

Derivabilidad

7

7.1 Definición. Recta tangente. 107 7.2 Reglas de derivación 109 7.3 Teorema del valor medio 111 7.4 Consecuencias del teorema del valor medio 113 7.5 Derivadas de orden superior 115 7.6 Concavidad y convexidad 116 7.7 Algunas aplicaciones de la derivada 117 7.8 Derivación numérica 120 7.9 Ejercicios 121 7.10 Ejercicios complementarios 125 7.11 Otros ejercicios 129

7.1 Definición. Recta tangente.

Definición 7.1. Una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *derivable* en $a \in A \cap A'$ si existe

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A dicho límite lo notaremos $f'(a)$. A la función $a \mapsto f'(a)$ la llamaremos *función derivada* de f y la notaremos f' .

Observación 7.2.

a) El cociente incremental $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y la derivada se pueden ver también como un límite en cero haciendo un cambio de variable:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

b) La restricción de que a sea un punto de acumulación del dominio de la función ($a \in A \cap A'$) es obligatoria si queremos que el cociente incremental tenga sentido y no estemos dividiendo por cero. Recuerda que en el caso de que el conjunto A sea un intervalo se cumple que $A' = \overline{A}$ con lo que podemos estudiar la derivabilidad en cualquier punto del intervalo.

Ejemplo 7.3. La función $f(x) = x^2$ es derivable. Su derivada en un punto a es, según la definición,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = 2a.$$

Obtenemos así la fórmula usual de la derivada de $f(x) = x^2$, esto es, que $f'(x) = 2x$.

La condición de ser derivable es más fuerte que la de ser continua.

Proposición 7.4 (Condición necesaria de derivabilidad). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$, entonces f es continua en a .

El recíproco no es cierto. Hay funciones continuas que no son derivables.

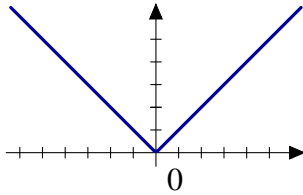


Figura 7.1 La función valor absoluto no es derivable en el origen

Ejemplo 7.5. La función valor absoluto, $f(x) = |x|$, es continua pero no es derivable en el origen: no coinciden los límites laterales en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Por tanto, la función valor absoluto no es derivable en el origen. En el resto de puntos de la recta real, la función es o bien la identidad o bien la identidad cambiada de signo. En ambos casos, la función es derivable. ¿Por qué? Fíjate que la definición de derivabilidad está hecha usando límites y que, en particular, cuestiones como su carácter local siguen siendo válidas.

7.1.1 Interpretación geométrica de la derivada

La recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$ es una recta secante a la gráfica de la función f . Puedes ver en la Figura 7.2 que el cociente incremental es

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \tan(\theta).$$

Cuando hacemos tender x a a , dicha recta se convierte en tangente a la función f en el punto $(a, f(a))$. Si el valor $\tan(\theta)$ nos indica la pendiente de la recta secante, la derivada, $f'(a)$, nos indica la pendiente de la *recta tangente* que tiene como fórmula

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

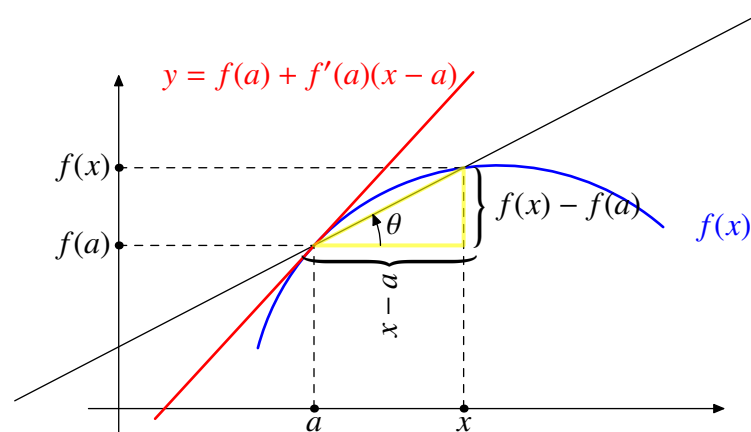


Figura 7.2 Recta tangente

7.1.2 Derivadas laterales

Puesto que la derivada está definida como un límite y sabemos la relación entre límites laterales y límite, podemos hablar de *derivadas laterales*. Aunque tiene sentido para un conjunto cualquiera, vamos a enunciarlo únicamente para funciones definidas en un intervalo I .

Definición 7.6. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, de forma que $\{x \in I : x < a\} \neq \emptyset$. Se dice que f es derivable por la izquierda en el punto a si existe

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^-)$$

Este límite se llama *derivada lateral izquierda* de f en el punto a .

Si ahora el punto a es tal que $\{x \in I : x > a\} \neq \emptyset$, se dice que f es derivable por la derecha en el punto a si existe

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$$

Este límite se llama *derivada lateral derecha* de f en el punto a .

Observación 7.7. La relación que hay entre la derivabilidad y la derivabilidad lateral para funciones definidas en un intervalo I queda reflejada en las siguientes afirmaciones:

- Si $a = \min(I)$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la derecha en a y además, $f'(a) = f'(a^+)$.
- Si $a = \max(I)$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la izquierda en a y además, $f'(a) = f'(a^-)$.
- Si $a \in \overset{\circ}{I}$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la izquierda y por la derecha en a y ambas derivadas coinciden. Además, en ese caso, $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$.

Resumiendo, para que una función sea derivable deben de existir todas las derivadas laterales que tengan sentido y coincidir.

7.2 Reglas de derivación

Proposición 7.8 (Álgebra de derivadas). Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en $a \in A$. Entonces

- La suma de funciones derivables es una función derivable y su derivada es la suma de las derivadas:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

- El producto de funciones derivables es una función derivable y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

c) Si $g(a) \neq 0$, la función $\frac{f}{g}$ es derivable y su derivada es

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Usando el primer apartado podemos calcular la derivada de cualquier polinomio, siempre que sepamos la derivada de x^n . Comencemos por eso.

Ejemplo 7.9 (Derivada de una potencia). Es inmediato comprobar que la función identidad $f(x) = x$ es derivable y que $f'(x) = 1$. Usando la segunda propiedad se demuestra por inducción que cualquier potencia también lo es y que la derivada de la función $g(x) = x^n$ es $g'(x) = nx^{n-1}$, para cualquier natural n , aunque dicha derivada también se puede calcular directamente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} h + \dots = na^{n-1},$$

usando la fórmula del binomio de Newton.

Con esto tenemos resuelta la derivada de una función racional. Veamos otro tipo de funciones. Por ejemplo, ¿cuál es la derivada de la función exponencial?

Ejemplo 7.10 (Derivada de la función exponencial). Calculamos la derivada de la función exponencial. Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^a (e^{x-a} - 1)}{x - a}.$$

Usando la regla que tenemos para resolver indeterminaciones del tipo “ 1^∞ ” (Proposición 6.15),

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} (e^{x-a} - 1) = L \iff \lim_{x \rightarrow a} (e^{x-a})^{1/(x-a)} = e = e^L.$$

Por tanto $L = 1$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^a (e^{x-a} - 1)}{x - a} = e^a$$

o, lo que es lo mismo, la derivada de la función exponencial es ella misma.

No parece fácil calcular la derivada de la función logaritmo únicamente con la definición, pero el siguiente resultado nos dice cómo calcular la derivada de la inversa de cualquier función.

Proposición 7.11 (Regla de la cadena). Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f derivable en $a \in A$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es también derivable en a con derivada

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

Teorema 7.12 (de derivación de la función inversa). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva con inversa $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $a \in A$ y supongamos que f es derivable en a . Entonces son equivalentes:

a) $f'(a) \neq 0$ y f^{-1} es continua en $f(a)$.

b) f^{-1} es derivable en $f(a)$.

En caso de que se cumplan ambas afirmaciones se tiene que $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Ejemplo 7.13. Usemos que la derivada de la función exponencial $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$ para calcular la derivada de su inversa, f^{-1} , la función logaritmo. Aplicando el teorema de derivación de la función inversa,

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Si $y = f(x)$, tenemos que $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y}$.

7.3 Teorema del valor medio

Definición 7.14. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un *máximo relativo* en $a \in A$ si existe un entorno de a , $]a - r, a + r[\subset A$, donde se cumple que

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in]a - r, a + r[.$$

Si se cumple que $f(x) \geq f(a)$, diremos que la función tiene un *mínimo relativo* en a . En general, nos referiremos a cualquiera de las dos situaciones diciendo que f tiene un *extremo relativo* en a .

Observación 7.15. En el caso particular de funciones definidas en intervalos, los extremos relativos sólo se pueden alcanzar en puntos del interior del intervalo, nunca en los extremos.

Al igual que la monotonía, la noción de extremo relativo no tiene nada que ver la continuidad o derivabilidad de la función en un principio. Sólo depende del valor de la función en un punto y en los puntos cercanos.

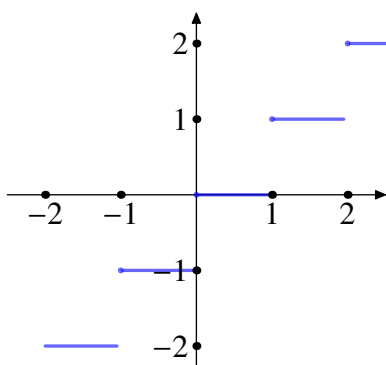


Figura 7.3 Función parte entera

Ejemplo 7.16. La *parte entera* de un número real x es el único número entero $E(x)$ que verifica que $E(x) \leq x < E(x) + 1$. La gráfica de dicha función la puedes ver en la Figura 7.3.

¿Tiene máximo o mínimos relativos? Si lo piensas un poco, descubrirás que la función alcanza un máximo relativo en *todos* los puntos y un mínimo relativo en cualquier punto que no sea entero.

En efecto, alrededor de un número no entero la función es constante y, por tanto, tiene un máximo y un mínimo relativo. En cambio, si z es un número entero, se tiene que $f(z) \leq f(x)$ para cualquier $x \in]z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}[$.

En el caso de funciones derivables la búsqueda de extremos relativos es un poco más sencilla. El siguiente resultado nos dice que sólo tendremos que buscar puntos que anulen la derivada.

Proposición 7.17. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$. Si f tiene un extremo relativo en a , entonces $f'(a) = 0$.

Usualmente llamaremos *puntos críticos* a aquellos en los que se anula la derivada.

Teorema 7.18 (de Rolle). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y verificando que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

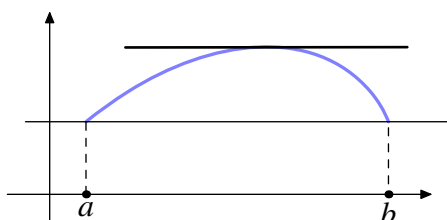


Figura 7.4 Teorema de Rolle

Demostración. Usando la propiedad de compacidad, la función alcanza su máximo y su mínimo absolutos en $[a, b]$. Sean $\alpha, \beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = \max(f)$ y $f(\beta) = \min(f)$.

- Si $\alpha \in]a, b[$, α es un máximo relativo y, por tanto, $f'(\alpha) = 0$.
- Si $\beta \in]a, b[$, β es un mínimo relativo y, por tanto, $f'(\beta) = 0$.
- Si $\alpha, \beta \in \{a, b\}$, entonces f es constante y, por tanto $f'(x) = 0$ en todo el intervalo. \square

Teorema 7.19 (del valor medio). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Demostración. La función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = (f(b) - f(a))x - (b - a)f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle. Por tanto existe $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$ como queríamos. \square

7.4 Consecuencias del teorema del valor medio

7.4.1 Derivadas y monotonía

Proposición 7.20. Sea I un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable.

- f es creciente si y sólo si $f'(x) \geq 0$ para cualquier $x \in I$.
- f es decreciente si y sólo si $f'(x) \leq 0$ para cualquier $x \in I$.
- f es constante si y sólo si $f'(x) = 0$ para cualquier $x \in I$.
- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente.

Teorema 7.21 (del valor intermedio para la derivada). Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable. Entonces $f'(I)$ es un intervalo.

Observación 7.22. El teorema del valor intermedio para la derivada no es una consecuencia del teorema del valor intermedio. Sería necesario que la función fuera de clase C^1 para garantizarnos la continuidad de la derivada. Sin embargo, se pueden encontrar funciones derivables cuya derivada no es una función continua (véase el Ejemplo 7.28).

La primera aplicación del teorema del valor intermedio para la derivada es que el estudio de la monotonía se simplifica sobremanera. Una vez que sabemos que la derivada no se anula (en un intervalo), basta evaluar en un punto arbitrario para saber su signo.

Ejemplo 7.23. Estudiemos la monotonía de la función $f(x) = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{1+x}$ para $x > 0$. Para ello, veamos cuándo se anula la derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0 \iff \sqrt{x} = \sqrt{1+x} \iff x = 1+x$$

Por tanto, f' no se anula nunca. El teorema del valor intermedio para las derivadas nos asegura que f es estrictamente monótona en \mathbb{R}^+ . En efecto, si la derivada cambiase de signo, tendría que anularse, cosa que no ocurre.

Una vez que sabemos que f' tiene el mismo signo en todo \mathbb{R}^+ , podemos averiguar dicho signo evaluando en cualquier punto. Por ejemplo $f'(1) > 0$, con lo que f es estrictamente creciente.

Lo que hemos visto en el ejemplo anterior, lo podemos repetir con cualquier función cuya derivada no se anule.

Corolario 7.24. Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Entonces f es estrictamente monótona.

Teorema 7.25 (de la función inversa). Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es estrictamente monótona, f^{-1} es derivable y $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

7.4.2 Reglas de L'Hôpital

Proposición 7.26 (1ª regla de L'Hôpital). *Sea I un intervalo, $a \in I$, $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Entonces, si*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, +\infty, -\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L, +\infty, -\infty.$$

Podemos aplicar este resultado al estudio de la derivabilidad de una función continua. Aplicando la primera regla de L'Hôpital al límite de la definición de derivada se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 7.27 (Condición suficiente de derivabilidad). *Sea I un intervalo, $a \in I$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $I \setminus \{a\}$.*

a) *Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L$, entonces f es derivable en a y $f'(a) = L$.*

b) *Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty$, entonces f no es derivable en a .*

Ejemplo 7.28. Estudiemos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función es continua y derivable en \mathbb{R}^* . No es difícil comprobar que f es continua en 0. Usando que el producto de una función acotada por otra que tiende a cero es cero, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Sabemos que $f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$. Usando que la función coseno no tiene límite en $+\infty$ (recuerda que sabemos por el Ejemplo 6.12 que ninguna función periódica no trivial tiene límite en infinito), concluimos que no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

Para estudiar la derivabilidad en el origen nos queda únicamente la definición

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Por tanto, f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

La función f es un ejemplo de una función derivable pero cuya derivada no es una función continua y, al mismo tiempo, un ejemplo de que la regla de L'Hôpital no es una equivalencia.

Proposición 7.29 (2ª regla de L'Hôpital). *Sea I un intervalo, $a \in I$, $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$. Entonces, si*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

7.5 Derivadas de orden superior

Al igual que podemos estudiar la derivabilidad de una función, podemos repetir este proceso y estudiar si la derivada es una función derivable. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable, notaremos f' a la primera derivada, f'' a la segunda derivada y $f^{(n)}$ a la derivada de orden n .

Definición 7.30. Sea $A \subset \mathbb{R}$, diremos que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es de *clase* C^1 si es derivable y f' es una función continua.

Si n es un número natural cualquiera, diremos que f es de *clase* C^n si f es n veces derivable y la derivada n -ésima $f^{(n)}$ es continua.

Por último, si una función admite derivadas de cualquier orden diremos que es de *clase* C^∞ .

Usaremos la siguiente notación

$$C^1(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : \text{existe } f' \text{ y es continua}\},$$

$$C^2(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : \text{existe } f'' \text{ y es continua}\} \dots$$

En general,

$$C^n(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : \text{existe } f^{(n)} \text{ y es continua}\}, \text{ y}$$

$$C^\infty(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : \text{existe } f^{(n)} \text{ para todo } n \text{ natural}\}.$$

Se tiene la siguiente cadena de inclusiones:

$$C^\infty(A) \subsetneq \dots \subsetneq C^{n+1}(A) \subsetneq C^n(A) \subsetneq \dots \subsetneq C^2(A) \subsetneq C^1(A) \subsetneq C(A),$$

donde $C(A)$ denota al conjunto de las funciones continuas en A . Para comprobar que las inclusiones son estrictas, tenemos que encontrar funciones de clase n que no sean de clase $n + 1$. ¿Cómo buscamos una función con estas propiedades? La respuesta es sencilla: consideremos la función valor absoluto (o cualquiera otra con un pico) y, aunque todavía no hemos hablado de ello, calculemos una primitiva. Dicha primitiva se puede derivar una vez (obtenemos la función valor absoluto) pero no se puede volver a derivar. Si queremos que se pueda derivar más veces sólo tenemos que integrar más veces. Esto es lo que hacemos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7.31. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} (x - a)^{n+1}, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$

es de clase C^n pero no de clase C^{n+1} . No es difícil comprobar que la derivada de orden $n + 1$ no es continua en a :

$$f'(x) = \begin{cases} (n + 1)(x - a)^n, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} (n+1)n(x-a)^{n-1}, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$

y, sucesivamente,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (n+1)!(x-a), & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Esta función *no* es derivable en $x = a$ porque las derivadas laterales existen y no coinciden.

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} (n+1)!, & \text{si } x > a, \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Obsérvese que la función f no es de clase $n+1$ porque no existe la derivada no porque no sea continua. En este sentido, el Ejemplo 7.28 es “mejor”: la función era derivable pero la derivada no era continua.

Proposición 7.32. Sea I un intervalo, $a \in I$ y n , un número natural mayor o igual que 2. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase n verificando

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0.$$

a) Si n es impar, f no tiene un extremo relativo en a .

b) Si n es par:

i) si $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a ,

ii) si $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a .

Ejemplo 7.33. La función $f(x) = x^4 \left(2 + \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ tiene un mínimo absoluto en el origen pero no se puede encontrar un intervalo centrado en 0 dónde la derivada tenga un único cambio de signo.

7.6 Concavidad y convexidad

Definición 7.34. Sea I un intervalo de \mathbb{R} . Diremos que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es *convexa* si verifica que

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

para cualesquiera $x, y \in I$.

Diremos que la función es *cóncava* si se verifica la desigualdad opuesta, esto es,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Las definiciones de concavidad y convexidad son completamente independientes de que la función sea o no continua, derivable o cualquier otra condición de regularidad. Dicho esto, como ocurre con la monotonía, la derivada es una gran herramienta que nos va a permitir simplificar el estudio de la concavidad y convexidad.

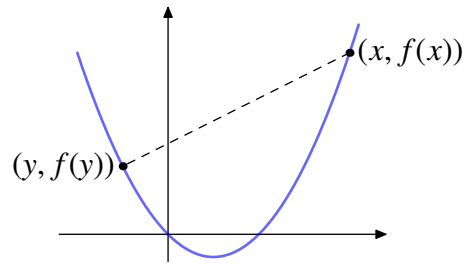


Figura 7.5 Función convexa

Observación 7.35.

a) La convexidad (análogamente la concavidad) tiene una clara interpretación geométrica. Debe verificarse que el segmento que une los puntos $(x, f(x))$, $(y, f(y))$ quede por encima de la gráfica de la función. Recuerda que dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$, el segmento que los une es el conjunto

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\} .$$

b) No está de más recalcar que f es convexa si, y sólo si, $-f$ es cóncava.

Proposición 7.36. Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable. Entonces

- a) Si $f''(x) > 0$ para cualquier $x \in I$, entonces f convexa.
- b) Si $f''(x) < 0$ para cualquier $x \in I$, entonces f cóncava.

Definición 7.37. Diremos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un *punto de inflexión* en $a \in I$ si en dicho punto la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

7.7 Algunas aplicaciones de la derivada

Ejemplos de máximos, mínimos, número de soluciones, desigualdades, estudio de una función, etc.

Imagen de una función

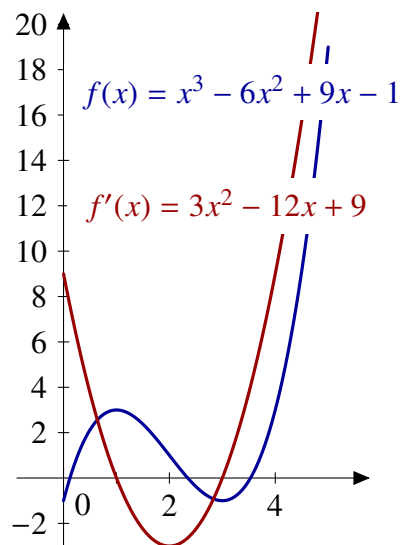
El teorema del valor intermedio junto con la monotonía permiten calcular la imagen de una función. Más concretamente, se cumple que

- a) si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente entonces $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, y
- b) si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente entonces $f(]a, b[) =]\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$.

Resultados similares se tienen para funciones decrecientes. Observa que necesitamos tres datos de la función para poder aplicarlos: continuidad, monotonía y que el dominio sea un intervalo. Observa que, hasta este momento, no ha aparecido la palabra derivada. Su papel es facilitarnos el estudio de la monotonía. Nada más.

Ejemplo 7.38. Veamos un ejemplo: vamos a calcular la imagen de la función $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. En este caso, la función es derivable en todo su dominio, es un polinomio. ¿Cuáles son sus puntos críticos?

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x = 1, 3.$$



Por tanto f es estrictamente monótona en $[0, 1]$, en $[1, 3]$ y en $[3, 5]$. Podemos evaluar la derivada en un punto de cada uno de dichos intervalos para averiguar el carácter de la monotonía:

intervalo	x	signo de $f'(x)$	monotonía de f
$[0, 1]$	0	+	est. creciente
$[1, 3]$	2	-	est. decreciente
$[3, 5]$	4	+	est. creciente

Con estos datos,

$$\begin{aligned} f([0, 5]) &= f([0, 1]) \cup f([1, 3]) \cup f([3, 5]) \\ &= [f(0), f(1)] \cup [f(3), f(1)] \cup [f(3), f(5)] \\ &= [-1, 3] \cup [-1, 3] \cup [-1, 19] = [-1, 19]. \end{aligned}$$

En particular, la función f tiene máximo y mínimo absolutos y ya sabemos su valor: -1 y 19 . También sabemos dónde se alcanzan: el mínimo en 0 y en 3 y el máximo en 5 . Si en lugar del intervalo $[0, 5]$, hubiésemos considerado la función f definida en todo \mathbb{R} no sería necesario estudiar la monotonía. Piénsalo un momento. Se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = -\infty \text{ y que } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = +\infty.$$

Esto quiere decir que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 7.39. ¿Cuál es la imagen de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \arctan(x^9 - 2x^4 + \sen^3(2x - 3))?$$

Un vistazo a la derivada y te darás cuenta de que no parece fácil decidir la monotonía de la función. De nuevo, observa que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 - 2x^4 + \operatorname{sen}^3(2x - 3) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \text{ y que}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 - 2x^4 + \operatorname{sen}^3(2x - 3) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, $f(\mathbb{R}) \supset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. ¿Podría ser la imagen un conjunto mayor? En este caso no, ya que la función arcotangente no toma nunca valores fuera de dicho intervalo. En consecuencia $f(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Extremos absolutos

Acabamos de ver cómo el estudio de la imagen de una función nos da automáticamente, si existen, los extremos absolutos. En el caso de que tengamos garantizado la existencia de dichos extremos *antes* de estudiar monotonía, es posible ahorrar algunos cálculos. Por ejemplo, la función del Ejemplo 7.38 tiene máximo y mínimo por la propiedad de compacidad: es una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Eso quiere decir que los extremos absolutos se tienen que alcanzar en uno de los siguientes puntos:

- puntos críticos,
- extremos del intervalo, o
- puntos donde la función no sea continua o no sea derivable.

En este caso, los extremos de la función $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ tienen que estar entre los siguientes: 0, 1, 3 y 5. Hemos reducido el problema de averiguar el valor máximo o mínimo en todo un intervalo a averiguar el máximo o el mínimo de cuatro números. Sólo hace falta echar un vistazo para encontrarlos:

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 3, \quad f(3) = -1, \quad f(5) = 24.$$

Por tanto, el máximo absoluto se alcanza en 5 y el mínimo en 0 y en 1.

Desigualdades y ecuaciones

La demostración de una desigualdad o el estudio de el número de soluciones de una ecuación son sólo dos ejemplos que podemos resolver estudiando las funciones adecuadas. Por ejemplo, la validez de la desigualdad

$$\operatorname{sen}(x) < x, \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

la podemos ver de varias formas: pasamos restando o dividiendo y comprobamos que

- la imagen de la función $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ con $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ está contenida en \mathbb{R}^+ , o bien,
- la imagen de la función $g(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ con $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ está contenida en $]0, 1[$.

Dependiendo del tipo de funciones involucradas en la desigualdad, será más conveniente utilizar uno u otro método.

Calculemos cuál es la imagen de $f(x) = x - \text{sen}(x)$ en el intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$. Como $f'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ en dicho intervalo, f es estrictamente creciente y, en consecuencia,

$$f\left(]0, \frac{\pi}{2}[\right) = \left] \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \right[= \left] 0, \frac{\pi}{2} - 1 \right[.$$

También podemos utilizar la monotonía para contar el número de soluciones de una ecuación. Para ello nos aprovecharemos de que una función continua y estrictamente monótona en un intervalo se anula (una única vez) si, y sólo si, cambia de signo en los extremos de dicho intervalo. Más concretamente,

sea $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente. Se cumple que

- a) si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ o $\lim_{x \rightarrow b} f(x) < 0$, f no se anula en $]a, b[$, y
- b) si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0$ y $\lim_{x \rightarrow b} f(x) > 0$, entonces f se anula *una única vez* en $]a, b[$.

7.8 Derivación numérica

A veces ocurre que calcular la derivada de una función f en un punto a del interior de dominio no es fácil, ya sea por la complejidad de la función dada, ya sea porque sólo dispongamos de una tabla de valores de f . En esta sección vamos a establecer métodos para calcular $f'(a)$. No es que vayamos a calcular la función derivada primera de f , sino que vamos a aproximar los valores de ésta en un punto dado a .

Hemos visto en este capítulo que la derivada de una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $a \in I$ es

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h) - f(a)}{h}.$$

Si consideramos un valor de h suficientemente pequeño, podemos dar una primera aproximación

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

7.8.1 Fórmulas de derivación numérica

En las fórmulas que vamos a estudiar en este apartado aparecen dos valores: el que aproxima $f'(a)$ y el error cometido. Aunque este último no se calcula explícitamente, sí se puede dar una acotación del mismo. Notemos que dicho error se obtiene gracias al desarrollo de Taylor de f centrado en a .

En lo que sigue, el parámetro h se suele tomar positivo y “pequeño”.

Fórmula de dos puntos

$$f'(a) = \frac{1}{h} (f(a) - f(a - h)) + \frac{h}{2} f''(\psi), \quad \psi \in]a - h, a[$$

Esta fórmula se llama *regresiva* porque utiliza información de f en a y en $a - h$.

$$f'(a) = \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) - \frac{h}{2} f''(\psi), \quad \psi \in]a, a+h[$$

Esta fórmula se llama *progresiva* porque utiliza información de f en a y en $a + h$.

El primer sumando de ambas fórmulas nos da una aproximación de $f'(a)$, y el segundo nos indica el error cometido.

Fórmula de tres puntos

$$f'(a) = \frac{1}{2h} (f(a+h) - f(a-h)) - \frac{h^2}{6} f'''(\psi), \quad \psi \in]a-h, a+h[$$

Esta fórmula se llama *central* porque utiliza información de f en $a - h$ y en $a + h$.

$$f'(a) = \frac{1}{2h} (-3f(a) + 4f(a+h) - f(a+2h)) + \frac{h^2}{3} f'''(\psi), \quad \psi \in]a, a+2h[$$

Esta fórmula es progresiva.

Fórmula de cinco puntos

$$f'(a) = \frac{1}{12h} (f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)) - \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\psi), \quad \psi \in]a-2h, a+2h[$$

Ésta es central.

$$f'(a) = \frac{1}{12h} (-25f(a) + 48f(a+h) - 36f(a+2h) + 16f(a+3h) - 3f(a+4h)) + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\psi),$$

con $\psi \in]a, a+4h[$. Esta es progresiva.

Unas observaciones sobre el término del error:

- Cuanto mayor es el exponente de h en la fórmula del error, mejor es la aproximación.
- Cuanto menor es la constante que aparece en la fórmula del error, mejor es la aproximación.
- Cuidado con los errores de redondeo cuando trabajemos con h excesivamente pequeño. Puede ocurrir que por la aritmética del ordenador, la aproximación numérica sea peor cuanto más pequeño sea h .

Veremos ejemplos más detallados en clase de prácticas.

7.9 Ejercicios

7.9.1 Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 7.1. Calcula la tangente de las siguientes curvas en los puntos dados:

a) $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el origen

c) $y = x^2 + 1$ en $(3, 10)$

b) $y = \cos(x)$ en $(\frac{\pi}{2}, 0)$

d) $y = |x|$ en $(1, 1)$

Ejercicio 7.2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \sin(x + 3)$

d) $y = \sec(x)$

f) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

b) $y = \cos^2(x)$

e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

c) $y = \frac{1}{\cos(x)}$

Ejercicio 7.3. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.

d) $f(x) = x^x$.

b) $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$.

e) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$.

c) $f(x) = x^4 e^x \log(x)$.

f) $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$.

Ejercicio 7.4. Comprueba que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0, \\ 3x^2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

es continua pero no es derivable en el origen.

Ejercicio 7.5. Calcula los puntos donde la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$ es paralela al eje OX .

Ejercicio 7.6. Sea $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\log(1 - \sin(x)) - 2 \log(\cos(x))}{\sin(x)},$$

si $x \neq 0$ y $f(0) = a$. Estudia para qué valor de a la función f es continua en cero.

E **Ejercicio 7.7.** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right), & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{\log(x)}{x}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Calcula la imagen de la función.

7.9.2 Teorema del valor medio

Ejercicio 7.8. Prueba que $\arcsen(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

E **Ejercicio 7.9.** Demuestra que

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$$

para cualquier x positivo.

E **Ejercicio 7.10.** Calcula el número de soluciones de la ecuación $x + e^{-x} = 2$.

Ejercicio 7.11. Calcula el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

E **Ejercicio 7.12.** Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x).$$

Calcula su imagen.

Ejercicio 7.13. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- Encuentra las condiciones que deben verificar los parámetros para que f alcance un máximo y un mínimo relativo.
- Si se verifica el enunciado anterior, demuestra que en el punto medio del segmento que une los puntos donde se alcanzan el máximo y el mínimo relativo se alcanza un punto de inflexión.

E **Ejercicio 7.14.** Calcula la imagen de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}(x^2 - 3)$.

Ejercicio 7.15. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

- Estudia la continuidad de f y los límites en $-\infty$ y $+\infty$.
- Calcula la imagen de f .

Ejercicio 7.16. Calcula la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

Ejercicio 7.17. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Demuestra que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real única.

7.9.3 Reglas de L'Hôpital

Ejercicio 7.18. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{2x - \pi}{\cos(x)}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Ejercicio 7.19. Calcula los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + 3x - 1}{2x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos(x)}{x \operatorname{sen}(2x)}$$

Ejercicio 7.20. Calcula los límites de las siguientes funciones en el punto indicado:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x) + 2 \operatorname{sen}(3x))^{\frac{1}{x}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x - \cos(x)}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \operatorname{sen}(4x)}{x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

Ejercicio 7.21. Estudia el comportamiento de la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

$$a) A =]2, +\infty[, f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}, \alpha = 2.$$

$$b) A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, f(x) = \frac{1}{\log(x)} - \frac{1}{x-1}, \alpha = 1.$$

$$c) A =]1, +\infty[, f(x) = \frac{x^x - x}{1 - x - \log(x)}, \alpha = 1.$$

Ejercicio 7.22. Estudia el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$a) f(x) = \frac{\log(2 + 3e^x)}{\sqrt{2 + 3x^2}}$$

$$b) g(x) = (a^x + x)^{1/x}, \text{ donde } a \in \mathbb{R}^+.$$

Ejercicio 7.23. Estudia el comportamiento en el punto cero de la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

$$a) A = \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sqrt{x}}$$

$$c) A =]0, \frac{\pi}{2}[, f(x) = \left(\cos(x) + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$b) A =]0, \frac{\pi}{2}[, f(x) = (\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^{1/x}$$

Ejercicio 7.24. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin(x) - 3x \cos(x)}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}}$.

7.9.4 Optimización

Ejercicio 7.25. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones indicando los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

$$a) y = 6 - 2x - x^2$$

$$b) y = 3x^4 - 4x^3$$

$$c) y = (x - 1)^3$$

Ejercicio 7.26. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Ejercicio 7.27. Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio r .

E **Ejercicio 7.28.** Calcula las dimensiones del trapecio con mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio 1.

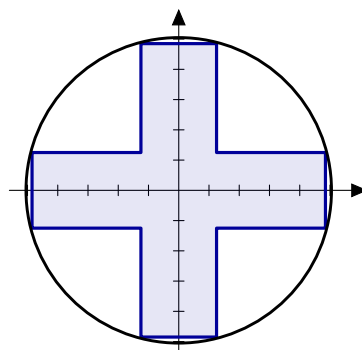
E **Ejercicio 7.29.** ¿Cuál es la longitud mínima del segmento que tiene un extremo en el eje x , otro extremo en el eje y , y pasa por el punto $(8, 1)$?

Ejercicio 7.30. Demuestra que la suma de un número positivo y su recíproco es al menos 2.

E **Ejercicio 7.31.** Calcula las dimensiones de la cruz simétrica respecto de los ejes y con área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 1.

Ejercicio 7.32. Se inscribe un rectángulo en la elipse $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Halla las dimensiones del rectángulo para que

- el área sea máxima,
- el perímetro sea máximo.



E **Ejercicio 7.33.** Calcula el punto (a, b) de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo determinado por la recta tangente a la parábola en dicho punto y los ejes de coordenadas tenga área mínima.

E **Ejercicio 7.34.** A un espejo rectangular de medidas 80x90 cm. se le rompe (accidentalmente) por una esquina un triángulo de lados 10x12cm. Calcula las medidas del espejo de mayor área de forma rectangular que se puede obtener de la pieza restante.

7.10 Ejercicios complementarios

7.10.1 Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 7.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de f y calcular su imagen.

Ejercicio 7.2. Estudiar la continuidad y derivabilidad en cero de la función $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (1 - e^{x^2}) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 7.3. Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x)^{1/x}$ para $x \in \mathbb{R}^+$, $f(0) = e$.

7.10.2 Teorema del valor medio

Ejercicio 7.4. Calcular el número de soluciones de la ecuación $3 \log(x) - x = 0$.

Ejercicio 7.5. Determinar el número de raíces reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = m$ según el valor de m .

Ⓔ **Ejercicio 7.6.** Demostrar que, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la ecuación $x = -a + \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{\sqrt{2}}\right)$ tiene una única solución.

Ⓔ **Ejercicio 7.7.** Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x^2) + 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ \pi, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Estudia su continuidad, derivabilidad y calcula su imagen.

Ejercicio 7.8. Probar que $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

7.10.3 Reglas de L'Hôpital

Ejercicio 7.9. Calcula el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Ejercicio 7.10. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen}(x) + e^{-x})^{\frac{1}{x^2}}$.

Ejercicio 7.11. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x(x^{1/x}-1)}{\log(x)}$.

Ejercicio 7.12. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a + \operatorname{sen}(x)}{a - \operatorname{sen}(x)} \right)^{1/x}$$

con $a > 0$.

Ejercicio 7.13. Calcula el límite el punto indicado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2(2x) \cos(\sin(x))}$$

Ejercicio 7.14. Estudiar el comportamiento en el punto cero de la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

- a) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = (1 - \tan(x))x^{\frac{1}{2}}$,
 b) $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^{\sin(x)}$,
 c) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \frac{x - \arctan(x)}{\sin^3(x)}$.

Ejercicio 7.15. Calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)^{1/x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^{2x} + \sin(x))}{\sqrt{3x^2 + 1}}$.
 c) $\lim_{x \rightarrow 1} (a^{x-1} - x + 1)^{\frac{1}{x-1}}$, ($a > 0$).

7.10.4 Optimización

Ejercicio 7.16. Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos

a)

$$f(x) = \begin{cases} x \log |x|, & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log |x|, & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 7.17. Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \cosh(x) + \cos(x)$.

Ejercicio 7.18. Calcular para qué valores del parámetro m se cumple que la ecuación $20x^5 - x = m$ tiene exactamente dos raíces reales distintas.

Ejercicio 7.19. Calcular $\max \{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

E Ejercicio 7.20.

a) Sean $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}, \quad g(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}.$$

Estudia los extremos, los intervalos de monotonía, los cortes con los ejes y el comportamiento en $+\infty$ y 0 de ambas funciones. Haz un esbozo de sus gráficas.

b) Sea $a > 2$. Se define la sucesión $\{x_n\}$:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + \frac{x_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demuestra que $\{x_n\}$ es monótona y acotada y calcula su límite. (SUGERENCIA: usa las funciones del apartado anterior).

Ejercicio 7.21. Calcular el área máxima de un rectángulo, que tiene dos vértices sobre una circunferencia de radio R y los otros dos sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

Ejercicio 7.22. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

Ejercicio 7.23. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor volumen entre todos aquellos que tienen la superficie lateral total constante.

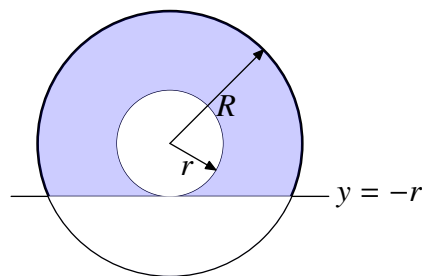
Ejercicio 7.24. Dado un punto $P = (a, b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determinar el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

Ejercicio 7.25. ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que puede hacerse pasar a través de la esquina, en ángulo recto, que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b ?

Ejercicio 7.26. Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Determinense las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

Ejercicio 7.27. Se proyecta un jardín de forma de sector circular de radio R y ángulo central θ . El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de R y θ hacen mínimo el perímetro que bordea el jardín?

- E Ejercicio 7.28.** Con un disco de radio R queremos hacer, recortando un disco concéntrico de radio r , una arandela como la de la figura. Se pide calcular el radio r cumpliendo la condición de que el área de la parte de la arandela que queda por encima de la recta $y = -r$, la zona coloreada en la figura, sea máxima.



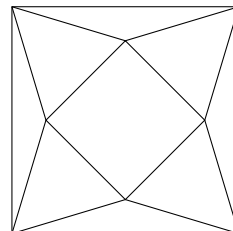
- Ejercicio 7.29.** Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados
- 10 y 10,
 - 12 y 18.

- E Ejercicio 7.30.** Calcula el perímetro máximo que puede tener un rectángulo que tiene dos vértices en el eje de abscisas y los otros dos en la gráfica de la función $f(x) = 4 \text{sen}(x)$, con $x \in [0, \pi]$.

Ejercicio 7.31. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engendrado de esta manera?

- E Ejercicio 7.32.** Calcula el área máxima del rectángulo circunscrito a un rectángulo de lados a y b .

- E Ejercicio 7.33.** De un cuadrado de lado 2 se recortan cuatro triángulos isósceles iguales. ¿Cuál es el volumen máximo de la pirámide que se puede formar? (Indicación: el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base y h su altura).



7.11 Otros ejercicios

7.11.1 Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 7.34. Sea $f : [-1/2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x + e^x)^{1/x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = e^2$. Estudia la continuidad y derivabilidad de f en cero.

7.11.2 Teorema del valor medio

Ejercicio 7.35. Demostrar que la desigualdad $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ se verifica para todo $x > 0$.

Ejercicio 7.36. Demostrar que $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Ⓔ **Ejercicio 7.37.** Calcula el número de soluciones de la ecuación $x^2 = x \sin(x) + \cos(x)$.

Ⓔ **Ejercicio 7.38.** Calcula la imagen de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$ para cualquier x real.

Ejercicio 7.39. Demostrar que $|\sin(ax) - \sin(ay)| \leq |a||x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 7.40. Para $a > 0$ demostrar que $-ae \log(x) \leq x^{-a} \quad \forall x > 0$.

Ejercicio 7.41. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en todo \mathbb{R} verificando

$$f'(x) = g(x), \quad g'(x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1.$$

Probar que f y g son, respectivamente, las funciones seno y coseno.

Ejercicio 7.42. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ verificando $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para todo número real λ existe un punto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$. (Indicación: Considérese la función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{-\lambda x} f(x)$, $\forall x \in [a, b]$).

Ejercicio 7.43. Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en \mathbb{R}^+ . Supongamos que f y f' tienen límite en $+\infty$. Probar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Ejercicio 7.44. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable, verificando que $f(0) = 0$ y que $|f'(x)| \leq |f(x)|$, $\forall x \in [0, 1]$. Probar que $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

Ejercicio 7.45. Demostrar que para $0 < a < b$ se verifica $1 - \frac{a}{b} < \log\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1$.

Ejercicio 7.46. Sea $a > 0$. Probar que $\frac{ea}{x} \leq e^{a/x}$, $\forall x > 0$ y se da la igualdad si, y sólo si, $x = a$.

Ejercicio 7.47. Estudiar continuidad, derivabilidad, crecimiento, extremos relativos y extremos absolutos de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]-1, 1[\\ e^{-(x-1)^{-2}} \cdot e^{-(x+1)^{-2}} & \text{si } x \in]-1, 1[\end{cases}$$

Ejercicio 7.48. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y verificando $f(0) = 0$. Supongamos que la función f' es creciente. Probar que la función $g :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $\forall x \in]0, 1]$ también es creciente.

Ejercicio 7.49. Sea $a > 0$ un número real que verifica $a^{x/a} \geq x \forall x > 0$. Probar que $a = e$.

Ejercicio 7.50. Probar que para $0 < a < 1$ se verifica $(1+x)^a \leq 1+ax, \forall x \geq -1$.

Ejercicio 7.51. Demostrar que $\forall p \geq 1$ se verifica que $\frac{(1+x)^p}{1+x^p} \leq 2^{p-1}$ para todo $x \geq 0$.

Ejercicio 7.52. Sea $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ con $A > 0$. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{f(x+1)} - \sqrt[3]{f(x)}$.

E **Ejercicio 7.53.** Demostrar que, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la ecuación $x = -a + \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{\sqrt{2}}\right)$ tiene una única solución.

E **Ejercicio 7.54.** Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x^2) + 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ \pi, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Estudia su continuidad, derivabilidad y calcula su imagen.

7.11.3 Optimización

Ejercicio 7.55. Calcular $\max\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

E **Ejercicio 7.56.**

a) Sean $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}, \quad g(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}.$$

Estudia los extremos, los intervalos de monotonía, los cortes con los ejes y el comportamiento en $+\infty$ y 0 de ambas funciones. Haz un esbozo de sus gráficas.

b) Sea $a > 2$. Se define la sucesión $\{x_n\}$:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + \frac{x_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demuestra que $\{x_n\}$ es monótona y acotada y calcula su límite. (SUGERENCIA: usa las funciones del apartado anterior).

Ejercicio 7.57. Durante la tos, el diámetro de la tráquea disminuye. La velocidad v del aire en la tráquea durante la tos se relaciona con el radio, r , mediante la ecuación $v = Ar^2(r_0 - r)$, donde A es una constante y r_0 es el radio en estado de relajación. Determínese el radio de la tráquea cuando la velocidad es máxima, así como esta velocidad.

Ejercicio 7.58. Calcular el área máxima de un rectángulo, que tiene dos vértices sobre una circunferencia de radio R y los otros dos sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

Ejercicio 7.59. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de longitud L en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de circunferencia, y el otro en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortar el alambre para que la suma de áreas sea mínima? ¿Y máxima?

Ejercicio 7.60. Se traza la tangente en un punto de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$ de forma que el segmento (de dicha tangente) interceptado por los ejes sea mínimo. Demostrar que la longitud de dicho segmento es 9 unidades.

Ejercicio 7.61. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcular sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

Ejercicio 7.62. Demostrar que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r , el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

Ejercicio 7.63. Atamos el extremo de una cuerda de longitud L a una columna de radio R mediante un nudo corredizo. Calcular la máxima distancia posible del otro extremo al centro de la columna.

Ejercicio 7.64. Un muro de 4 metros de altura está a 3 metros de la fachada de una casa. Hallar la escalera más corta que llegará desde el suelo hasta la casa por encima del muro.

Ejercicio 7.65. Investigar la posibilidad de inscribir un cilindro circular recto de área total máxima (sin las tapas) en un cono circular recto de radio r y altura h .

Ejercicio 7.66. Un cultivador de naranjas estima que, si planta 60 naranjos, obtendrá una cosecha media de 400 naranjas por árbol. Este número bajará 4 unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Halle el número de árboles que hace máxima la cosecha.

Ejercicio 7.67. Una fábrica de plásticos recibe del ayuntamiento de la ciudad un pedido de 8000 tablas flotadoras para el programa de natación del verano. La fábrica posee 10 máquinas, cada una de las cuales produce 50 tablas por hora. El coste de preparar las máquinas para hacer el trabajo es de 800€ por máquina. Una vez que las máquinas están preparadas, la operación es automática y puede ser supervisada por una sola persona, que gana 35€/hora.

- ¿Cuántas máquinas hay que usar para minimizar el coste de producción?
- Si se usa el número óptimo de máquinas, ¿cuánto ganará el supervisor durante el proceso?

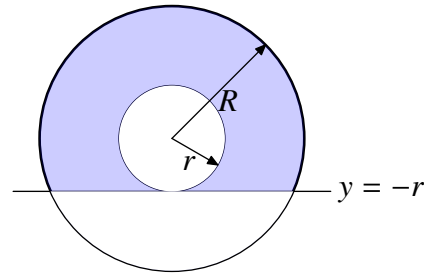
Ejercicio 7.68.

- Calcula los extremos relativos y la imagen de la función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{\log(x)}{x}.$$

- ¿Qué número es mayor e^π o π^e ? ¿Y entre $999999^{1000000}$ y 1000000^{999999} .

- E** **Ejercicio 7.69.** Con un disco de radio R queremos hacer, recortando un disco concéntrico de radio r , una arandela como la de la figura. Se pide calcular el radio r cumpliendo la condición de que el área de la parte de la arandela que queda por encima de la recta $y = -r$, la zona coloreada en la figura, sea máxima.



- Ejercicio 7.70.** Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados
- 10 y 10,
 - 12 y 18.

- E** **Ejercicio 7.71.** Calcula el perímetro máximo que puede tener un rectángulo que tiene dos vértices en el eje de abscisas y los otros dos en la gráfica de la función $f(x) = 4 \operatorname{sen}(x)$, con $x \in [0, \pi]$.