CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. EXAMEN DE SEPTIEMBRE 2011

1. (2 ptos.)

   a) Se considera la sucesión definida por recurrencia por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

   b) Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{ \frac{\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}}{n+1} \right\}.$$

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $a_2 = \sqrt{5} > a_1 = 1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $a_1 \leq a_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $a_n \leq a_{n+1}$.
- Comprobamos que $a_{n+1} \leq a_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow 2a_n \leq 2a_{n+1} \Rightarrow 2a_n + 3 \leq 2a_{n+1} + 3$$
$$\Rightarrow \sqrt{2a_n + 3} \leq \sqrt{2a_{n+1} + 3} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente, ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por $a_1 = 1$. Veamos que está acotada superiormente por 3. Esto es, que $a_n \leq 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $a_1 1 \leq 3$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $a_n \leq 3$.
- Comprobamos que $a_{n+1} \leq 3$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$a_n \leq 3 \Rightarrow 2a_n \leq 6 \Rightarrow 2a_n + 3 \leq 9 \Rightarrow \sqrt{2a_n + 3} \leq \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \leq 3$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

Para calcular el límite de $\{a_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{a_n\} = x$ y nos queda que $x = \sqrt{2x+3}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{2x+3} \Rightarrow\ x^2 = 2x+3\ \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0\ \Rightarrow\ x = -1 \quad \text{ó} x = 3$$

Pero como el límite ha de ser mayor que 1, tenemos que $\lim\{a_n\} = 3$.

b) Modificamos el término general de la sucesión para poder aplicar el criterio de la raíz. Es decir, la sucesión que vamos es:

$$\sqrt[n]{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{(n+1)^n}}$$

y llamando $a_n = \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{(n+1)^n}$, al aplicar el criterio de la raiz, el límite que tendremos que estudiar ahora es:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+2)}{(n+2)^{n+1}}\,\frac{(n+1)^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} = \frac{2n+2}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

El pirmer factor es una sucesión de tipo racional que converge a 2; y el segundo factor es una sucesión que presenta la indeterminación del tipo "1^∞" por lo que aplicamos la regla del número e:

$$n\left[\frac{n+1}{n+2} - 1\right] = \frac{-n}{n+2} \to -1\ \Rightarrow\ \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \to e^{-1}$$

Por tanto: $\lim\left\{\dfrac{\sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}}{n+1}\right\} = 2\,e^{-1} = \dfrac{2}{e}$

2. (2 ptos.) Estudia el carácter de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$.

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1+\log(n)}{n^n}$.

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raiz, considerando como $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$. Tendremos entonces que estudiar el límite de $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ y compararlo con 1; esto es

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2/n} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n}$$

sucesión que presenta una indeterminación del tipo "1^∞" por lo que aplicamos la regla del número *e*:

$$\text{lím}\left\{n\left[\frac{2n+1}{2n+5}-1\right]\right\} = \text{lím}\,\frac{-4n}{2n+5} = -2 \;\Rightarrow\; \text{lím}\,\sqrt[n]{a_n} = e^{-2} < 1$$

Por tanto la serie dada es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente, considerando como $a_n = \frac{1+\log(n)}{n^n}$; de esta forma, habrá que estudiar el límite de la siguiente sucesión y compararlo con el valor1:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\log(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{1+\log(n)} = \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)}\,\frac{n^n}{(n+1)^n\,(n+1)}$$
$$= \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}$$

Finalmente, si calculamos el límite de cada uno de los tres factores que tenemos, el primer factor es claro que converge a 1 (no hay más que dividir el numerador y denominador por $\log(n+1)$), el segundo factor converge a e^{-1} (basta aplicar la regla del nº e) y el tercero converge a cero. Por tanto:

$$\text{lím}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 \quad\Rightarrow\quad \sum a_n \;\text{ es convergente}$$

3. (1.5 ptos.) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_{x^2+x}^{\text{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\text{sen}^2(x)}$$

Solución: Se trata de un límite que presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$" ya que el denominador es claro que tiende a cero cuando $x \to 0$, asi como el numerador, ya que:

$$\lim_{x\to 0}\int_{x^2+x}^{\text{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt = \int_0^0 e^{-t^2}\,dt = 0$$

Además, tanto el numerador como el denominador son funciones derivables. El primero es derivable gracias al teorema fundamental del Cálculo y el segundo, por ser la función seno elevada al cuadrado. Entonces, haciendo uso de la siguiente regla de derivación (consecuencia del teorema fundamental del Cálculo y de la regla de la cadena):

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right)'(x) = f(h(x))\,h'(x) - f(g(x))\,g'(x)$$

y de la primera regla de L'Hôpital, el límite que tenemos que estudiar es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}(x)^2}\cos(x) - e^{-(x^2+x)^2}\,(2x+1)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$$

Este límite vuelve a presentar en el cero la misma indeterminación que teníamos al principio, así que vamos a volver a aplicar la regla de L'Hôpital. Pero antes separamos el límte en dos factores: el primero no va a darnos ningún problema, mientras que el segundo va a ser en el que vamos a aplicar dicha regla. Esto es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}(x)^2}\cos(x) - e^{-(x^2+x)^2}\,(2x+1)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos(x)}\,\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}(x)^2}\cos(x) - e^{-(x^2+x)^2}\,(2x+1)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Nos ocupamos entonces del segundo factor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)^2\,e^{-\operatorname{sen}(x)^2} - \operatorname{sen}(x)\,e^{-\operatorname{sen}(x)^2}}{\cos(x)} + \frac{2(x^2+x)\,(2x+1)^2\,e^{-(x^2+x)^2} - 2e^{-(x^2+x)^2}}{\cos(x)} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Por tanto, como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\cos(x)} = 1/2$, el límite que nos piden es:

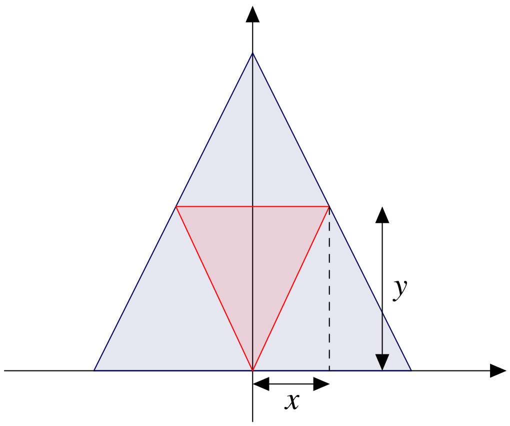
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2+x}^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}^2(x)} = -2/2 = -1$$

4. (1.5 ptos.) Se considera un triángulo isósceles de base y de altura 12 cm. De todos los triángulos inscritos en éste que se pueden construir verificando las dos condiciones siguientes:

- uno de sus vértices es el punto medio de la base del triángulo dado; y
- el lado opuesto a dicho vértice es paralelo a la base del triángulo dado,

determinar aquel que tiene área máxima.

Solución: Llamamos "x" a la mitad de la base del triángulo cuya área hay que maximizar ($x \in [0,6]$), e "y" a su altura.



Dada la semejanza de los dos triángulos rectángulos que aparecen en la figura: el de catetos 12 y 6, y el de catetos $12-y$ y x, se tiene la siguiente relación entre dichos catetos:

$$\frac{12}{6} = \frac{12-y}{x} \Rightarrow 2x = 12-y \Rightarrow y = 12-2x$$

Por tanto, la función a maximizar es el área del triángulo inscrito con las condiciones del enunciado, es decir:

$$f(x) = \frac{2xy}{2} = xy = x(12-2x) = 12x - 2x^2 \ , \ \forall x \in [0,3]$$

Se trata de una función continua y derivable definida en un intervalo compacto. Sabemos, por la Propiedad de compacidad, que dicha función alcanza su máximo absoluto en $[0,3]$. Para encontrarlo sólo buscamos puntos críticos de f en el intervalo abierto $]0,3[$ y finalmente evaluaremos la función f en dichos puntos críticos y en los extremos del intervalo. Esto es:

$$f'(x) = 12-4x = 0 \Rightarrow \ x = 3$$

Si evaluamos la función en los extremos del intervalo, tenemos que $f(0) = f(6) = 0$. Por tanto, es claro que el área máxima se alcanza para las dimensiones $x = 3$ (es decir, base del triángulo igual a 6 cm) y $y = 12-6 = 6$ (es decir, altura igual a 6 cm), y dicha área máxima vale 18cm^2.

5. (3 ptos.) Calcula:

   a) $\int_1^e x^2 \log(x)\, dx$

   b) $\int \frac{1}{x^3+1}\, dx$

Solución:

a) Aplicamos el método de integración por partes, donde:

$$u = \log(x) \;\Rightarrow du = 1/x$$
$$dv = x^2 \;\Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

Por tanto:

$$\int_1^e x^2 \log(x)\, dx = \left[\log(x)\, \frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\, \frac{1}{x}\, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\, dx$$
$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2e^3+1}{9}$$

b) Se trata de una función de tipo racional a la que hay que calcularle una primitiva. Vamos a factorizar el denominador para después aplicar el método de descomposición en fracciones simples:

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

Tenemos que descomponer la expresión racional como sigue:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Desarrollando la expresión e igualando numeradores obtenemos los valores de las constantes:

$$A = 1/3\ ,\ \ B = -1/3\ ,\ \ C = 2/3$$

por lo que la expresión racional se descompone:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\,\frac{(-x+2)}{x^2-x+1}$$

y la integral a resolver sería:

$$\int \frac{1}{x^3+1}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\, dx + \frac{1}{3}\int \frac{(-x+2)}{x^2-x+1}\, dx$$
$$= \frac{1}{3}\log(x+1) + \frac{1}{3}\int \frac{(-x+2)}{x^2-x+1}\, dx$$

Nos ocupamos de la última integral; para ello, escribimos el denominador de esta forma para poder resolverla:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

y, haciendo el cambio de variable: $\left[x - \frac{1}{2} = t \;\Rightarrow\; x = t + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; dx = dt\right]$, la integral se trasforma en

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\int \frac{(-x+2)}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{(-x+2)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\left(-t+\frac{3}{2}\right)}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt \\
&= -\frac{1}{6}\int \frac{2t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{-1}{6}\log\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) \\
&\qquad = \frac{-1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, la integral pedida es:

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{\log(x+1)}{3} - \frac{\log(x^2-x+1)}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + K\,,\;\; K \in \mathbb{R}.$$

Granada, 8 de septiembre de 2011