

Números complejos

1

1.1 Introducción	1	1.2 Forma binómica de un número complejo	3	1.3 Representación gráfica. Conjugado y módulo de un número complejo	4	1.4 Forma polar y argumento de un número complejo	5	1.5 Funciones elementales	8
------------------	---	--	---	--	---	---	---	---------------------------	---

1.1 Introducción

Los números que hoy llamamos “complejos” fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1572) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que “ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación” y acuñó el calificativo *imaginarias* para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución de un problema resulta ser un número complejo esto se interpreta como que el problema no tiene solución.

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la naturaleza de los mismos; no se preguntaron ¿qué es un número complejo?, sino que se dijeron *¿para qué sirven?, ¿qué puede hacerse con ellos?* Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el conocido como *Teorema Fundamental del álgebra* que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que *también son números complejos*. Algunas de sus implicaciones las podemos comentar directamente. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x + 3 = 0, \quad 2x + 3 = 0, \quad x^2 - 2 = 0, \quad x^2 + 2x + 2 = 0,$$

cuyas soluciones $x = -3$, $x = 3/2$, $x = \pm\sqrt{2}$ y $x = 1 \pm i$ tienen sentido cuando x es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5 + (1 - i)x^4 + (1/5 - i\sqrt{2})x^2 - 8x + 3 - i/\sqrt{3} = 0.$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El teorema fundamental del álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que *también* son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de “*números complejos*” se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra “*i*” que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

En estas notas vamos a dar solamente unos breves conceptos de distintas formas de expresar los números complejos y cómo se trabaja con ellos. Pero antes de empezar una advertencia: aunque históricamente (y vulgarmente) se llama *i* a la raíz cuadrada de -1 esta expresión no es totalmente cierta. Si así fuera obtendríamos la siguiente cadena de igualdades que no es posible,...¿verdad?

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = ii = i^2 = -1.$$

Suma de números complejos

Recordemos que para dotar a un conjunto, en este caso $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de estructura de cuerpo se necesita una suma y un producto que verifiquen ciertas propiedades. La suma no es nada nuevo, es la suma de \mathbb{R}^2 como espacio vectorial, es decir, si (a, b) , (c, d) son dos elementos de \mathbb{R}^2 , definimos su suma como

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Es evidente (por otra parte nosotros ya lo sabíamos del estudio de espacios vectoriales) que esta suma cumple las propiedades que tiene que cumplir:

- 1) Asociativa.
- 2) Conmutativa.
- 3) Existencia de neutro $((0, 0))$.
- 4) Existencia de inverso $(-(a, b) = (-a, -b))$.

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 1.1) es $z + w$.

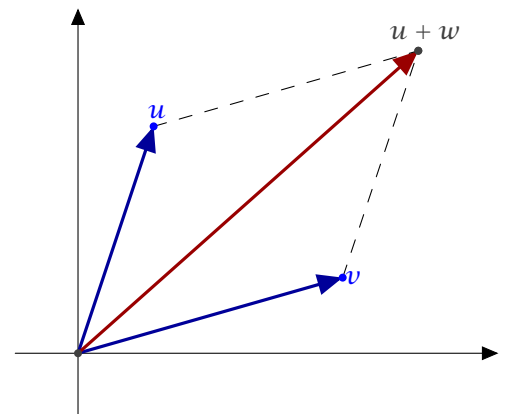


Figura 1.1 La suma de números complejos es la suma usual de vectores en el plano

Producto de números complejos

El producto sí es nuevo. Dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, definimos su producto como

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Tampoco es difícil comprobar que este producto es adecuado, en el sentido de que verifica las propiedades

- 5) Asociativa,
- 6) Conmutativa,
- 7) Existencia de elemento neutro (el neutro para el producto es $(1, 0)$, compruéballo).
- 8) Si $(a, b) \neq (0, 0)$ entonces su inverso es

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Comprueba también que $(a, b)(a, b)^{-1} = (1, 0)$.

- 9) Distributiva: $(a, b)((c, d) + (e, f)) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f)$.

Así, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2,3 \\ 3,4 \end{pmatrix} = (2, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 25, \frac{-4}{25} \end{pmatrix} = \left(\frac{18}{25}, \frac{1}{25}\right)$. Pues bien, los números complejos son justamente el cuerpo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Es decir cada número complejo es una pareja (a, b) donde a y b son números reales, y la suma y el producto de complejos son los que hemos descrito antes. A esta forma de representar los números complejos se la suele llamar *forma cartesiana*. Esta forma es muy cómoda para trabajar con sumas de números complejos pero no lo es tanto para trabajar con el producto: prueba a calcular $(1, -1)^4$.

Forma cartesiana

En la siguiente definición recogemos toda la información anterior.

Definición 1.1. Consideremos en el conjunto \mathbb{R}^2 las operaciones de adición y producto definidas por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

El elemento neutro de la suma es $(0, 0)$ y $(1, 0)$ es la unidad del producto. Además, $(-a, -b)$ es el opuesto de (a, b) , y todo $(a, b) \neq (0, 0)$ tiene inverso

$$(a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (léase “el conjunto \mathbb{R}^2 con las operaciones suma y producto”) es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por \mathbb{C} y sus elementos se llaman *números complejos*.

No hay un orden en \mathbb{C} compatible con la estructura algebraica

Al ampliar \mathbb{R} a \mathbb{C} ganamos mucho pero también perdemos algo. Te recuerdo que \mathbb{R} tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en \mathbb{C} no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en \mathbb{C} , pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica. En efecto, si suponemos que \leq es una relación de orden en \mathbb{C} compatible con su estructura algebraica, como $i \neq 0$ habría de ser $0 < i^2 = -1$ (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación \leq no respetara el orden de \mathbb{R}). Pero también $0 < 1^2 = 1$, luego $0 < 1 + (-1) = 0$ y eso sí que es contradictorio.

Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en \mathbb{C} ningún orden. Así que ya sabes: ¡mucho cuidado con escribir desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

1.2 Forma binómica de un número complejo

Dentro de \mathbb{R}^2 podemos distinguir el subconjunto formado por los elementos que tienen la segunda componente 0, $\{(a, 0), a \in \mathbb{R}\}$. Restringidos la suma y el producto a este subconjunto tenemos una propiedad curiosa y es que nos seguimos quedando en el subconjunto. Es inmediato observar que

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0), \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

$$(a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1 a_2, 0), \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Esto hace que el conjunto $\{(a, 0); a \in \mathbb{R}\}$, con la suma y el producto definidos antes sea también un cuerpo, pero este cuerpo se puede identificar con los números reales mediante la aplicación

$$\mathbb{R} \longleftrightarrow \{(a, 0); a \in \mathbb{R}\}$$

$$a \longleftrightarrow (a, 0)$$

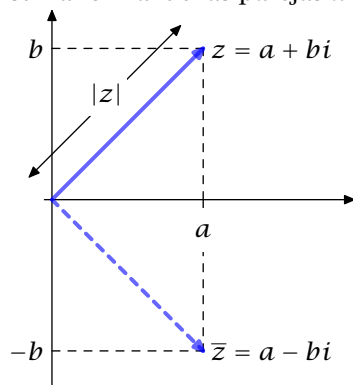
De ahora en adelante siempre usaremos esta identificación; es decir, para nosotros van a ser indistinguibles el complejo $(a, 0)$ y el número real a . Como consecuencia, cualquier número complejo (a, b) se puede escribir de la forma

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + b(0, 1).$$

Si ahora llamamos $(0, 1) = i$, obtenemos que el número complejo $z = (a, b)$ (se le suele llamar a los números complejos con letras como z, u, v, \dots) se puede poner como $z = a + ib$. Esto es lo que se llama la *forma binómica* de un número complejo. Al número real a se le llama la *parte real* del complejo y al número b se le llama la *parte imaginaria*. A i también se le llama la *unidad imaginaria*. Es claro que i no es ningún número real (no es un par con la segunda componente 0) y cumple una propiedad que nos será útil y que, seguramente, ya conocías

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

es decir, el cuadrado de i es -1 . Esto nos permite que las fórmulas para la suma y el producto de números complejos, cuando están puestos en forma binómica, sean fáciles de recordar, ya que, formalmente, los vamos a sumar y multiplicar como si fueran números reales y simplemente tendremos en cuenta que $i^2 = -1$. Nos referimos a lo siguiente: antes hemos definido la suma de dos números complejos (puestos como pares) de la forma $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Esta misma operación, puesta en forma binómica, quedaría $a + ib + c + id = a + c + i(b + d)$, que es la suma formal de las parejas $a + ib$ y $c + id$, sacando al final factor común el i .



Para el producto sucede igual. Si multiplicamos dos complejos en forma de pares $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Esto puesto en forma binómica sería $(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$. Pero este resultado es lo que se obtiene multiplicando formalmente $a + ib$ por $c + id$ y tenemos en cuenta que $i^2 = -1$.

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc).$$

Figura 1.2 Representación de un número complejo

1.3 Representación gráfica. Conjugado y módulo de un número complejo

Según hemos definido, el número complejo $a + ib$ no es más que el elemento (a, b) del plano \mathbb{R}^2 y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

Plano complejo

Conjugado
Módulo

Definición 1.2. Si $z = a + ib$ es un número complejo (con a y b reales), entonces el *conjugado* de z se define como $\bar{z} = a - ib$ y el *módulo* o *valor absoluto* de z , se define como: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Observa que $\sqrt{a^2 + b^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo $a^2 + b^2$.

Geoméricamente, \bar{z} es la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia del punto (a, b) a $(0, 0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (a, b) (ver figura 1.2). La *distancia* entre dos números complejos z y w se define como $|z - w|$.

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver Figura 1.1) es $z + w$.

Proposición 1.3. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces

- a) $\bar{\bar{z}} = z$,
- b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,
- c) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.
- d) $|z|^2 = z\bar{z}$,
- e) $\max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$,
- f) $|zw| = |z||w|$,
- g) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Desigualdad triangular

Demostración. La comprobación de estas afirmaciones es inmediata. Por ejemplo, para comprobar que la propiedad f) se verifica, basta observar que $|zw|$ y $|z||w|$ son números positivos cuyos cuadrados coinciden, pues

$$|zw|^2 = zw\overline{z\bar{w}} = zw\bar{z}w = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2.$$

Para demostrar la última afirmación es suficiente probar que $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. En efecto:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\ &= (|z| + |w|)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Observación 1.4. De la demostración de la última afirmación se deduce que $|z + w| = |z| + |w|$ si, y sólo si, $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$, esto es, si $z\bar{w} \in \mathbb{R}_0^+$, o lo que es lo mismo $z\bar{w} = \rho$ donde $\rho \in \mathbb{R}_0^+$. Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente multiplicando por w como $z|w|^2 = \rho w$, esto es, $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ lo que quiere decir que z y w están en una misma semirrecta a partir del origen.

Ejemplo 1.5. La división de números complejos es fácil teniendo en cuenta que el producto de un complejo y su conjugado da como resultado el módulo al cuadrado de dicho número complejo.

$$\frac{1 + i}{2 - i} = \frac{1 + i}{2 - i} \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{1 + 3i}{5}.$$

La división o el producto de dos números complejos no es difícil, pero sí que puede ser aburrido calcular $(1 + i)^{10}$. ¿Existe algo como el binomio de Newton para números reales? Compruébalo tú mismo. Lo que sí es muy fácil es su módulo:

$$|(1 + i)^{10}| = |1 + i|^{10} = \sqrt{2}^{10} = 2^5. \triangleleft$$

1.4 Forma polar y argumento de un número complejo

Hay otras formas de representar los números complejos. Una de ellas es la forma polar. Supongamos que tenemos un número complejo $z = a + ib \neq 0$. Este complejo se corresponde con la pareja de números reales (a, b) que podemos representar en el plano.

A los dos ejes del plano (en este caso se suele llamar el plano complejo) se les denota por el eje real (donde se representa la primera componente) y el eje imaginario (donde se representa la segunda).

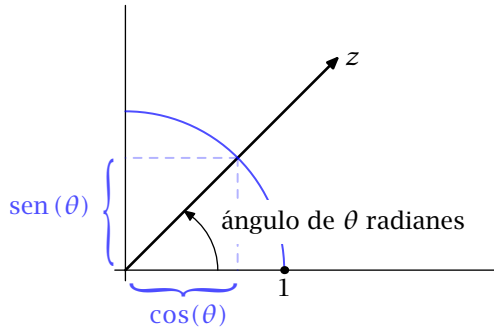


Figura 1.3 Argumento

A la vista del dibujo está claro que el número z (o el par (a, b) , al fin y al cabo para nosotros son la misma cosa) queda totalmente determinado por dos magnitudes: la longitud del vector y su “dirección”. ¿Cómo medimos la dirección? Si normalizamos el número complejo z

$$z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right).$$

Como $\left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$ es un vector de módulo uno (pertenece a la circunferencia centrada en el origen y de radio uno), se tiene que poder escribir de la forma

$$\left(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|} \right) = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$$

para conveniente $\theta \in \mathbb{R}$. En otras palabras, $z = |z| (\cos(\theta) + i \text{sen}(\theta))$.

Argumento

Definición 1.6. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z| (\cos(t) + i \text{sen}(t))$ cualquiera de ellos recibe el nombre de *argumento* de z . El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\text{Arg}(z)$.

$$\text{Arg}(z) = \{ \theta \in \mathbb{R} : z = |z| (\cos(\theta) + i \text{sen}(\theta)) \}$$

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay un único argumento que se encuentra en el intervalo $] -\pi, \pi]$. A dicho argumento se le llama *argumento principal* de z y se representa por $\text{arg}(z)$.

Argumento principal

Forma polar

Al número complejo de módulo ρ y argumento θ se le suele representar ρ_θ y las fórmulas que hemos visto son la forma de pasar de la forma binómica a la forma polar de un complejo.

Observación 1.7.

- a) Observa que el argumento principal no es más que el ángulo que forma el vector con la parte positiva del eje real.
- b) Si θ_1 y θ_2 son dos argumentos del mismo número complejo, entonces

$$\theta_1, \theta_2 \in \text{Arg}(z) \iff \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) \\ \text{sen}(\theta_1) = \text{sen}(\theta_2) \end{array} \right\} \iff \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Dicho de otra manera, si θ es un argumento de z , podemos obtener el conjunto de todos argumentos añadiendo múltiplos enteros de 2π , esto es, $\text{Arg}(z) = \{ \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \}$. En particular,

$$\text{Arg}(z) = \{ \text{arg}(z) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \}.$$

Cálculo del argumento principal

Para calcular el argumento principal de un número complejo hay varias fórmulas, pero la más intuitiva es la siguiente: si $z = a + ib \neq 0$ su argumento principal θ es

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & \text{si } a > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0. \end{cases}$$

También se puede calcular el argumento de un número complejo mediante la fórmula

$$\arg(z) = \begin{cases} 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)+|z|}\right), & \text{si } z \notin \mathbb{R}^-, \\ \pi, & \text{si } z \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

Ejemplo 1.8. Si tenemos el complejo $z = -2 + 2\sqrt{3}i$, entonces su módulo será $|z| = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$, mientras que el argumento se calcula de la siguiente forma. Como la parte real es negativa y la parte imaginaria es positiva, el argumento es

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Así $-2 + 2\sqrt{3}i = 4 \frac{2\pi}{3}$. ◁

Para pasar de la forma polar de un complejo a la forma binómica es aún más fácil. Utilizando las fórmulas de la trigonometría se tiene que si $z = \rho_\theta$ su forma binómica será $z = \rho \cos(\theta) + i\rho \operatorname{sen}(\theta)$. Realmente la fórmula $\rho(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$ se llama la *forma o expresión trigonométrica* del complejo z .

Forma trigonométrica

Ejemplo 1.9. El complejo $5 \frac{-3\pi}{4}$ escrito en forma binómica es

$$5 \frac{-3\pi}{4} = 5 \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i5 \operatorname{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -5 \frac{\sqrt{2}}{2} - i5 \frac{\sqrt{2}}{2}. \triangleleft$$

1.4.1 Formula de De Moivre. Interpretación geométrica del producto

Si tenemos dos números complejos no nulos

$$z = |z|(\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1)), \quad w = |w|(\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2)).$$

y los multiplicamos, obtenemos que

$$\begin{aligned} zw &= |z| |w| (\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1)) (\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2)) \\ &= |zw| (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) + i(\operatorname{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2))) \\ &= |zw| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Es decir: *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos*. Por ejemplo, para calcular $(1 + i)^4$ como $|1 + i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1 + i) = \pi/4$, se sigue que $(1 + i)^4 = -4$.

Obsérvese que aunque los dos argumentos sean argumentos principales la suma no tiene por qué ser argumento principal.

Así pues, el producto de dos números complejos es geoméricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Como consecuencia, es fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula que será de gran utilidad.

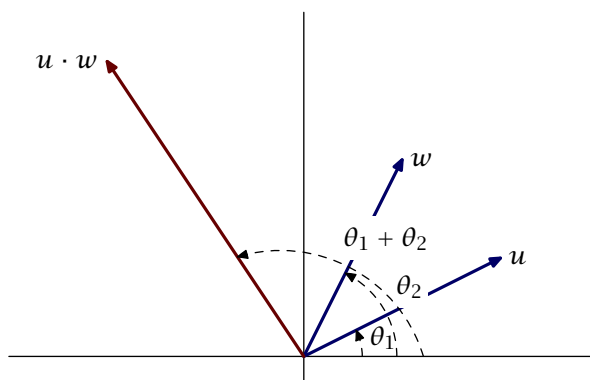


Figura 1.4 Interpretación geométrica del producto

Fórmula de De Moivre **Proposición 1.10.** Si z es un complejo no nulo, θ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$, y, en particular, $n\theta \in \operatorname{Arg}(z^n)$.

Ejemplo 1.11. Aunque ya es conocido, veamos cómo podemos aplicar la fórmula de De Moivre para calcular $\cos(2x)$, con x real. Utilizando que $\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$ es un número complejo de módulo uno, la fórmula de De Moivre nos dice que

$$\begin{aligned} \cos(2x) + i \operatorname{sen}(2x) &= (\cos(x) + i \operatorname{sen}(x))^2 \\ &= \cos^2(x) + (i \operatorname{sen}(x))^2 + 2i \cos(x) \operatorname{sen}(x) \\ &= (\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)) + 2i \cos(x) \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Igualando parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria obtenemos que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \text{ y que } \operatorname{sen}(2x) = 2 \cos(x) \operatorname{sen}(x). \triangleleft$$

1.5 Funciones elementales

1.5.1 Raíces de un número complejo

Aplicando la fórmula de De Moivre vamos a obtener las raíces n -ésimas de un número complejo. Para empezar por el caso más fácil vamos a suponer como complejo el número real 1. Vamos a llamar raíces n -ésimas de la unidad a aquellos números complejos z que verifiquen que $z^n = 1$. Trabajando con la forma trigonométrica de $z = |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$ y teniendo en cuenta que el módulo de 1 es 1 y su argumento principal es 0, obtenemos que

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = 1 = 1(\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)),$$

de donde $|z|^n = 1$ y por tanto $|z| = 1$. Por otra parte igualando los argumentos tenemos que $n\theta = 0$. Se podría pensar que de aquí se puede obtener únicamente que $\theta = 0$ pero eso sería si consideráramos solamente argumentos principales. Realmente cualquier múltiplo entero de 2π es un argumento de 1 y entonces lo que obtenemos es que $n\theta = 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ y entonces $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, para $k \in \mathbb{Z}$. Dándole valores a k y numerando las correspondientes soluciones, obtenemos para los enteros comprendidos entre $k = 0$ y $k = n - 1$

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad \theta_2 = \frac{4\pi}{n}, \quad \dots \quad \theta_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Obviamente hay más números enteros pero no es difícil ver que cualquier otro entero nos da un ángulo que difiere en un múltiplo entero de 2π de los que hemos obtenido y produce, por tanto, el mismo argumento. Concluyendo, las raíces n -ésimas de 1 son n números complejos distintos, z_0, z_1, \dots, z_{n-1} todos con módulo 1 y el argumento (no necesariamente el principal) de z_k es $\frac{2k\pi}{n}$ para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Ejemplo 1.12. Las raíces cúbicas de la unidad son los números complejos $z_0 = 1_0$, $z_1 = 1_{\frac{2\pi}{3}}$ y $z_2 = 1_{\frac{4\pi}{3}}$. Es decir $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, y $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si las representamos en el plano complejo quedan las tres en la circunferencia unidad pero es que además forman un triángulo equilátero uno de cuyos vértices está en el 1. De igual forma las raíces cuartas de la unidad serán $z_0 = 1_0$, $z_1 = 1_{\frac{2\pi}{4}}$, $z_2 = 1_{\frac{4\pi}{4}}$ y $z_3 = 1_{\frac{6\pi}{4}}$, es decir $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ y $z_3 = -i$. En este caso, al igual que antes, todas las raíces se distribuyen en la circunferencia unidad (todas tienen módulo 1) pero ahora serán los vértices de un cuadrado, siendo uno de ellos (el que corresponde a z_0) el número 1. ◁

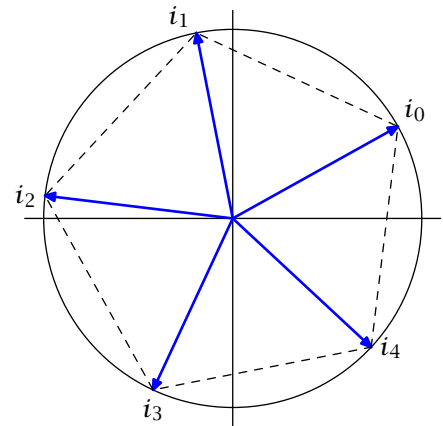


Figura 1.5 Raíces quintas de i

Esta propiedad puede generalizarse a cualquier natural: dado $n \in \mathbb{N}$ las raíces n -ésimas de la unidad son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unidad, estando uno de dichos vértices en el punto 1.

Finalmente si lo que queremos es hacer las raíces n -ésimas de un número complejo, haciendo pequeñas modificaciones en el proceso anterior, obtendremos las raíces que se recogen en el siguiente resultado.

Proposición 1.13. Sea n un número natural. Las raíces n -ésimas del número complejo z vienen dadas por Raíz n -ésima

$$z_k = |z|^{1/n} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

donde θ es un argumento de z .

Esto también tiene una interpretación geométrica clara. Las n raíces n -ésimas de un número complejo $z = |z| e^{i\theta}$ se distribuyen todas en la circunferencia centrada en el origen y radio $\sqrt[n]{|z|}$ formando los vértices de un polígono regular de n lados, uno de los cuales está en el complejo $\sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right) \right)$.

1.5.2 La función exponencial

Definimos la exponencial compleja como

$$e^z = \exp(z) = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im}(z))).$$

Observa que $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, $\operatorname{Im}(z) \in \operatorname{Arg}(e^z)$. En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler* Fórmula de Euler

$$e^{it} = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. Haciendo $t = \pi$ tenemos la singular igualdad $e^{i\pi} + 1 = 0$ en la que intervienen los números más importantes de las matemáticas. De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas *ecuaciones de Euler*: Ecuaciones de Euler

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \text{sen}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Se prueba fácilmente que $e^{z+w} = e^z e^w$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$. Se deduce que para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$ es $e^z = e^{z+2k\pi i}$. Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función *periódica* con período $2\pi i$. Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva. Observa que la exponencial no se anula nunca pues $|e^z| = e^{\text{Re}(z)} > 0$.

Justificación

¿Por qué hemos definido la función exponencial de esta forma? En un principio sólo tenemos la restricción de que su valor coincida con el de la función exponencial que ya conocemos en los números reales. Si queremos que se siga cumpliendo que $e^x e^y = e^{x+y}$, podemos avanzar algo. Si $z \in \mathbb{C}$, debería cumplirse que

$$e^z = e^{\text{Re}(z)+i\text{Im}(z)} = e^{\text{Re}(z)} e^{i\text{Im}(z)}.$$

Por tanto, sólo nos hace falta definir e^{it} con t real. ¿Por qué hemos elegido cómo definición $e^{it} = \cos(t) + i \text{sen}(t)$? Una posible justificación es que la definición está hecha así para que las derivadas vayan bien: si

$$(e^{it})' = ie^{it} = i(\cos(t) + i \text{sen}(t)) = -\text{sen}(t) + i \cos(t),$$

entonces coincide con

$$(\cos(t) + i \text{sen}(t))' = -\text{sen}(t) + i \cos(t).$$

El segundo motivo necesita conocer el desarrollo de Taylor de la las funciones exponencial, seno y coseno. En la Sección ?? tienes los detalles.

1.5.3 Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación $e^w = z$, donde z es un número complejo no cero, va a tener infinitas soluciones $w \in \mathbb{C}$. Como

$$e^w = e^{\text{Re}(w)} (\cos(\text{Im}(w)) + i \text{sen}(\text{Im}(w))).$$

Para que $e^w = z$ es necesario y suficiente que:

- a) $|e^w| = |z|$, esto es, $e^{\text{Re}(w)} = |z|$, es decir, $\text{Re}(w) = \log |z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).
- b) $\text{Arg}(e^w) = \text{Arg}(z)$, esto es, $\text{Im}(w) \in \text{Arg}(z)$ y esto se cumple si, y sólo si $\text{Im}(w) = \arg(z) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que $\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\log |z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$. Por tanto, existen infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $e^w = z$. Cualquiera de ellos se llama *un logaritmo* de z . El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\text{Log}(z)$. De entre todos ellos elegimos uno, llamado *logaritmo principal*, definido por

$$\log(z) = \log |z| + i \arg(z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log(z) + i2k\pi$ para algún entero k .

Logaritmo principal

Observación 1.14. Es importante que nos demos cuenta de que la igualdad $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$, que es válida para números reales positivos, no es siempre cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \log(-1 + i\sqrt{3}) &= \log \left| -1 + i\sqrt{3} \right| + i \arg(-1 + i\sqrt{3}) \\ &= \log(2) + i \left(\arctan(-\sqrt{3}) + \pi \right) = \log(2) + i \frac{2\pi}{3} \\ \log(-\sqrt{3} + i) &= \log \left| -\sqrt{3} + i \right| + i \arg(-\sqrt{3} + i) \\ &= \log(2) + i \left(\arctan(-1/\sqrt{3}) + \pi \right) = \log(2) + i \frac{5\pi}{6} \\ \log \left((-1 + i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i) \right) &= \log(-4i) = \log(4) - i \frac{\pi}{2} \\ &\neq \log(-1 + i\sqrt{3}) + \log(-\sqrt{3} + i) = \log(4) + i \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Lo que sí está claro es que el número $\log(z) + \log(w) \in \text{Log}(zw)$, es decir, $\log(z) + \log(w)$ es un logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo principal de zw .

Como la función $z \mapsto \arg(z)$ es continua¹ en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ y discontinua en \mathbb{R}_0^- , se deduce que el logaritmo principal es discontinuo en \mathbb{R}_0^- y continuo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

1.5.4 Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = e^{b \log(a)}$. Ahora, dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a , todos ellos son de la forma $\log(a) + i2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $e^{b(\log(a) + i2k\pi)}$ donde $k \in \mathbb{Z}$, es una potencia de base a y exponente b . De todas ellas se destaca una:

$$a^b = e^{b \log(a)}$$

y dicho número se llama *valor principal* de la potencia de base a y exponente b . Observa que si $b = 1/n$ donde $n \in \mathbb{N}$, el número

$$\begin{aligned} a^{1/n} &= \exp \left(\frac{1}{n} \log(a) \right) \\ &= \exp \left(\frac{\log(a)}{n} + i \frac{\arg(a)}{n} \right) \\ &= |z|^{1/n} \left(\cos \left(\frac{\arg(a)}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\arg(a)}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

es el valor principal de la raíz n -ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$. Esta definición da lugar a las funciones exponenciales complejas de base a , $z \mapsto a^z$, definidas por $a^z = \exp(z \log(a))$. También permite definir la función potencia compleja de exponente b , $z \mapsto z^b$ como $z^b = \exp(b \log(z))$.

Las funciones exponenciales cumplen evidentemente la igualdad $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$ pero las funciones potencias no cumplen, en general como vimos al estudiar las raíces, la propiedad $(zw)^b = z^b w^b$. Esta igualdad se da en el caso de que

$$\exp(b \log(zw)) = \exp(b \log(z) + b \log(w))$$

o, puesto que la función exponencial es periódica de periodo $2\pi i$, cuando se verifique que

¹ No hemos hablado todavía de funciones continuas, mucho menos de continuidad de funciones complejas, pero la idea intuitiva de que cuando z se acerca a z_0 , el argumento principal de z se acerca al argumento principal de z_0 sigue siendo válida.

$$b \log(zw) = b \log(z) + b \log(w) + 2k\pi i, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Como caso particular, cuando z y w pertenecen al primer cuadrante la igualdad $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$ es cierta con lo cual lo anterior se cumple para $k = 0$. Por los mismos motivos la igualdad $(z^b)^c = z^{bc}$ no es cierta en general.