# Sucesiones de números reales

# 4



El concepto de límite es básico en Cálculo y, de entre las diversas posibilidades, hemos elegido que haga su aparición asociado a sucesiones de números reales. La idea intuitiva de sucesión es sencilla: una sucesión es una lista ordenada.

## 4.1 Definición y propiedades

**Definición 4.1.** Una *sucesión* de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales, esto es,

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R},$$
$$n \mapsto x_n.$$

**Sucesión**

Llamaremos *término general* a $x_n$ y, usualmente, no mencionaremos la función sino sólo la imagen de la función. Dicho de otra manera, hablaremos de sucesión con término general $x_n$ y la notaremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Término general**

**Ejemplo 4.2.** Hay dos formas usuales de definir una sucesión: mediante una fórmula general que nos permita obtener todos los términos de la sucesión o, por recurrencia, o sea obtenemos cada término en función de los anteriores. Por ejemplo, la sucesión $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión 1, 3, 5, 7,... Como puedes ver, sabemos todos los términos de la sucesión. El que ocupa el lugar 53 es $\frac{1}{105}$. En cambio, la sucesión definida como $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ conocida como sucesión de Fibonacci está definida por recurrencia. Para calcular un término tenemos que conocer previamente el valor de los dos anteriores. No importa. Puesto que sabemos los dos primeros, podemos calcular el tercero y así sucesivamente: $0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

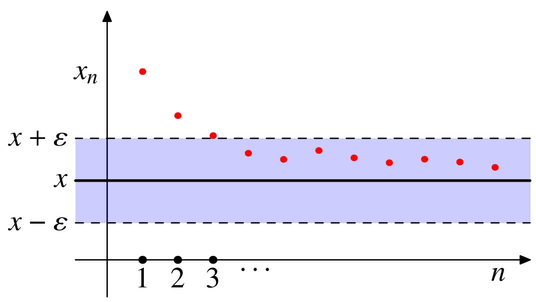


**Figura 4.1** Límite de una sucesión

**Definición 4.3.** Diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *convergente* si existe $x \in \mathbb{R}$ verificando que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$, para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ o $\{x_n\} \to x$.

**Sucesión convergente**

Se puede comprobar fácilmente que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ si, y sólo si, } \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0.$$

**Ejemplo 4.4.**
a) La sucesión constantes son convergentes y su límite es dicha constante.
b) La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero.
c) La sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.
d) La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.

### 4.1.1 Sucesiones y acotación

**Definición 4.5.**
a) La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está *acotada superiormente* (respectivamente inferiormente) si existe $M\in\mathbb{R}$ verificando que $x_n \leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$ (respectivamente $x_n \geq M$).

**Sucesión acotada**

b) La sucesión está *acotada* si lo está superior e inferiormente o, lo que es lo mismo, si existe $M\in\mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M$, para cualquier natural $n$.

**Proposición 4.6.** *Toda sucesión convergente está acotada.*

*Demostración.* Aplicamos la definición de convergencia para $\varepsilon = 1$. Entonces existe un natural $n_0$ tal que $|x_n - x| < 1$ para $n \geq n_0$. En particular, el conjunto $\{x_n : n \geq n_0\}$ está acotado superiormente por $x+1$ e inferiormente por $x-1$. El resto de los términos de la sucesión también está acotado por ser un conjunto finito. Por tanto, la unión de ambos está acotado. □

**Observación 4.7.** El recíproco no es cierto. La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada pero no es convergente.

### 4.1.2 Álgebra de límites

Después de definir el límite de una sucesión, los siguientes resultados relacionan su comportamiento y las operaciones usuales de números reales. En primer lugar, comenzamos con la suma y el producto.

**Proposición 4.8.** *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones convergentes. Entonces*
*a)* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$,
*b)* $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$,
*c) si* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *se tiene que* $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$.

**Proposición 4.9.** *Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a cero e $\{y_n\}$ una sucesión acotada. Entonces $\{x_ny_n\}$ es convergente a cero.*

**Ejemplo 4.10.** Vamos a calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(3n^4-2n+7\right)}{\log\left(2n^2+2n-1\right)}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\log(3n^4-2n+7)}{\log(2n^2+2n-1)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(n^4(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4})\right)}{\log\left(n^2(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^4)+\log\left(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4}\right)}{\log(n^2)+\log\left(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4\log(n)+\log\left(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4}\right)}{2\log(n)+\log\left(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}
\end{aligned}$$

dividimos por $\log(n)$ numerador y denominador

$$= \frac{4}{2} = 2.$$

### 4.1.3 Convergencia y orden

En esta sección vamos a hacer relacionar convergencia y orden. El primer resultado nos dice que las desigualdades entre los términos de dos sucesiones se trasladan a sus respectivos límites. De hecho, no hace falta que todos los términos verifican la desigualdad. Es suficiente con que, por ejemplo, para los términos pares o los impares tengamos la desigualdad.

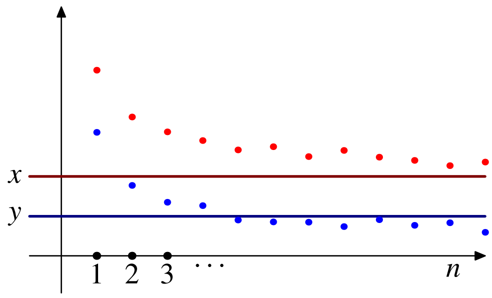


**Figura 4.2** El orden se conserva al tomar límites

**Proposición 4.11.** *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones convergentes. Supongamos que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \leq y_n\}$ es infinito. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

**Regla del sandwich**

**Proposición 4.12.** *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ sucesiones de números reales verificando que*
*a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ y que*
*b) $x_n \leq y_n \leq z_n$, para cualquier $n$ natural.*
*Entonces $\{y_n\}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.*

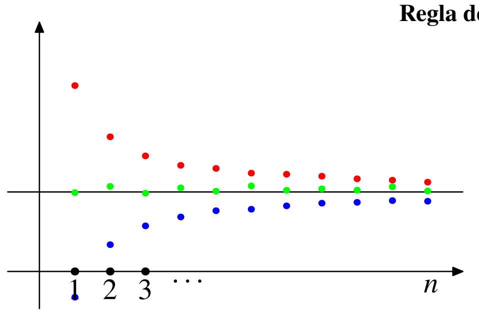


**Figura 4.3** Límites y sucesiones encajadas

**Ejemplo 4.13.** Vamos a calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2\sqrt{n}}.$$

Usando que

$$\frac{1}{n^2\sqrt{n}} \leq \frac{m}{n^2\sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2\sqrt{n}}$$

para cualquier natural $m$ entre 1 y $n$, podemos acotar superior e inferiormente la sucesión:

$$n\frac{1}{n^2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2\sqrt{n}} \leq n\frac{n}{n^2\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como nuestra sucesión está encajada entre dos sucesiones que tienden a cero, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = 0.$$

## 4.2 Sucesiones parciales

Si una sucesión es una "lista" de números, podemos construir una lista nueva escogiendo algunos de estos, por ejemplo los que ocupan un lugar par o impar. A este tipo de sucesiones las llamaremos parciales de la sucesión original.

**Sucesión parcial**

**Definición 4.14.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que $\{y_n\}$ es una *sucesión parcial* de $\{x_n\}$ si existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{\sigma(n)}$ para cualquier natural $n$.

**Ejemplo 4.15.**

a) El primer ejemplo de sucesión parcial de una sucesión dada es simple: eliminemos una cantidad finita de términos al inicio de la sucesión. Por ejemplo, eliminar los tres primeros términos se consigue con la aplicación $\sigma(n) = n + 3$. La sucesión $\{x_{n+3}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es lo que se llama una *cola* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Cola**

En general, si $p$ es un número natural, las sucesión parcial $\{x_{n+p}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *cola* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La convergencia de una sucesión y de sus colas es equivalente: la sucesión converge si, y sólo si, lo hacen todas o alguna de sus colas.

b) Quedarnos sólo con los términos que ocupan una posición par o impar consiste en considerar las parciales $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Proposición 4.16.** *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales convergente. Entonces cualquier parcial es convergente y con el mismo límite.*

Este resultado se suele usar para demostrar que una sucesión *no* es convergente: si existe alguna parcial no convergente o existen parciales distintas convergentes a límites distintos, la sucesión original no es convergente.

**Ejemplo 4.17.** La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente puesto que la parcial de los pares converge a 1 mientras que la de los impares lo hace a $-1$.

## 4.3 Monotonía

La definición de monotonía para funciones cualesquiera se puede enunciar para sucesiones.

**Sucesión creciente**

**Definición 4.18.** Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *creciente* si cumple que $x_n \leq x_{n+1}$ para todo natural $n$. Dicho de otra forma, cuando avanzamos en la lista los términos son mayores:

$$n \leq m \implies x_n \leq x_m.$$

Análogamente, diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *decreciente* si cumple que $x_n \geq x_{n+1}$ para todo natural $n$ o, lo que es lo mismo, $n \leq m \implies x_n \geq x_m$.

Evidentemente no todas las sucesiones son monótonas al igual que no todas las funciones son monótonas. Por ejemplo, la sucesión $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona ni tampoco lo es la sucesión $\{(-1)^n\}$.

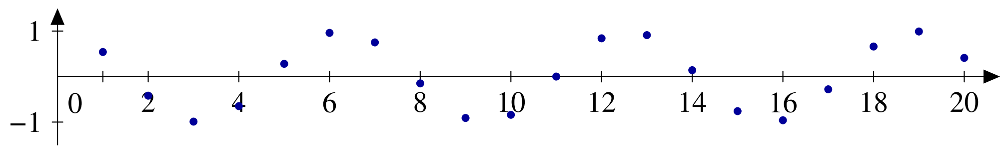


**Figura 4.4** La sucesión $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona

Eso sí, de cualquier sucesión siempre podemos elegir términos cada vez mayores o cada vez menores. En otras palabras, siempre podemos elegir una sucesión parcial monótona.

**Proposición 4.19.** *Toda sucesión tiene una parcial monótona.*

¿Cuál es el interés de las sucesiones monótonas? Son más fáciles de estudiar. Por ejemplo, la convergencia de las sucesiones monótonas se reduce al estudio de su acotación.

**Proposición 4.20.** *Una sucesión monótona es convergente si, y sólo si, está acotada. De hecho, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

El hecho de que las sucesiones monótonas y acotadas sean convergentes nos permite demostrar que una sucesión es convergente sin, teóricamente, conocer su límite.

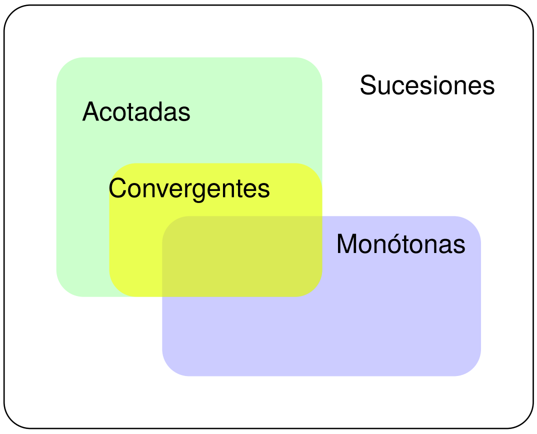


**Figura 4.5** Distintos tipos de sucesiones

**Ejemplo 4.21.** Vamos a estudiar la convergencia de la sucesión

$$x_1 = 1, \ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}, \ \forall n \geq 1.$$

Para demostrar que esta sucesión es convergente vamos a comprobar que es una sucesión monótona y acotada.

a) Observa que $x_2 = \sqrt{2} > x_1 = 1$. Vamos a demostrar por inducción que la sucesión es creciente.
   i) El primer paso ya lo tenemos dado: $x_2 = \sqrt{2} > x_1 = 1$.
   ii) Si ahora suponemos que $x_n < x_{n+1}$, veamos que $x_{n+2} > x_{n+1}$:

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} + 1} > \sqrt{x_n + 1} = x_{n+1}.$$

   Luego la sucesión es monótona creciente.

b) Veamos que también está mayorada, concretamente que $x_n \leq 2$ , $\forall n \in \mathbb{N}$. De nuevo lo comprobamos por inducción.
   i) Es inmediato para $n = 1$.
   ii) Si $x_n \leq 2$, veamos que para $x_{n+1}$ también se verifica:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1} \leq \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \leq 2.$$

Por tanto, existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ y lo calculamos haciendo uso de la fórmula de recurrencia. Tomando límites

$$x_{n+1}^2 = x_n + 1 \implies x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como $\{x_n\}$ es creciente y el primer término es 1, la única posibilidad que cabe es que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**Ejemplo 4.22.** Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia como $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $3x_{n+1} = 2 + x_n^3$ para cualquier natural $n$. Estudia si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y, caso de que lo sea, calcula su límite.

a) Si calculas algunos términos de la sucesión, parece que la sucesión es creciente. Vamos a comprobarlo por inducción.
   i) $x_1 = -\frac{3}{2} \leq x_2 = -\frac{11}{24}$.
   ii) Supongamos que $x_n \leq x_{n+1}$ para un natural $n$, entonces

$$x_{n+1} = \frac{2+x_n^3}{3} \leq \frac{2+x_{n+1}^3}{3} = x_{n+2}$$

ya que la función $f(x) = x^3$ es creciente.

Acabamos de demostrar que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \leq x_{n+1}\}$ es inductivo y que, por tanto, la sucesión es creciente.

b) ¿Está acotada la sucesión? Por ser una sucesión creciente, está acotada inferiormente. Sólo nos falta encontrar una cota superior. De hecho, la sucesión será convergente si, y sólo si, está acotada superiormente. Si la sucesión fuera convergente a un número $L$, como $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$, se tiene que cumplir que $3L = 2 + L^3$. Las soluciones de este polinomio son 1 y $-2$ (compruébalo por ejemplo por el método de Ruffini). Dado que la sucesión es creciente y su primer término es $-\frac{3}{2}$, queda descartado que el límite sea $-2$. Vamos a comprobar por inducción que 1 es una cota superior.
   i) Es evidente que $x_1 = -\frac{3}{2} \leq 1$.
   ii) Supongamos que $x_n \leq 1$ para un natural $n$, entonces

$$x_{n+1} = \frac{2+x_n^3}{3} \leq \frac{2+1}{3} \leq 1.$$

En resumen, la sucesión es creciente y mayorada y, por lo visto anteriormente, su límite es 1.

**Ejemplo 4.23.** Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y consideremos la siguiente sucesión: $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y que su límite, $x$, verifica $x^2 = a$. Estudiamos en primer lugar si la sucesión es monótona:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 + a}{x_n}\right) - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n}.$$

La sucesión será decreciente si $x_{n+1} - x_n \leq 0$ o, equivalentemente, si $a - x_n^2 \leq 0$. Si se da la desigualdad opuesta, la sucesión será creciente. En cualquier caso, tenemos que estudiar la relación entre $x_n^2$ y $a$. Como no tenemos una fórmula para $x_n$, vamos a trabajar con $x_{n+1}$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} \geq x_{n+2} &\iff a - x_{n+1}^2 \leq 0 \iff a \leq \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right)^2 \\ &\iff 4a \leq x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} + 2a \iff 0 \leq x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} - 2a \\ &\iff 0 \leq \left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2. \end{aligned}$$

Esta última afirmación es claramente cierta. Por tanto la sucesión $\{x_{n+1}\}$ es decreciente. Al mismo tiempo hemos demostrado que está acotada inferiormente: $\sqrt{a} \leq x_n$, para cualquier $n$ natural. Por tanto, la sucesión $\{x_{n+1}\}$ (que no es más que la sucesión $\{x_n\}$ comenzando en el segundo término) es convergente. Llamemos $L$ a su límite. Debe verificar que

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right) \iff L = \sqrt{a}.$$

Volveremos a este ejemplo más adelante.

Si unimos los dos resultados anteriores: toda sucesión acotada tiene una parcial monótona que, por ser parcial, sigue siendo acotada y, por tanto, convergente.

**Teorema 4.24 (de Bolzano–Weierstrass).** *Toda sucesión acotada tiene una parcial convergente.*

**Teorema de Bolzano–Weierstrass**

Aunque lo usaremos poco en los ejemplos prácticos, este teorema es la clave que permite probar la existencia de máximo y mínimo de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados.

## 4.4 Sucesiones divergentes

La sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente, pero tiene un comportamiento muy particular. Los términos de esta sucesión toman valores tan grandes como se desee siempre que dicho términos sean lo suficientemente avazandos. A esto nos solemos referir como que la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$.

**Definición 4.25.**

a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge positivamente* o *tiende a* $+\infty$ si para cualquier $M\in\mathbb{R}$ existe un natural $n_0$ tal que $x_n \geq M$ para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

b) De manera similar, diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge negativamente* o que *tiende a* $-\infty$ si para cualquier $K\in\mathbb{R}$ existe un natural $n_0$ tal que $x_n \leq K$ para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

c) En general, diremos que una sucesión es *divergente* si diverge positiva o negativamente.

De la definición se deduce directamente que las sucesiones divergentes no están acotadas: las sucesiones divergentes positivamente no están acotadas superiormente y las que divergen negativamente no están acotadas inferiormente.

**Observación 4.26.** Un error muy común es decir que una sucesión tiende a $+\infty$ si “sus términos son cada vez más grandes” o “si hay términos tan grandes como se quiera”. Compruébalo en los siguientes ejemplos:

a) La sucesión $1, 1, 2, 4, 3, 9, \ldots, n, n^2, \ldots$ no es creciente pero es divergente.

b) La sucesión $1, 1, 2, 1, 3, 1, \ldots, n, 1, \ldots$ tiene términos tan grandes como se quiera pero no es divergente.

**Proposición 4.27.** *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales.*

*a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\{y_n\}$ está acotada inferiormente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = +\infty$.*

*b) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$ si, y sólo si, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.*

*c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y existe un natural $n_0$ y un número positivo $k$ tal que $y_n \geq k$ para $n \geq n_0$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.*

**Ejemplo 4.28.** Vamos a probar que

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } x > 1, \\ 0, & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

Comencemos con el caso $x > 1$. Vamos a demostrar que la sucesión $\{x^n\}$, que claramente es creciente, no está acotada. Por reducción al absurdo, supongamos que sí está acotada. En ese caso, la sucesión es convergente al supremo de sus elementos por ser creciente. Notemos $L$ a dicho supremo. Se tiene que $x^n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En particular,

$$x^{n+1} \leq L,\ \forall n\in\mathbb{N} \implies x^n \leq \frac{L}{x} < L,$$

lo que contradice que $L$ sea el supremo.
Si $x < 1$, entonces $\frac{1}{x} > 1$ y podemos aplicar el apartado anterior para obtener que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

## 4.5 Criterios de convergencia

El primer criterio que vamos a ver, el criterio de Stolz, permite resolver indeterminaciones de la forma “$\frac{0}{0}$” o “$\frac{\infty}{\infty}$”. En cierta manera juega un papel similar a la regla de L'Hôpital para cocientes de funciones.

**Criterio de Stolz**

**Proposición 4.29.** *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales. Supongamos que se verifica alguna de las siguientes condiciones:*
*a) $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y diverge positivamente, o bien*
*b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.*
*Entonces se verifica que:*
*a) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = L \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.*
*b) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty$ , entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.*
*c) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = -\infty$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.*

Veamos un ejemplo de su uso.

**Ejemplo 4.30.** Vamos a calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}.$$

Aplicando el criterio de Stolz, tenemos que estudiar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2)-(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{(n+1)^3-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2+3n+1} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$.

**Criterio de la raíz**

**Proposición 4.31.** *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Se verifica que:*
*a) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.*
*b) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty$ , entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = +\infty$.*

**Ejemplo 4.32.** Aplicando el criterio de la raíz, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

**Regla del número $e$**

**Proposición 4.33.** *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales convergente a uno, y sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera. Entonces se verifica que:*
*a) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1) = L \in \mathbb{R} \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^L$.*
*b) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1) = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = +\infty$.*
*c) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1) = -\infty \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0$.*

**Ejemplo 4.34.** Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}\right)^{n+3}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}\right)^{n+3} = e^L \iff \lim_{n\to\infty}(n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}-1\right) = L.$$

Para terminar, resolvemos el segundo límite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}-1\right) &= \lim_{n\to\infty}(n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}-\frac{n^2+2n-2}{n^2+2n-2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(-3n+5)}{n^2+2n-2} = -3.\end{aligned}$$

**Ejemplo 4.35.** La sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y tiene límite $e$.
Para comprobar que, en efecto, es creciente vamos a escribir el término $n$-ésimo utilizando el binomio de Newton

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\frac{1}{n^k}\\ &= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{3!}+\cdots\\ &\qquad\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

Es fácil imaginar cuál es el término siguiente:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= 1+1+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\frac{1}{3!}+\cdots\\ &\qquad\cdots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\frac{1}{n!}\\ &\qquad\cdots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Observa los dos términos que acabamos de escribir. Hay dos diferencias:

a) Este último tiene un sumando más que el término $n$-ésimo. Dicho término de más, el último, es positivo. En realidad, todos los sumandos son positivos.
b) Si nos fijamos en el resto de sumandos y vamos comparando uno a uno

$$\begin{aligned}1 &\leq 1,\\ 1-\frac{1}{n} &\leq 1-\frac{1}{n+1},\\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) &\leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right),\end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Uniendo estos dos apartados, obtenemos la desigualdad que estábamos buscando, esto es, que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.
El cálculo del límite es fácil utilizando la Proposición 4.33 (la regla del número $e$):

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^L \iff \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = L,$$

y este segundo límite es inmediato comprobar que vale uno.

## 4.6 Velocidad de convergencia

Las sucesiones $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\frac{1}{n^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tienen límite cero, pero un rápido vistazo a sus términos en la Tabla 4.1 nos convence de que los términos de la segunda se acercan más rápidamente al límite.

Otra forma de ver esto es la siguiente. El cociente entre los términos generales de las dos sucesiones es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

lo que indica que la sucesión del denominador, $\frac{1}{n}$, es mucho mayor que la del numerador, $1/n^2$.

**Definición 4.36.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente con límite $l$ y sea $\{b_n\}$ otra sucesión convergente a otro número $m$.

a) Diremos que la velocidad o el orden de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $O(b_n)$ si existe una constante $K$ tal que

$$\frac{|a_n - l|}{|b_n - m|} \leq K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Diremos que la velocidad o el orden de convergencia de la sucesión es $o(b_n)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n - l|}{|b_n - m|} = 0.$$

| $n$ | $1/n$ | $1/n^2$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.0 | 1.0 |
| 2 | 0.5 | 0.25 |
| 3 | 0.3333333333333333 | 0.1111111111111111 |
| 4 | 0.25 | 0.0625 |
| 5 | 0.2 | 0.04 |
| 6 | 0.1666666666666667 | 0.02777777777777778 |
| 7 | 0.1428571428571428 | 0.02040816326530612 |
| 8 | 0.125 | 0.015625 |
| 9 | 0.1111111111111111 | 0.01234567901234568 |
| 10 | 0.1 | 0.01 |

**Tabla 4.1** Primeros términos de las sucesiones $1/n$ y $1/n^2$

La notación "O grande" y "o pequeña" es bastante común a la hora de describir la convergencia de un algoritmo. Obsérvese que $\{b_n\} - m$ es una sucesión que converge a 0. Lo que se hace, en esencia, es comparar la velocidad de convergencia de $\{a_n\}$ a su límite con la velocidad de la convergencia de otra sucesión que converge a 0. Normalmente como sucesión $\{b_n\}$ se toma la sucesión $\{\frac{1}{n^p}\}$ para un natural $p$.

La definición anterior también tiene también una versión para sucesiones divergentes:

**Definición 4.37.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión divergente y sea $\{b_n\}$ otra sucesión divergente.

a) Diremos que la velocidad o el orden de divergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $O(b_n)$ si existe una constante $K$ tal que
$$\frac{|a_n|}{|b_n|} \leq K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Diremos que la velocidad o el orden de divergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $o(b_n)$ si
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = 0.$$

Análogamente a lo que es usual en sucesiones convergentes, para comparar con sucesiones divergentes suelen utilizarse las sucesiones $\{n^p\}$ con $p$ natural.

**Ejemplo 4.38.** Con la nomenclatura anterior la sucesión $\left\{\frac{n^2+2n+1}{n^3-2n^2+3n+1}\right\}$ tiende a cero con velocidad $O(1/n)$. En el caso de divergencia se tiene que $\log(n)$ diverge con velocidad $o(n)$.

## 4.7 Ejercicios

### 4.7.1 Sucesiones

**Ejercicio 4.1.** Prueba que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$.

**Ejercicio 4.2.** Sea $a$ un número real positivo y definamos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

**Ejercicio 4.3.** Demuestra que la sucesión $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \geq 1$ es convergente y calcular su límite.

E **Ejercicio 4.4.** Se considera la sucesión definida por recurrencia por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

E **Ejercicio 4.5.** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1$. Calcula $\lim_{n\to\infty} x_n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$.

E **Ejercicio 4.6.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$.

a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural $n$.
b) Demuestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.
c) Calcula su límite.

**Ejercicio 4.7.** Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Estudiar el comportamiento de la sucesión $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2+a}{2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

## 4.7.2 Criterios de convergencia

**Ejercicio 4.8.** Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y calcular su límite cuando exista.

a) $\left\{\dfrac{1+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1+1/2+1/3+\cdots+1/n}{n}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right\}$

**Ejercicio 4.9.** Calcula el límite de las siguientes sucesiones

a) $\left\{\dfrac{\log(1\cdot 2\cdots n)}{n\log(n)}\right\}$,

b) $\left\{\dfrac{n^2\sqrt{n}}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots\sqrt[n]{n}}{n^2}\right\}$

**Ejercicio 4.10.** Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}}{n+1}\right\}$

**Ejercicio 4.11.** Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+56n+5}\right\}$

b) $\left\{\left(\dfrac{n^2-5n+6}{n^2+2n+1}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}\right\}$

c) $\{(1+\log(n+1)-\log(n))^n\}$

**Ejercicio 4.12.** Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\log(n)}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{\log(n+1)!}{\log(n+1)^n}\right\}$

**Ejercicio 4.13.** Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\left(\dfrac{n+1}{n^2+n+5}\right)^{\frac{1}{1+\log(n)}}\right\}$

b) $\left\{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

c) $\left\{\dfrac{\cos(\sqrt{n^2+1})\log(n)}{n}\right\}$

**Ejercicio 4.14.** Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\sqrt[n]{\dfrac{n!}{(2n)^{n+1}}}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{\log(n!)}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}\right\}$

E **Ejercicio 4.15.** Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{ \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \right\}.$$

E **Ejercicio 4.16.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \log\left(\frac{3n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 5n}\right)\right)^{4n+1}.$$

### 4.7.3 Ejercicios complementarios

**Ejercicio 4.1.** Sea $a \leq 1$. Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = a$, $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$.

E **Ejercicio 4.2.** Estudia la convergencia de la sucesión definida de forma recurrente por $x_1 = a > 0$, y $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 4.3.** Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:
a) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$, b) $\left\{\frac{2^n+n}{3^n-n}\right\}$.

**Ejercicio 4.4.** Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos convergente. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$\left\{ \frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n}}{\log(n)} \right\}.$$

**Ejercicio 4.5.** Calcular el límite de la sucesión $\left\{\frac{e^{a_1} + e^{a_2/2} + \ldots + e^{a_n/n} - n}{\log(n+1)}\right\}$, donde $\{a_n\}$ es una sucesión convergente de números reales positivos.

**Ejercicio 4.6.** Calcular el límite de la siguiente sucesión de números reales $\left\{\left(\frac{5(1+2^4+3^4+\ldots+n^4)}{n^5}\right)^n\right\}$.

E **Ejercicio 4.7.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1) + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n}{\log\left(n^3 + 1\right)}.$$

**Ejercicio 4.8.** Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$; estudiar el carácter de la sucesión $\left\{(a^n + b^n)^{1/n}\right\}$.