Series

5

En el siglo XVIII muchos matemáticos buscaban, sin demasiado éxito, el valor de la expresión

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

La primera aportación relevante fue hecha por Jacobo Bernoulli en 1689 cuando demostró la convergencia de dicha serie. Más tarde, en 1728–1729, D. Bernoulli calculó su valor con una precisión de una centésima. Stirling aumentó la precisión hasta los ocho primeros decimales al año siguiente. Cuatro años después, Euler calculó el valor con dieciocho cifras decimales y se dio cuenta de que coincidían con la expresión de $\pi^2/6$. En años posteriores, Euler no sólo demostró que, efectivamente, ese era el valor de dicha suma sino que calculó $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots$ para k par.

En este tema vamos a estudiar sucesiones de esta forma. Veremos que, en algunos casos concretos, seremos capaces de calcular su límite. En el resto de ocasiones intentaremos, al menos, decidir sobre la convergencia o no de dichas sucesiones.

5.1 Definición y propiedades

Las series de números reales son un caso particular de sucesiones. Comencemos con una sucesión $\{a_n\}$ y construimos la sucesión

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1, \\
s_2 &= a_1 + a_2, \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\
s_2 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. A las sucesiones de la forma $\{s_n\}$ las llamaremos series y hablaremos de la suma de la serie para referirnos a su límite.

Definición 5.1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión $\{s_n\}$ definida como

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

A esta sucesión $\{s_n\}$ la llamaremos *serie de término general* a_n y la notaremos $\sum_{n\geq 1} a_n$. A los términos s_n se les suele llamar *sumas parciales* de la serie. Si $\{s_n\}$ tiene límite, lo notaremos

Serie de números reales

$$\lim_{n\to\infty} a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

La principal dificultad para estudiar la convergencia de una serie es que normalmente no disponemos de una fórmula para las sumas parciales. En aquellos casos en que sí, la convergencia de una serie se reduce al cálculo de un límite. Vamos a empezar por un ejemplo sencillo.

Ejemplo 5.2. Vamos a estudiar si la serie $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^n}$ es convergente o, lo que es lo mismo, vamos a calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} .$$

Los términos de la sucesión de sumas parciales son

n	**sumas parciales**	s_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
4	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	$\frac{14}{16}$
	...	
n	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2^n}$	$1 - \frac{1}{2^n}$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$.

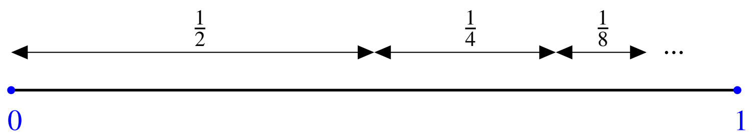

Figura 5.1 La suma de una progresión geométrica de razón ½

Vale, pero ¿de dónde ha salido la fórmula de la suma de los n términos? Gráficamente es muy fácil de ver. El segmento $[0, 1]$ se obtiene uniendo el $[0, \frac{1}{2}]$, y luego vamos añadiendo la mitad de la mitad que nos falta.

Este ejemplo se basa en la suma de los términos de una progresión geométrica. Recordemos cuál es la fórmula para calcular su suma.

Progresiones geométricas

Ejemplo 5.3. Una *progresión geométrica de razón r* es una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n,$$

donde cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una cantidad fija r, la razón. Esta forma particular hace que se puede calcular su suma de manera explícita. Fijémonos que

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^k - r\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 - r^{n+1}$$

de donde se deduce que

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = a\sum_{k=0}^{n} r^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}. \tag{5.1}$$

Por ejemplo, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.
El hecho de que tengamos la fórmula (5.1) nos pone en bandeja el cálculo del límite cuando n tiende a $+\infty$. Es fácil comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{si } r \in]-1,1[, \\ 1, & \text{si } r = 1, \\ \text{no existe}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

si, y sólo si, $|r| < 1$.

Estamos dando una definición de suma de infinitos números. La primera condición parece inmediata: los números que sumemos tienen que ser pequeños (cercanos a cero) si no queremos que el resultado final se dispare.

Condición necesaria de convergencia

Proposición 5.4. *Si la serie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *es convergente, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración. Si $\{A_n\}$ es la sucesión de sumas parciales,

$$A_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Restamos y obtenemos que $A_{n+1} - A_n = a_{n+1} \to 0$. □

La serie armónica no es convergente

Ejemplo 5.5. Este resultado nos da una condición necesaria para la convergencia de la serie. Sin embargo, esta condición no es suficiente. El término general de la serie $\sum \frac{1}{n}$, usualmente llamada *serie armónica* converge a cero, pero la serie no es convergente.

a) Vamos a comprobarlo estudiando las sumas parciales hasta un índice que sea potencia de 2.

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\ldots}^{n} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Como consecuencia $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$

b) También podemos usar el Ejercicio 4.11. Recordemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log(n)} = 1$$

y que, por tanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = +\infty.$

c) También podemos utilizar integrales para calcular la suma. Fijado un natural n, consideremos la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, n]$ y consideremos la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ de dicho intervalo. ¿Cuánto valen las sumas superiores e inferiores?

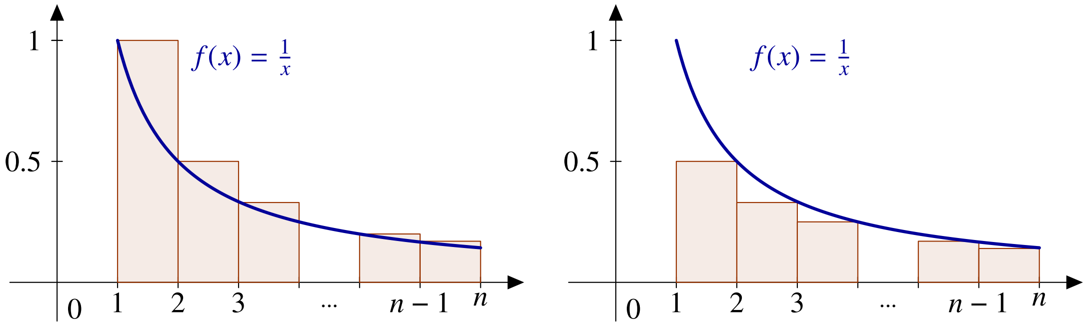

Figura 5.2 Sumas superiores e inferiores de la función $1/x$ en el intervalo $[1, n]$

Sumando las área de los rectángulos de la Figura 5.2, podemos acotar la integral superiormente por

$$\log(n) = \int_1^n \frac{dx}{x} \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \tag{5.2}$$

e inferiormente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le \int_1^n \frac{dx}{x} = \log(n)\,. \tag{5.3}$$

De la desigualdad (5.2), obtenemos que

$$\log(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

y desigualdad (5.3) se deduce que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le 1 + \log(n).$$

En resumen,

$$\log(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le 1 + \log(n)\,.$$

Como la función logaritmo diverge positivamente en $+\infty$, obtenemos que la serie no es convergente, aunque la anterior desigualdad nos da más información sobre el valor de las sumas parciales del que hemos conseguido en los dos apartados anteriores.

Dado que una serie de números reales no es más que una sucesión, las propiedades que ya conocemos de límites de sucesiones siguen siendo ciertas en este ambiente. La siguiente proposición nos dice que el límite de una serie es lineal: parte sumas y saca fuera escalares.

Proposición 5.6. *Sean $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ dos series convergentes. Sean λ y μ números reales. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1}(\lambda a_n + \mu b_n)$ es convergente y*

Linealidad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Trabajando con sucesiones es inmediato comprobar (de hecho, ya lo hemos usado en varias ocasiones) que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si, y sólo si, lo son sus colas $\{a_{n+k}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además, ambas tienen el mismo límite. Si consideramos la serie asociada a cada de una ellas, la convergencia de ambas está también muy relacionada.

Proposición 5.7. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y k un número natural fijo. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente si, y sólo si, lo es la serie $\sum_{n\geq 1} a_{n+k}$. Además, caso de que sean convergentes, se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k},$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

De nuevo obtenemos que la convergencia de una serie depende de las colas de dicha serie aunque la suma total sí depende de que añadamos o no los primeros términos.

5.2 Convergencia absoluta e incondicional

Definición 5.8.

a) Diremos que la serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

b) La serie $\sum a_n$ es *incondicionalmente convergente* si para cualquier aplicación biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum a_{\sigma(n)}$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Convergencia absoluta

Convergencia incondicional

Observación 5.9. La convergencia incondicional de una serie es el análogo a la propiedad conmutativa para una suma infinita. Una serie es incondicionalmente convergente si se puede sumar en cualquier orden y el resultado siempre es el mismo. Este es el motivo de que en algunos textos se hable de series conmutativamente convergentes.

La convergencia absoluta y la convergencia incondicional son condiciones más fuertes que la convergencia de una serie. El siguiente resultado nos dice que están relacionadas.

Teorema de Riemann

Teorema 5.10. *Sea $\sum a_n$ una serie de números reales. La serie converge incondicionalmente si, y sólo si, converge absolutamente.*

En la práctica, es sumamente difícil comprobar la convergencia incondicional de una serie directamente. No es sencillo trabajar con todas las reordenaciones posibles de una sucesión de números reales. Lo que sí haremos es estudiar la convergencia absoluta.

El primer criterio y, posiblemente, el más importante que vamos a utilizar en el estudio de la convergencia de series de números reales es el criterio de comparación. Esencialmente nos dice que si una serie se puede sumar también se puede sumar otra más pequeña y, recíprocamente, si una serie no se puede sumar, otra mayor tampoco se puede.

Criterio de comparación

Teorema 5.11. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales verificando que $|a_n| \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
a) Si $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.
b) Si $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ es divergente.

Si aplicamos el criterio de comparación tomando $b_n = |a_n|$, se obtiene que las series absolutamente convergentes son convergentes, esto es, una de las implicaciones del teorema de Riemann. El recíproco del criterio de comparación no es cierto.

Ejemplo 5.12. La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente pero no absolutamente convergente.

Dado que la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ no es incondicionalmente convergente, si la sumamos en distinto orden nos puede dar un resultado diferente pero ¿cuántos?. La respuesta es que muchos. Más concretamente, la serie se puede reordenar de forma que su suma sea el número real que queramos.

Teorema de Riemann

Teorema 5.13. *Sea $\sum a_n$ una serie convergente pero no absolutamente convergente. Dado un número real x cualquiera, existe una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$.*

5.3 Criterios de convergencia para series de términos no negativos

El primer criterio es una versión del criterio de comparación usando límites.

Criterio de comparación por paso al límite

Proposición 5.14. *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sucesiones de números reales verificando $a_n \geq 0$, y $b_n > 0$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*
a) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ entonces, $\sum a_n$ converge $\iff \sum b_n$ converge.
b) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ entonces, $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge.
c) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ entonces, $\sum a_n$ converge $\implies \sum b_n$ converge.

Ejemplo 5.15. Las series $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{3n^2-n+7}$ tienen el mismo carácter de convergencia. La ventaja del criterio de comparación por paso al límite es que no hace falta saber que una de ellas es mayor que la otra. Es suficiente con que sean "aproximadamente" iguales:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{3n^2-n+7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+7}{n^2} = 3.$$

Por ahora no sabemos si ambas series son convergentes o no (dentro de poco veremos que sí lo son) pero sí podemos aplicarlo a otras series. Por ejemplo, $\sum \frac{1}{2^n-n}$ y $\sum \frac{1}{2^n}$ tiene el mismo carácter. Como sabemos que $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente, también lo es $\sum \frac{1}{2^n-n}$. Observa que el criterio de comparación *no* nos resuelve este mismo problema: $\frac{1}{2^n-n}$ es mayor que $\frac{1}{2^n}$ y, por tanto, el criterio de comparación no da información.

Proposición 5.16. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.* **Criterio de la raíz o de Cauchy**
a) Si $\sqrt[n]{a_n} \leq L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.
b) Si $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 5.17. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*
a) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.
b) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 5.18. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum \left(\frac{n}{7n+3}\right)^{2n+1}$ utilizando el criterio de la raíz. Para ello calculamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{7n+3}\right)^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{7n+3}\right)^{\frac{2n+1}{n}} = \frac{1}{7^2}.$$

Como dicho límite es menor que uno, la serie es convergente.

Para calcular el límite de una raíz n-ésima podemos aplicar el criterio de la raíz (véase Proposición 4.31).

Proposición 5.19. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.* **Criterio del cociente o de D'Alembert**
a) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.
b) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 5.20. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*
a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.
b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 5.21. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum \frac{2n^2}{2^n+3}$ utilizando el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)^2}{2^{n+1}+3}}{\frac{2n^2}{2^n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{2n^2} \frac{2^n+3}{2^{n+1}+3} = \frac{1}{2}.$$

Como el límite es menor que uno la serie es convergente.

Proposición 5.22. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.* **Criterio de Raabe**
a) Si $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq L > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.
b) Si $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 5.23. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*
a) Si $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.
b) Si $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 5.24. Vamos a estudiar la convergencia de la series cuyo término general es

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \frac{1}{(2n+1)\,2^{2n}}.$$

Aplicamos, en primer lugar, el criterio del cociente.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\,\frac{1}{(2n+3)\,2^{2n+2}}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}\,\frac{1}{(2n+1)\,2^{2n}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{4(n+1)(n+1)(2n+3)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6} = 1.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6} \leq 1$$

el criterio del cociente no da información útil. Aplicamos ahora el criterio de Raabe:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{4n^2+10n+6} = \frac{6}{4} > 1,\end{aligned}$$

y, por tanto, el criterio de Raabe nos dice que la serie es convergente.

Criterio de condensación

Proposición 5.25. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números no negativos tal que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente a cero. Entonces se verifica que*

$$\sum a_n \text{ es convergente} \iff \sum 2^n\, a_{2^n} \text{ es convergente}.$$

Serie armónica generalizada

Ejemplo 5.26. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$, con $a\in\mathbb{R}$.

a) Si $a \leq 0$, el término general $\frac{1}{n^a}$ no tiende a cero y, por tanto, la serie no es convergente.
b) Si $a > 0$, el término general es decreciente y converge a cero. Podemos aplicar el criterio de condensación: las series $\sum\frac{1}{n^a}$ y $\sum\frac{2^n}{(2^n)^a}$ tienen el mismo comportamiento. Como

$$\sum\frac{2^n}{(2^n)^a} = \sum\frac{1}{2^{(a-1)n}},$$

aplicamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{(a-1)n}}} = \frac{1}{2^{a-1}} < 1 \iff a > 1.$$

Resumiendo, si $a > 1$ la serie es convergente. Si $a < 1$, la serie no es convergente y si $a = 1$ ya sabíamos que no era convergente.

A esta serie se la suele llamar *serie armónica generalizada de exponente a*.

El ejemplo anterior será clave en muchos ejercicios para poder aplicar el criterio de comparación. Es por esto que lo resaltamos:

Proposición 5.27. $\sum\frac{1}{n^a}$ *es convergente si, y sólo si,* $a > 1$.

Por ejemplo, si comparamos $\frac{1}{n^a}$ con a_n tenemos que estudiar el cociente

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^a}} = n^a a_n \,.$$

El siguiente resultado recoge las diferentes posibilidades que se pueden presentar.

Proposición 5.28. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números no negativos.* **Criterio de Pringsheim**
a) Si existe $a > 1$ tal que la sucesión $\{n^a a_n\}$ está acotada entonces $\sum a_n$ es convergente.
b) Si existe $a \leq 1$ tal que $\{n^a a_n\}$ converge a $L \neq 0$ o es divergente entonces $\sum a_n$ no es convergente.

5.4 Otros criterios

La principal herramienta para estudiar la convergencia de series de términos cualesquiera serán los criterios de Dirichlet y Abel.

Teorema 5.29. *Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales.*
a) Si $\{a_n\}$ es monótona, converge a cero y la serie $\sum b_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n b_n$ converge. **Criterio de Dirichlet**
b) Si $\{a_n\}$ es monótona, acotada y la serie $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n b_n$ es convergente. **Criterio de Abel**

La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente pero sus sumas parciales siempre valen -1 o 0 y, en particular, están acotadas. Tomando $b_n = (-1)^n$ en el criterio de Dirichlet obtenemos lo siguiente.

Proposición 5.30. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales no negativos. Si la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente a cero, entonces la serie alternada $\sum (-1)^n x_n$ es convergente.* **Criterio de Leibniz**

Ejemplo 5.31. La serie alternada $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$, que ya comentamos en el Ejemplo 5.12, es convergente porque $\frac{1}{n}$ es decreciente y convergente a cero.

5.5 Suma de series

Sólo en contadas ocasiones es factible calcular de manera explícita la suma de una serie. La mayoría de las veces serán necesarios medios indirectos como veremos, por ejemplo, en la siguiente sección. La dificultad radica en el cálculo explícito del valor de las sumas parciales. Si sabemos cuánto valen, el problema de estudiar la convergencia de la serie se reduce a un problema de cálculo de límites, cosa normalmente mucho más sencilla.

Observación 5.32. Hasta ahora sólo hemos estudiado la convergencia y no el valor de la suma de la serie. No es lo mismo $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$. ¡Hay un sumando de diferencia!

5.5.1 Series telescópicas

Las series telescópicas son aquellas series $\sum a_n$ cuyo término general se puede escribir de la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$ para alguna sucesión $\{b_n\}$. El cálculo de su suma equivale al cálculo del límite de la sucesión $\{b_n\}$. Para verlo sólo tienes que calcular las sumas parciales:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \cdots + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Resumiendo,

Proposición 5.33. *Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces la serie que tiene como término general $a_n = b_n - b_{n+1}$ es convergente si, y sólo si, $\{b_n\}$ es convergente. En ese caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ejemplo 5.34. Vamos a calcular el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, las sucesión de sumas parciales es

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

con lo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$

5.5.2 Series geométricas

La serie $\sum r^n$ se puede sumar utilizando que conocemos sus sumas parciales, como ya hicimos en el Ejemplo 5.3. Sabemos que

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

y tomando límites cuando n tiende a infinito obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.35. *La serie $\sum r^n$ es convergente si, y sólo si, $|r| < 1$. En ese caso* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

Demostración. Sólo hay que usar la fórmula de la suma de una progresión geométrica que vimos en el Ejemplo 5.3:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \frac{1}{1-r},$$

ya que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$. En cualquier otro caso el término general de la serie no converge a cero y, por tanto, la serie no es convergente. □

Veamos un ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{5^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{4}{1-\frac{1}{5}} = 5\,.$$

Si la serie no comienza en $n = 0$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = [m = n-2] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+2}} = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

5.5.3 Series aritmético-geométricas

Las series aritmétrico-geométricas son series de la forma $\sum p(n)r^n$, donde p es un polinomio. Para calcular su suma, transformamos la serie en otra en la que el grado del polinomio es menor hasta obtener una serie geométrica. Si $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^n = S$, entonces

$$\begin{aligned}(1-r)S &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^{n+1} \\ &= p(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (p(n) - p(n-1))\, r^n.\end{aligned}$$

Observa que $p(n) - p(n-1)$ sigue siendo un polinomio, pero con grado estrictamente menor que el grado de $p(n)$. Repitiendo este proceso las veces necesarias, acabamos obteniendo una serie geométrica. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 5.36. Vamos a calcular la suma de la serie $\sum_{n\geq 0}(n^2-n)r^n$. Si su suma es S, entonces

$$(1-r)S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n^2-n) - ((n-1)^2 - (n-1))\right] r^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2nr^n,$$

o, lo que es lo mismo,

$$S = \frac{2}{1-r}\sum_{n=1}^{\infty} nr^n.$$

Repetimos el proceso anterior, si $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n$, entonces

$$(1-r)S_1 = r + \sum_{n=2}^{\infty}[n-(n-1)]r^n = r + \frac{1}{1-r} - 1 - r = \frac{r}{1-r}.$$

Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n)r^n = \frac{2}{1-r}\cdot\frac{r}{1-r} = \frac{2r}{(1-r)^2}.$$

5.5.4 Cocientes de polinomios

En algunos casos se pueden sumar descomponiendo el término general en fracciones simples. También pueden ser de utilidad algunas identidades como, por ejemplo, la que define la constante de Euler.

La constante de Euler-Mascheroni

En el Ejercicio 7.31 vimos que

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

se cumple para cualquier x positivo. En particular, para $x = \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$\log(1+n) - \log(n) = \log\left(\frac{1+n}{n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

y que

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

.

Si definimos $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ y $a_{2n} = \log(n+1) - \log(n)$, las desigualdades anteriores se escriben como

$$a_{2n+1} < a_{2n} < a_{2n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

o, lo que es lo mismo, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. El criterio de Leibniz nos da que la serie $\sum(-1)^{n+1}a_n$ es convergente, o sea que existe el límite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} -a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n &= \lim_{n\to\infty} 1 - (\cancel{\log(2)} - \log(1)) \\ &\quad + \frac{1}{2} - (\cancel{\log(3)} - \cancel{\log(2)}) + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - (\log(n+1) - \cancel{\log(n)}) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1).\end{aligned}$$

Constante de Euler-Mascheroni

Este límite recibe el nombre de *constante de Euler-Mascheroni* y se denota por γ:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n).$$

5.6 Ejercicios

5.6.1 Convergencia de series numéricas

Ejercicio 5.1. Aplicar el criterio de la raíz para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$

b) $\sum\left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$

c) $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$

d) $\sum \frac{n^n}{e^{(n^2+1)}}$

e) $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

Ejercicio 5.2. Aplicar el criterio del cociente para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n2^n}$

b) $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) $\sum \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$

d) $\sum \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$

e) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

Ejercicio 5.3. Aplicar el criterio de comparación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{\log(n)}{n}$
b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
c) $\sum \frac{1}{2n-1}$
d) $\sum \frac{1}{2^n-n}$
e) $\sum \frac{1}{(2n-1)2n}$
f) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
g) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Ejercicio 5.4. Aplicar el criterio de condensación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n\log(n)}$
b) $\sum \frac{1}{n(\log(n))^2}$
c) $\sum \frac{1}{n(\log(n))\log(\log(n))}$

Ejercicio 5.5. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{2^n}{n}$
b) $\sum \frac{n+1}{2n+1}$
c) $\sum \frac{1}{n^2\log(n)}$
d) $\sum \frac{n^2}{(3n-1)^2}$
e) $\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

Ejercicio 5.6. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{n!}$
b) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
c) $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$
d) $\sum \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$
e) $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$

Ejercicio 5.7. Estudiar la convergencia de las series

a) $\sum \frac{n^3}{e^n}$
b) $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$
c) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
d) $\sum \frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$
e) $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$
f) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}$
g) $\sum \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}$

Ejercicio 5.8. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum(-1)^n \frac{20^n}{n+1}$
b) $\sum \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2$
c) $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$
d) $\sum \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)$
e) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}\log(n)}{n^2+1}$
f) $\sum(-1)^n e^{-n}$

E **Ejercicio 5.9.** Estudia el carácter de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$.
b) $\sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$.

E **Ejercicio 5.10.** Estudiar, según los valores de $a>0$ la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{a^n}{n^a}$
b) $\sum a^n n^a$

5.6.2 Suma de series

Ejercicio 5.11. Sumar, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

Ejercicio 5.12. Sumar, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$

Ejercicio 5.13. Sumar la serie de números reales $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}$

5.6.3 Ejercicios complementarios

5.6.4 Convergencia de series numéricas

Ejercicio 5.1. Discutir en función del parámetro a la convergencia de la serie de números reales

$$\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \log\left(1+\frac{1}{(\log(n))^a}\right)$$

Ejercicio 5.2. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{1}{\log(n)}\right)^{\log(n)}$

b) $\sum \log\left(\frac{1+\tan(\frac{1}{n})}{1-\tan(\frac{1}{n})}\right)$

c) $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{10}}$

d) $\sum \frac{1}{n\sqrt[3]{n}-n}$

Ejercicio 5.3. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$

b) $\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$

c) $\sum \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2} n!}{(2n)^n}$

d) $\sum \frac{\log(1+n^2)}{1+n^2}$

e) $\sum \frac{(\log(n+1)-\log(n))^3}{(\log(n))^2}$

Ejercicio 5.4. Estudiar la convergencia de las siguientes series: