

Límites y continuidad

6

6.1 Límite funcional	79	6.2 Límites infinitos y en el infinito	81	6.3 Cálculo de límites	83
6.4 Continuidad	84	6.5 Teorema del valor intermedio	87	6.6 Monotonía	89
6.7 Ejercicios	90				

La definición usual de función continua involucra el concepto de límite: cuando x “tiende a” a , $f(x)$ “tiende a” $f(a)$. Esto es una definición perfecta de la continuidad siempre que definamos qué es “tender a”.

6.1 Límite funcional

Existen varias formas de definir el límite de una función en un punto. Nosotros vamos a utilizar sucesiones en la definición y así aprovechar todas las propiedades que hemos visto en el tema anterior. La definición de límite de una función con sucesiones va a tener siempre un aspecto similar al siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \left[\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b \right].$$

Para que esto valga como definición de límite, sólo tenemos que garantizarnos que existan sucesiones convergentes al punto donde tomamos límite. Recordemos que A' denota al conjunto de puntos de acumulación del conjunto A . Con todos estos ingredientes ya podemos dar la definición de límite de una función en un punto.

Definición 6.1. Sea A un subconjunto de \mathbb{R} y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f tiene *límite* en $x_0 \in A'$ y que vale L si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A distintos de x_0 que tienda a x_0 se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a L .
Caso de ser así, escribiremos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Observación 6.2. Recuerda que si la función está definida en un intervalo, todos los puntos del correspondiente intervalo cerrado son puntos de acumulación.

En algunas ocasiones puede ser más útil reescribir la definición de la forma siguiente.

Proposición 6.3. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

b) Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $x \in A$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

6.1.1 Álgebra de límites

Dado que la definición de límite se puede ver en términos de sucesiones, podemos aplicar los resultados sobre límites de sucesiones que conocemos. Obtenemos el resultado análogo a la Proposición 4.8 sobre el comportamiento de límite con respecto a sumas, productos y cocientes.

Proposición 6.4. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Entonces,

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right),$$

$$c) \text{ si } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0, \text{ se cumple que } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

De igual manera que ocurre con sucesiones, el límite del producto de una función con límite cero y una función acotada es cero.

Proposición 6.5. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ y g está acotada, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = 0.$$

6.1.2 Límites laterales

Intuitivamente, para calcular $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ tomamos valores cercanos a x_0 , calculamos su imagen por la aplicación f y vemos si se acercan a algún valor. Si nos acercamos a x_0 por valores mayores que x_0 , hablaremos de límite por la derecha. Si nos acercamos por valores menores hablaremos de límite por la izquierda. Formalizemos estos conceptos.

Definición 6.6. Sea A un subconjunto de \mathbb{R} , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A'$.

a) Si x_0 es un punto de acumulación de $A^- = \{x \in A : x < x_0\}$, se define el *límite por la izquierda de f en x_0* como $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} f_{|A^-}(x)$.

b) Si x_0 es un punto de acumulación de $A^+ = \{x \in A : x > x_0\}$, se define el *límite por la derecha de f en x_0* como $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} f_{|A^+}(x)$.

En principio no tienen porqué tener sentido ambos límites laterales. Por ejemplo, si x_0 es el extremo de un intervalo sólo se puede estudiar uno de los dos límites laterales. Lo que sí es cierto es que si se puede estudiar el límite, al menos uno de los límites laterales tiene que tener sentido. Además, una función tiene límite en x_0 si, y sólo si, existen todos los límites laterales que tengan sentido y coinciden.

Proposición 6.7. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$.

a) Si $x_0 \in (A^+)'$ y $x_0 \notin (A^-)'$, entonces $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

b) Si $x_0 \in (A^-)'$ y $x_0 \notin (A^+)'$, entonces $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

c) Si $x_0 \in (A^+) \cap (A^-)'$, entonces $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

6.2 Límites infinitos y en el infinito

6.2.1 Asíntotas verticales

Como ya hemos comentado en la sección anterior, la definición de límite de una función con sucesiones siempre tiene el mismo aspecto:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b \right].$$

Hasta ahora hemos tomado a y b como el punto donde tomamos límite y como el valor del límite. Si admitimos que a y/o b sean $\pm\infty$, obtenemos la definición de límite infinito o en el infinito.

Definición 6.8. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Diremos que el límite de f en x_0 vale $+\infty$ si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que tienda a x_0 se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a $+\infty$, o sea,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff [\forall \{x_n\} \rightarrow x_0 \implies \{f(x_n)\} \rightarrow +\infty]$$

También podemos reformular de manera equivalente la definición de límite sin utilizar sucesiones.

Proposición 6.9. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Son equivalentes

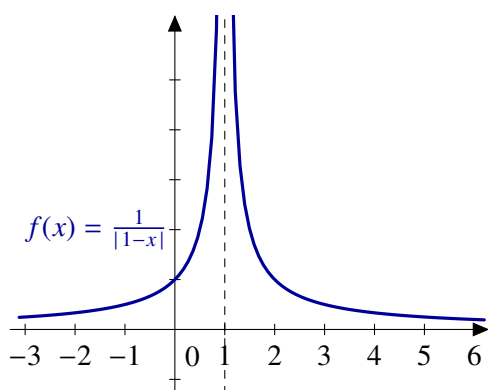
a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

b) Dado $M \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ y $x \in A$, entonces $f(x) > M$.

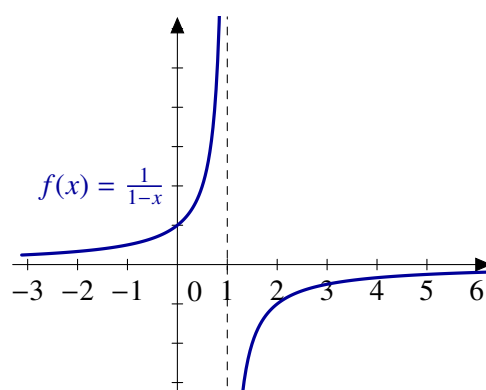
En otras palabras,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \left[\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \left. \begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \implies f(x) > M \right]$$

Esta situación seguramente ya se te ha presentado y te has referido a ella como que la función tiene una *asíntota vertical* en x_0 .



La función $f(x) = \frac{1}{|1-x|}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$



La función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ también tiene una asíntota vertical en $x = 1$

Figura 6.1 Asíntotas verticales

Eso sí, tienes que tener cuidado con la afirmación anterior: la función $\frac{1}{1-x}$ también tiene una asíntota vertical en $x = 1$ pero su límite no es $+\infty$ ni $-\infty$. Su valor depende de si calculamos el límite por la izquierda o por la derecha.

6.2.2 Asíntotas horizontales

La última posibilidad que nos queda es definir límites en $+\infty$ o $-\infty$. De nuevo empezamos con sucesiones.

Definición 6.10. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no acotado superiormente y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- Diremos que f tiene *límite en $+\infty$* y que vale L si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que tienda a $+\infty$ se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a L .
- De forma similar, diremos que el límite de f en $+\infty$ es $+\infty$ si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que tienda a $+\infty$ se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a $+\infty$.

Y también tenemos las reformulaciones equivalentes sin usar sucesiones.

Proposición 6.11. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no acotado superiormente y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ si, y sólo si, dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{R}$ tal que si $x > M$ y $x \in A$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si, y sólo si, dado $M \in \mathbb{R}$ existe N tal que si $x > N$, entonces $f(x) > M$.

De forma completamente análoga se pueden definir los límites en $-\infty$ o que valgan $-\infty$.

Ejemplo 6.12.

Las funciones periódicas no constantes no tienen límite en infinito.

Para demostrar que una función no tiene límite en $+\infty$ usando la caracterización por sucesiones tenemos que encontrar una sucesión $\{x_n\}$ que tienda a $+\infty$ y tal que $\{f(x_n)\}$ no sea convergente o dos sucesiones de manera que sus imágenes tienden a límites distintos. Veamos que este último método nos viene bien.

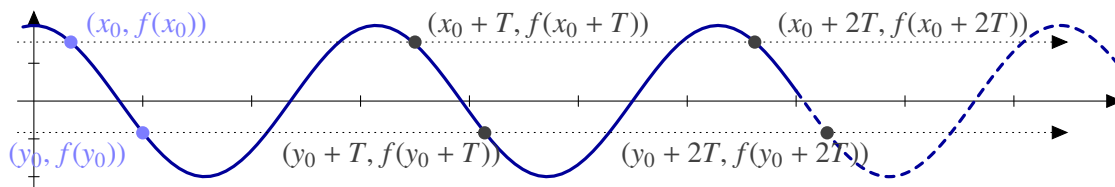


Figura 6.2 Las funciones periódicas no triviales no tienen límite en infinito

La función no es constante: toma al menos dos valores distintos. Sean x_0, y_0 tales que $f(x_0) \neq f(y_0)$. Si T es un periodo de la función f , las sucesiones $\{x_0 + nT\}$ e $\{y_0 + nT\}$ tienden a $+\infty$ y

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + nT) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_0 + nT) = f(y_0).$$

Cuándo una función tiene límite en $+\infty$ o $-\infty$ solemos decir que la función tiene una *asíntota horizontal*. Por ejemplo, como

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3 \operatorname{sen}(x)}{x} = 2,$$

la función $f(x) = \frac{2x + 3 \operatorname{sen}(x)}{x}$ tiene una asíntota horizontal en 2. Observa que, a diferencia de las asíntotas verticales, la gráfica de la función puede cruzar la recta que define la asíntota ($y = 2$ en este caso).

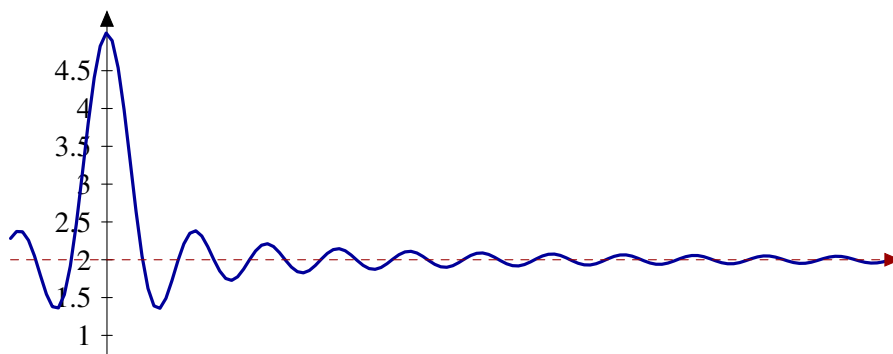


Figura 6.3 Asíntota horizontal

6.2.3 Indeterminaciones

Existen límites que no se pueden resolver utilizando las operaciones elementales, léase por ejemplo el límite de una suma es la suma de los límites. A estas situaciones las llamamos indeterminaciones y son

$$\infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

Ya conoces algunas formas de eliminar indeterminaciones. Por ejemplo, cuando nos encontramos con un cociente de polinomios con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, eso significa que numerador y denominador tienen una solución común. Si simplificamos dicha raíz, eliminamos la indeterminación.

Ejemplo 6.13. Calculemos $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2.$$

6.3 Cálculo de límites

Dado que la definición de límite funcional está hecha con sucesiones, podemos trasladar fácilmente las propiedades de éstas a propiedades de límites.

Proposición 6.14. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$

a) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ y g está minorada, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = +\infty$.

b) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ y existe $K > 0$ tal $g(x) > K$ para todo x , entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = +\infty$.

El siguiente resultado permite resolver algunas indeterminaciones del tipo “ 1^∞ ”.

Proposición 6.15 (Regla del número e). Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$. Entonces

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = L$,

b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = -\infty$, y

c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = +\infty \iff \lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = +\infty$.

Ejemplo 6.16. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 3} \right)^{x-3}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 3} \right)^{x-1} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3) \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 3} - 1 \right) = L.$$

Resolvamos este segundo límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3) \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-3)(3x-2)}{x^2 - x + 3} = 3.$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 3} \right)^{x-3} = e^3.$

Proposición 6.17 (Escala de infinitos). Sea $a \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^x} = 0.$$

Ejemplo 6.18. Vamos a comprobar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = 1.$

Tomando logaritmos,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x} = L,$$

y este último límite vale 0 por lo que el límite original es $e^0 = 1.$

Es posible intercambiar los papeles de $+\infty$ y 0 en un límite.

Proposición 6.19. Sea f una función definida en un intervalo no acotado superiormente. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

Ejemplo 6.20. El cambio de variable anterior nos permite resolver algunos límites de forma sencilla. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}$$

involucra exponenciales y polinomios, pero no se encuentra en las condiciones necesarias para poder aplicar la escala de infinitos. Un cambio de variable de la forma $y = \frac{1}{x}$ nos resuelve la situación:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3}{e^{y^2}} = 0,$$

usando, ya sí, la escala de infinitos.

6.4 Continuidad

Ya que tenemos la definición de límite, podemos hablar de continuidad.

Definición 6.21. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La función f es *continua* en $a \in A$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$,

Podemos expresar la continuidad utilizando sucesiones de manera similar a lo que hemos hecho con límites o de la forma “ $\epsilon - \delta$ ”.

Proposición 6.22. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- f es continua en $a \in A$.
- Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Si te fijas, la definición de función continua se parece mucho a la definición de límite. Comparándolas, la primera diferencia salta a la vista: hemos cambiado el valor del límite por $f(a)$. La segunda es un poco más sutil: en la definición de límite partimos de un punto de acumulación. Como vemos en la siguiente proposición, es importante distinguir entre puntos aislados y puntos de acumulación a la hora de estudiar la continuidad de una función.

Proposición 6.23. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si a es un punto de acumulación de A , f es continua en a si y sólo si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Si a es un punto aislado de A , f es continua en a .

Observación 6.24. La distinción entre puntos aislados y puntos de acumulación carece de importancia en el caso de funciones definidas en intervalos ya que todos los puntos son de acumulación. Por tanto, si I es un intervalo, una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $a \in I$ si y sólo si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

6.4.1 Discontinuidades

¿Qué puede fallar para que una función no sea continua? Para que sí lo sea, debe existir el límite en dicho punto y coincidir con el valor de función. Por tanto, las discontinuidades se deben a alguno de estas dos causas:

- El límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe pero no vale $f(a)$. En este caso decimos que la función presenta una *discontinuidad evitable* en a . El motivo es que si cambiamos el valor de la función en a por el del límite obtenemos una función continua.
- La segunda posibilidad es que no exista el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Esto puede deberse a varios factores.
 - Existen los límites laterales pero no coinciden. En este caso diremos que f presenta una *discontinuidad de salto* en a .
 - Algún límite lateral no existe: diremos que f tiene una *discontinuidad esencial* en a .

6.4.2 Álgebra de funciones continuas

Como sabemos el comportamiento de los límites con respecto a sumas, productos o cocientes, es fácil obtener un resultado similar para funciones continuas.

Proposición 6.25. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $a \in A$. Entonces,

- $f + g$ es continua en a ,
- fg es continua en a , y
- si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es continua en a .

Proposición 6.26 (Regla de la cadena). La composición de funciones continuas es una función continua.

Ejemplo 6.27. La función valor absoluto es continua. En consecuencia si f es continua $|f|$ también lo es. Es fácil encontrar ejemplos de que el recíproco no es cierto. La función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es discontinua en el origen y $|f|$ es la función constantemente igual a uno que sí es continua.

6.4.3 Carácter local de la continuidad

La continuidad de una función en un punto sólo depende del comportamiento de dicha función “cerca” del punto. Este hecho lo aplicamos sin darnos cuenta cada vez que estudiamos la continuidad de una función definida a trozos. Por ejemplo, cuando decimos que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0, \\ \text{sen}(x), & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

es continua en \mathbb{R}^+ sólo nos estamos fijando en x^2 que, evidentemente, es una función continua. En otras palabras, la continuidad de f en el punto $x = 0.5$ no depende del comportamiento de dicha función en \mathbb{R}^- .

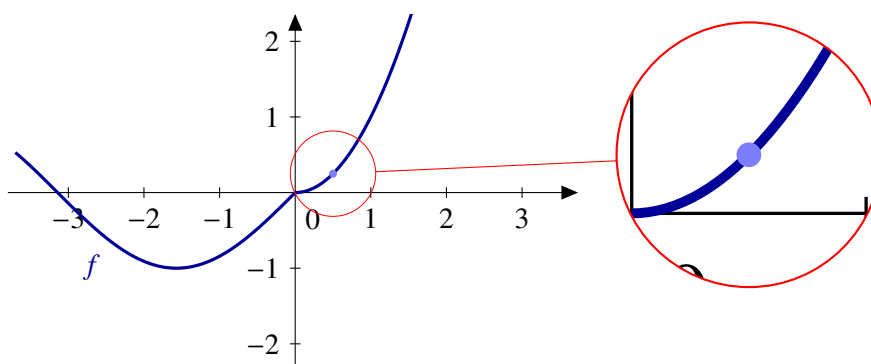


Figura 6.4 Carácter local de la continuidad

El siguiente resultado nos dice que la restricción de una función continua sigue siendo una función continua.

Proposición 6.28. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $a \in A$ y sea $B \subset A$ con $a \in B$. Entonces $f|_B$ es continua en a .

Si nos quedamos con un dominio más pequeño, la continuidad no se resiente. ¿Qué ocurre con el recíproco? Si una función es continua en un dominio, ¿qué ocurre si la extendemos a un dominio mayor? En general no se mantiene la continuidad: piensa, por ejemplo en una función definida en los $[0, +\infty[$. ¿Se puede extender a \mathbb{R} manteniendo la continuidad en el origen? La respuesta ya la conoces: sólo si el límite por la izquierda coincide con el valor de la función en 0. Ahora bien, en otros puntos la situación es distinta. Por ejemplo, si la función era continua en 1, también lo sigue siendo la extensión.

Proposición 6.29 (Carácter local de la continuidad). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$. Son equivalentes:

- f es continua en a .
- Para cualquier $r > 0$, $f|_{A \cap]a-r, a+r[}$ es continua en a .
- Existe $r > 0$ tal que $f|_{A \cap]a-r, a+r[}$ es continua en a .

6.5 Teorema del valor intermedio

El teorema del valor intermedio o su versión equivalente el teorema de los ceros de Bolzano es el resultado más importante de este tema. Su demostración

Lema 6.30 (Lema de conservación del signo). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $a \in A$ con $f(a) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ verificando que $f(x)f(a) > 0$, para todo $x \in]a - \delta, a + \delta[\cap A$.

Demostración. Aplicamos la definición de continuidad tomando $\varepsilon = |f(a)|$ y encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\left. \begin{array}{l} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Esto es equivalente a que

$$f(a) - |f(a)| < f(x) < f(a) + |f(a)|. \quad (6.1)$$

Discutimos ahora las dos signos posibles:

- Si $f(a) > 0$, la primera desigualdad de la ecuación (6.1) nos da que $f(x) > 0$.
- Si $f(a) < 0$, la segunda parte de la ecuación (6.1) nos dice que $f(x)$ también es negativo. \square

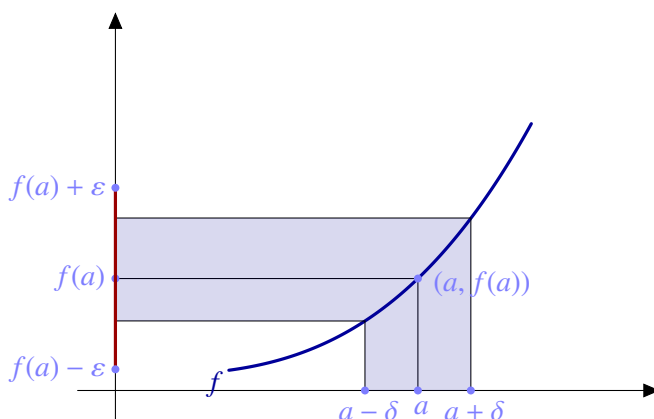


Figura 6.5 Conservación del signo

En la Figura 6.5 se puede ver lo que hemos hecho: en el caso de que $f(a)$ sea positivo, elegimos un $\varepsilon < f(a)$ y aplicamos la definición de continuidad. Así obtenemos un intervalo centrado en a en los que la función f toma valores positivos.

Teorema 6.31 (de los ceros de Bolzano). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y verificando $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

El teorema de los ceros de Bolzano es un resultado de existencia: sólo afirma que hay un punto donde la función vale cero. No dice nada sobre cuántos puntos de este tipo hay ni sobre cómo podemos encontrarlos.

Ejemplo 6.32. Una de las utilidades más importantes del teorema de los ceros de Bolzano es garantizar que una ecuación tiene solución. Por ejemplo, para comprobar que la ecuación $e^x + \log(x) = 0$ tiene solución, estudiamos la función $f(x) = e^x + \log(x)$: es continua en \mathbb{R}^+ y se puede

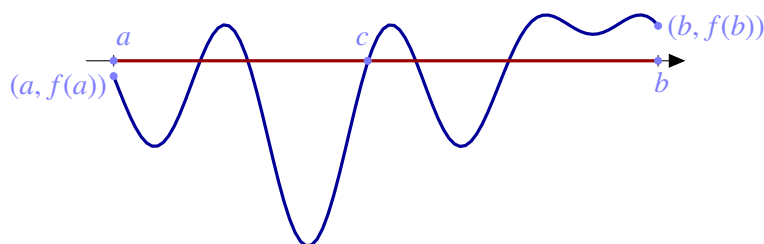


Figura 6.6 Teorema de los ceros de Bolzano

comprobar que $f(e^{-10}) < 0$ y $0 < f(e^{10})$. Por tanto, la ecuación $e^x + \log(x) = 0$ tiene al menos una solución entre e^{-10} y e^{10} . En particular, tiene solución en \mathbb{R}^+ .

El teorema del valor intermedio es equivalente al teorema de los ceros de Bolzano. Si este último afirma que en cuanto una función continua tome valores positivos y negativos, tiene que anularse, el teorema del valor intermedio traslada esta afirmación a cualquier número real: en cuanto una función continua tome dos valores distintos, también tiene que alcanzar los valores intermedios. Todo esto es cierto únicamente cuando el dominio es un intervalo.

Teorema 6.33 (del valor intermedio). *Sea I un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f(I)$ es un intervalo.*

Demostración. Tenemos que demostrar que si $c, d \in f(I)$, entonces $[c, d] \subset f(I)$. Puesto que c y d pertenecen a la imagen de la función, existen a y b en I tales que $f(a) = c$ y $f(b) = d$. Puesto que I es un intervalo $[a, b] \subset I$. Tengáse en cuenta que no sabemos si a es menor o mayor que b y que cuando escribimos $[a, b]$ nos estamos refiriendo al intervalo $[a, b]$ o al $[b, a]$, depende del orden que corresponda.

Sea $z \in]c, d[$. Consideremos la función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x) - z$. Es claro que g es una función continua. Además, $g(a) = f(a) - z = c - z < 0 < d - z = f(b) - z = g(b)$ y, por tanto, g verifica las hipótesis del teorema de los ceros de Bolzano. En consecuencia, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$ o, equivalente, $f(x_0) = z$. \square

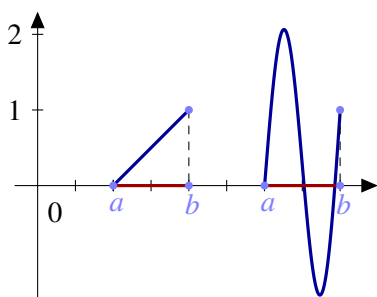


Figura 6.7

Si el teorema de los ceros de Bolzano nos garantiza que una ecuación vale cero o, lo que es lo mismo, que una función se anula, el teorema del valor intermedio nos permite conocer todos los valores de una función: su imagen. Sólo nos queda una dificultad que superar. Imagina por un momento que sabes los valores de una función en dos puntos. Por ejemplo, supongamos que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua verifica que $f(a) = 0$ y que $f(b) = 1$. ¿Qué podemos decir sobre su imagen? El teorema del valor intermedio nos dice que la función toma todos los valores entre 0 y 1. En otras palabras $[0, 1] \subset f([a, b])$, pero ¿se da la igualdad? En la Figura 6.7 puedes ver que la imagen puede ser un conjunto mayor. El ingrediente que falta para

resolver este problema es la monotonía de la función.

Propiedad de compacidad

El siguiente teorema y sus versiones para funciones de varias variables es una herramienta fundamental en el estudio de los extremos absolutos de una función y responde a la pregunta de qué se puede decir sobre cómo son los intervalos en el teorema del valor intermedio. Ningún otro resultado nos va a garantizar a tanta generalidad la existencia de extremos.

Teorema 6.34 (Propiedad de compacidad). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado. En particular, la función f tiene máximo y mínimo absolutos.

6.6 Monotonía

¿Cómo podemos calcular los extremos absolutos de una función? ¿Hay algún punto destacado donde buscar? En un intervalo, los únicos puntos destacados son los extremos pero es muy fácil encontrar funciones que *no* alcanzan su máximo o su mínimo en ninguno de los extremos del intervalo. Por ejemplo, consideremos la función $\sin : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Sabemos su valor en los extremos: cero. ¿Nos da eso alguna información sobre el máximo o el mínimo de la función? La verdad es que no demasiada. La información adicional que necesitamos sobre la función es la monotonía.

Definición 6.35.

a) Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *creciente* (resp. *decreciente*) si

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(y)).$$

b) Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *estrictamente creciente* (resp. *estrictamente decreciente*) si

$$x < y \implies f(x) < f(y) \quad (\text{resp. } f(x) > f(y))$$

En general, diremos que una función es *monótona* si es creciente o decreciente y diremos que es *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Observación 6.36. Hay veces que los nombres nos pueden inducir a error y este es uno de esos casos. La idea intuitiva que tenemos todos es que una función creciente es aquella que tiene una gráfica ascendente. En realidad eso es una función estrictamente creciente. Una función constante es creciente (y decreciente). La expresión correcta debería ser que una función creciente es aquella cuya gráfica “no baja”.

Imagen de una función

Una vez que tenemos todos los ingredientes: función definida en un intervalo, continua y monótona, ya podemos calcular la imagen de dicha función. Enunciamos el resultado sólo para funciones crecientes. Ya te puedes imaginar cuál es para funciones decrecientes.

Corolario 6.37.

a) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y creciente. Entonces la imagen de f es $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

b) Sea $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Entonces la imagen de f es $f(]a, b[) = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x) \right)$.

Ejemplo 6.38. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x}{1+x}$, para cualquier $x \in [0, 1]$.

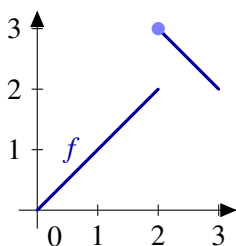
- El dominio de la función es un intervalo.
- La función es continua por ser cocientes de funciones continuas, polinomios en este caso.
- Vamos a comprobar que es creciente: si $x, y \in [0, 1]$,

$$f(x) \leq f(y) \iff \frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y} \iff x(1+y) \leq y(1+x) \iff x+xy \leq y+xy \iff x \leq y.$$

Por tanto, $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [0, \frac{1}{2}]$.

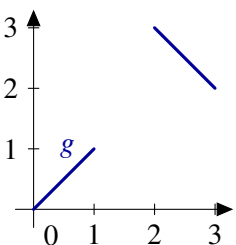
El estudio de la monotonía de una función puede complicarse. En algunas ocasiones, se puede sustituir por la condición, más débil, de inyectividad aunque tendremos que esperar hasta el siguiente tema, derivabilidad, para encontrar una condición verdaderamente útil: el signo de la derivada. Volveremos a esta cuestión al final del siguiente tema.

6.6.1 Monotonía e inyectividad



La definición de función estrictamente monótona nos dice que puntos del dominio distintos tienen imágenes distintas. En particular, *las funciones estrictamente monótonas son inyectivas*. El recíproco no es cierto en general. Hay funciones inyectivas que no son monótonas. Por ejemplo, la función $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ 5-x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$



no es creciente ni decreciente. Tampoco es difícil conseguir un ejemplo con funciones continuas: eliminemos los puntos de discontinuidad de la función f . Considera la función $g : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 5-x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

Como puedes ver, para la inyectividad no es una condición suficiente para probar monotonía si consideramos funciones que no sean continuas o que no estén definidas en intervalos. En otro caso, el resultado es cierto.

Figura 6.8 Monotonía e inyectividad

Proposición 6.39. Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces f es estrictamente monótona si, y sólo si, f es inyectiva.

6.7 Ejercicios

6.7.1 Límites elementales

Ejercicio 6.1. Calcular los siguientes límites

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{7x+4}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{2x^2+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+4}{x-2}$

Ejercicio 6.2. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{x-4} \right)$,
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3x^3+2x^2+x}$,
 c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{|x-1|}$,
 d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{|x-1|}$,

Ejercicio 6.3. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+3}{\sqrt[3]{26+x}-3}$

Ejercicio 6.4. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2+x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2-2^{1/x}}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{1/x}+1}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x+6}{x^2-4}$

6.7.2 Límites y continuidad

Ejercicio 6.5. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f y g y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y $-\infty$.

Ejercicio 6.6. Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^{\frac{1}{\log(x)-1}}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$. Estudiar el comportamiento de f en $0, e, +\infty$.

Ejercicio 6.7. Sea $f :]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{\tan(x)} \right)^{\sin(x)}$. Probar que f tiene límite en los puntos 0 y $\frac{\pi}{2}$ y calcular dichos límites.

Ejercicio 6.8. Sea $f :]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (1 + \sin(x))^{\cotan(x)}$. Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en 0 y $\pi/2$.

Ejercicio 6.9. Estudiar el comportamiento en cero de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{7}{x}\right) - \arctan\left(\frac{-5}{x}\right), \quad g(x) = xf(x).$$

Ejercicio 6.10. Probar que existe un número real positivo x tal que $\log(x) + \sqrt{x} = 0$.

Ejercicio 6.11. Probar que la ecuación $x + e^x + \arctan(x) = 0$ tiene una sola raíz real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

Ejercicio 6.12. Determinar la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(\log|x|)$.

Ejercicio 6.13. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua en $[0, 1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo: $\exists x \in [0, 1] : f(x) = x$.

Ejercicio 6.14. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del sábado.

6.7.3 Ejercicios complementarios

Ejercicio 6.1. Pruébese que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.

Ejercicio 6.2. Sean $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x, \quad \forall x \in]0, 1[, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Comprobar que f y g son continuas y acotadas pero no tienen máximo ni mínimo absolutos.

Ejercicio 6.3. Dado un número real positivo a , pruébese que existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x^2 = a$. Además x es único.

Ejercicio 6.4. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua verificando $f(0) = f(1) = 0$. Probar que, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

Ejercicio 6.5. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \forall x \in [-1, 1]$. Calcular su imagen.

Ejercicio 6.6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f(0) = 0$. Probar que f es continua en \mathbb{R} , estrictamente decreciente en \mathbb{R}^- y estrictamente creciente en \mathbb{R}^+ . Calcular la imagen de f .

Ejercicio 6.7. Demostrar que la aplicación $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ es biyectiva. Determínese f^{-1} y compruébese que es una función continua.

Ejercicio 6.8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como