CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA

1. Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = 2\sqrt{x_n}.$$

Solución. Los primeros términos de la sucesión son $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2\sqrt{2}}$,... Vamos a demostrar que es una sucesión creciente. Lo hacemos por inducción.

- Es claro que $x_1 \leq x_2$.
- Supongamos que $x_n \leq x_{n+1}$, entonces

$$x_{n+1} = 2\sqrt{x_n} \leq 2\sqrt{x_{n+1}} = x_{n+2}.$$

Para demostrar que está acotada superiormente, primero buscamos una cota. *Si la sucesión fuera convergente*, el límite L tendría que cumplir que $L = 2\sqrt{L}$ y está ecuación sólo tiene como soluciones 0 y 4. Como la sucesión empieza en $x_1 = 2$ y es creciente, sólo nos vale la segunda solución.

Vamos a demostrar que 4 es una cota superior utilizando el principio de inducción de nuevo.

- $x_1 = 2 \leq 4$, y
- supongamos que $x_n \leq 4$, entonces $x_{n+1} = 2\sqrt{x_n} \leq 2\sqrt{4} = 4$.

Por tanto, la sucesión es monótona y acotada y su límite es 4.

2. Calcula $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

Solución. Aplicamos el criterio de Stolz y estudiamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}+\sqrt[n+1]{n+1}-(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})}{(n+1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty} = \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{2n+1} = 0,$$

ya que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 1$, utilizando el criterio de la raíz. En efecto, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, dado que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

3. Calcula $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n-2}{n^2+2}\right)^{\frac{n^3+2}{2n^2+1}}$.

Solución. Aplicamos la regla del número e y calculamos el límite siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{2n^2+1} \cdot \left(\frac{n^2+3n-2}{n^2+2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{2n^2+1} \cdot \frac{3n-4}{n^2+2} = \frac{3}{2},$$

por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n-2}{n^2+2}\right)^{\frac{n^3+2}{2n^2+1}} = e^{3/2}.$$

4. Estudia la convergencia de la serie $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

   Solución. Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1,$$

   y, por tanto, la serie es convergente. Observa que hemos utilizado que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}$$

   sin más que utilizar la regla del número e.

5. Calcula $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}$.

   Solución.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n} = 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = 8\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} - 1\right) = 8\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) = 16.$$

Granada, 13 de diciembre de 2010

CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA

1. Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como

$$x_1 = 1, \quad 6x_{n+1} = 3x_n + 2.$$

Solución. Los primeros términos de la sucesión son 1, $5/6$, $27/36$,... Vamos a demostrar que es una sucesión decreciente. Lo hacemos por inducción.

- Es claro que $x_1 \geq x_2$.
- Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, entonces

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}(3x_n + 2) \geq \frac{1}{6}(3x_{n+1} + 2) = x_{n+2}.$$

Para demostrar que está acotada inferiormente, primero buscamos una cota. *Si la sucesión fuera convergente*, el límite L tendría que cumplir que $6L = 3L + 2$ y está ecuación sólo tiene como solución a $2/3$.

Vamos a demostrar que $2/3$ es una cota inferior utilizando el principio de inducción de nuevo.

- $x_1 = 1 \geq 2/3$, y
- supongamos que $x_n \geq 2/3$, entonces $x_{n+1} = \frac{1}{6}(3x_n + 2) \geq \frac{1}{6}(3 \cdot \frac{2}{3} + 2) = \frac{2}{3}$.

Por tanto, la sucesión es monótona y acotada y su límite es $2/3$.

2. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + 4 + \cdots + 2^n}{3 + 9 + \cdots + 3^n}$.

Solución. Aplicamos el criterio de Stolz y calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 + 4 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} - (2 + 4 + \cdots + 2^n)}{3 + 9 + \cdots + 3^n + 3^{n+1} - (3 + 9 + \cdots + 3^n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0,$$

ya que la base, $2/3$, es menor que 1.

3. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{2n^3+2}{n^2-2}}$.

Solución. Aplicamos la regla del número e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 2}{n^2 - 2} \cdot \left(\frac{n+1}{n-1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 2}{n^2 - 2} \cdot \frac{2}{n-1} = 2,$$

y, por tanto, el límite vale e^2.

4. Estudia la convergencia de la serie $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

   Solución. Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

   y, por tanto, la serie es convergente.

5. Calcula $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

   Como

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2\,(2n-1)} - \frac{1}{2\,(2n+1)},$$

   se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left((\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Granada, 13 de diciembre de 2010