna restricción más sobre z. Sin embargo es fácil darse cuenta que para que la desigualdad $1 \leq \rho \leq \sqrt{4-z^2}$ tenga sentido es necesario que $1 \leq \sqrt{4-z^2}$ y de aquí se obtiene que $-\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3}$. Ya tenemos una de las posibilidades:

$$\int_A z^2 d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\int_1^{\sqrt{4-z^2}} z^2\rho d\rho\right)dz\right)d\theta = 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\int_1^{\sqrt{4-z^2}} z^2\rho d\rho\right)dz =$$

$$2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left[z^2\rho^2/2\right]_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{4-z^2}} dz = \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} z^2\left((4-z^2)-1\right)dz = \pi\left[z^3 - z^5/5\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{12\pi\sqrt{3}}{5}.$$

Para hacerlo con el otro orden en las variables, si hacemos depender z de ρ en $\rho^2 + z^2 \leq 4$ obtenemos $-\sqrt{4-\rho^2} \leq z \leq \sqrt{4-\rho^2}$ y para que esto tenga sentido es necesario que $4-\rho^2 \geq 0$, es decir $\rho \leq 2$. Como además $\rho \geq 1$ se tiene

$$\int_A z^2 d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2\left(\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z^2\rho dz\right)d\rho\right)d\theta.$$

Evidentemente, el resultado es el mismo.

3. (**1.5 ptos.**) Justificar si la ecuación $x^y + y^z + z^x = 12$ define a z como función de x e y en un entorno del punto $(3,1)$. En caso de que así sea, calcular $\frac{\partial z}{\partial x}(3,1)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(3,1)$. Utilizar estos valores para calcular la ecuación del plano tangente a la superficie $x^y + y^z + z^x = 12$ en el punto $(3,1,z(3,1))$.

Respuesta. Este problema es un problema de aplicación del teorema de la función implícita. Para aplicarlo necesitamos comprobar que se verifican las hipótesis de dicho teorema. Para que z sea una función de x y de y en un entorno de $(3,1)$ primero hay que despejar z. Basta con sustituir y obtenemos $3^1 + 1^z + z^3 = 12 \Rightarrow z^3 = 8 \Rightarrow z = 2$. Claramente la función $F(x,y,z) = x^y + y^z + z^x - 12$ tiene derivadas parciales derivables en un entorno de $(3,1,2)$ (basta con tomarse como entorno $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$) y hemos comprobado que $F(3,1,2) = 0$. Por último se tiene que $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = y^z \log(y) + xz^{x-1}$ y entonces $\frac{\partial F}{\partial z}(3,1,2) = 12 \neq 0$ y podemos asegurar que z es una función del par (x,y) en un entorno del punto $(3,1)$. Aplicando otra vez el teorema de la función implícita se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x,y,z) = -\frac{yx^{y-1} + z^x \log(z)}{y^z \log(y) + xz^{x-1}}$$

en un entorno de $(3,1,2)$. En particular en el mismo punto $(3,1,2)$ se tiene que $\frac{\partial z}{\partial x}(3,1) = -\frac{1+8\log(2)}{12}$. De manera análoga se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x,y,z) = -\frac{x^y \log(x) + zy^{z-1}}{y^z \log(y) + xz^{x-1}}$$

en un entorno de $(3,1,2)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(3,1) = -\frac{2+3\log(3)}{12}$.

Finalmente la ecuación del plano tangente a las superficie en el punto $(3,1)$ (si consideramos la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z(x,y)$ como se nos pide), tiene de fórmula

$$\Pi = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ z = z(3,1) + \frac{\partial z}{\partial x}(3,1)(x-3) + \frac{\partial z}{\partial y}(3,1)(y-1) \right\}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos nos sale

$$\Pi = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ z = 2 - \frac{1+8\log(2)}{12}(x-3) - \frac{2+3\log(3)}{12}(y-1) \right\}.$$

Este último apartado se puede plantear desde otra perspetiva y quizá sea más literal ya que lo que se pide concretamente es calcular la ecuación del plano tangente a la superficie $x^y + y^z + z^x = 12$ en el punto $(3,1,z(3,1))$. Lo que hemos hecho es ver que, en el punto $(3,1)$, z se puede ver como una función de (x,y) y hemos calculado la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z(x,y)$ en el punto $(3,1)$. Si aplicamos la fórmula vista en clase para calcular planos tangentes a superficies dadas por coordenadas implícitas lo único que tenemos que comprobar es que el gradiente de F es distinto de 0 en el punto $(3,1,2)$ (aparte de las condiciones sobre las derivadas parciales de F que ya hemos comprobado antes). Tenemos que

$$\nabla F(3,1,2) = (\frac{\partial F}{\partial x}(3,1,2), \frac{\partial F}{\partial y}(3,1,2), \frac{\partial F}{\partial z}(3,1,2)) = (1+8\log(2), 2+3\log(3), 12)$$

que no sólo es distinto de 0 sino que sus tres componentes son distintas de 0, y la fórmula del plano tangente a la superficie $x^y + y^z + z^x = 12$ en el punto $(3,1,2)$ viene dada por

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; \frac{\partial F}{\partial x}(3,1,2)(x-3) + \frac{\partial F}{\partial y}(3,1,2)(y-1) + \frac{\partial F}{\partial z}(3,1,2)(z-2) = 0\right\} =$$

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; (1+8\log(2))(x-3) + (2+3\log(3))(y-1) + 12(z-2) = 0\right\}.$$

Por supuesto el resultado es el mismo.

4. (**2 ptos.**) Discutir si la función $f(x,y,z) = z^2 - 2xy$ alcanza en los puntos $(-1,-1,2)$, $(1,1,0)$ y $(0,0,\sqrt[3]{4})$ un extremo relativo condicionado a que $2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$.

   Respuesta. Este ejercicio es parte de un problema de extremos condicionados. Se trata de comprobar si tres puntos son extremos relativos de una función condicionada a una ecuación de las variables. Veamos si podemos aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello aparte de hipótesis sobre la diferenciabilidad de la función y de la función que determina la condición (se dan claramente ya que ambas tienen derivadas parciales infinitamente derivables) también es necesario que el rango de la matriz jacobiana de la función $g(x,y,z) = 2x^3 + 2y^3 + z^3 - 4$ sea 1 en $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; g(x,y,z) = 0\}$. Si observamos $g'(x,y,z) = (6x^2, 6y^2, 3z^2)$ y para que dicha matriz no tenga rango 1 (es decir, que tenga rango 0) tiene que verificarse que $x = y = z = 0$ pero evidentemente $(0,0,0) \notin M$ y entonces el rango de $g'(x,y,z)$ es 1 en todos los puntos de M.

   Veamos que los puntos en cuestión verifican que son puntos críticos de la función

$$F(z,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = z^2 - 2xy + \lambda(2x^3 + 2y^3 + z^3 - 4)$$

   que están en M; es decir verifican las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(z,y,z) &= -2y + 6\lambda x^2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(z,y,z) &= -2x + 6\lambda y^2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(z,y,z) &= 2z + 3\lambda z^2 = 0, \\ 2x^3 + 2y^3 + z^3 &= 4. \end{aligned}$$

   Es claro que $P_1 = (-1,-1,2)$, $P_2 = (1,1,0)$ y $P_3 = (0,0,\sqrt[3]{4})$ todos ellos verifican la ecuación $2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$. Además si sustituimos P_1 en la primera (o segunda o tercera) ecuación obtenemos que es punto crítico para $\lambda_1 = \frac{-1}{3}$. Sustituyendo P_2 obtentemos que $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ y para P_3 obtenemos de la tercera ecuación que $\lambda_3 = \frac{-2}{3\sqrt[3]{4}}$. Ya tenemos que los puntos son puntos críticos de F que están en

M y hemos obtenido los correspondientes λ's que nos permitirán decidir si son extremos relativos o no. Para esto último tenemos que estudiar la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de F en cada uno de los puntos. Veamos, en general la matriz hessiana de F queda

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12\lambda x & -2 & 0 \\ -2 & 12\lambda y & 0 \\ 0 & 0 & 2+6\lambda z \end{pmatrix}.$$

En el punto P_1 tenemos que

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para estudiar cómo es la forma cuadrática asociada a la matriz $H(P_1)$ hay varios métodos. En clase hemos utilizado el de los cambios de signo de los coeficientes del polinomio característico de la matriz, o mejor aún, sus raices.

$$P(\alpha) = \left| \begin{pmatrix} 4-\alpha & -2 & 0 \\ -2 & 4-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2-\alpha \end{pmatrix} \right| = -(2+\alpha)(\alpha^2 - 8\alpha + 12)$$

y este polinomio tiene como raices $\alpha = -2$, $\alpha = 2$ y $\alpha = 6$ y por tanto la forma cuadrática que induce $H(P_1)$ es indefinida. En este caso tenemos que estudiar la forma cuadrática pero restringida al núcleo de la diferencial de g en P_1.

$$\ker(Dg(P_1)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (6,6,12).(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x+y+2z = 0\}$$

y entonces $\ker(Dg(P_1)) = \langle (1,-1,0), (2,0,-1) \rangle$. Si ahora hacemos

$$(1,-1,0) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 12, \quad (1,-1,0) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 12$$

$$(2,0,-1) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 14$$

y la forma cuadrática que induce la matriz $\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$ es definida positiva. Por tanto en el punto P_1 se alcanza un mínimo relativo.

Para P_2 se tiene

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Razonando de forma similar a lo hecho en el punto P_1 obtenemos que la forma cuadrática asociada a $H(P_2)$ es definida positiva. En este caso no hay que continuar como antes ya que se obtiene directamente otro mínimo relativo.

Para el punto P_3 obtenemos

$$H(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculando los valores propios de esta matriz obtenemos que $\alpha = 2$ es un valor propio simple y que $\alpha = -2$ es un valor propio doble. Por tanto la forma cuadrática inducida es indefinida.

$$\ker(Dg(P_3)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (0,0,3(\sqrt[3]{4})^2).(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ z = 0\}$$

y entonces $\ker(Dg(P_3)) = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$.

$$(1,0,0)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (1,0,0)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$(0,1,0)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

La matriz $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ induce una forma cuadrática que sigue siendo indefinida y entonces en el punto no se alcanza ningún extremo relativo.

5. (**1.5 ptos.**) Calcular el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$. ¿Cuál es su campo de convergencia?

Respuesta. Este problema se puede hacer de varias formas también. Claro que nos tendrá que salir la misma solución en todos los casos. En las respuestas al examen yo he visto las dos siguientes formas. La primera consiste en descomponer $\dfrac{x}{1-x^2}$ en fracciones simples como cuando lo hacíamos para las integrales. Se tiene

$$\frac{x}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2} = \frac{A+B+(A-B)x}{1-x^2}.$$

Igualando coeficientes tenemos que $A+B=0$ y que $A-B=1$ de donde $A=\frac{1}{2}$ y $B=\frac{-1}{2}$. Por tanto, utilizando la fórmula para la suma de una serie geométrica tenemos que

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-x} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\right)x^n.$$

Pero obsérvese que la expresión $\frac{1}{2}(1-(-1)^n)$ vale 0 si n es par y vale 1 si n es impar. Esto hace que podamos poner la serie como $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$.

Desde otro punto de vista es también muy fácil. Si obtenemos el desarrollo en serie de

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

y entonces

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = x\frac{1}{1-x^2} = x\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$$

Ahora lo que tenemos que estudiar es el radio de convergencia de la serie obtenida. Si nos fijamos en la segunda forma en la que hemos obtenido el desarrollo en serie de la función tenemos que la serie geométrica de razón x^2 converge si $|x^2| < 1$ y no converge si $|x^2| > 1$. Es decir nuestra serie converge si $|x| < 1$ y no converge si $|x| > 1$. Por último en los puntos -1 y 1 se tiene respectivamente las series $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1) = -\infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty}(1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$; es decir que no son convergentes (si se quiere: su término general no converge a 0 en ninguno de los dos casos).

6. (**1.5 ptos.**) Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = \tan(x)$.

   Respuesta. Esta ecuación diferencial es una ecuación diferencial lineal de orden 2. En este caso sabemos que la solución general se obtiene calculando la solución general de la correspondiente ecuacion lineal homogeneizada y sumándole una solución particular de la ecuación (sin homogeneizar) que obtendremos por el método de variación de constantes.

   Para obtener una solución particular de la ecuación $y'' + y = 0$ calculamos el polinomio característico y le calculamos las raices. $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ que da como soluciones $\lambda = i$ y $\lambda = -i$. Esto produce las soluciones $v_1(x) = \cos(x)$ y $v_2(x) = \operatorname{sen}(x)$.

   Por otra parte el método de variación de constantes nos dice que tenemos que buscar una solución particular de la ecuación diferencial de la forma $c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\operatorname{sen}(x)$ donde $c_1(x)$ y $c_2(x)$ son funciones que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\operatorname{sen}(x) &= 0 \\ -c_1'(x)\operatorname{sen}(x) + c_2'(x)\cos(x) &= \tan(x). \end{aligned}$$

   Este sistema es muy fácil de resolver y se obtienen de soluciones $c_2'(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $c_1'(x) = -\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}$.

   Así obtenemos $c_2(x) = \int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x)$ y $c_1(x) = \int -\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}dx = \operatorname{sen}(x) + \log(\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}) - \log(\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)})$. Este último resultado lo he obtenido por los métodos de integración que hemos visto en el curso. No voy a repetir aquí los cálculos que he hecho. Sólo comentar que para ver si me había equivocado lo he comprobado con Mathematica y allí he obtenido $c_1(x) = \operatorname{sen}(x) + \log(\cos(x/2) - \operatorname{sen}(x/2)) - \log(\cos(x/2) + \operatorname{sen}(x/2))$ y aunque parezcan cosas distintas si se hacen unos cálculos resulta que es lo mismo.

   Si recapitulamos obtenemos que la solución general a la ecuación diferencial es

$$y(x) = A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x) + \Big(\operatorname{sen}(x) + \log(\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}) - \log(\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)})\Big)\cos(x) - \cos(x)\operatorname{sen}(x)$$

$$= A\cos(x) + B\mathrm{sen}(x) + \left(\log(\sqrt{1-\mathrm{sen}(x)}) - \log(\sqrt{1+\mathrm{sen}(x)})\right)\cos(x).$$

Granada, 4 de julio de 2008