Cálculo

14 marzo 2016

Índice

Números reales

1

Existen diferentes formas de formalizar el conjunto de los números reales aunque se pueden agrupar en dos variantes: constructivos y axiomáticos. Los primeros son demasiado laboriosos para un curso de Cálculo y, por este motivo, hemos preferido dejarlos de lado. En su lugar, hemos asumido que el conjunto de los números reales es conocido por el lector y elegimos la definición axiomática de este conjunto.

1.1 El conjuntos de los números reales

Vamos a definir el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, en términos de qué sabemos hacer con sus elementos. Es difícil que si alguien nos pregunta seamos capaces de dar una respuesta clara de qué es un número pero sí somos capaces de decir qué cosas podemos hacer con ellos.

En el conjunto de los números reales tenemos definidas varias operaciones. La primera que todos aprendemos es la *suma.*

Suma de números reales

Las suma verifica, entre otras, las siguientes propiedades. Sean a, b y c números reales cualesquiera.

1) Propiedad *asociativa:* $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2) Propiedad *conmutativa:* $a + b = b + a$.
3) Existencia de *elemento neutro:* $a + 0 = a$.
4) Existencia de *elemento opuesto:* $a + (-a) = 0$.

Estas cuatro propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}, +)$ es un *grupo abeliano* o *conmutativo.*

Producto de números reales

Además de la suma también sabemos multiplicar números reales. Por el mismo motivo, se supone que sabemos dividir. Mucho cuidado con esta afirmación. No estamos hablando de cómo se dividen números sino de que, supuesto conocido el producto de números, la división es la operación inversa. Ocurre lo mismo con la suma: no hemos dicho como se restan números reales pero, en teoría restar una cantidad es simplemente sumar la cantidad cambiada de signo. Con el producto, dividir por un número a es multiplicar por $1/a$.

Sean a, b y c números reales distintos de cero. Entonces se verifican las siguientes propiedades.
5) Propiedad *asociativa:* $a(bc) = (ab)c$.
6) Propiedad *conmutativa:* $ab = ba$.
7) Existencia de *elemento neutro:* $a1 = 1a$.
8) Existencia de *elemento inverso:* $a\frac{1}{a} = 1$ $(a \neq 0)$.

Observación 1.1. El elemento opuesto en el caso de la suma y el elemento inverso para el producto son únicos. En el caso de la suma la notación es siempre la misma: el opuesto de a es $-a$. Para el producto usaremos indistintamente la notación $\frac{1}{a}$ o a^{-1}.

Una vez que tenemos la suma y el producto, sería conveniente que estas dos operaciones se relacionen de alguna manera:
9) propiedad *distributiva:* $a(b+c) = ab + ac$.

Orden

Las propiedades que hemos comentado hasta ahora no determinan de manera única el conjunto de los números reales. El conjunto de los número racionales también las verifica como se puede comprobar fácilmente. ¿Cúal es la diferencia entre ambos conjuntos? ¿Qué sabemos hacer en $\mathbb{R}$ que no podamos hacer en $\mathbb{Q}$? Siempre que se hace esta pregunta en clase las respuestas suelen ser del tipo: raíces cuadradas, logaritmos, senos o cosenos, etc. Aunque se podría intentar seguir por ahí, ese camino puede tener más dificultades a posteriori que el que vamos a elegir.

El orden en el conjunto de los números reales también es algo conocido por el lector. Lo podemos ver de varias formas: sabemos cuándo un número es positivo o somos capaces de decidir cuál de dos números es el mayor. Hagamos un breve resumen de sus propiedades.
10) Propiedad *reflexiva:* $a \leq a$.
11) Propiedad *antisimétrica:* si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
12) Propiedad *transitiva:* si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
13) El orden es *total:* dado $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \geq 0$ o que $a \leq 0$ o, lo que es lo mismo, dados $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \leq b$ o que $b \leq a$.

Las siguientes propiedades relacionan la suma y el producto con el orden que acabamos de presentar.
14) Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.
15) Si $a \leq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \leq bc$.

El último axioma

Tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ verifican todas las propiedades que hemos expuesto. Necesitamos, por tanto, alguna propiedad más para diferenciarlos. Esta última propiedad está muy relacionada con el orden, pero antes de presentarla necesitamos definir algunos conceptos.

Definición 1.2.

Cota

a) Sea $A \subset \mathbb{R}$, diremos que $M \in \mathbb{R}$ es una *cota superior* o *mayorante* (resp. *inferior* o *minorante*) de A si $a \leq M$ para cualquier $a \in A$ (resp. $a \geq M$).

b) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que $a_0 \in A$ es el *máximo absoluto* (resp. *mínimo absoluto*) de A si verifica que $a \leq a_0$ (resp. $a \geq a_0$) para cualquier $a \in A$. **Máximo absoluto**

Veamos algunos ejemplos de estos conceptos.

Ejemplo 1.3.

a) El conjunto de los números naturales no es un conjunto acotado. Más concretamente, no es un conjunto acotado superiormente pero sí está acotado inferiormente. Como no está acotado superiormente no tiene máximo. Sí tiene mínimo: $1 \leq n$ para cualquier natural n

b) El conjunto $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ está acotado superior e inferiormente: $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ para cualquier natural n. Tiene máximo: el 1, pero no tiene mínimo. El mínimo podría ser el cero pero no pertenece al conjunto.◃

A la vista de los ejemplos, la existencia de máximo implica que el conjunto esta acotado pero el recíproco no es cierto. Hay conjuntos acotados y que no tienen ni máximo ni mínimo: piensa en el intervalo $]0,1[$. Sin embargo, aunque ni el 0 ni el 1 sean ni máximo ni mínimo, sí parece claro que tienen un papel destacado. De alguna forma son los extremos del conjunto, pertenezcan o no a dicho conjunto. El supremo y el ínfimo van a ser una forma de reconocer este tipo de puntos.

Definición 1.4. Sea A un subconjunto acotado superiormente de $\mathbb{R}$. El *supremo* del conjunto A, $\sup(A)$, es la menor de sus cotas superiores. Análogamente se define el *ínfimo* de un conjunto acotado inferiormente como la mayor de sus cotas inferiores y lo notaremos $\inf(A)$. **Supremo** **Ínfimo**

Con esta definición ya podemos añadir la última propiedad que nos falta para definir el conjunto de los números reales:

Axioma del supremo: *todo conjunto acotado superiormente tiene supremo.*

Este axioma es equivalente al "axioma del ínfimo". Sólo hay que darse cuenta de que si cambiamos el signo las desigualdades también cambian.

Ejemplo 1.5. Los extremos de un intervalo acotado son el supremo e ínfimo de dicho intervalo independientemente de si pertenecen o no al intervalo. En el caso particular de que alguno de ellos esté en dicho intervalo serán, además máximo o mínimo (lo que corresponda). ◃

Proposición 1.6. *Sea A un conjunto acotado superiormente y sea x el supremo de A.*

a) Si $x \notin A$, entonces A no tiene máximo.

b) Si $x \in A$, entonces A tiene máximo y, de hecho, $x = \max(A)$.

La siguiente proposición será útil en la demostración de algunos resultados posteriores.

Proposición 1.7. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto acotado superiormente y sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$x = \sup(A) \iff \begin{cases} i)\ a \leq x, \text{ para todo } a \in A \\ ii)\ \text{dado } \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tal que } x - \varepsilon < a. \end{cases}$$

1.2 Naturales, enteros, racionales e irracionales

Números naturales

El conjunto de los números naturales, al que denotaremos $\mathbb{N}$, es

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

La inclusión del cero como número natural es una convención. En algunos textos aparece como natural y en otros no. Nosotros no lo vamos a incluir para simplificar algunas notaciones. Por ejemplo, para poder hablar de $\ln(n)$ o de $\frac{1}{n}$ sin necesidad de estar recordando constantemente que n no puede ser cero.

Números enteros

El conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, es

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

La operación suma en $\mathbb{Z}$ es una operación interna: la suma (y la resta) de enteros es un entero. No ocurre lo mismo con el producto. El inverso de un número entero no nulo es un número racional.

Números racionales e irracionales

Los números racionales son aquellos que se pueden expresar como cociente de un entero y un natural:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \, p \in \mathbb{Z}, \, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, son aquellos que no son racionales. Probablemente estás más acostumbrado a tratar con la representación decimal de los números reales. Los racionales tienen una cantidad finita de decimales o infinita periódica. Los irracionales, por tanto, tienen una cantidad infinita de decimales no periódicos.

Observación 1.8. El conjunto de los números irracionales *no* es, ni siquiera, un espacio vectorial como lo es el conjunto de los números racionales. El elemento neutro para la suma o el producto, 0 y 1, no son irracionales. Es muy fácil encontrar ejemplos de que la suma y el producto de números irracionales no es necesariamente un numero irracional: $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Dentro de los números reales podemos distinguir entre números algebraicos y números trascendentes. Un número es *algebraico* si es solución de un polinomio con coeficientes enteros. Por ejemplo, cualquier racional o $\sqrt{2}$ son números algebraicos. Si no se puede expresar como raíz de un polinomio con coeficientes enteros diremos que es un número *trascendente*.

Número algebraico

Número trascendente

No es fácil buscar las raíces irracionales de un polinomio, pero sí podemos buscar las posibles raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Observación 1.9. Dada la ecuación $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, donde $a_0, a_1,,\ldots,a_n$ son números enteros y $a_0 a_n \neq 0$, si la ecuación tiene una raíz racional p/q (con p y q primos entre si), entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

El conocimiento de las raíces racionales nos puede servir para comprobar que un número no es racional.

Ejemplo 1.10. Las únicas posibles raíces racionales del polinomio $x^2 - 2 = 0$ son ± 1, ± 2. Cómo ninguna de ellas es solución del polinomio, $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional.
La otra demostración usual de que $\sqrt{2}$ no es un número racional utiliza la descomposición en primos de un número y la reducción al absurdo: supongamos que $\sqrt{2}$ fuera racional. Eso quiere decir que podría escribirse de la forma $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donde $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible. Si elevamos al cuadrado obtenemos que $2q^2 = p^2$ y, en consecuencia, p^2 es un número par. Pero para que el cuadrado de un número sea par, necesariamente dicho número debe ser par. Luego $p = 2a$ para conveniente a. Sustituyendo, $q^2 = 2a^2$ y, por tanto, q también es par. Hemos obtenido una contradicción: la fracción p/q no puede ser irreducible y, a la vez, que numerador y denominador sean pares. Por tanto, $\sqrt{2}$ no puede ser racional.
Comprueba tú mismo que con las mismas ideas puedes comprobar que la raíz cuadrada de un natural es otro natural o un número irracional. ◂

Representación decimal

FALTA

1.3 Valor absoluto

La distancia entre dos números reales se mide calculando la diferencia entre el mayor y el menor de ellos. La función que mide la distancia al cero es la función valor absoluto.

Definición 1.11. Se define el *valor absoluto* de un número real x como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposición 1.12. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se verifican las siguientes afirmaciones.*
a) $|x| \geq 0$, *y* $|x| = 0 \iff x = 0$,
b) $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$,
c) $\left|x + y\right| \leq |x| + \left|y\right|$, **Desigualdad triangular**
d) $\left||x| - \left|y\right|\right| \leq \left|x - y\right|$,
e) si $\left|xy\right| = |x|\left|y\right|$.

Para demostrar cualquiera de estas desigualdades o, en general, para trabajar con expresiones en las que intervienen valores absolutos tenemos varias posibilidades. La primera de ellas es discutir los distintos casos que se pueden presentar. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.13. ¿Cuándo es cierta la desigualdad $|x - 3| < |x - 1|$?
Lo que vamos a hacer es eliminar el valor absoluto (una función definida a trozos) discutiendo todas las posibilidades:

a) si $x \leq 1$, $|x-3| < |x-1| \iff -(x-3) < -(x-1) \iff -3 > -1$ lo que, claramente, no es cierto,
b) si $1 \leq x \leq 3$, $|x-3| < |x-1| \iff -(x-3) < (x-1) \iff 2 < x$, y por último
c) si $x \geq 3$, $|x-3| < |x-1| \iff (x-3) < (x-1) \iff -3 < -1$.

Resumiendo, la desigualdad es cierta si, y sólo si, $x > 2$. ◂

También podemos aprovechar el hecho de que elevar al cuadrado conserva el orden en los reales positivos: $0 < a < b \iff a^2 < b^2$. Vamos a utilizar esto para demostrar la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} \left|x+y\right| \leq |x| + \left|y\right| &\iff \left|x+y\right|^2 \leq \left(|x| + \left|y\right|\right)^2 \\ &\iff x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + 2\left|xy\right| \\ &\iff xy \leq \left|xy\right|, \end{aligned}$$

lo cual, evidentemente, es cierto. Observa que, de regalo, hemos probado que la igualdad en la desigualdad triangular es cierta si, y sólo si, $xy = \left|xy\right|$ o, lo que es lo mismo, si x e y tienen el mismo signo. Prueba tú a demostrar el resto de afirmaciones de la proposición anterior.

1.4 El principio de inducción

La definición del conjunto de los números naturales puede hacerse como la definición que hemos dado del conjunto de los números reales mediante una serie de propiedades que lo caractericen en lugar de especificar cuáles son sus elementos. Si el axioma del supremo es la propiedad clave que nos ha permitido definir los números reales, en el caso de los naturales dicha propiedad es la de ser inductivo.

Conjunto inductivo

Definición 1.14. Un subconjunto A de los números reales diremos que es *inductivo* si verifica las siguientes dos propiedades:
a) $1 \in A$,
b) si $a \in A$, entonces $a + 1 \in A$.

Ejemplo 1.15.
a) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^+$ son conjuntos inductivos.
b) Ningún conjunto acotado puede ser un conjunto inductivo.◂

Definición 1.16. El conjunto de los números naturales es el menor conjunto inductivo o, lo que es lo mismo, la intersección de todos los conjuntos inductivos.

Principio de inducción

Proposición 1.17. *Sea A un subconjunto de los números reales verificando que*
a) A es inductivo,
b) $A \subset \mathbb{N}$.
Entonces $A = \mathbb{N}$.

En otras palabras, para demostrar que un subconjunto del conjunto de los números naturales, $A \subset \mathbb{N}$, es, en realidad, el conjunto de los naturales es suficiente con comprobar que
a) $1 \in A$, y que

b) si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$.

La principal utilidad de este principio es demostrar que una propiedad indicada en el conjunto de los naturales es cierta. Por ejemplo, la propiedad "todos los números de la forma $n^3 + 5n$ son divisibles por 6" son en realidad muchas (tantas como naturales) afirmaciones. No es difícil fijar un natural y comprobar que para ese concreto la propiedad es cierta. Pero, ¿cómo podemos hacerlo para todos a la vez? En este tipo de demostraciones, el principio de inducción nos proporciona una ventaja. Para demostrar que se cumple para un natural puede suponerse que la propiedad es cierta para el natural anterior (hipótesis de inducción). Esto puede ser muy útil en algunas ocasiones.

Ejemplo 1.18. Demostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
Lo demostramos usando el método de inducción. Tenemos que comprobar que el conjunto

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N};\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \right\}$$

coincide con $\mathbb{N}$. Para ello es suficiente con demostrar que A es un conjunto inductivo, o sea, tenemos que comprobar que

a) la propiedad es cierta para $n = 1$, y que
b) si la propiedad es cierta para un número natural, también es cierta para el siguiente número natural.

Vamos allá.

a) Es inmediato comprobar que la propiedad se cumple la propiedad para $n = 1$.
b) Supongamos que se cumple para un natural fijo m y comprobemos que se cumple para $m + 1$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2m - 1) + (2m + 1) = m^2 + (2m + 1) = (m + 1)^2.$$

Por tanto, $A = \mathbb{N}$ y la propiedad se cumple para todos los naturales. ◂

1.4.1 Una aplicación del principio de inducción: el binomio de Newton

¿Cuántas posibilidades tienes de que aciertes la lotería primitiva? Tienes que escoger 6 números de entre 47 sin importar el orden. El número de combinaciones posibles es $\binom{47}{6}$.

Las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de p en p se definen como las distintas agrupaciones formadas con p elementos distintos, eligiéndolos de entre los n elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra sólo si difieren en algún elemento, y sin tener en cuenta el orden de colocación de sus elementos. El número de combinaciones que se pueden construir de esta forma es

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

A los números de la forma $\binom{n}{p}$, "n sobre p" se les suele llamar números *combinatorios*. Recordemos que el factorial de un número natural n es

Números combinatorios

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

y que $0! = 1$.

Las siguientes propiedades de los números combinatorios son fáciles de comprobar y nos serán muy útiles.
a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
b) $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$, para cualesquiera $i \leq n$ naturales.

Binomio de Newton

Proposición 1.19. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-1} b^i$$

Demostración. Vamos a probarlo usando el método de inducción. Es claro que la propiedad es cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para un natural fijo n y comprobemos que se cumple para $n+1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^{j} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] a^{n+1-i} b^i + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i. \quad \square
\end{aligned}$$

La utilidad del binomio de Newton estriba en que no es necesario calcular el desarrollo completo de $(x+3)^{15}$ si sólo nos interesa el coeficiente de x^4 que, por cierto, es $\binom{15}{4} 3^{11}$.

Triángulo de Pascal o de Tartaglia

Los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^n$ también se pueden encontrar usando el llamado triángulo de Pascal (o de Tartaglia). Este consiste en lo siguiente: comenzamos con un 1, en cada línea nueva añadimos unos en los extremos y bajo cada par de números colocamos su suma. El resultado que se obtiene nos da los coeficientes del binomio de Newton.

n	triángulo de Pascal	nº combinatorio	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\mathbf{n}}$
0	1	$\binom{0}{0}$	
1	1 1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	$a+b$
2	1 2 1	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	$a^2+2ab+b^2$
3	1 3 3 1	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Tabla 1.1 Triángulo de Pascal o Tartaglia

1.5 Intervalos y conjuntos destacados

Los conjuntos que van a jugar un papel más destacado son los intervalos.

Intervalo

Definición 1.20. Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un *intervalo* si para cualesquiera $x, y \in I$ se cumple que $[x,y] = \{t \in \mathbb{R} : \ x \leq t \leq y\} \subset I$.

Ya conoces cuáles son los distintos intervalos: abiertos, semiabiertos, cerrados, acotados o no:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\} \\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\} \\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\} \\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\} \\
[a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\} \\
]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\} \\
]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\} \\
]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}
\end{aligned}
$$

Definición 1.21. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

a) Diremos que $a \in A$ es un *punto interior* si existe $\varepsilon > 0$ tal que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset I$. **Punto interior**

b) El *interior* de A es el conjunto, $\mathring{A} = \{a \in A : \ a \text{ es un punto interior}\}$. Diremos que el conjunto A es *abierto* si coincide con su interior.

c) Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto adherente* si para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que **Punto adherente**

$$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset.$$

d) El *cierre* o *adherencia* del conjunto A es $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \text{ es un punto adherente de } A\}$. Diremos que el conjunto A es *cerrado* si coincide con su adherencia.

e) Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de A si para cualquier r positivo se cumple que **Punto de acumulación**

$$]a-r, a+r[\cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Notaremos A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A.

Punto aislado

f) Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto aislado* del conjunto A si existe $r > 0$ tal que

$$]a-r, a+r[\cap A = \{a\}.$$

Frontera

g) La *frontera* de A es $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Ejemplo 1.22.

a) Los intervalos abiertos, ya sean acotados o no, son conjuntos abiertos. De la misma forma los intervalos cerrados son conjuntos cerrados.
b) El conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ es cerrado y tiene interior vacío al igual que $\mathbb{Z}$. Además todos sus puntos son aislados.
c) El conjunto $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ tiene interior vacío, todos sus puntos son aislados y su cierre es $A \cup \{0\}$. Más concretamente, 0 es un punto de acumulación de A.◂

Proposición 1.23. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se verifican las siguientes afirmaciones.*

a) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$,
b) *A es abierto si, y sólo si, $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado.*

1.6 Ejercicios

Ejercicio 1.1. Calcular para qué valores de x se verifica que $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.

Solución 1.1. Para quitar denominadores tenemos que multiplicar por $x+2$.

a) Si $x > -2$, entonces $x+2 > 0$ y $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \iff 6x-9 < x+2 \iff x < \frac{11}{5}$.
b) Si $x < -2$, entonces $x+2 < 0$ y $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \iff 6x-9 > x+2 \iff x > \frac{11}{5}$, que no se verifica.

Resumiendo $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \iff -2 < x < \frac{11}{5}$.

Ejercicio 1.2. Encontrar aquellos valores de x que verifican que:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$,
b) $x^2 - 5x + 9 > x$,
c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0$,
d) $x^2 \leqslant x$,
e) $x^3 \leqslant x$,
f) $x^2 - (a+b)x + ab < 0$.

Solución 1.2.

a) $0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)} \iff 0 < x(1-x) \iff 0 < x < 1$.
b) $x^2 - 5x + 9 > x \iff x^2 - 6x + 9 > 0 \iff (x-3)^2 > 0 \iff x \neq 3$.
c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0 \iff x^3(x-2) < 0 \iff 0 < x < 2$.
d) $x^2 \leq x \iff x^2 - x \leq 0 \iff x(x-1) \leq 0 \iff x \in [0,1]$.
e) $x^3 \leq x \iff x(x-1)(x+1) \leq 0 \iff]-\infty, -1] \cup [0,1]$.
f) $0 > x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b) \iff x \in]\min\{a,b\}, \max\{a,b\}[$.

Ejercicio 1.3. Discutir para qué valores de x se verifica que:

a) $|x-1|\,|x+2| = 3$,
b) $|x^2 - x| > 1$,
c) $|x-1| + |x+1| < 1$,
d) $|x+1| < |x+3|$.

Solución 1.3.

a) $3 = |x-1|\,|x+2| = |\,(x-1)(x-2)\,| \iff (x-1)(x-2) = \pm 3 \iff x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{21}\right)$.
b) Vamos a discutir dos casos por separado,
   i) Si $x \in [0,1]$, $1 < \left|x^2 - x\right| = x - x^2 \iff x^2 - x + 1 < 0$ lo que no ocurre nunca.
   ii) Si $x \notin [0,1]$, $1 < \left|x^2 - x\right| = x^2 - x \iff x^2 - x - 1 > 0 \iff x \notin \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.
c) Nunca se verifica la desigualdad.
d) Vamos a usar que, *para números positivos*, $0 < x < y \iff x^2 < y^2$.

$$\begin{aligned} |\,x+1\,| < |\,x+3\,| &\iff |\,x+1\,|^2 < |\,x+3\,|^2 \iff (x+1)^2 < (x+3)^2 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 < x^2 + 6x + 9 \iff -2 < x. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4. Resolver las siguientes inecuaciones:
a) $|\,x-5\,| < |\,x+1\,|$, b) $|\,x-3\,| < 0$.

Solución 1.4.
a) Vamos a discutir las diferentes posibilidades.
   i) Si $x \leq -1$, la desigualdad se traduce en $-(x+5) < -(x+1)$ lo que no se cumple nunca.
   ii) Si $-1 < x < 5$, tenemos que $-x + 5 < x - 1 \iff x > 2$.
   iii) Si $x \geq 5$, la desigualdad $x - 5 < x + 1$ es cierta.
   Resumiendo, $|\,x-5\,| < |\,x+1\,| \iff x > 2$.
b) Nunca. El valor absoluto siempre es mayor o igual que cero.

Ejercicio 1.5. ¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$?

Solución 1.5. Operando obtenemos que

$$x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x \iff x^2 - x - 12 < 0 \iff (x-4)(x+3) < 0,$$

con lo que la desigualdad se cumple cuando los dos factores tienen signos distintos, esto es, cuando $x \in]-3, 4[$.

Ejercicio 1.6. Calcular, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes conjuntos
a) $A = [0,1] \cup [2,3[$,
b) $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$,
c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x^2 + 2x + 1\right| < \frac{1}{2}\right\}$,
d) $A = [0, +\infty[\cap \mathbb{Q}$.

Solución 1.6.
a) $\min(A) = \inf(A) = 0$, $\sup(A) = 3$, no tiene máximo.
b) $\min(A) = \inf(A) = 2$, no tiene supremo ni máximo.
c) Si quitamos el valor absoluto

$$\left|x^2 + 2x + 1\right| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < x^2 + 2x + 1 < \frac{1}{2} \iff \left\{\begin{array}{l} x^2 + 2x + \frac{1}{2} < 0 \\ x^2 + 2x + \frac{3}{2} > 0 \end{array}\right\}.$$

La segunda desigualdad se cumple siempre. Para estudiar la primera desigualdad, calculamos las raíces del polinomio:

$$x^2+2x+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)<0 \iff x\in\left]\frac{2-\sqrt{2}}{2},\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right[.$$

d) $\inf(A)=\min(A)=0$, no tiene supremo ni máximo.

1.6.1 Principio de inducción

Ejercicio 1.7. Demostrar que $1+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}$, para cualquier $n\in\mathbb{N}$.

Solución 1.7. Lo demostramos usando el método de inducción. Es inmediato que se cumple la propiedad para $n=1$. Supongamos que se cumple para un natural fijo n y comprobemos que se cumple para $n+1$:

$$1+2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n+2^{n+1}=2^{n+1}+2^{n+1}=2^{n+2}.$$

Ejercicio 1.8. Demostrar que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\leq 1$ para cualquier natural mayor o igual que dos.

Solución 1.8. Lo demostramos usando el método de inducción. Es inmediato que se cumple la propiedad para $n=1$. Supongamos que se cumple para un natural fijo n y comprobemos que se cumple para $n+1$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\leq\frac{1}{2}(1+1)=1.$$

Ejercicio 1.9. Probar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.

Solución 1.9. Tenemos que demostrar que $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ es divisible por 9 para cualquier natural n. Es fácil comprobar que se cumple para $n=1$. Supongamos que es cierto para un natura fijo n y veamos si es cierto para $n+1$:

$$\begin{aligned}(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 =&(n+1)^3+(n+2)^3+(n^3+9n^2+27n+27)\\ =&(n^3+(n+1)^3+(n+2)^2)+(9n^2+27n+27).\end{aligned}$$

Para acabar sólo hay que recordar que la suma de dos números divisibles por 9, es divisible por 9.

Ejercicio 1.10. Demostrar por inducción que $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, para cualquier $n\in\mathbb{N}$.

Solución 1.10. Para $n=1$ la igualdad es inmediata. Supongamos que se cumple para un natural n y veamos que también es cierta para $n+1$:

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n^2+n+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ejercicio 1.11. Demostrar que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Solución 1.11. Para $n = 1$ la igualdad es inmediata. Supongamos que se cumple para un natural n y veamos que también es cierta para $n + 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

Ejercicio 1.12. Demostrar que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Solución 1.12. Similar al Ejercicio 1.11.

1.6.2 Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.1. Demostrar por inducción que todos los números de la forma $n^3 + 5n$ son divisibles por 6.

Ejercicio 1.2. Demostrar por inducción que todos los números de la forma $3^{2n} - 1$ son divisibles por 8.

Ejercicio 1.3. Pruébese que para todo natural $n \geq 2$ se verifica que 3 *no* divide a $n^3 - n + 1$.

Ejercicio 1.4. Pruébese que para todo natural $n \geq 2$ se verifica que: 5 divide a $n^5 - n$.

Ejercicio 1.5. Demostrar que $(1+x)^n > 1 + nx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x > -1$.

Ejercicio 1.6. Demostrar que $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} > x^n + \frac{1}{x^n}$, para cualquier natural n y cualquier real x positivo distinto de uno.

Ejercicio 1.7. Probar que si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, entonces se verifica que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 1.8. Demostrar que, dado un natural n, $\sqrt{n}$ es natural o irracional.

Ejercicio 1.9. Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

Números complejos

2

2.1 Introducción

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501–1576) y Bombelli (1526–1572) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596–1650) quien afirmó que "ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación" y acuñó el calificativo *imaginarias* para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución de un problema resulta ser un número complejo esto se interpreta como que el problema no tiene solución.

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la naturaleza de los mismos; no se preguntaron ¿qué es un número complejo?, sino que se dijeron *¿para qué sirven?, ¿qué puede hacerse con ellos?* Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el conocido como *Teorema Fundamental del álgebra* que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que *también son números complejos.* Algunas de sus implicaciones las podemos comentar directamente. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x+3=0, \quad 2x+3=0, \quad x^2-2=0, \quad x^2+2x+2=0,$$

cuyas soluciones $x=-3$, $x=3/2$, $x=\pm\sqrt{2}$ y $x=1\pm i$ tienen sentido cuando x es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5+(1-i)x^4+(1/5-i\sqrt{2})x^2-8x+3-i/\sqrt{3}=0.$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El teorema fundamental del álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que *también* son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de *"números complejos"* se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra "i" que Euler (1707–1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

En estas notas vamos a dar solamente unos breves conceptos de distintas formas de expresar los números complejos y cómo se trabaja con ellos. Pero antes de empezar una advertencia: aunque históricamente (y vulgarmente) se llama i a la raíz cuadrada de -1 esta expresión no es totalmente cierta. Si así fuera obtendríamos la siguiente cadena de igualdades que no es posible,...¿verdad?

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = ii = i^2 = -1.$$

Suma de números complejos

Recordemos que para dotar a un conjunto, en este caso $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de estructura de cuerpo se necesita una suma y un producto que verifiquen ciertas propiedades. La suma no es nada nuevo, es la suma de $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial, es decir, si (a, b), (c, d) son dos elementos de $\mathbb{R}^2$, definimos su suma como

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Es evidente (por otra parte nosotros ya lo sabíamos del estudio de espacios vectoriales) que esta suma cumple las propiedades que tiene que cumplir:

1) Asociativa.
2) Conmutativa.
3) Existencia de neutro ($(0, 0)$).
4) Existencia de inverso ($-(a, b) = (-a, -b)$).

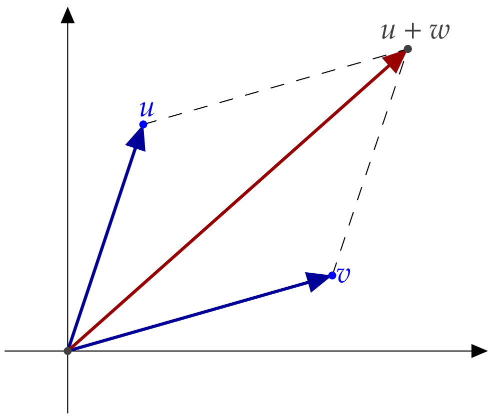


Figura 2.1 La suma de números complejos es la suma usual de vectores en el plano

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 2.1) es $z + w$.

Producto de números complejos

El producto sí es nuevo. Dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, definimos su producto como

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Tampoco es difícil comprobar que este producto es adecuado, en el sentido de que verifica las propiedades

5) Asociativa,
6) Conmutativa,
7) Existencia de elemento neutro (el neutro para el producto es $(1,0)$, comprúebalo).
8) Si $(a,b) \neq (0,0)$ entonces su inverso es

$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Comprueba también que $(a,b)(a,b)^{-1} = (1,0)$.

9) Distributiva: $(a,b)((c,d)+(e,f)) = (a,b)(c,d) + (a,b)(e,f)$.

Así, por ejemplo, $\frac{(2,3)}{(3,4)} = (2,3)\left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25}\right) = \left(\frac{18}{25}, \frac{1}{25}\right)$. Pues bien, los números complejos son justamente el cuerpo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Es decir cada número complejo es una pareja (a,b) donde a y b son números reales, y la suma y el producto de complejos son los que hemos descrito antes. A esta forma de representar los números complejos se la suele llamar *forma cartesiana*. Esta forma es muy cómoda para trabajar con sumas de números complejos pero no lo es tanto para trabajar con el producto: prueba a calcular $(1,-1)^4$.

Forma cartesiana

En la siguiente definición recogemos toda la información anterior.

Definición 2.1. Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}^2$ las operaciones de adición y producto definidas por

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

El elemento neutro de la suma es $(0,0)$ y $(1,0)$ es la unidad del producto. Además, $(-a,-b)$ es el opuesto de (a,b), y todo $(a,b) \neq (0,0)$ tiene inverso

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (léase "el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones suma y producto") es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman *números complejos*.

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho pero también perdemos algo. Te recuerdo que $\mathbb{R}$ tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en $\mathbb{C}$ no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en $\mathbb{C}$, pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica. En efecto, si suponemos que $\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{C}$ compatible con su estructura algebraica, como $i \neq 0$ habría de ser $0 < i^2 = -1$ (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación $\leq$ no respetara el orden de $\mathbb{R}$). Pero también $0 < 1^2 = 1$, luego $0 < 1 + (-1) = 0$ y eso sí que es contradictorio.

Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden. Así que ya sabes: ¡mucho cuidado con escribir desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

2.2 Forma binómica de un número complejo

Dentro de $\mathbb{R}^2$ podemos distinguir el subconjunto formado por los elementos que tienen la segunda componente 0, $\{(a,0),\ \ a \in \mathbb{R}\}$. Restringidos la suma y el producto a este subconjunto tenemos una propiedad curiosa y es que nos seguimos quedando en el subconjunto. Es inmediato observar que

$$\begin{aligned}(a_1,0)+(a_2,0) &= (a_1+a_2,0), \quad \forall a_1,\ a_2 \in \mathbb{R},\\ (a_1,0)(a_2,0) &= (a_1a_2,0), \quad \forall a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Esto hace que el conjunto $\{(a,0);\ a \in \mathbb{R}\}$, con la suma y el producto definidos antes sea también un cuerpo, pero este cuerpo se puede identificar con los números reales mediante la aplicación

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longleftrightarrow \{(a,0);\ a \in \mathbb{R}\}\\ a &\longleftrightarrow (a,0)\end{aligned}$$

De ahora en adelante siempre usaremos esta identificación; es decir, para nosotros van a ser indistinguibles el complejo $(a,0)$ y el número real a. Como consecuencia, cualquier número complejo (a,b) se puede escribir de la forma

$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)(0,1) = a+b(0,1).$$

Si ahora llamamos $(0,1) = i$, obtenemos que el número complejo $z = (a,b)$ (se le suele llamar a los números complejos con letras como z, u, v,...) se puede poner como $z = a+ib$.

Forma binómica

Esto es lo que se llama la *forma binómica* de un número complejo. Al número real a se le llama la *parte real* del complejo y al número b se le llama la *parte imaginaria.* A i también se le llama la *unidad imaginaria.* Es claro que i no es ningún número real (no es un par con la segunda componente 0) y cumple una propiedad que nos será útil y que, seguramente, ya conocías

Parte real e imaginaria

$$i^2 = ii = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1,$$

es decir, el cuadrado de i es -1. Esto nos permite que las fórmulas para la suma y el producto de números complejos, cuando están puestos en forma binómica, sean fáciles de recordar, ya que, formalmente, los vamos a sumar y multiplicar como si fueran números reales y simplemente tendremos en cuenta que $i^2 = -1$. Nos referimos a lo siguiente: antes hemos definido la suma de dos números complejos (puestos como pares) de la forma $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$. Esta misma operación, puesta en forma binómica, quedaría $a+ib+c+id = a+c+i(b+d)$, que es la suma formal de las parejas $a+ib$ y $c+id$, sacando al final factor común el i.

Para el producto sucede igual. Si multiplicamos dos complejos en forma de pares $(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$. Esto puesto en forma binómica sería $(a+ib)(c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$. Pero este resultado es lo que se obtiene multiplicando formalmente $a + ib$ por $c + id$ y tenemos en cuenta que $i^2 = -1$.

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc).$$

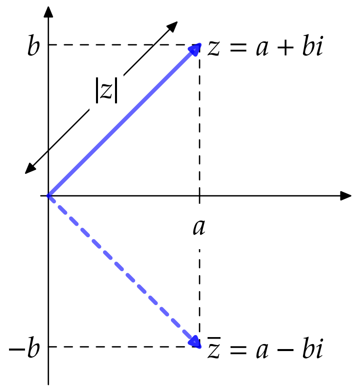


Figura 2.2 Representación de un número complejo

2.3 Representación gráfica. Conjugado y módulo de un número complejo

Según hemos definido, el número complejo $a + ib$ no es más que el elemento (a,b) del plano $\mathbb{R}^2$ y, en ese sentido, se habla del *plano complejo.* El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario.* **Plano complejo**

Definición 2.2. Si $z = a + ib$ es un número complejo (con a y b reales), entonces el *conjugado* de z se define como $\overline{z} = a - ib$ y el *módulo* o *valor absoluto* de z, se define como: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. **Conjugado** **Módulo**

Observa que $\sqrt{a^2 + b^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo $a^2 + b^2$.

Geométricamente, $\overline{z}$ es la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia del punto (a,b) a $(0,0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (a,b) (ver figura 2.2). La *distancia* entre dos números complejos z y w se define como $|z - w|$.

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver Figura 2.1) es $z + w$.

Proposición 2.3. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces*

a) $\overline{\overline{z}} = z$,

b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

c) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

d) $|z|^2 = z\overline{z}$,

e) $\max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$,

f) $|zw| = |z||w|$,

g) $|z + w| \leq |z| + |w|$. **Desigualdad triangular**

Demostración. La comprobación de estas afirmaciones es inmediata. Por ejemplo, para comprobar que la propiedad f) se verifica, basta observar que $|zw|$ y $|z||w|$ son números positivos cuyos cuadrados coinciden, pues

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2.$$

Para demostrar la última afirmación es suficiente probar que $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$. En efecto:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z}w \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2\left|\operatorname{Re}(z\overline{w})\right| \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2\left|z\overline{w}\right| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\left|\overline{w}\right| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\left|\overline{w}\right| \\
&= (|z|+|w|)^2. \square
\end{aligned}$$

Observación 2.4. De la demostración de la última afirmación se deduce que $|z+w| = |z|+|w|$ si, y sólo si, $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = \left|z\overline{w}\right|$, esto es, si $z\overline{w} \in \mathbb{R}_0^+$, o lo que es lo mismo $z\overline{w} = \rho$ donde $\rho \in \mathbb{R}_0^+$. Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente multiplicando por w como $z|w|^2 = \rho w$, esto es, $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ lo que quiere decir que z y w están en una misma semirrecta a partir del origen.

Ejemplo 2.5. La división de números complejos es fácil teniendo en cuenta que el producto de un complejo y su conjugado da como resultado el módulo al cuadrado de dicho número complejo.

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{1+i}{2-i}\,\frac{2+i}{2+i} = \frac{1+3i}{5}.$$

La división o el producto de dos números complejos no es difícil, pero sí que puede ser aburrido calcular $(1+i)^{10}$. ¿Existe algo como el binomio de Newton para números reales? Compruébalo tú mismo. Lo que sí es muy fácil es su módulo:

$$\left|(1+i)^{10}\right| = |1+i|^{10} = \sqrt{2}^{10} = 2^5. \triangleleft$$

2.4 Forma polar y argumento de un número complejo

Hay otras formas de representar los números complejos. Una de ellas es la forma polar. Supongamos que tenemos un número complejo $z = a + ib \neq 0$. Este complejo se corresponde con la pareja de números reales (a, b) que podemos representar en el plano.

A los dos ejes del plano (en este caso se suele llamar el plano complejo) se les denota por el eje real (donde se representa la primera componente) y el eje imaginario (donde se representa la segunda).

A la vista del dibujo está claro que el número z (o el par (a, b), al fin y al cabo para nosotros son la misma cosa) queda totalmente determinado por dos magnitudes: la longitud del vector y su "dirección". ¿Cómo medimos la dirección? Si normalizamos el número complejo z

$$z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right).$$

Como $\left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$ es un vector de módulo uno (pertenece a la circunferencia centrada en el origen y de radio uno), se tiene que poder escribir de la forma

$$\left(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|} \right) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$$

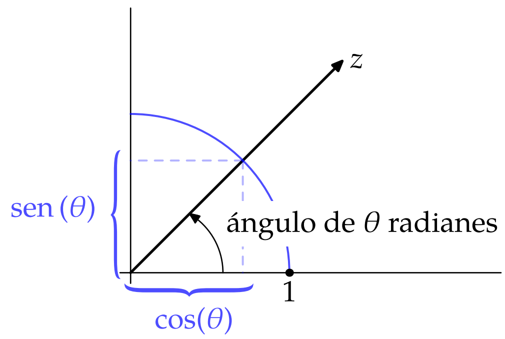


Figura 2.3 Argumento

para conveniente $\theta \in \mathbb{R}$. En otras palabras, $z = |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$.

Definición 2.6. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z| (\cos(t) + i \operatorname{sen}(t))$ cualquiera de ellos recibe el nombre de *argumento* de z. El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\operatorname{Arg}(z)$.

Argumento

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : \ z = |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))\}$$

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay un único argumento que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$. A dicho argumento se le llama *argumento principal* de z y se representa por $\arg(z)$.

Argumento principal

Al número complejo de módulo ρ y argumento θ se le suele representar ρ_θ y las fórmulas que hemos visto son la forma de pasar de la forma binómica a la forma polar de un complejo.

Forma polar

Observación 2.7.

a) Observa que el argumento principal no es más que el ángulo que forma el vector con la parte positiva del eje real.

b) Si θ_1 y θ_2 son dos argumentos del mismo número complejo, entonces

$$\theta_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg}(z) \iff \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1) = \operatorname{sen}(\theta_2) \end{array} \right\} \iff \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \ \text{ para algún } \ k \in \mathbb{Z}.$$

Dicho de otra manera, si θ es un argumento de z, podemos obtener el conjunto de todos argumentos añadiendo múltiplos enteros de 2π, esto es, $\operatorname{Arg}(z) = \{\theta + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. En particular,

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\arg(z) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Cálculo del argumento principal

Para calcular el argumento principal de un número complejo hay varias fórmulas, pero la más intuitiva es la siguiente: si $z = a + ib \neq 0$ su argumento principal θ es

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & \text{si } a > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0. \end{cases}$$

También se puede calcular el argumento de un número complejo mediante la fórmula

$$\arg(z) = \begin{cases} 2\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)+|z|}\right), & \text{si } z \notin \mathbb{R}^-, \\ \pi, & \text{si } z \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

Ejemplo 2.8. Si tenemos el complejo $z = -2 + 2\sqrt{3}i$, entonces su módulo será $|z| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$, mientras que el argumento se calcula de la siguiente forma. Como la parte real es negativa y la parte imaginaria es positiva, el argumento es

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) + \pi = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Así $-2 + 2\sqrt{3}i = 4_{\frac{2\pi}{3}}$.◁

Para pasar de la forma polar de un complejo a la forma binómica es aún más fácil. Utilizando las fórmulas de la trigonometría se tiene que si $z = \rho_\theta$ su forma binómica será $z = \rho\cos(\theta) + i\rho\operatorname{sen}(\theta)$. Realmente la fórmula $\rho(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))$ se llama la *forma o expresión trigonométrica* del complejo z.

Forma trigonométrica

Ejemplo 2.9. El complejo $5_{\frac{-3\pi}{4}}$ escrito en forma binómica es

$$5_{\frac{-3\pi}{4}} = 5\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i5\operatorname{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -5\frac{\sqrt{2}}{2} - i5\frac{\sqrt{2}}{2}.◁$$

2.4.1 Formula de De Moivre. Interpretación geométrica del producto

Si tenemos dos números complejos no nulos

$$z = |z|(\cos(\theta_1) + i\operatorname{sen}(\theta_1)), \quad w = |w|(\cos(\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_2)).$$

y los multiplicamos, obtenemos que

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos(\theta_1) + i\operatorname{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_2)) \\ &= |zw|(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2) + i(\operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2))) \\ &= |zw|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)). \end{aligned}$$

Es decir: *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.* Por ejemplo, para calcular $(1+i)^4$ como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1+i) = \pi/4$, se sigue que $(1+i)^4 = -4$.

Obsérvese que aunque los dos argumentos sean argumentos principales la suma no tiene por qué ser argumento principal.

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

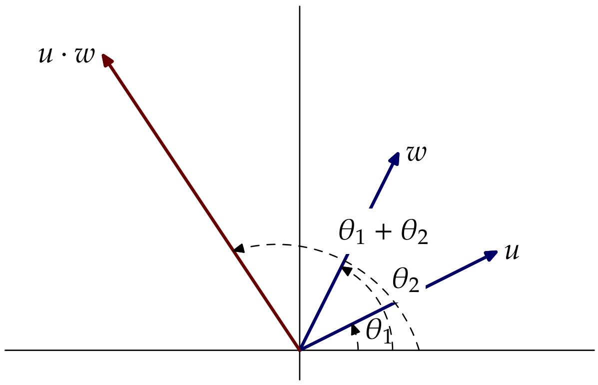


Figura 2.4 Interpretación geométrica del producto

Como consecuencia, es fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula que será de gran utilidad.

Fórmula de De Moivre

Proposición 2.10. *Si z es un complejo no nulo, θ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))$, y, en particular, $n\theta \in \operatorname{Arg}(z^n)$.*

Ejemplo 2.11. Aunque ya es conocido, veamos cómo podemos aplicar la fórmula de De Moivre para calcular $\cos(2x)$, con x real. Utilizando que $\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$ es un número complejo de módulo uno, la fórmula de De Moivre nos dice que

$$\begin{aligned}\cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x) &= (\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))^2 \\ &= \cos^2(x) + (i\operatorname{sen}(x))^2 + 2i\cos(x)\operatorname{sen}(x) \\ &= \left(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\right) + 2i\cos(x)\operatorname{sen}(x).\end{aligned}$$

Igualando parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria obtenemos que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \text{ y que } \operatorname{sen}(2x) = 2\cos(x)\operatorname{sen}(x). \triangleleft$$

2.5 Funciones elementales

2.5.1 Raíces de un número complejo

Aplicando la fórmula de De Moivre vamos a obtener las raíces n-ésimas de un número complejo. Para empezar por el caso más fácil vamos a suponer como complejo el número real 1. Vamos a llamar raíces n-ésimas de la unidad a aquellos números complejos z que verifiquen que $z^n = 1$. Trabajando con la forma trigonométrica de $z = |z|(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))$ y teniendo en cuenta que el módulo de 1 es 1 y su argumento principal es 0, obtenemos que

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)) = 1 = 1(\cos(0) + i\operatorname{sen}(0)),$$

de donde $|z|^n = 1$ y por tanto $|z| = 1$. Por otra parte igualando los argumentos tenemos que $n\theta = 0$. Se podría pensar que de aquí se puede obtener únicamente que $\theta = 0$ pero eso sería si consideraramos solamente argumentos principales. Realmente cualquier múltiplo entero de 2π es un argumento de 1 y entonces lo que obtenemos es que $n\theta = 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ y entonces $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, para $k \in \mathbb{Z}$. Dándole valores a k y numerando las correspondientes soluciones, obtenemos para los enteros comprendidos entre $k = 0$ y $k = n - 1$

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad \theta_2 = \frac{4\pi}{n}, \quad \ldots \quad \theta_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Obviamente hay más números enteros pero no es difícil ver que cualquier otro entero nos da un ángulo que difiere en un múltiplo entero de 2π de los que hemos obtenido y produce, por tanto, el mismo argumento. Concluyendo, las raíces n-ésimas de 1 son n números complejos distintos, $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ todos con módulo 1 y el argumento (no necesariamente el principal) de z_k es $\frac{2k\pi}{n}$ para $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

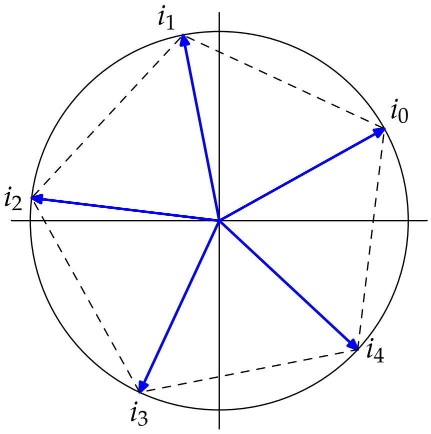


Figura 2.5 Raíces quintas de i

Ejemplo 2.12. Las raíces cúbicas de la unidad son los números complejos $z_0 = 1_0$, $z_1 = 1_{\frac{2\pi}{3}}$ y $z_2 = 1_{\frac{4\pi}{3}}$. Es decir $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, y $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si las representamos en el plano complejo quedan las tres en la circunferencia unidad pero es que además forman un triángulo equilátero uno de cuyos vértices está en el 1.

De igual forma las raíces cuartas de la unidad serán $z_0 = 1_0$, $z_1 = 1_{\frac{2\pi}{4}}$, $z_2 = 1_{\frac{4\pi}{4}}$ y $z_3 = 1_{\frac{6\pi}{4}}$, es decir $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ y $z_3 = -i$. En este caso, al igual que antes, todas las raíces se distribuyen en la circunferencia unidad (todas tienen módulo 1) pero ahora serán los vértices de un cuadrado, siendo uno de ellos (el que corresponde a z_0) el número 1. ◃

Esta propiedad puede generalizarse a cualquier natural: dado $n \in \mathbb{N}$ las raíces n-ésimas de la unidad son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unidad, estando uno de dichos vértices en el punto 1.

Finalmente si lo que queremos es hacer las raíces n-ésimas de un número complejo, haciendo pequeñas modificaciones en el proceso anterior, obtendremos las raíces que se recogen en el siguiente resultado.

Raíz n-ésima

Proposición 2.13. *Sea n un número natural. Las raíces n-ésimas del número complejo z vienen dadas por*

$$z_k = |z|^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

donde θ es un argumento de z.

Esto también tiene una interpretación geométrica clara. Las n raíces n-ésimas de un número complejo $z = |z|_\theta$ se distribuyen todas en la circunferencia centrada en el origen y radio $\sqrt[n]{|z|}$ formando los vértices de un polígono regular de n lados, uno de los cuales está en el complejo $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$.

2.5.2 La función exponencial

Definimos la exponencial compleja como

$$e^z = \exp(z) = e^{\operatorname{Re}(z)}\left(\cos(\operatorname{Im}(z)) + i\operatorname{sen}(\operatorname{Im}(z))\right).$$

Fórmula de Euler

Observa que $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, $\operatorname{Im}(z) \in \operatorname{Arg}(e^z)$. En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*

$$e^{it} = \cos(t) + i\operatorname{sen}(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. Haciendo $t = \pi$ tenemos la singular igualdad $e^{i\pi}+1 = 0$ en la que intervienen los números más importantes de las matemáticas. De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas *ecuaciones de Euler*:

Ecuaciones de Euler

$$\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \quad \operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Se prueba fácilmente que $e^{z+w} = e^z e^w$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$. Se deduce que para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$ es $e^z = e^{z+2k\pi i}$. Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función *periódica* con período $2\pi i$. Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva. Observa que la exponencial no se anula nunca pues $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} > 0$.

Justificación

¿Por qué hemos definido la función exponencial de esta forma? En un principio sólo tenemos la restricción de que su valor coincida con el de la función exponencial que ya conocemos en los números reales. Si queremos que se siga cumpliendo que $e^x e^y = e^{x+y}$, podemos avanzar algo. Si $z \in \mathbb{C}$, debería cumplirse que

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)+i\operatorname{Im}(z)} = e^{\operatorname{Re}(z)}\, e^{i\operatorname{Im}(z)}.$$

Por tanto, sólo nos hace falta definir e^{it} con t real. ¿Por que hemos elegido cómo definición $e^{it} = \cos(t) + i\operatorname{sen}(t)$? Una posible justificación es que la definición está hecha así para que las derivadas vayan bien: si

$$\left(e^{it}\right)' = ie^{it} = i\left(\cos(t) + i\operatorname{sen}(t)\right) = -\operatorname{sen}(t) + i\cos(t),$$

entonces coincide con

$$\left(\cos(t) + i\operatorname{sen}(t)\right)' = -\operatorname{sen}(t) + i\cos(t).$$

El segundo motivo necesita conocer el desarrollo de Taylor de la las funciones exponencial, seno y coseno. En la Sección ?? tienes los detalles.

2.5.3 Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación $e^w = z$, donde z es un número complejo no cero, va a tener infinitas soluciones $w \in \mathbb{C}$. Como

$$e^w = e^{\operatorname{Re}(w)} \left(\cos(\operatorname{Im}(w)) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im}(w))\right).$$

Para que $e^w = z$ es necesario y suficiente que:

a) $|e^w| = |z|$, esto es, $e^{\operatorname{Re}(w)} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re}(w) = \log|z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).

b) $\operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im}(w) \in \operatorname{Arg}(z)$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im}(w) = \arg(w) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que $\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$. Por tanto, existen infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $e^w = z$. Cualquiera de ellos se llama *un logaritmo* de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log}(z)$. De entre todos ellos elegimos uno, llamado *logaritmo principal*, definido por

Logaritmo

Logaritmo principal

$$\log(z) = \log|z| + i \arg(z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log(z) + i2k\pi$ para algún entero k.

Observación 2.14. Es importante que nos demos cuenta de que la igualdad $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$, que es válida para números reales positivos, no es siempre cierta cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\log(-1 + i\sqrt{3}) &= \log\left|-1 + i\sqrt{3}\right| + i \arg(-1 + i\sqrt{3}) \\
&= \log(2) + i\left(\arctan(-\sqrt{3}) + \pi\right) = \log(2) + i\frac{2\pi}{3} \\
\log(-\sqrt{3} + i) &= \log\left|-\sqrt{3} + i\right| + i \arg(-\sqrt{3} + i) \\
&= \log(2) + i\left(\arctan(-1/\sqrt{3}) + \pi\right) = \log(2) + i\frac{5\pi}{6} \\
\log\left((-1 + i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)\right) &= \log(-4i) = \log(4) - i\frac{\pi}{2} \\
&\neq \log(-1 + i\sqrt{3}) + \log(-\sqrt{3} + i) = \log(4) + i\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Lo que sí está claro es que el número $\log(z) + \log(w) \in \operatorname{Log}(zw)$, es decir, $\log(z) + \log(w)$ es *un* logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo principal de zw.

Como la función $z \mapsto \arg(z)$ es continua[1] en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ y discontinua en $\mathbb{R}_0^-$, se deduce que el logaritmo principal es discontinuo en $\mathbb{R}_0^-$ y continuo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

2.5.4 Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = e^{b \log(a)}$. Ahora, dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a, todos ellos son de la forma $\log(a) + i2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello,

[1] No hemos hablado todavía de funciones continuas, mucho menos de continuidad de funciones complejas, pero la idea intuitiva de que cuando z se acerca a z_0, el argumento principal de z se acerca al argumento principal de z_0 sigue siendo válida.

cualquier número complejo de la forma $e^{b(\log(a)+i2k\pi)}$ donde $k \in \mathbb{Z}$, es *una* potencia de base a y exponente b. De todas ellas se destaca una:

$$a^b = e^{b\log(a)}$$

y dicho número se llama *valor principal* de la potencia de base a y exponente b. Observa que si $b = 1/n$ donde $n \in \mathbb{N}$, el número **Valor principal**

$$\begin{aligned}
a^{1/n} &= \exp\left(\frac{1}{n}\log(a)\right)\\
&= \exp\left(\frac{\log(a)}{n} + i\frac{\arg(a)}{n}\right)\\
&= |z|^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\arg(a)}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\arg(a)}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

es el valor principal de la raíz n-ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$. Esta definición da lugar a las funciones exponenciales complejas de base a, $z \mapsto a^z$, definidas por $a^z = \exp(z\log(a))$. También permite definir la función potencia compleja de exponente b, $z \mapsto z^b$ como $z^b = \exp(b\log(z))$.

Las funciones exponenciales cumplen evidentemente la igualdad $a^{z+w} = a^z + a^w$ pero las funciones potencias no cumplen, en general como vimos al estudiar las raíces, la propiedad $(zw)^b = z^b w^b$. Esta igualdad se da en el caso de que

$$\exp(b\log(zw)) = \exp(b\log(z) + b\log(w))$$

o, puesto que la función exponencial es periódica de periodo $2\pi i$, cuando se verifique que

$$b\log(zw) = b\log(z) + b\log(w) + 2k\pi i, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Como caso particular, cuando z y w pertenecen al primer cuadrante la igualdad $\log(zw) = \log(z)+\log(w)$ es cierta con lo cual lo anterior se cumple para $k = 0$. Por los mismos motivos la igualdad $(z^b)^c = z^{bc}$ no es cierta en general.

2.6 Ejercicios

Ejercicio 2.1. Efectuar las operaciones indicadas:

a) $\frac{2-3i}{4-i}$

b) $\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$

c) $(2i-1)^2\left(\frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i}\right)$

d) $\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

Solución 2.1.

a) $\frac{2-3i}{4-i} = \frac{11}{17} - \frac{10}{17}i$

b) $\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2} = -\frac{15}{2} + 5i$

c) $(2i-1)^2\left(\frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i}\right) = -\frac{1}{2}(11+23i)$

d) $\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}} = 2 + i$

Ejercicio 2.2. Si $z_1 = 1-i$, $z_2 = -2+4i$, y $z_3 = \sqrt{3}-2i$, calcular las siguientes expresiones:

a) $z_1^2 + 2z_1 - 3$

b) $|2z_2 - 3z_1|^2$

c) $(z_3 - \overline{z_3})^5$

d) $|z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}|$

e) $\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$

f) $|z_1^2 + \overline{z_2}^2|^2 + |\overline{z_3}^2 - z_2^2|^2$

Solución 2.2.

a) $z_1^2 + 2z_1 - 3 = -1 - 4i$

b) $|2z_2 - 3z_1|^2 = 170$

c) $(z_3 - \overline{z_3})^5 = -1024i$

d) $|z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}| = 12$

e) $\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right| = \frac{3}{5}$

f) $|z_1^2 + \overline{z_2}^2|^2 + |\overline{z_3}^2 - z_2^2|^2 = 461 + (16 + 4\sqrt{3})^2$

Ejercicio 2.3. Calcular el módulo y el argumento de los números complejos:

a) 1

b) i

c) -1

d) $-i$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución 2.3.

a) $|1| = 1$, $\arg(1) = 0$.

b) $|i| = 1$, $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

c) $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$.

d) $|-i| = 1$, $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$.

e) $\left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 1$, $\arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 2.4. Expresa en forma polar los números complejos:

a) 3+3i

b) $-1 + \sqrt{3}i$

c) -1

d) $-1 - \sqrt{3}i$

Solución 2.4.

a) $\sqrt{18}_{\frac{\pi}{4}}$

b) $2_{\frac{2\pi}{3}}$

c) 1_{π}

d) $2_{-\frac{2\pi}{3}}$

Ejercicio 2.5. Calcula

a) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$

b) $\sqrt{2\sqrt{3} - 2i}$

c) $(-4 + 4i)^{1/5}$

d) $(-16i)^{1/4}$

e) $i^{2/3}$

Solución 2.5.

a) Desarrollamos la expresión

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^4 i^5 \\
&= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 i^5 \\
&= i\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) - \mathrm{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.
\end{aligned}$$

b) Como $\sqrt{2\sqrt{3}-2i} = \sqrt{2(\sqrt{3}-i)} = \sqrt{4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}$, para terminar sólo tenemos que calcular las raíces de $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Dichas raíces son $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ y $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

c) Las raíces de orden cinco de $-4+4i$ son

$$\left\{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)\right] :\ k=0,1,2,3,4\right\}.$$

d) Simplificamos un poco: $\sqrt[4]{-16i}=2\sqrt[4]{-i}$. Las raíces cuartas de $-i$ son

$$\left\{\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right) :\ k=0,1,2,3\right\}.$$

e) Las raíces cúbicas de -1 son

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) :\ k=0,1,2\right\}=\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

Ejercicio 2.6. Encuentra todas las soluciones de las ecuaciones:

a) $x^4-1=0$

b) $2x^4-3x^3-7x^2-8x+6=0$

Solución 2.6.

a) $x=1, i, -1, -i$

b) Es fácil comprobar que $\frac{1}{2}$ y 3 son soluciones del polinomio y que

$$2x^4-3x^3-7x^2-8x+6=0=2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+2x+2\right).$$

Para terminar, las raíces de x^2+2x+2 son $-1\pm i$.

Ejercicio 2.7. Resolver las ecuaciones

a) $z^4-81=0$,

b) $z^6+1=\sqrt{3}i$,

c) $(z+i)^3=1$.

Solución 2.7.

a) $x=3, 3i, -3, -3i$

b) Las raíces sextas de $-1+\sqrt{3}i=2_{\frac{2\pi}{3}}$ son

$$\left\{\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6}\right)\right] :\ k=0,1,\ldots,5\right\}.$$

c) Se trata de buscar los números complejos z de forma que $z+i$ sea una raiz cúbica de la unidad. Vamos a calcular entonces las raices cúbicas de 1 y después despejaremos z. Como el módulo de 1 es 1 y el argumento es 0, los tres números complejos z_i que vamos buscando son

$$
\begin{aligned}
z_1 + i &= \sqrt[3]{1}(\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)) = 1, \\
z_2 + i &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{0+2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0+2\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
z_3 + i &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{0+4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0+4\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

y obtenemos que

$$
z_1 = 1 - i, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right) \quad \text{y} \quad z_3 = -\frac{1}{2} - i\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right).
$$

E **Ejercicio 2.8.** Resolver la ecuación $(1+i)z^3 - 2i = 0$.

Solución 2.8. Como $(1+i)z^3 - 2i = 0 \iff z^3 = \frac{2i}{1+i} = 1+i$, las soluciones son las raíces cúbicas de $1+i$:

$$
\left\{ \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)\right] : \ k = 0, 1, 2 \right\}.
$$

E **Ejercicio 2.9.** Resolver la ecuación $z^5 = \bar{z}$

Solución 2.9.

a) En primer lugar, tomando módulos $\left|z^5\right| = |z|^5$ y $\left|\bar{z}\right| = |z|$, con lo que $|z|^5 = |z|$. De aquí obtenemos que $|z| = 0$ o $|z| = 1$.
Si $|z| = 0$, entonces $z = 0$. Supongamos ahora que $|z| = 1$ y notemos $\theta = \arg(z)$,

$$
\begin{aligned}
z^5 = \bar{z} &\iff \cos(5\theta) + i \operatorname{sen}(5\theta) = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) \\
&\iff 5\theta - (-\theta) = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \iff \theta = \frac{k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Por tanto las soluciones son 0 y $\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{3}\right) : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$. En realidad, lo que hemos escrito son las raíces sextas de la unidad y es suficiente considerar $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5.

b) Otra forma posible de resolver la ecuación es trabajar directamente en lugar de igualar módulos y argumentos a ambos lados de la igualdad. Concretamente, sabemos que $|z| = 0$ o $|z| = 1$. En este segundo caso, se tiene que

$$
z^5 = \bar{z} \iff z^6 = \bar{z}z \iff z^6 = |z|^2 \iff z^6 = 1,
$$

de donde obtenemos que $z = 0$ o es una de las raíces sextas de la unidad.

Ejercicio 2.10. Expresa los 8 números $\pm 1 \pm i, \ \pm\sqrt{3} \pm i$ en la forma $re^{i\varphi}$.

Solución 2.10.

$$1 = e^{i0},\ -1 = e^{i\pi},\ i = e^{i\pi/2},\ -i = e^{i3\pi/2}, \sqrt{3} \pm i = 2e^{\pm i\pi/6}, -\sqrt{3} \pm i = 2e^{\pm i5\pi/6}.$$

Ejercicio 2.11. Calcula $\log(z)$ y $\operatorname{Log}(z)$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i,\ -i,\ e^{-3},\ e^{5i},\ 4,\ -5e,\ 1+i.$$

Solución 2.11. Sabemos que el logaritmo principal de un número complejo z es $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$. El conjunto de todos los logaritmos se obtiene directamente cambiando argumento principal por el conjunto $\operatorname{Arg}(z)$. Sólo indicamos el primero.

a) $\log(i) = \log|i| + i\arg(i) = i\frac{\pi}{2}$.
b) $\log(-i) = \log|-i| + i\arg(-i) = -i\frac{\pi}{2}$.
c) $\log(e^{-3}) = \log\left|e^{-3}\right| + i\arg(e^{-3}) = -3$.
d) $\log(e^{5i}) = \log\left|e^{5i}\right| + i\arg(e^{5i}) = 1 + i(5-2\pi)$.
e) $\log(4) = \log|4| + i\arg(4) = \log(4)$.
f) $\log(-5e) = \log|-5e| + i\arg(-5e) = \log(5e) + i\pi$.
g) $\log(1+i) = \log|1+i| + i\arg(1+i) = \log(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 2.12. Calcula $\log(3i) + \log(-1+i\sqrt{3})$ y $\log\left(3i(-1+i\sqrt{3})\right)$.

Solución 2.12.
a) $\log(3i) = \log(3) + i\frac{\pi}{2}$ y $\log(-1+\sqrt{3}i) = \log(2) + i\frac{2\pi}{3}$.
b) $\log\left(3i(-1+i\sqrt{3})\right) = \log(-3\sqrt{3}-3i) = \log(6) - i\frac{5\pi}{6}$.
En consecuencia, el logaritmo de un producto *no* es igual a la suma de los logaritmos si hablamos de logaritmos principales.

Ejercicio 2.13. Calcula $\log(-1-i) - \log(i)$ y $\log\left(\frac{-1-i}{i}\right)$.

Solución 2.13.
a) $\log(-1-i) - \log(i) = \log(\sqrt{2}) - i\frac{3\pi}{4} - i\frac{\pi}{2} = \log(\sqrt{2}) - i\frac{5\pi}{4}$.
b) $\log\left(\frac{-1-i}{i}\right) = \log(-1+i) = \log(\sqrt{2}) - i\frac{3\pi}{4}$.

Ejercicio 2.14. Calcula $(-4)^i$, i^{-3i}, i^i, 1^{2i}, 3^{1-i}, $((-i)^i)^i$, $(1+i)^{1+i}$.

Solución 2.14.
a) $(-4)^i = e^{i\log(-4)} = e^{i(\log(4)+i\pi)} = e^{-\pi+i\log(4)} = e^{-\pi}\left(\cos(\log(4)) + i\operatorname{sen}(\log(4))\right)$.
b) $i^{-3i} = e^{-3i\log(i)} = e^{-3i(i\frac{\pi}{2})} = e^{\frac{3\pi}{2}}$.
c) $i^i = e^{i\log(i)} = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.
d) $1^{2i} = e^{2i\log(1)} = e^0 = 1$.
e) $3^{1-i} = e^{(1-i)\log(3)} = e^{\log(3)}(\cos(-\log(3)) + i\operatorname{sen}(-\log(3))) = 3(\cos(-\log(3)) + i\operatorname{sen}(-\log(3)))$.
f) $(-i)^i = e^{i\log(-i)} = e^{-ii\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}$ y, $(e^{\frac{\pi}{2}})^i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
g)

$$\begin{aligned}
(1+i)^{1+i} &= \exp\left((1+i)\log(1+i)\right) = \exp\left((1+i)(\log(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4})\right)\\
&= \exp\left(\log(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} + i\left(\frac{\pi}{4} + \log(\sqrt{2})\right)\right)\\
&= e^{\log(\sqrt{2})-\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \log(\sqrt{2})\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \log(\sqrt{2})\right)\right)
\end{aligned}$$

E **Ejercicio 2.15.** Demuestra que
a) $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\operatorname{sen}^2(x)$, y
b) $\operatorname{sen}(3x) = 3\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^3(x)$.

Solución 2.15. Vamos a resolver los dos apartados al mismo tiempo. Observa que, usando la fórmula de De Moivre, se tiene que

$$(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))^3 = \cos(3x) + i\operatorname{sen}(3x).$$

Si desarrollamos el cubo de la izquierda

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\operatorname{sen}(3x) &= (\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))^3\\ &= \cos^3(x) + i\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) - 3\cos(x)\operatorname{sen}^2(x) - i\operatorname{sen}^3(x).\end{aligned}$$

Para terminar el ejercicio sólo hace falta igualar parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria.

Ejercicio 2.16. Calcula $(1-i)^{3/2}$.

Solución 2.16. Calculamos el valor principal usando que $1 - i = \sqrt{2}_{-\pi/4}$,

$$\begin{aligned}(1-i)^{3/2} &= e^{\frac{3}{2}\log(1-i)}\\ &= \exp\left(\frac{3}{2}\left(\log(\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= e^{\frac{3}{2}\log(\sqrt{2})}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right)\\ &= 2^{3/4}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right).\end{aligned}$$

E **Ejercicio 2.17.** Comprueba que la función $f(z) = e^z$ transforma el conjunto

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C};\ 0 \le x,\ 0 \le y \le \pi\}$$

en el conjunto $\{w \in \mathbb{C};\ |w| \ge 1,\ \operatorname{Im}(w) \ge 0\}$.

Solución 2.17. Sabemos que $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$. Por tanto,

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^x \ge 1 \iff x \ge 0.$$

Para terminar, $\operatorname{Im}\left(e^{x+iy}\right) = e^x\operatorname{sen}(y) \le 0$ si $y \in [0,\pi]$.

2.6.1 Ejercicios complementarios

Ejercicio 2.1. Calcula las raíces de la ecuación $z^4 + iz = 0$.

E **Ejercicio 2.2.** Estudia para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $(1+i)^n = (1-i)^n$.

Ejercicio 2.3. Representar gráficamente el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por la desigualdad

$$|z| + \operatorname{Re}(z) \le 1, \quad z \in \mathbb{C}$$

Sucesiones de números reales

3

El concepto de límite es básico en Cálculo y, de entre las diversas posibilidades, hemos elegido que haga su aparición asociado a sucesiones de números reales. La idea intuitiva de sucesión es sencilla: una sucesión es una lista ordenada.

3.1 Definición y propiedades.

Definición 3.1. Una *sucesión* de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales, esto es,

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R}, \\ n &\mapsto x_n. \end{aligned}$$

Sucesión

Llamaremos *término general* a x_n y, usualmente, no mencionaremos la función sino sólo la imagen de la función. Dicho de otra manera, hablaremos de sucesión con término general x_n y la notaremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Término general

Ejemplo 3.2. Hay dos formas usuales de definir una sucesión: mediante una fórmula general que nos permita obtener todos los términos de la sucesión o, por recurrencia, o sea obtenemos cada término en función de los anteriores. Por ejemplo, la sucesión $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión 1, 3, 5, 7,... Como puedes ver, sabemos todos los términos de la sucesión. El que ocupa el lugar 53 es $\frac{1}{105}$. En cambio, la sucesión definida como $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ conocida como sucesión de Fibonacci está definida por recurrencia. Para calcular un término tenemos que conocer previamente el valor de los dos anteriores. No importa. Puesto que sabemos los dos primeros, podemos calcular el tercero y así sucesivamente: $0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ ◁

Definición 3.3. Diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *convergente* si existe $x \in \mathbb{R}$ verificando que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$, para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ o $\{x_n\} \to x$.

Sucesión convergente

Es fácil observar que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$.

Ejemplo 3.4.

a) La sucesión constantes son convergentes y su límite es dicha constante.
b) La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero.

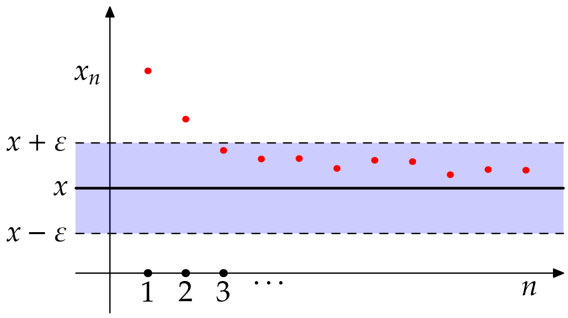


Figura 3.1 Límite de una sucesión

c) La sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.
d) La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente. ◂

3.1.1 Sucesiones y acotación

Definición 3.5. Diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está *acotada superiormente* (respectivamente inferiormente) si existe $M\in\mathbb{R}$ verificando que $x_n \leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$ (respectivamente $x_n \geq M$).

Sucesión acotada

Diremos que la sucesión está *acotada* si lo está superior e inferiormente o, lo que es lo mismo, si existe $M\in\mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M$, para cualquier natural n.

Proposición 3.6. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Aplicamos la definición de convergencia para $\varepsilon = 1$. Entonces existe un natural n_0 tal que $|x_n - x| < 1$ para $n \geq n_0$. En particular, el conjunto $\{x_n : n \geq n_0\}$ está acotado superiormente por $x+1$ e inferiormente por $x-1$. El resto de los términos de la sucesión también está acotado por ser un conjunto finito. Por tanto, la unión de ambos está acotado. □

Observación 3.7. El recíproco no es cierto. La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada pero no es convergente.

3.1.2 Álgebra de límites

Proposición 3.8. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones convergentes. Entonces*

a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$,

b) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$,

c) si $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *se tiene que* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$.

Proposición 3.9. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a cero e $\{y_n\}$ una sucesión acotada. Entonces $\{x_n y_n\}$ es convergente a cero.*

Ejemplo 3.10. Vamos a calcular $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(3n^4-2n+7\right)}{\ln\left(2n^2+2n-1\right)}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(3n^4-2n+7)}{\ln(2n^2+2n-1)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^4(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4})\right)}{\ln\left(n^2(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^4)+\ln\left(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4}\right)}{\ln(n^2)+\ln\left(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4\ln(n)+\ln\left(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4}\right)}{2\ln(n)+\ln\left(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\end{aligned}$$

dividimos por $\ln(n)$ numerador y denominador

$$= \frac{4}{2} = 2. \triangleleft$$

3.1.3 Convergencia y orden

Proposición 3.11. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones convergentes. Supongamos que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n\}$ es infinito. Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.*

Proposición 3.12. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ sucesiones de números reales verificando que* **Regla del sandwich**
a) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$ y que
b) $x_n \leq y_n \leq z_n$, para cualquier n natural.
Entonces $\{y_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n$.

Ejemplo 3.13. Vamos a calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2\sqrt{n}}.$$

Acotamos superior e inferiormente:

$$n\frac{1}{n^2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2\sqrt{n}} \leq n\frac{n}{n^2\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como nuestra sucesión está encajada entre dos sucesiones que tienden a cero, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = 0. \triangleleft$$

3.2 Sucesiones parciales

Si una sucesión es una "lista" de números, podemos construir una lista nueva escogiendo algunos de estos, por ejemplo los que ocupan un lugar par o impar. A este tipo de sucesiones las llamaremos parciales de la sucesión original.

Sucesión parcial

Definición 3.14. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que $\{y_n\}$ es una *sucesión parcial* de $\{x_n\}$ si existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{\sigma(n)}$ para cualquier natural n.

Ejemplo 3.15.

a) El primer ejemplo de sucesión parcial de una sucesión dada es simple: eliminemos una cantidad finita de términos al inicio de la sucesión. Por ejemplo, eliminar los tres primeros términos se consigue con la aplicación $\sigma(n) = n + 3$. La sucesión $\{x_{n+3}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es lo que se llama una *cola* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Cola

En general, si p es un número natural, las sucesión parcial $\{x_{n+p}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *cola* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La convergencia de una sucesión y de sus colas es equivalente: la sucesión converge si, y sólo si, lo hacen todas o alguna de sus colas.

b) Quedarnos sólo con los términos que ocupan una posición par o impar consiste en considerar las parciales $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$. ◃

Proposición 3.16. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales convergente. Entonces cualquier parcial es convergente y con el mismo límite.*

Este resultado se suele usar para demostrar que una sucesión *no* es convergente: si existe alguna parcial no convergente o existen parciales distintas convergentes a límites distintos, la sucesión original no es convergente.

Ejemplo 3.17. La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente puesto que la parcial de los pares converge a 1 mientras que la de los impares lo hace a -1. ◃

3.3 Monotonía

La definición de monotonía para funciones cualesquiera se puede enunciar para sucesiones.

Sucesión creciente

Definición 3.18. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *creciente* si cumple que $x_n \le x_{n+1}$ para todo natural n. Dicho de otra forma, cuando avanzamos en la lista los términos son mayores:

$$n \le m \implies x_n \le x_m.$$

Análogamente, diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *decreciente*si cumple que $x_n \ge x_{n+1}$ para todo natural n o, lo que es lo mismo, $n \le m \implies x_n \ge x_m$.

Evidentemente no todas las sucesiones son monótonas al igual que no todas las funciones son monótonas. Por ejemplo, la sucesión $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona ni tampoco lo es la sucesión $\{(-1)^n\}$.

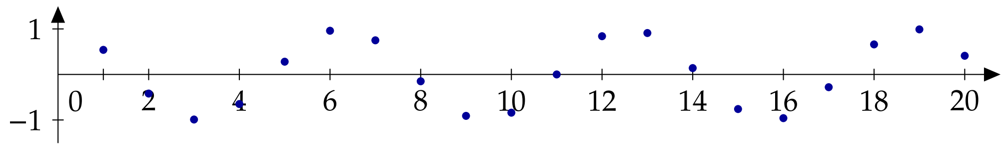


Figura 3.2 La sucesión $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona

Eso sí, de cualquier sucesión siempre podemos elegir términos cada vez mayores o cada vez menores. En otras palabras, siempre podemos elegir una sucesión parcial monótona.

Proposición 3.19. *Toda sucesión tiene una parcial monótona.*

¿Cuál es el interés de las sucesiones monótonas? Son más fáciles de estudiar. Por ejemplo, la convergencia de las sucesiones monótonas se reduce al estudio de su acotación.

Proposición 3.20. *Una sucesión monótona es convergente si, y sólo si, está acotada. De hecho, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

El hecho de que las sucesiones monótonas y acotadas sean convergentes nos permite demostrar que una sucesión es convergente sin, teóricamente, conocer su límite.

Ejemplo 3.21. Vamos a estudiar la convergencia de la sucesión

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1},\ \forall n \geq 1.$$

Para demostrar que esta sucesión es convergente vamos a comprobar que es una sucesión monótona y acotada.

a) Observa que $x_2 = \sqrt{2} > x_1 = 1$. Vamos a demostrar por inducción que la sucesión es creciente.
   i) El primer paso ya lo tenemos dado: $x_2 = \sqrt{2} > x_1 = 1$.
   ii) Si ahora suponemos que $x_n < x_{n+1}$, veamos que $x_{n+2} > x_{n+1}$:
   $$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}+1} > \sqrt{x_n + 1} = x_{n+1}.$$
   Luego la sucesión es monótona creciente.
b) Veamos que también está mayorada, concretamente que $x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De nuevo lo comprobamos por inducción.
   i) Es inmediato para $n = 1$.
   ii) Si $x_n \leq 2$, veamos que para x_{n+1} también se verifica:
   $$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1} \leq \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \leq 2.$$

Por tanto, existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ y lo calculamos haciendo uso de la fórmula de recurrencia. Tomando límites

$$x_{n+1}^2 = x_n + 1 \implies x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como $\{x_n\}$ es creciente y el primer término es 1, la única posibilidad que cabe es que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ◁

E **Ejemplo 3.22.** Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia como $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $3x_{n+1} = 2 + x_n^3$ para cualquier natural n. Estudia si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y, caso de que lo sea, calcula su límite.

a) Si calculas algunos términos de la sucesión, parece que la sucesión es creciente. Vamos a comprobarlo por inducción.
   i) $x_1 = -\frac{3}{2} \leq x_2 = -\frac{11}{24}$.
   ii) Supongamos que $x_n \leq x_{n+1}$ para un natural n, entonces

$$x_{n+1} = \frac{2 + x_n^3}{3} \leq \frac{2 + x_{n+1}^3}{3} = x_{n+2}$$

ya que la función $f(x) = x^3$ es creciente.

Acabamos de demostrar que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}\}$ es inductivo y que, por tanto, la sucesión es creciente.

b) ¿Está acotada la sucesión? Por ser una sucesión creciente, está acotada inferiormente. Sólo nos falta encontrar una cota superior. De hecho, la sucesión será convergente si, y sólo si, está acotada superiormente. Si la sucesión fuera convergente a un número L, como $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$, se tiene que cumplir que $3L = 2 + L^3$. Las soluciones de este polinomio son 1 y -2 (compruébalo por ejemplo por el método de Ruffini). Dado que la sucesión es creciente y su primer término es $-\frac{3}{2}$, queda descartado que el límite sea -2. Vamos a comprobar por inducción que 1 es una cota superior.
   i) Es evidente que $x_1 = -\frac{3}{2} \leq 1$.
   ii) Supongamos que $x_n \leq 1$ para un natural n, entonces

$$x_{n+1} = \frac{2 + x_n^3}{3} \leq \frac{2 + 1}{3} \leq 1.$$

En resumen, la sucesión es creciente y mayorada y, por lo visto anteriormente, su límite es 1. ◃

Uniendo los dos resultados anteriores: toda sucesión acotada tiene una parcial monótona y que, por ser parcial, sigue siendo acotada y, por tanto, convergente.

Teorema de Bolzano–Weierstrass

Teorema 3.23 (teorema de Bolzano–Weierstrass). *Toda sucesión acotada tiene una parcial convergente.*

Aunque lo usaremos poco en los ejemplos prácticos, este teorema es la clave que permite probar la existencia de máximo y mínimo de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados.

3.4 Sucesiones divergentes

La sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente, pero tiene un comportamiento muy particular. Los términos de esta sucesión toman valores tan grandes como se desee siempre que dicho términos sean lo suficientemente avazandos. A esto nos solemos referir como que la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$.

Definición 3.24.

a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge positivamente* o *tiende a* $+\infty$ si para cualquier $M \in \mathbb{R}$ existe un natural n_0 tal que $x_n \geq M$ para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
b) De manera similar, diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge negativamente* o que *tiende a* $-\infty$ si para cualquier $K \in \mathbb{R}$ existe un natural n_0 tal que $x_n \leq K$ para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.
c) En general, diremos que una sucesión es *divergente* si diverge positiva o negativamente.

De la definición se deduce directamente que las sucesiones divergentes no están acotadas: las sucesiones divergentes positivamente no están acotadas superiormente y las que divergen negativamente no están acotadas inferiormente.

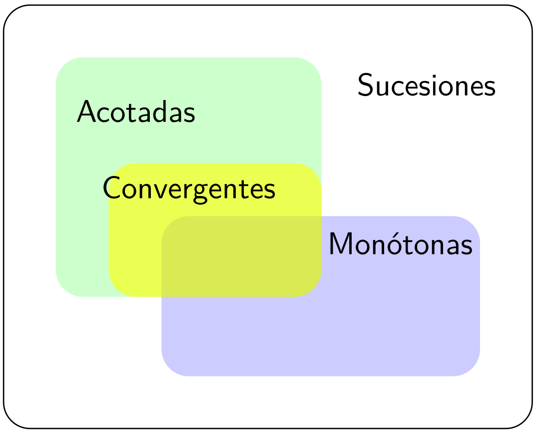


Figura 3.3 Distintos tipos de sucesiones

Observación 3.25. Un error muy común es decir que una sucesión tiende a $+\infty$ si "sus términos son cada vez más grandes" o "si hay términos tan grandes como se quiera". Compruébalo en los siguientes ejemplos:

a) La sucesión $1, 1, 2, 4, 3, 9, \ldots, n, n^2, \ldots$ no es creciente pero es divergente.
b) La sucesión $1, 1, 2, 1, 3, 1, \ldots, n, 1, \ldots$ tiene términos tan grandes como se quiera pero no es divergente.

Proposición 3.26. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales.*

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\{y_n\}$ está acotada inferiormente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = +\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$ si, y sólo si, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y existe un natural n_0 y un número positivo k tal que $y_n \geq k$ para $n \geq n_0$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.

Ejemplo 3.27. Vamos a probar que

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } x > 1, \\ 0, & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

Comencemos con el caso $x > 1$. Vamos a demostrar que la sucesión $\{x^n\}$, que claramente es creciente, no está acotada. Por reducción al absurdo, supongamos que sí está acotada. En ese caso, la sucesión es convergente al supremo de sus elementos por ser creciente. Notemos L a dicho supremo. Se tiene que $x^n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En particular,

$$x^{n+1} \leq L,\ \forall n \in \mathbb{N} \implies x^n \leq \frac{L}{x} < L,$$

lo que contradice que L sea el supremo.
Si $x < 1$, entonces $\frac{1}{x} > 1$ y podemos aplicar el apartado anterior para obtener que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. ◂

3.5 Criterios de convergencia

El primer criterio que vamos a ver, el criterio de Stolz, permite resolver indeterminaciones de la forma "$\frac{0}{0}$" o "$\frac{\infty}{\infty}$". En cierta manera juega un papel similar a la regla de L'Hôpital para cocientes de funciones.

Proposición 3.28. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales. Supongamos que se verifica alguna de las siguientes condiciones:* **Criterio de Stolz**

a) $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y diverge positivamente, o bien

b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona.*
Entonces se verifica que:
a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = L \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.
b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.
c) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = -\infty$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.

Veamos un ejemplo de su uso.

Ejemplo 3.29. Vamos a calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}.$$

Aplicando el criterio de Stolz, tenemos que estudiar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2)-(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{(n+1)^3-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2+3n+1} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$. ◂

Criterio de la raíz

Proposición 3.30. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales positivos. Se verifica que:*
a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.
b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = +\infty$.

Ejemplo 3.31. Aplicando el criterio de la raíz, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. ◂

Regla del número e

Proposición 3.32. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales convergente a uno, y sea* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión cualquiera. Entonces se verifica que:*
a) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1) = L \in \mathbb{R} \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^L$.
b) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1) = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = +\infty$.
c) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1) = -\infty \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0$.

Ejemplo 3.33. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}\right)^{n+3}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}\right)^{n+3} = e^L \iff \lim_{n\to\infty} (n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}-1\right) = L.$$

Para terminar, resolvemos el segundo límite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} (n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}-\frac{n^2+2n-2}{n^2+2n-2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)(-3n+5)}{n^2+2n-2} = -3. \text{ ◂}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.34. La sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es creciente y tiene límite e.
Para comprobar que, en efecto, es creciente vamos a escribir el término n-ésimo utilizando el binomio de Newton

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\frac{1}{n^k}\\ &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots\\ &\qquad \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

Te puedes imaginar cuál es el término siguiente:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\frac{1}{3!} + \cdots\\ &\qquad \cdots + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\frac{1}{n!}\\ &\qquad \cdots + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Observa los dos términos que acabamos de escribir. Hay dos diferencias:

a) Este último tiene un sumando más que el término n-ésimo. Dicho término de más, el último, es positivo. En realidad, todos los sumandos son positivos.

b) Si nos fijamos en el resto de sumandos y vamos comparando uno a uno

$$\begin{aligned}1 &\leq 1,\\ 1-\frac{1}{n} &\leq 1-\frac{1}{n+1},\\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) &\leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right),\end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Uniendo estos dos apartados, obtenemos la desigualdad que estábamos buscando, esto es, que $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

El cálculo del límite es fácil utilizando la Proposición 3.32 (la regla del número e):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^L \iff \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = L,$$

y este segundo límite es inmediato comprobar que vale uno.

Ejemplo 3.35. Fórmula de Stirling

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

FALTA ◃

3.6 Ejercicios

3.6.1 Sucesiones

Ejercicio 3.1. Prueba que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Solución 3.1. Sabemos que $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (es la suma de una progresión geométrica) y, usando que $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, se obtiene lo pedido.

Ejercicio 3.2. Sea a un número real positivo y definamos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

Solución 3.2. Usando la definición de la sucesión, se puede comprobar que

$$x_1 = a,\ x_2 = \frac{a}{1+a},\ x_3 = \frac{a}{1+2a}$$

y que, en general, $x_n = \frac{a}{1+(n-1)a}$, con lo que es inmediato concluir que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ejercicio 3.3. Demostrar que la sucesión $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \geq 1$ es convergente y calcular su límite.

Solución 3.3.

a) Veamos por inducción que la sucesión es creciente. Es inmediato comprobar que $x_1 < x_2$. Si $x_n < x_{n+1}$ tenemos que comprobar que $x_{n+1} < x_{n+2}$:

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} < \sqrt{3x_{n+1}} = x_{n+2}.$$

b) Además es una sucesión acotada, ya que por inducción otra vez tenemos que $x_n \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es inmediato, y si $x_n \leq 3$, comprobémoslo para x_{n+1}. En efecto,

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} \leq \sqrt{3 \cdot 3} = 3.$$

Por tanto, la sucesión es creciente y mayorada, luego existe su límite x, que estará comprendido entre $1 \leq x \leq 3$. Para calcular su valor vamos a tomar límites en la fórmula de recurrencia, esto es $x_{n+1}^2 = 3\,x_n \implies x^2 = 3x \implies x(x-3) = 0$ de lo que se deduce que $\lim_{n\to\infty} x_n = x = 3$.

Ejercicio 3.4. Estudiar la convergencia de la sucesión definida como $a_1 = 2$ y $x_{n+1} = \frac{x_n^2+5}{6}$, para $n \geq 1$.

Solución 3.4. En este caso se trata de estudiar la convergencia de una sucesión que viene definida de forma recurrente. Sabemos que si demostramos que la sucesión es monótona y acotada entonces es convergente (el reciproco no es en general cierto; si es convergente sí que es acotada pero no tiene por qué ser monótona). Veamos si es monótona. Si hay algún tipo de monotonía esa monotonía se intuirá en los primeros términos. Teniendo en cuenta que $a_1 = 2$ obtenemos que $a_2 = \frac{2^2+5}{6} = \frac{3}{2} < 2 = a_1$. Aún no hemos demostrado nada, bueno hemos demostrado que en caso de ser monótona será decreciente. Veamos que sí lo es. Razonando por inducción tendremos que demostrar que $a_2 < a_1$ (eso es justamente lo que acabamos de hacer) y que si, para un $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_{n+1} < x_n$ entonces $x_{n+2} < x_{n+1}$. Bueno, pues supongamos que para un natural n se tiene ciertamente que $x_{n+1} < x_n$, entonces $x_{n+1}^2 < x_n^2$ y por tanto $\frac{x_{n+1}^2+5}{6} < \frac{x_n^2+5}{6}$, es decir $x_{n+2} < x_{n+1}$, que era lo que queríamos demostrar.

Algunos comentarios: realmente hemos demostrado que la sucesión es estrictamente decreciente. No era necesario demostrarlo pero es que es así. Otro comentario es que el anterior razonamiento no está justificado del todo. En un momento hemos dicho que si $x_{n+1} < x_n$, entonces $x_{n+1}^2 < x_n^2$. Esto no es cierto en general pero si los dos números son mayores o iguales a 0 entonces sí que lo es. Pero, claramente, es muy fácil observar que $x_n > 0$, para cualquier natural n. Se tiene que $a_1 = 2 > 0$ y $x_{n+1} = \frac{x_n^2+5}{6} > 0$. Pero el hecho de que $x_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ya nos da también la acotación ya que al ser la sucesión decreciente para demostrar que está acotada sólo necesitamos demostrar que está minorada y lo acabamos de hacer ya que hemos demostrado que 0 es una cota inferior de los términos de la sucesión.

Entonces la sucesión es convergente y todas sus parciales convergen al mismo límite que ella, al que le vamos a llamar L. Es decir

$$L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n^2+5}{6}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n^2 + 5}{6} = \frac{L^2+5}{6},$$

y se tiene que el límite L cumple la ecuación $L = \frac{L^2+5}{6} \Rightarrow L^2 - 6L + 5 = 0$ que tiene como soluciones $L = 5$ y $L = 1$. Pero como la sucesión es decreciente y el primer término vale 2 la única posibilidad para el límite es $L = 1$.

E **Ejercicio 3.5.** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1+2x_n} - 1$. Calcula $\lim_{n\to\infty} x_n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$.

Solución 3.5.

a) Vamos a comprobar que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona y acotada.
   i) Veamos, en primer lugar, que la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente. Utilizaremos el principio de inducción.
      1) Es inmediato comprobar que $x_1 = 1 > x_2 = \sqrt{3} - 1$.
      2) Supongamos que $x_n > x_{n+1}$, entonces

$$2x_n + 1 > 2x_{n+1} + 1 \implies \sqrt{1+2x_n} - 1 > \sqrt{1+2x_{n+1}} - 1,$$

      o, lo que es lo mismo, $x_{n+1} > x_{n+2}$.
   ii) Comprobemos que todos los términos son positivos de nuevo por inducción:
      1) Es evidente que que $x_1 > 0$ y,
      2) si $x_n > 0$, $\sqrt{1+2x_n} > 1$ o, lo que es lo mismo, $x_{n+1} > 0$.

   Resumiendo, $\{x_n\}$ es decreciente y está acotada inferiormente y, por tanto, es convergente. Si llamamos L al límite, se cumple que $L = \sqrt{1+2L} - 1$ de donde se deduce que $L = 0$.

b) Para calcular el límite de la sucesión $\left\{\frac{x_n}{x_{n+1}}\right\}$, multiplicamos y dividimos por $\sqrt{1+2x_n}+1$ y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_n}{\sqrt{1+2x_n}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+2x_n}+1}{\sqrt{1+2x_n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+2x_n}+1\right) = 1.$$

Ejercicio 3.6. Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$ para cualquier natural n.

Solución 3.6. Al ser una sucesión definida por recurrencia lo usual es intentar demostrar que es monótona y acotada para poder concluir que es convergente.
Si calculamos $a_2 = \frac{a_1}{2a_1+1} = \frac{1}{3} < 1 = a_1$, y ahora, si suponemos que, para un natural n, se verifica que $a_{n+1} < a_n$, vamos a intentar demostrar que $a_{n+2} < a_{n+1}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} a_{n+2} < a_{n+1} &\iff \frac{a_{n+1}}{2a_{n+1}+1} < \frac{a_n}{2a_n+1} \\ &\iff (2a_n+1)a_{n+1} < a_n(2a_{n+1}+1) \\ &\iff 2a_na_{n+1} + a_{n+1} < 2a_na_{n+1} + a_n \\ &\iff a_{n+1} < a_n. \end{aligned}$$

Como antes hemos supuesto que $a_{n+1} < a_n$ se tiene lo que se pretendía. Hay que tener en cuenta que las operaciones que hemos hecho aquí son posibles si los elementos $2a_n+1$ son positivos para cualquier natural n. Podemos demostrarlo también por inducción. $a_1 = 1 > 0$ y, supuesto que $a_n > 0$ entonces $2a_n+1 > 0$ y $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1} > 0$, con lo que las operaciones anteriores son válidas. Además hemos demostrado que la sucesión está minorada por 0 y por tanto convergente. Si llamamos

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2a_{n+1}}\right) = \frac{L}{2L+1}$$

de donde $2L^2 + L = L$ y, por tanto, $L = 0$.
Hay otras formas de demostrar que la sucesión es convergente. Para ver que es decreciente otra forma de hacerlo es ver que

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{a_n}{2a_n+1} < a_n \iff a_n < 2a_n^2 + a_n \iff 0 < 2a_n^2,$$

para cualquier natural n. Por supuesto teniendo en cuenta que $a_n > 0$, esto es cierto.
Otra forma de demostrar el decrecimiento es la siguiente, también por inducción. Si

$$a_n > a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{a_n} + 2 < \frac{1}{a_{n+1}} + 2 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{a_n}+2} > \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}}+2},$$

pero operando se obtiene que

$$\frac{1}{\frac{1}{a_n}+2} = \frac{1}{\frac{1+2a_n}{a_n}} = \frac{a_n}{2a_n+1} = a_{n+1}$$

y análogamente $a_{n+2} = \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}}+2}$, con lo que la sucesión es decreciente.
Por último hay otra forma, esta más directa, de demostrar la convergencia. Si calculamos $a_2 = \frac{1}{3}$ y si seguimos $a_3 = \frac{1}{5}$, $a_4 = \frac{1}{7}$... parece ser que $a_n = \frac{1}{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Intentemos demostrarlo por inducción: claramente $a_1 = 1 = \frac{1}{2-1}$. Supongamos que, para un natural n se tiene que $a_n = \frac{1}{2n-1}$; entonces

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1} = \frac{\frac{1}{2n-1}}{2\frac{1}{2n-1}+1} = \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1},$$

que era lo que queríamos demostrar. Ahora es claro que $(a_n) \to 0$.

Ejercicio 3.7. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = 1/2$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$.
a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural n.
b) Demuestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.
c) Calcula su límite.

Solución 3.7.
a) Lo demostramos por inducción. Es claro que $\frac{1}{5} < x_1 = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$. Supongamos que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$, entonces

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} > \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{1}{5}, \quad \text{y}$$
$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} < \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{4}{5}.$$

b) De nuevo comprobamos que la sucesión es decreciente por inducción. En primer lugar, es evidente que $x_1 = \frac{1}{2} \geq \frac{41}{100} = x_2$. Supongamos ahora que $x_n \geq x_{n+1}$, entonces

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 + \frac{4}{25} \geq x_n^2 + \frac{4}{25} = x_{n+1},$$

ya que la función "elevar al cuadrado" conserva el orden en los positivos.
c) De los dos apartados anteriores se deduce que la sucesión es monótona y acotada y, por tanto, convergente. Si L es su límite, debe verificar que

$$L = L^2 + \frac{4}{25} \iff L = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}}}{2} = \frac{1}{5}, \text{ o } \frac{4}{5}.$$

Puesto que la sucesión es decreciente, el límite no puede ser $\frac{4}{5}$ y, se tiene que $L = \frac{1}{5}$.

Ejercicio 3.8. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Estudiar el comportamiento de la sucesión $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a}{2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución 3.8. En primer lugar, probamos que la sucesión es decreciente. Se tiene que $x_2 = \sqrt{\frac{a^2+a}{2}} < a = x_1$ ($\iff$ $a > 1$). Si suponemos que $x_{n+1} < x_n$ veamos que también $x_{n+2} < x_{n+1}$. En efecto, como $x_{n+1}^2 < x_n^2$, entonces

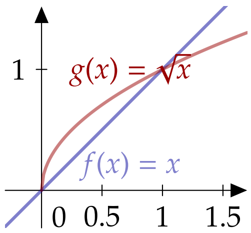
$$x_{n+2} = \sqrt{\frac{x_{n+1}^2 + a}{2}} < x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a}{2}}.$$

Además la sucesión está acotada, ya que $1 < x_n \leq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (¡pruébese por inducción!), por tanto la sucesión tiene límite x que verifica la ecuación siguiente:

$$x^2 = \frac{x^2 + a}{2} \implies x^2 = a \implies x = \sqrt{a}.$$

Ejercicio 3.9. Sea $a \leq 1$. Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = a$, $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$.

Solución 3.9.



Para empezar, echemos un vistazo a los primeros términos de la sucesión. ¿Cuál es mayor x_1 o x_2? Vamos a verlo en general

$$\begin{aligned} x \leq 1 - \sqrt{1-x} &\iff \sqrt{1-x} \leq 1 - x \\ &\iff 1 - x \geq 1 \iff x \leq 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

usando la relación que hay entre un número y su raíz cuadrada: $\sqrt{x} \leq x$ si $x \geq 1$ y $\sqrt{x} \geq x$ si $0 \leq x \leq 1$. Por lo tanto, al menos tenemos que distinguir dos casos: $a \leq 0$ y $0 \leq a \leq 1$.

a) Supongamos que $0 \leq a \leq 1$. Vamos a demostrar que $0 \leq x_n \leq 1$ para todo natural n. Lo hacemos por inducción. Para $n = 1$ es obviamente cierto. En segundo lugar, si $0 \leq x_n \leq 1$, entonces

$$0 \leq 1 - x_n \leq 1 \implies 0 \leq \sqrt{1 - x_n} \leq 1 \implies 0 \leq 1 - \sqrt{1 - x_n} = x_{n+1} \leq 1.$$

En consecuencia, si $0 \leq x_n \leq 1$, aplicamos la fórmula 3.1 y obtenemos que $x_n \geq x_{n+1}$. Hemos probado que la sucesión es decreciente y minorada y, por tanto, convergente.

b) Supongamos que $a \leq 0$. Vamos a demostrar que $x_n \leq 0$ para cualquier natural n. Lo demostramos por inducción. Obviamente, $x_1 = a$ es menor o igual que cero. Supongamos ahora que $x_n \leq 0$, entonces

$$1 - x_n \geq 1 \implies \sqrt{1 - x_n} \geq 1 \implies 1 - \sqrt{1 - x_n} = x_{n+1} \leq 0.$$

En consecuencia, si $x_n \leq 0$, de nuevo la fórmula 3.1 nos dice que se cumple que $x_n \leq x_{n+1}$. Hemos demostrado que la sucesión es creciente y mayorada y, por tanto, convergente.

En cualquiera de los dos casos, la sucesión es convergente. Llamemos L a su límite. Entonces debe cumplirse que $L = 1 - \sqrt{1 - L}$ y, resolviendo la ecuación, obtenemos que el único valor que tiene sentido es $L = 0$.

D **Ejercicio 3.10.** Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$.

Solución 3.10. Al tratarse de una sucesión definida por recurrencia lo usual es intentar demostrar, por inducción, que es monótona y acotada. Veamos que no es tan inmediato. Si intentamos demostrar inductivamente algún tipo de crecimiento lo primero es ver qué ocurre con los primeros términos de la sucesión. Como $x_1 = 2$ obtenemos que $x_2 = \frac{5}{2}$ que es mayor que 2. Parece que la sucesión es creciente. Sin embargo si ahora suponemos que para un natural n se verifica que $x_n \leq x_{n+1}$ entonces $\frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{x_{n+1}}$ y $2 + \frac{1}{x_n} \geq 2 + \frac{1}{x_{n+1}}$. Es decir, $x_{n+1} \geq x_{n+2}$. Justamente lo contrario de lo que pretendíamos demostrar. Aquí hay que notar que lo que ha ocurrido no es que no hayamos sido capaces de deducir que si $x_n \leq x_{n+1}$ entonces $x_{n+1} \leq x_{n+2}$ sino que hemos deducido que si $x_n \leq x_{n+1}$ entonces $x_{n+1} \geq x_{n+2}$.

Volvamos a los primeros términos. Es fácil comprobar con la fórmula de la recurrencia que $x_3 = \frac{12}{5}$, $x_4 = \frac{29}{12}$, $x_5 = \frac{70}{29}$. Podríamos seguir algún término más, pero no parece necesario. Si ordenamos los términos de la sucesión que hemos calculado obtenemos

$$x_1 \leq x_3 \leq x_5 \leq x_4 \leq x_2.$$

Esta relación sugiere que, de existir algún patrón de crecimiento debería ser algo parecido a que la parcial de los impares es creciente y la de los pares decreciente. Vamos a demostrar que eso es así. Realmente vamos a demostrar para cualquier natural n se verifica

$$x_{2n-1} \leq x_{2n+1} \leq x_{2n+2} \leq x_{2n},$$

y esto lo demostraremos por inducción.
Para $n = 1$ ya hemos comprobado que se verifica $x_1 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_2$. Supongamos ahora que para un natural n se verifica que $x_{2n-1} \leq x_{2n+1} \leq x_{2n+2} \leq x_{2n}$. Inviertiendo se obtiene que $\frac{1}{x_{2n-1}} \geq \frac{1}{x_{2n+1}} \geq \frac{1}{x_{2n+2}} \geq \frac{1}{x_{2n}}$. Si ahora sumamos 2 en todos los términos de la cadena de desigualdades se tiene $2 + \frac{1}{x_{2n-1}} \geq 2 + \frac{1}{x_{2n+1}} \geq 2 + \frac{1}{x_{2n+2}} \geq 2 + \frac{1}{x_{2n}}$, es decir

$$x_{2n} \geq x_{2n+2} \geq x_{3n+3} \geq x_{2n+1}.$$

Volviendo a hacer las mismas operaciones, invertir y sumar 2, se obtiene finalmente que

$$x_{2n+1} \leq x_{2n+3} \leq x_{2n+4} \leq x_{2n+2},$$

que era lo que pretendíamos demostrar. Si analizamos lo demostrado nos damos cuenta de que nos ha salido a la vez que la parcial de los impares es creciente y la de los pares decreciente pero es que además tenemos la las acotaciones necesarias para concluir que las dos parciales son convergentes: se tiene que la parcial de los impares está mayorada por cualquier término de la parcial de los pares, por ejemplo por $x_2 = \frac{5}{2}$ y la parcial de los pares está minorada por $x_1 = 2$. Así que ambas son convergentes.
Para concluir que la sucesión $x\{_n\}$ es convergente aún nos queda un detalle y es ver que el límite da sucesión parcial de los pares y el límite de la parcial de los impares son el mismo. Si llamamos $L = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1}$ y $M = \lim_{n\to\infty} x_{2n}$ por la definición de la sucesión tenemos las relaciones

$$M = 2 + \frac{1}{L} \text{ y } L = 2 + \frac{1}{M}.$$

Si sustituimos la expresión de L de la segunda ecuación en la primera se tiene la ecuación

$$M = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{M}}$$

que al resolverla nos da dos soluciones, $M = 1 \pm \sqrt{2}$. Evidentemente el límite es $M = 1 + \sqrt{2}$. Si ahora obtenemos L resulta que también $L = 1 + \sqrt{2}$. Por tanto la sucesión es convergente y su límites es $1 + \sqrt{2}$.

3.6.2 Criterios de convergencia

Ejercicio 3.11. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones y calcular su límite cuando exista:

a) $\left\{\frac{1+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5}\right\}$,

b) $\left\{\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}\right\}$,

c) $\left\{\frac{1+1/2+1/3+\cdots+1/n}{n}\right\}$,

d) $\left\{\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right\}$.

Solución 3.11.

a) Aplicamos el criterio de Stolz y nos queda $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^4}{(n+1)^5-n^5}$. Si desarrollamos el denominador tenemos un polinomio de grado 4 y con coeficiente principal 4, ya que queda de la forma $(n+1)^5-n^5=5n^4+...+1$. Por tanto el límite es $1/5$.

b) Aplicando el criterio de Stolz tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!\,((n+1)-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

c) Por el criterio de Stolz, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)}{(n+1)-n}=0$.

d) Escribimos la sucesión de la forma $\frac{x_n}{y_n}=\frac{2+6+10+\cdots+2(2n-1)-(2n+1)(n+1)}{2(n+1)}$ y aplicamos el criterio de Stolz

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{2(2n+1)-((2n+3)(n+2)-(2n+1)(n+1))}{2(n+2)-2(n+1)}=-\frac{3}{2}.$$

Por tanto el límite es $-\frac{3}{2}$.

Ejercicio 3.12. Estudia la posible convergencia de las siguientes sucesiones y calcula su límite cuando exista:

a) $\left\{\frac{n^2\sqrt{n}}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+...+n\sqrt{n}}\right\}$,

b) $\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$,

c) $\left\{\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\right\}$.

Solución 3.12.

a) Aplicamos el criterio de Stolz y nos queda:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\sqrt{n+1}-n^2\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

multiplicamos y dividimos por $(n+1)^2\sqrt{n+1}+n^2\sqrt{n}$

$$\begin{aligned}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4(n+1)-n^4n}{(n+1)\sqrt{n+1}\left((n+1)^2\sqrt{n+1}+n^2\sqrt{n}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5-n^5}{(n+1)^4+n^2(n+1)\sqrt{n(n+1)}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^4+\cdots+1}{(n+1)^4+n^2(n+1)\sqrt{n(n+1)}}=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

b) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

c) El término general lo podemos escribir de la forma $x_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}}$ y aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n^n n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{4}{e}.$$

Ejercicio 3.13. Calcular el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln(n)}\right\}$,

b) $\left\{\frac{\ln(n+1)!}{\ln(n+1)^n}\right\}$,

c) $\left\{\left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+2n+1}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}\right\}$,

d) $\{(1+\ln(n+1)-\ln(n))^n\}$.

Solución 3.13.

a) Por el criterio de Stolz se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.\end{aligned}$$

b) Por el criterio de Stolz se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)!-\ln(n+1)!}{(n+1)\ln(n+2)-n\ln(n+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{n\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)+\ln(n+2)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]}{\ln(n+2)}+1} = 1.\end{aligned}$$

c) Aplicamos la regla del número e y estudiamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{n+2}\left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+2n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-7n^3+\cdots}{n^3+\cdots} = -7.$$

Por tanto, la sucesión tiende a e^{-7}.

d) Escribimos el término general de la forma $x_n = \left(1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^n$ y aplicamos la regla del número e:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln(e) = 1.$$

Entonces $\lim_{n\to\infty}(1+\ln(n+1)-\ln(n))^n = e$.

Ejercicio 3.14. Calcular el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\left(\frac{n+1}{n^2+n+5}\right)^{\frac{1}{1+\ln(n)}}\right\}$,

b) $\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$,

c) $\left\{\frac{\cos(\sqrt{n^2+1})\ln(n)}{n}\right\}$.

Solución 3.14.

a) Si llamamos x_n al término general de la sucesión propuesta, vamos a estudiar $\ln(x_n)$, es decir

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\ln(n)}\left(\ln(n+1)-\ln(n^2+n+5)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-2\ln(n)-\ln(1+1/n+5/n^2)}{1+\ln(n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}-2-\frac{\ln(1+1/n+5/n^2)}{\ln(n)}}{\frac{1}{\ln(n)}+1} = -1.\end{aligned}$$

Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = e^{-1}$.

b) Utilizando la continuidad de la función seno en el cero se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen}(0) = 0.$$

c) El límite es

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\sqrt{n^2+1}\right)\frac{\ln(n)}{n} = 0,$$

donde hemos utilizado que es el producto de una sucesión acotada, $\cos\left(\sqrt{n^2+1}\right)$, por una convergente a cero, $\frac{\ln(n)}{n}$.

Ejercicio 3.15. Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+56n+5}$,

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n!)}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}$

c) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)^{n+1}}}$

Solución 3.15.

a) Consideramos la sucesión $x_n = \left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+56n+5}$. Como la base converge a 1 y es siempre distinta de uno aplicamos la regla del número e. Concretamente,

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+56n+5)\left(1+\frac{1}{n^2+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+56n+5}{n^2+1}\to 1,$$

y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = e^1$.

b) Para la sucesión $x_n = \frac{\log(n!)}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}$ aplicamos el criterio de Stolz. Notemos que en este caso el denominador es una sucesión de números positivos estrictamente creciente y no mayorada. Aplicando Stolz tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log((n+1)!) - \log(n!)}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-\sqrt{1}-\sqrt{2}-\ldots-\sqrt{n}} = \frac{\log\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)}{\sqrt{n+1}} = \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}}.$$

Finalmente aplicamos de nuevo el criterio de Stolz a este último cociente:

$$\frac{\log(n+1+1)-\log(n+1)}{\sqrt{n+1+1}-\sqrt{n+1}} = \frac{\log(\frac{n+2}{n+1})}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \frac{\log(\frac{n+2}{n+1})}{\sqrt{n+2}(1-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}})} \to 0,$$

lo que nos asegura que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

c) Aplicamos el criterio de la raíz y, si $x_n = \frac{n!}{(2n)^{n+1}}$, estudiamos el límite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)^{n+2}}}{\frac{n!}{(2n)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n)^{n+1}}{(2n+2)^{n+2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+2} \cdot \left(\frac{2n}{2n+2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Ahora estudiamos cada uno de los factores por separado: el primero de ellos es un cociente de polinomios de mismo grado que tiene límite ½; el segundo presenta una indeterminación de la forma "1^∞". La resolvemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+2}\right)^{n+1} = e^L \iff \lim_{n\to\infty} (n+1)\left(\frac{2n}{2n+2}-1\right) = L.$$

Es muy fácil comprobar que $L = -1$ y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)^{n+1}}} = ½e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

E **Ejercicio 3.16.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right)^{4n+1}.$$

Solución 3.16. Está claro que el cociente de polinomios al que afecta el logaritmo, al ser polinomios del mismo grado, converge a 1 que es el cociente de los coeficientes líderes. Como logaritmo neperiano es continuo en 1 y vale 0 tenemos que la base del término general converge a 1 mientras que el exponente es claro que diverge positivamente. En conclusión: estamos ante una indeterminación de la forma "1^∞".
Utilizando la regla del número e tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right)^{4n+1} = e^L \iff \lim_{n\to\infty} (4n+1)\left(1+\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)-1\right) = L,$$

pero

$$\lim_{n\to\infty}(4n+1)\left(\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)^{(4n+1)}.$$

Ahora hacemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)^{(4n+1)}=e^L \iff \lim_{n\to\infty}(4n-1)\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}-1\right)=L$$

y

$$\lim_{n\to\infty}(4n+1)\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}(4n+1)\left(\frac{-3n+1}{3n^2+5n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-12n^2+7n-1}{3n^2+5n}\right)=-4,$$

y el límite buscado resulta

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right)^{4n+1}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}.$$

E **Ejercicio 3.17.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(1)+\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-n}{\log\left(n^3+1\right)}.$$

Solución 3.17. FALTA

Ejercicio 3.18. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$; estudiar el carácter de la sucesión $\left\{(a^n+b^n)^{1/n}\right\}$.

Solución 3.18. Aplicando el criterio de la raíz, tendríamos que estudiar el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}.$$

Para ello es más cómodo distinguir varios casos.

a) Si $a>b$, dividimos numerador y denominador por a^n y nos queda que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{a^n}+\frac{b^{n+1}}{a^n}}{\frac{a^n}{a^n}+\frac{b^n}{a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=a,$$

usando que $\lim_{n\to\infty}x^n=0$ siempre que $|x|<1$.

b) Si $b>a$, las mismas cuentas del apartado anterior nos dan que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=b.$$

c) Por último, si $a=b$ entonces no es necesario utilizar ningún criterio y

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^n+b^n\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(2a^n)^{1/n}=1.$$

En cualquiera de los casos, llegamos a la conclusión de que $\lim_{n\to\infty}\left(a^n+b^n\right)^{1/n}=\max\{a,b\}$.

3.6.3 Ejercicios complementarios

Ejercicio 3.1. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y x un número real. Probar que si $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = x$ y $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = x$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Ejercicio 3.2. Sea A un conjunto no vacío de números reales y sea x un mayorante de A. Probar que $x = \sup(A)$ si, y sólo si, existe una sucesión de elementos de A convergente a x.

Ejercicio 3.3. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:
a) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$,
b) $\left\{\frac{2^n+n}{3^n-n}\right\}$.

Ejercicio 3.4. Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y consideremos la siguiente sucesión: $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Pruébese que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y que su límite, x, verifica $x^2 = a$.

Ejercicio 3.5. Calcula el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1\cdot 2\cdots n)}{n\ln(n)}$.

Ejercicio 3.6. Calcula los siguientes límites.
a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots\sqrt[n]{n}}{n^2}$,
b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}$.

Ejercicio 3.7. Calcular, si existe, el límite de las siguientes sucesiones:
a) $\left\{\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n\right\}$ con $a, b > 0$.
b) $\left\{\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}+c^{1/n}}{3}\right)^n\right\}$ con $a, b, c > 0$.
c) $\left\{\left(\frac{pa^{1/n}+qb^{1/n}+rc^{1/n}}{p+q+r}\right)^n\right\}$ con $p, q, r \in \mathbb{R}$, $p+q+r \neq 0$.

Ejercicio 3.8. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos convergente. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$\left\{\frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n}}{\ln(n)}\right\}.$$

Ejercicio 3.9. Calcular el límite de la sucesión $\left\{\frac{e^{a_1}+e^{a_2/2}+\ldots+e^{a_n/n}-n}{\ln(n+1)}\right\}$, donde $\{a_n\}$ es una sucesión convergente de números reales positivos.

Ejercicio 3.10. Estudiar la convergencia de $\left\{\sqrt[n^2]{a_1\cdot a_2^3\cdot a_3^5\cdots a_n^{2n-1}}\right\}$ donde $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.11. Calcular el límite de la siguiente sucesión de números reales $\left\{\left(\frac{5(1+2^4+3^4+\ldots+n^4)}{n^5}\right)^n\right\}$.

Ejercicio 3.12. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $\{x_n\} \to x$, entonces $\{|x_n|\} \to |x|$.
b) Si $\{|x_n|\} \to a$ con $a > 0$, entonces $\{x_n\} \to a$ ó $\{x_n\} \to -a$.
c) Toda sucesión monótona es convergente.
d) Toda sucesión monótona, que admita una parcial convergente, es convergente.
e) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales de forma que $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n+1}\}$ son convergentes. Entonces $\{x_n\}$ es convergente.

Límites y continuidad

4

La definición usual de función continua involucra el concepto de límite: cuando x "tiende a" a, $f(x)$ "tiende a" $f(a)$. Esto es una definición perfecta de la continuidad siempre que definamos qué es "tender a".

4.1 Límite funcional

Existen varias formas de definir el límite de una función en un punto. Nosotros vamos a utilizar sucesiones en la definición y así aprovechar todas las propiedades que hemos visto en el tema anterior. La definición de límite de una función con sucesiones va a tener siempre un aspecto similar al siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \left[\text{si } \lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b\right].$$

Para que esto valga como definición de límite, sólo tenemos que garantizarnos que existan sucesiones convergentes al punto donde tomamos límite. Recordemos que A' denota al conjunto de puntos de acumulación del conjunto A. Con todos estos ingredientes ya podemos dar la definición de límite de una función en un punto.

Definición 4.1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f tiene *límite* en $x_0 \in A'$ y que vale L si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A distintos de x_0 que tienda a x_0 se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a L.
Caso de ser así, escribiremos $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Límite

En algunas ocasiones puede ser más útil reescribir la definición de la forma siguiente.

Proposición 4.2. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.
b) Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $x \in A$, entonces $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$.

Álgebra de límites

Dado que la definición de límite se puede ver en términos de sucesiones, podemos aplicar los resultados sobre límites de sucesiones que conocemos. Obtenemos el resultado análogo a la Proposición 3.8 sobre el comportamiento de límite con respecto a sumas, productos y cocientes.

Proposición 4.3. *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Entonces,*
a) $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$,
b) $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$,
c) si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, *se cumple que* $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

Proposición 4.4. *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y g está acotada, entonces* $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = 0$.

4.1.1 Límites laterales

Intuitivamente, para calcular $\lim_{x\to x_0} f(x)$ tomamos valores cercanos a x_0, calculamos su imagen por la aplicación f y vemos si se acercan a algún valor. Si nos acercamos a x_0 por valores mayores que x_0, hablaremos de límite por la derecha. Si nos acercamos por valores menores hablaremos de límite por la izquierda. Formalizemos estos conceptos.

Definición 4.5. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A'$.

a) Si x_0 es un punto de acumulación de $A^- = \{x \in A : x < x_0\}$, se define el *límite por la izquierda de f en x_0* como $\lim_{x\to x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} f_{|A^-}(x)$.
b) Si x_0 es un punto de acumulación de $A^+ = \{x \in A : x > x_0\}$, se define el *límite por la derecha de f en x_0* como $\lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} f_{|A^+}(x)$.

En principio no tienen porqué tener sentido ambos límites laterales. Por ejemplo, si x_0 es el extremo de un intervalo sólo se puede estudiar uno de los dos límites laterales. Lo que sí es cierto es que si se puede estudiar el límite, al menos uno de los límites laterales tiene que tener sentido. Además, una función tiene límite en x_0 si, y sólo si, existen todos los límites laterales que tengan sentido y coinciden.

Proposición 4.6. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$.*
a) Si $x_0 \in (A^+)'$ y $x_0 \notin (A^-)'$, entonces $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.
b) Si $x_0 \in (A^-)'$ y $x_0 \notin (A^+)'$, entonces $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.
c) Si $x_0 \in (A^+)' \cap (A^-)'$, entonces $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

4.2 Límites infinitos y en el infinito

Asíntotas verticales

Como ya hemos comentado en la sección anterior, la definición de límite de una función con sucesiones siempre tiene el mismo aspecto:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \left[\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b\right].$$

Hasta ahora hemos tomado a y b como el punto donde tomamos límite y como el valor del límite. Si admitimos que a y/o b sean $\pm\infty$, obtenemos la definición de límite infinito o en el infinito.

Definición 4.7. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Diremos que el límite de f en x_0 vale $+\infty$ si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que tienda a x_0 se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a $+\infty$, o sea,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff [\forall \{x_n\} \to x_0 \implies \{f(x_n)\} \to +\infty]$$

También podemos reformular de manera equivalente la definición de límite sin utilizar sucesiones.

Proposición 4.8. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Son equivalentes*

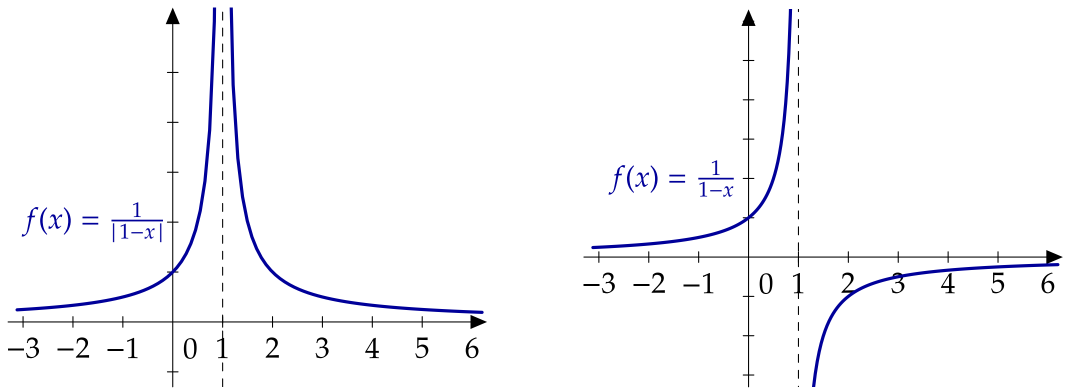
a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

b) Dado $M \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ y $x \in A$, entonces $f(x) > M$.

En otras palabras,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \left[\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\, \delta > 0 \textit{ tal que } \left.\begin{array}{c} |x - x_0| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies f(x) > M\right]$$

Esta situación seguramente ya se te ha presentado y te has referido a ella como que la función tiene una *asíntota vertical en x_0*.



La función $f(x) = \frac{1}{|1-x|}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$

La función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ también tiene una asíntota vertical en $x = 1$

Figura 4.1 Asíntotas verticales

Eso sí, tienes que tener cuidado con la afirmación anterior: la función $\frac{1}{1-x}$ también tiene una asíntota vertical en $x = 1$ pero su límite no es $+\infty$ ni $-\infty$. Su valor depende de si calculamos el límite por la izquierda o por la derecha.

Asíntotas horizontales

La última posibilidad que nos queda es definir límites en $+\infty$ o $-\infty$. De nuevo empezamos con sucesiones.

Definición 4.9. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no acotado superiormente y sea $f : A \to \mathbb{R}$.

a) Diremos que f tiene *límite en* $+\infty$ y que vale L si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que tienda a $+\infty$ se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a L.
b) De forma similar, diremos que el límite de f en $+\infty$ es $+\infty$ si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que tienda a $+\infty$ se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a $+\infty$.

Y también tenemos las reformulaciones equivalentes sin usar sucesiones.

Proposición 4.10. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no acotado superiormente y sea $f : A \to \mathbb{R}$.*

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *si, y sólo si, dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{R}$ tal que si $x > M$ y $x \in A$ entonces* $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *si, y sólo si, dado $M \in \mathbb{R}$ existe N tal que si $x > N$, entonces $f(x) > M$.*

De forma completamente análoga se pueden definir los límites en $-\infty$ o que valgan $-\infty$.

Ejemplo 4.11. *Las funciones periódicas no constantes no tienen límite en infinito.*
Para demostrar que una función no tiene límite en $+\infty$ usando la caracterización por sucesiones tenemos que encontrar una sucesión $\{x_n\}$ que tienda a $+\infty$ y tal que $\{f(x_n)\}$ no sea convergente o dos sucesiones de manera que sus imágenes tienden a límites distintos. Veamos que este último método nos viene bien.

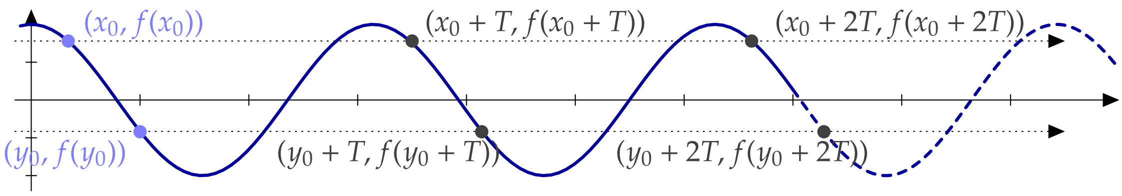


Figura 4.2 Las funciones periódicas no triviales no tienen límite en infinito

La función no es constante: toma al menos dos valores distintos. Sean x_0, y_0 tales que $f(x_0) \neq f(y_0)$. Si T es un periodo de la función f, las sucesiones $\{x_0 + nT\}$ e $\{y_0 + nT\}$ tienden a $+\infty$ y

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_0 + nT) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_0 + nT) = f(y_0).\triangleleft$$

Cuándo una función tiene límite en $+\infty$ o $-\infty$ solemos decir que la función tiene una *asíntota horizontal*. Por ejemplo, como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 3\operatorname{sen}(x)}{x} = 2,$$

la función $f(x) = \frac{2x+3\operatorname{sen}(x)}{x}$ tiene una asíntota horizontal en 2. Observa que, a diferencia de las asíntotas verticales, la gráfica de la función puede cruzar la recta que define la asíntota ($y = 2$ en este caso).

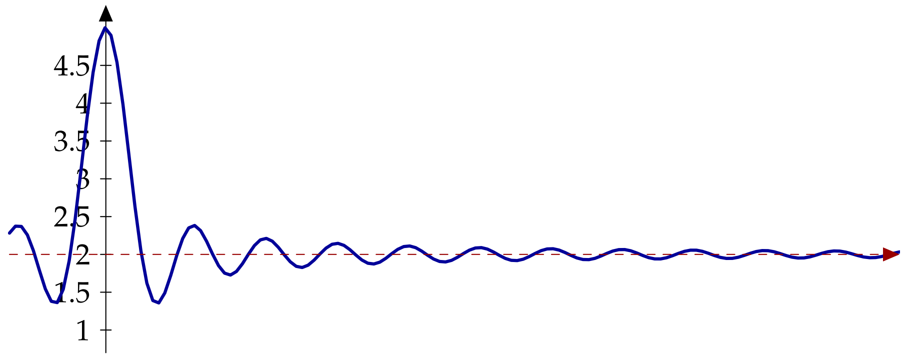


Figura 4.3 Asíntota horizontal

4.2.1 Indeterminaciones

Existen límites que no se pueden resolver utilizando las operaciones elementales, leáse por ejemplo el límite de una suma es la suma de los límites. A estas situaciones las llamamos indeterminaciones y son

$$\infty - \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

Ya conoces algunas formas de eliminar indeterminaciones. Por ejemplo, cuando nos encontramos con un cociente de polinomios con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, eso significa que numerador y denominador tienen una solución común. Si simplificamos dicha raíz, eliminamos la indeterminación.

Ejemplo 4.12. Calculemos $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2. \triangleleft$$

4.3 Cálculo de límites

Proposición 4.13. *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$*

a) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y g está minorada, entonces $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = +\infty$.

b) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y existe $K > 0$ tal $g(x) > K$ para todo x, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.

El siguiente resultado permite resolver algunas indeterminaciones del tipo "1^∞".

Proposición 4.14. *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces* **Regla del número** *e*

a) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L \iff \lim_{x\to a} g(x)\,(f(x)-1) = L$,

b) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0 \iff \lim_{x\to a} g(x)\,(f(x)-1) = -\infty$, y

c) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty \iff \lim_{x\to a} g(x)\,(f(x)-1) = +\infty$.

Ejemplo 4.15. Calcula $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}\right)^{x-3}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}\right)^{x-1} = e^L \iff \lim_{x\to+\infty}(x-3)\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}-1\right) = L.$$

Resolvamos este segundo límite:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-3)\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)(3x-2)}{x^2-x+3} = 3.$$

Por tanto, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}\right)^{x-3} = e^3$. ◁

Escala de infinitos

Proposición 4.16. *Sea $a \in \mathbb{R}^+$, entonces*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^a} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^x} = 0.$$

Ejemplo 4.17. Vamos a comprobar que $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$.
Tomando logaritmos,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^L \iff \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = L,$$

y este último límite vale 0 por lo que el límite original es $e^0 = 1$. ◁

Es posible intercambiar los papeles de $+\infty$ y 0 en un límite.

Proposición 4.18. *Sea f una función definida en un intervalo no acotado superiormente. Entonces*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

Ejemplo 4.19. El cambio de variable anterior nos permite resolver algunos límites de forma sencilla. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x^2}}{x^3}$$

involucra exponenciales y polinomios, pero no se encuentra en las condiciones necesarias para poder aplicar la escala de infinitos. Un cambio de variable de la forma $y = \frac{1}{x}$ nos resuelve la situación:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x^2}}{x^3} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^3}{e^{y^2}} = 0,$$

usando, ya sí, la escala de infinitos. ◁

4.4 Continuidad

Ya que tenemos la definición de límite, podemos hablar de continuidad.

Función continua

Definición 4.20. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La función f es *continua* en $a \in A$ si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, Podemos expresar la continuidad utilizando sucesiones de manera similar a lo que hemos hecho con límites o de la forma “$\epsilon - \delta$”.

Proposición 4.21. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
a) f es continua en $a \in A$.
b) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $|x - a| < \delta$, entonces $\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$.

Si te fijas, la definición de función continua se parece mucho a la definición de límite. Comparándolas, la primera diferencia salta a la vista: hemos cambiado el valor del límite por $f(a)$. La segunda es un poco más sutil: en la definición de límite partimos de un punto de acumulación. Como vemos en la siguiente proposición, es importante distinguir entre puntos aislados y puntos de acumulación a la hora de estudiar la continuidad de una función.

Proposición 4.22. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$.*
a) Si a es un punto de acumulación de A, f es continua en a si y sólo si existe $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
b) Si a es un punto aislado de A, f es continua en a.

Observación 4.23. La distinción entre puntos aislados y puntos de acumulación carece de importancia en el caso de funciones definidas en intervalos ya que todos los puntos son de acumulación. Por tanto, si I es un intervalo, una función $f : I \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in I$ si y sólo si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Discontinuidades

¿Qué puede fallar para que que una función no sea continua? Para que sí lo sea, debe existir el límite en dicho punto y coincidir con el valor de función. Por tanto, las discontinuidades se deben a alguno de estas dos causas:

a) El límite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero no vale $f(a)$. En este caso decimos que la función presenta una *discontinuidad evitable* en a. El motivo es que si cambiamos el valor de la función en a por el del límite obtenemos una función continua. **Discontinuidad evitable**
b) La segunda posibilidad es que no exista el $\lim_{x\to a} f(x)$. Esto puede deberse a varios factores.
   i) Existen los límites laterales pero no coinciden. En este caso diremos que f presenta una *discontinuidad de salto* en a. **Discontinuidad de salto**
   ii) Algún límite lateral no existe: diremos que f tiene una discontinuidad esencial en a. **Discontinuidad esencial**

Álgebra de funciones continuas

Como sabemos el comportamiento de los límites con respecto a sumas, productos o cocientes, es fácil obtener un resultado similar para funciones continuas.

Proposición 4.24. *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ continuas en $a \in A$. Entonces,*
a) $f + g$ es continua en a,
b) fg es continua en a, y
c) si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es continua en a.

Regla de la cadena

Proposición 4.25. *La composición de funciones continuas es una función continua.*

Ejemplo 4.26. La función valor absoluto es continua. En consecuencia si f es continua $\left|f\right|$ también lo es. Es fácil encontrar ejemplos de que el recíproco no es cierto. La función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es discontinua en el origen y $|f|$ es la función constantemente igual a uno que sí es continua. ◁

4.4.1 Carácter local de la continuidad

La continuidad de una función en un punto sólo depende del comportamiento de dicha función "cerca" del punto. Este hecho lo aplicamos sin darnos cuenta cada vez que estudiamos la continuidad de una función definida a trozos. Por ejemplo, cuando decimos que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0, \\ \operatorname{sen}(x), & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}^+$ sólo nos estamos fijando en x^2 que, evidentemente, es una función continua. En otras palabras, la continuidad de f en el punto $x = 0.5$ no depende del comportamiento de dicha función en $\mathbb{R}^-$.

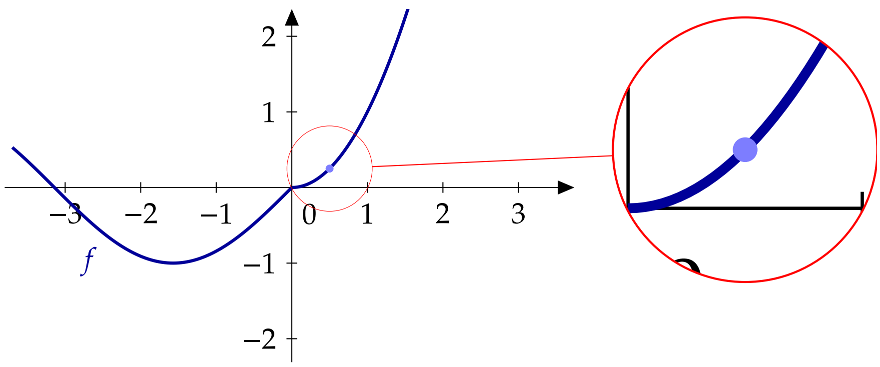


Figura 4.4 Carácter local de la continuidad

El siguiente resultado nos dice que la restricción de una función continua sigue siendo una función continua.

Proposición 4.27. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $a \in A$ y sea $B \subset A$ con $a \in B$. Entonces $f_{|B}$ es continua en a.*

Si nos quedamos con un dominio más pequeño, la continuidad no se resiente. ¿Qué ocurre con el recíproco? Si una función es continua en un dominio, ¿qué ocurre si la extendemos a un dominio mayor? En general no se mantiene la continuidad: piensa, por ejemplo en una función definida en los $[0, +\infty[$. ¿Se puede extender a $\mathbb{R}$ manteniendo la continuidad en el origen? La respuesta ya la conoces: sólo si el límite por la izquierda coincide con el valor de la función en 0. Ahora bien, en otros puntos la situación es distinta. Por ejemplo, si la función era continua en 1, también lo sigue siendo la extensión.

Proposición 4.28. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Son equivalentes:*
a) f es continua en a.
b) Para cualquier $r > 0$, $f_{|A\cap]a-r,a+r[}$ es continua en a.
c) Existe $r > 0$ tal que $f_{|A\cap]a-r,a+r[}$ es continua en a.

Carácter local de la continuidad

4.5 Teorema del valor intermedio

El teorema del valor intermedio o su versión equivalente el teorema de los ceros de Bolzano es el resultado más importante de este tema. Su demostración

Lema 4.29. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $a \in A$ con $f(a) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ verificando que $f(x)f(a) > 0$, para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[\cap A$.*

Lema de conservación del signo

Demostración. Aplicamos la definición de continuidad tomando $\varepsilon = \left| f(a) \right|$ y encontramos $\delta < 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} |x-a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies \left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon.$$

Esto es equivalente a que

$$f(a) - \left| f(a) \right| < f(x) < f(a) + \left| f(a) \right|. \tag{4.1}$$

Discutimos ahora las dos signos posibles:
a) Si $f(a) > 0$, la primera desigualdad de la ecuación (4.1) nos da que $f(x) > 0$.
b) Si $f(a) < 0$, la segunda parte de la ecuación (4.1) nos dice que $f(x)$ también es negativo. □

Teorema 4.30. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y verificando $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Teorema de los ceros de Bolzano

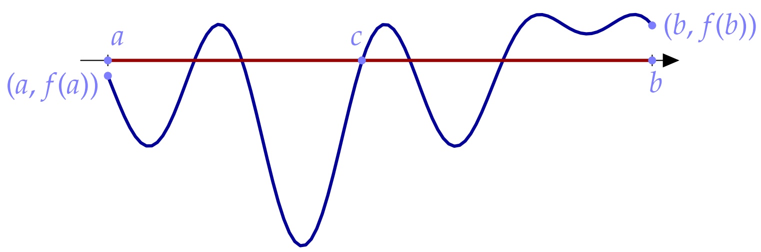


Figura 4.5 Teorema de los ceros de Bolzano

El teorema de los ceros de Bolzano es un resultado de existencia: sólo afirma que hay un punto donde la función vale cero. No dice nada sobre cuántos puntos de este tipo hay ni sobre cómo podemos encontrarlos.

Ejemplo 4.31. Una de las utilidades más importantes del teorema de los ceros de Bolzano es garantizar que una ecuación tiene solución. Por ejemplo, para comprobar que la ecuación $e^x + \ln(x) = 0$ tiene solución, estudiamos la función $f(x) = e^x + \ln(x)$: es continua en $\mathbb{R}^+$ y se puede comprobar que $f(e^{-10}) < 0$ y $0 < f(e^{10})$. Por tanto, la ecuación $e^x + \ln(x) = 0$ tiene al menos una solución entre e^{-10} y e^{10}. En particular, tiene solución en $\mathbb{R}^+$. ◁

El teorema del valor intermedio es similar al teorema de los ceros de Bolzano. Si este último afirma que en cuanto una función continua tome valores positivos y negativos, tiene que anularse, el teorema del valor intermedio traslada esta afirmación a cualquier número real: en cuanto una función continua tome dos valores distintos, también tiene que alcanzar los valores intermedios. Todo esto es cierto únicamente cuando el dominio es un intervalo.

Teorema del valor intermedio

Teorema 4.32. *Sea I un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f(I)$ es un intervalo.*

Demostración. Tenemos que demostrar que si $c, d \in f(I)$, entonces $[c, d] \subset f(I)$. Puesto que c y d pertenecen a la imagen de la función, existen a y b en I tales que $f(a) = c$ y $f(b) = d$. Puesto que I es un intervalo $[a, b] \subset I$. Tengáse en cuenta que no sabemos si a es menor o mayor que b y que cuando escribimos $[a, b]$ nos estamos refiriendo al intervalo $[a, b]$ o al $[b, a]$, depende del orden que corresponda.

Sea $z \in]c, d[$. Consideremos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x) - z$. Es claro que g es una función continua. Además, $g(a) = f(a) - z = c - z < 0 < d - z = f(b) - z = g(b)$ y, por tanto, g verifica las hipótesis del teorema de los ceros de Bolzano. En consecuencia, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$ o, equivalente, $f(x_0) = z$. □

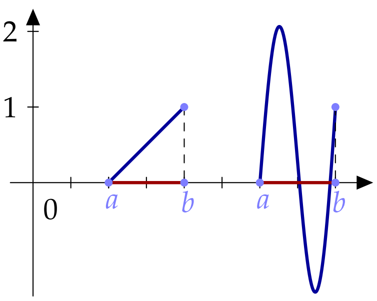


Figura 4.6

Si el teorema de los ceros de Bolzano nos garantiza que una ecuación vale cero o, lo que es lo mismo, que una función se anula, el teorema del valor intermedio nos permite conocer todos los valores de una función: su imagen. Sólo nos queda una dificultad que superar. Imagina por un momento que sabes los valores de una función en dos puntos. Por ejemplo, supongamos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua verifica que $f(a) = 0$ y que $f(b) = 1$. ¿Qué podemos decir sobre su imagen? El teorema del valor intermedio nos dice que la función toma todos los valores entre 0 y 1. En otras palabras $[0, 1] \subset f([a, b])$, pero ¿se da la igualdad? En la Figura 4.6 puedes ver que la imagen puede ser un conjunto mayor. El ingrediente que falta para resolver este problema es la monotonía de la función.

Propiedad de compacidad

El siguiente teorema y sus versiones para funciones de varias variables es una herramienta fundamental en el estudio de los extremos absolutos de una función y responde a la pregunta de qué se puede decir sobre cómo son los intervalos en el teorema del valor intermedio. Ningún otro resultado nos va a garantizar a tanta generalidad la existencia de extremos.

Propiedad de compacidad

Teorema 4.33. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado. En particular, la función f tiene máximo y mínimo absolutos.*

4.6 Monotonía

¿Cómo podemos calcular los extremos absolutos de una función? ¿Hay algún punto destacado donde buscar? En un intervalo, los únicos puntos destacados son los extremos pero es muy fácil encontrar funciones que *no* alcanzan su máximo o su mínimo en ninguno de los extremos del intervalo. Por ejemplo, consideremos la función $\operatorname{sen} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Sabemos su valor en los extremos: cero. ¿Nos da eso alguna información sobre el máximo o el mínimo de la función? La verdad es que no demasiada. La información adicional que necesitamos sobre la función es la monotonía.

Definición 4.34.

Función creciente

a) Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *creciente* (resp. *decreciente*) si

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \ \ (\text{resp.} f(x) \geq f(y)).$$

Función estrictamente creciente

b) Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *estrictamente creciente* (resp. *estrictamente decreciente*) si

$$x < y \implies f(x) < f(y) \ \ (\text{resp.} f(x). > f(y))$$

En general, diremos que una función es *monótona* si es creciente o decreciente y diremos que es *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Observación 4.35. Hay veces que los nombres nos pueden inducir a error y este es uno de esos casos. La idea intuitiva que tenemos todos es que una función creciente es aquella que tiene una gráfica ascendente. En realidad eso es una función estrictamente creciente. Una función constante es creciente (y decreciente). La expresión correcta debería ser que una función creciente es aquella cuya gráfica "no baja".

Imagen de una función

Una vez que tenemos todos los ingredientes: función definida en un intervalo, continua y monótona, ya podemos calcular la imagen de dicha función. Enunciamos el resultado sólo para funciones crecientes. Ya te puedes imaginar cuál es para funciones decrecientes.

Corolario 4.36.

a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente. Entonces la imagen de f es $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

b) Sea $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Entonces la imagen de f es $f(]a, b[) = \left] \lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to b} f(x) \right[$.

Ejemplo 4.37. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x}{1+x}$, para cualquier $x \in [0, 1]$.

a) El dominio de la función es un intervalo.

b) La función es continua por ser cocientes de funciones continuas, polinomios en este caso.

c) Vamos a comprobar que es creciente: si $x, y \in [0, 1]$,

$$f(x) \leq f(y) \iff \frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y} \iff x(1+y) \leq y(1+x) \iff x+xy \leq y+xy \iff x \leq y.$$

Por tanto, $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0, 1/2]$. ◁

El estudio de la monotonía de una función puede complicarse. En algunas ocasiones, se puede sustituir por la condición, más débil, de inyectividad aunque tendremos que esperar hasta el siguiente tema, derivabilidad, para encontrar una condición verdaderamente útil: el signo de la derivada. Volveremos a esta cuestión al final del siguiente tema.

4.6.1 Monotonía e inyectividad

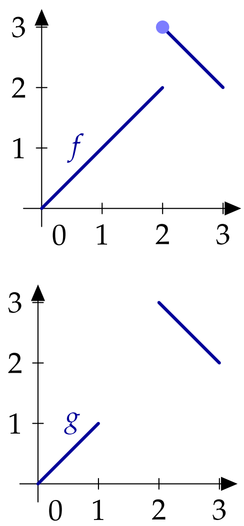


Figura 4.7 Monotonía e inyectividad

La definición de función estrictamente monótona nos dice que puntos del dominio distintos tienen imágenes distintas. En particular, *las funciones estrictamente monótonas son inyectivas.* El recíproco no es cierto en general. Hay funciones inyectivas que no son monótonas. Por ejemplo, la función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ 5-x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

no es creciente ni decreciente. Tampoco es difícil conseguir un ejemplo con funciones continuas: eliminemos los puntos de discontinuidad de la función f. Considera la función $g : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 5-x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

Como puedes ver, para la inyectividad no es una condición suficiente para probar monotonía si consideramos funciones que no sean continuas o que no estén definidas en intervalos. En otro caso, el resultado es cierto.

Proposición 4.38. *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f es estrictamente monótona si, y sólo si, f es inyectiva.*

4.7 Ejercicios

4.7.1 Ejercicios conocidos

Ejercicio 4.1. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{7x+4}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+3}{2x^2+1}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

d) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4}{x-2}$

Solución 4.1.

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{7x+4} = \frac{1}{7}$
b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+3}{2x^2+1} = 0$
c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4$
d) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4}{x-2} = +\infty$

Ejercicio 4.2. Calcular los siguientes límites.
a) $\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right)$,
b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{3x^3+2x^2+x}$,
c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}$,
d) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}$,

Solución 4.2.
a) $\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right) = -\frac{1}{16}$.
b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{3x^3+2x^2+x} = 0$.
c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|} = +\infty$.
d) No existe $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}$ ya que los límites laterales no coinciden. Más concretamente,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{|x-1|} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x}},$$

que, dependiendo de por dónde nos acerquemos a 1 tiende a $\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.

Ejercicio 4.3. Si $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$, ¿cuáles son los dominios naturales de f, g, $f+g$, $f\cdot g$ y de las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$?

Solución 4.3.
a) El dominio de f es $\mathbb{R}^*$.
b) El dominio de g es $\mathbb{R}^+$.
c) El dominio de $f+g$ es $\mathbb{R}^+$.
d) El dominio de $f\circ g$ es $\mathbb{R}^+$.
e) El dominio de $g\circ f$ es $\mathbb{R}^+$.

Ejercicio 4.4. Calcular el dominio las funciones:
a) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ b) $y = \ln\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right)$ c) $y = \sqrt{\frac{x}{1-|x|}}$

Solución 4.4.
a) El dominio es $]-\infty, 2[\cup[2,+\infty[$.
b) El dominio es $\mathbb{R}\setminus[2,3]$.
c) El dominio es $]-\infty,-1[\cup[0,1[$.

Ejercicio 4.5. Probar que si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, entonces $f\circ f\circ f(x) = x$.

Solución 4.5.

$$(f\circ f\circ f)(x) = (f\circ f)\left(\frac{1}{1-x}\right) = f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x.$$

Ejercicio 4.6. Estudiar si son pares o impares las siguientes funciones:

a) $f(x) = |\,x+1\,| - |\,x-1\,|$,
b) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
c) $f(x) = e^x + e^{-x}$
d) $f(x) = e^x - e^{-x}$

Solución 4.6.
a) $f(x) = |\,x+1\,| - |\,x-1\,|$ es impar.
b) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ es impar.
c) $f(x) = e^x + e^{-x}$ es par.
d) $f(x) = e^x - e^{-x}$ es impar.

Ejercicio 4.7. Calcular la inversa de las siguientes funciones
a) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$,
b) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

Solución 4.7.
a)

$$\begin{aligned} y = \frac{e^x}{1+e^x} &\iff (1+e^x)y = e^x \\ &\iff y = e^x(1-y) \\ &\iff e^x = \frac{y}{1-y} \\ &\iff x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = \ln(y) - \ln(1-y). \end{aligned}$$

Por tanto, $f^{-1}(y) = \ln(y) - \ln(1-y)$.
b) $y = \sqrt[3]{1-x^3} \iff 1-x^3 = y^3 \iff 1-y^3 = x^3 \iff x = \sqrt[3]{1-y^3}$. Por tanto $f = f^{-1}$.

Ejercicio 4.8. Calcular los siguientes límites
a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$
c) $\lim_{x\to 0} \frac{2x+3}{\sqrt[3]{26+x}-3}$
d) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

Solución 4.8.
a) Multiplicamos y dividmos por el conjugado,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = 1.$$

b) Multiplicamos por los conjugados de numerador y denominador,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} \cdot \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = -1.$$

c) No hay ninguna indeterminación: $\lim_{x\to 0} \frac{2x+3}{\sqrt[3]{26+x}-3} = \frac{3}{\sqrt[3]{26}-3}$.
d) Multiplicamos y dividimos por el conjugado,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}.$$

Ejercicio 4.9. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2+x}$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

c) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+6}{x^2-4}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-2^{1/x}}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{1/x}+1}$

Solución 4.9.

a) Estudiamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x^2+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x^2+x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x+1}=-1.$$

b) Calculamos los límites por la derecha y por la izquierda.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x+1=2,$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{1-x}=\lim_{x\to 1^+}-(x+1)=-2.$$

c) El límite por la izquierda vale $-\infty$ y el límite por la derecha $+\infty$.

d) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2-2^{1/x}}=0$ y $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2-2^{1/x}}=\frac{1}{2}$.

e) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{1/x}+1}=0$ y $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^{1/x}+1}=1$.

4.7.2 Límites y continuidad

Ejercicio 4.10. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

a)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x\neq 0\\[2ex] 0, & \text{si } x=0\end{cases}$$

b)

$$g(x)=\begin{cases}\frac{e^x}{x}, & \text{si } x<0\\ x, & \text{si } 0\leq x<1\\ \sqrt[5]{x}, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f y g y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y $-\infty$.

Solución 4.10.

a) En primer lugar estudiemos la continuidad de

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x\neq 0\\[2ex] 0, & \text{si } x=0\end{cases}$$

El carácter local de la continuidad nos da que f es continua en $\mathbb{R}^*$. Veamos qué ocurre en el origen. Para ello estudiamos los límites laterales en 0:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{1/x}}=0,\ \text{ y }\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{1/x}}=1.$$

Por tanto f no es continua en el origen. Por último

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{1+e^{1/x}}=\frac{1}{2},\ \text{ y }\ \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+e^{1/x}}=\frac{1}{2}.$$

b) La función

$$g(x)=\begin{cases}\frac{e^x}{x}, & \text{si } x<0\\ x, & \text{si } 0\leq x<1\\ \sqrt[5]{x}, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ por el carácter local. Veamos los límites laterales en 0 y 1:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x}=-\infty$$

y, por tanto, g no puede ser continua en 0. Como

$$\lim_{x\to 1^-}x=1=\lim_{x\to 1^+}\sqrt[5]{x}=1=g(1),$$

g es continua en 1. Por último, los límites en infinito valen

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x}=0,\ \text{ y}$$
$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\sqrt[5]{x}=+\infty.$$

Ejercicio 4.11. Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^{\frac{1}{\ln(x)-1}}$, para todo $x\in\mathbb{R}^+\setminus\{e\}$. Estudiar el comportamiento de f en $0,e,+\infty$.

Solución 4.11.

a) Veamos en primer lugar el comportamiento en 0: $\lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty \implies \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x)-1}=0$, por tanto tenemos una indeterminación del tipo 0^0. Tomemos logaritmos para resolverla:

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(x)-1}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\ln(x)-1}=1 \implies \lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(x)-1}}=e^1=e.$$

b) En e vamos a estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x\to e^-}x^{\frac{1}{\ln(x)-1}}=\text{"}e^{-\infty}\text{"}=0,\ \text{ y }\ \lim_{x\to e^+}x^{\frac{1}{\ln(x)-1}}=\text{"}e^{+\infty}\text{"}=+\infty.$$

c) Por último, en $+\infty$ de nuevo tomamos logaritmos para resolver la indeterminación:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^{\frac{1}{\ln(x)-1}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x)-1} = 1 \implies \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\ln(x)-1}} = e^1 = e.$$

Ejercicio 4.12. Sea $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)}$. Probar que f tiene límite en los puntos 0 y $\frac{\pi}{2}$ y calcular dichos límites.

Solución 4.12. En primer lugar, veamos el límite en 0:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to0}\frac{\cos(x)^{\operatorname{sen}(x)}}{\operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)}} = \frac{1}{1} = 1,$$

ya que $\lim_{x\to0}\operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)} = 1$, usando que $\lim_{x\to0^+} x^x = 1$.
En $\frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)^{\operatorname{sen}(x)}}{\operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ejercicio 4.13. Sea $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (1+\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)}$. Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en 0 y $\pi/2$.

Solución 4.13. La función f es continua en $]0, \frac{\pi}{2}[$ ya que $1+\operatorname{sen}(x)$ es una función continua y positiva en dicho intervalo y, $\operatorname{cotan}(x)$ también es una función continua en este intervalo.
Veamos el comportamiento en $\frac{\pi}{2}$: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)} = "2^{+\infty}" = +\infty$.
En 0, $\lim_{x\to0}(1+\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)} = "1^{\infty}"$ con lo que aplicamos la regla del número e para resolverlo:

$$\lim_{x\to0}\operatorname{cotan}(x)(1+\operatorname{sen}(x)-1) = \lim_{x\to0}\cos(x) = 1 \implies \lim_{x\to0}(1+\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)} = e.$$

Ejercicio 4.14.

a) Da un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.
b) Da un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.
c) Da un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.
d) Da un ejemplo de una función continua en $[0,1[$ tal que $f([0,1[)$ no sea acotado.
e) Da un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

Solución 4.14.

a) Por el Teorema del valor intermedio, la función no puede estar definida en un intervalo. Como ejemplo nos vale la función $f : [0,1]\cup[2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
b) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$. Claramente f no es continua en 0 y su imagen es $\mathbb{R}^+$.
c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
e) $f :]0, 100\pi[\to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \cos(x)$.

Ejercicio 4.15. Probar que existe un número real positivo x tal que $\ln(x) + \sqrt{x} = 0$.

Solución 4.15. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \ln(x) + \sqrt{x}$. La función f es continua y esta definida en un intervalo. Además

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$

Por tanto f cambia de signo y tiene que anularse en $\mathbb{R}^+$.

Ejercicio 4.16. Probar que la ecuación $\tan(x) = x$ tiene infinitas soluciones.

Solución 4.16. Dado un entero k, sea $f : \left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[\to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \tan(x) - x$. f es una función continua definida en un intervalo y

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi^+} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi^-} f(x) = +\infty.$$

Dado que la función cambia de signo, f se anula al menos una vez en cada uno de dichos intervalos.

Ejercicio 4.17. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del ecuador, pruébese que, en cualquier instante, existen dos puntos antípodas sobre el ecuador que se hallan a la misma temperatura.

Solución 4.17. Sea $T : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la función que nos indica la temperatura en un punto del ecuador y que es continua por hipótesis. Buscamos un punto que cumpla que $T(x) = T(x+\pi)$, por tanto definamos $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ como $g(x) = T(x) - T(x+\pi)$. La función g es continua y $g(0) = -g(\pi)$, por lo que debe anularse en algún punto.

Ejercicio 4.18. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Probar que existe un intervalo de 5 minutos seguidos a lo largo del cual el corredor recorre exactamente 1 kilómetro.

Solución 4.18. Consideremos $f : [0, 30] \to [0, 6]$ la función que nos indica en un momento dado cuantos kilómetros se han recorrido. Sabemos que $f(0) = 0$ y $f(30) = 6$. Encontrar un intervalo de 5 minutos a lo largo del cual el corredor recorre 1 kilómetro es lo mismo que encontrar una solución de la ecuación $f(x+5) - f(x) = 1$, para ello consideremos la función $g(x) = f(x+5) - f(x) - 1$ con $x \in [0, 25]$ y veamos que cambia de signo.

a) $g(0) = f(5) - 1$ puede ser positivo, negativo o cero. En este último caso ya hemos encontrado un cero de g. Vamos a discutir el primer caso (el segundo es similar).
b) $g(5) = f(10) - f(5) - 1$. Si es negativo o cero tenemos un cero de g, en caso contrario,
c) $g(10) = f(15) - f(10) - 1$. Si es negativo o cero tenemos un cero de g, en caso contrario,
d) $g(15) = f(20) - f(15) - 1$. Si es negativo o cero tenemos un cero de g, en caso contrario,
e) $g(20) = f(25) - f(20) - 1$. Si es negativo o cero tenemos un cero de g, en caso contrario,
f) $g(25) = f(30) - f(25) - 1$. Si es negativo o cero tenemos un cero de g. Sumando las desigualdades

$$\begin{aligned} f(5)-f(0)&>1\\ f(10)-f(5)&>1\\ f(15)-f(10)&>1\\ f(20)-f(15)&>1\\ f(25)-f(20)&>1\\ f(30)-f(25)&>1 \end{aligned}$$

se obtiene que $f(30)>6$ con lo que la última no puede ocurrir.

Ejercicio 4.19. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas doce horas el reloj marca un tiempo t_0+12 horas. Demuéstrese que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

Solución 4.19. Sea $f:[0,12]\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(t)=$ tiempo (medido en horas) que marca el reloj en el tiempo t. Podemos admitir que f es continua. El incremento de f en el intervalo $[0,12]$ es igual a $f(12)-f(0)=12$. Al igual que en el Ejercicio 4.18, podemos dividir el intervalo $[0,12]$ en doce intervalos de longitud 1. No es posible que el reloj marque en todos ellos más de una hora (o menos) si al final marca doce horas exactamente. Como hemos dicho el desarrollo es similar al Ejercicio 4.18. Queremos encontrar $t\in[0,11]$ tal que $f(t+1)-f(t)=1$. Por tanto, estudiamos la función $g:[0,11]\to\mathbb{R}$ definida como

$$g(t)=f(t+1)-f(t)-1.$$

Si $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$,...,$g(10)$ son positivos, entonces $g(11)$ tiene que ser negativo y viceversa. Por último, la aplicación del Teorema de los ceros de Bolzano nos da el punto buscado.

Ejercicio 4.20. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del sábado.

Solución 4.20. Sea $f:[7,20]\to[0,h]$ la función que indica la altura del escalador en la subida y $g:[7,20]\to[0,h]$ la que indica la altura bajando, donde h es la altura de la montaña. Por tanto $f(7)=g(20)=0$ y $f(20)=g(7)=h$. La ecuación que queremos resolver es $f(x)=g(x)$ o lo que es lo mismo buscamos un cero de la función $h(x)=f(x)-g(x)$. Dado que h es continua, está definida en un intervalo y $h(7)=-h<0<h(20)=h$, el Teorema de los ceros de Bolzano nos asegura la existencia de un punto donde se anula h.

Ejercicio 4.21. Determinar la imagen de la función $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\arctan(\ln|x|)$.

Solución 4.21. Como la función es par, $f(x)=f(-x)$, se tiene que $f(\mathbb{R}^*)=f(\mathbb{R}^+)$. En este caso, f es la composición de la función arcotangente y la función logaritmo neperiano. Dado que ambas son estrictamente crecientes, su composición también lo es. Por tanto

$$f(\mathbb{R}^*) = f(\mathbb{R}^+) = \left]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Ejercicio 4.22. Probar que la ecuación $x + e^x + \arctan(x) = 0$ tiene una sola raíz real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

Solución 4.22. Consideremos $f(x) = x + e^x + \arctan(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. f es una función continua definida en un intervalo, además $f(-1) < 0 < f(0)$ y por tanto f se anula en el intervalo $]-1,0[$. Para comprobar que sólo se anula en un punto basta observar que f es una función estrictamente creciente, en particular inyectiva, por ser suma de tres funciones estrictamente crecientes.

4.7.3 Ejercicios complementarios

Ejercicio 4.1. Pruébese que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.

Ejercicio 4.2. Sean $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x,\ \forall x \in]0,1[, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Comprobar que f y g son continuas y acotadas pero no tienen máximo ni mínimo absolutos.

Ejercicio 4.3. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua en $[0,1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo: $\exists\, x \in [0,1] : f(x) = x$.

Ejercicio 4.4. Dado un número real positivo a, pruébese que existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x^2 = a$. Además x es único.

Ejercicio 4.5. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando $f(0) = f(1) = 0$. Probar que, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

Ejercicio 4.6. Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \forall x \in [-1,1]$. Calcular su imagen.

Ejercicio 4.7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 0$. Probar que f es continua en $\mathbb{R}$, estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Calcular la imagen de f.

Ejercicio 4.8. Demostrar que la aplicación $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ es biyectiva. Determínese f^{-1} y compruébese que es una función continua.

Ejercicio 4.9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f y la existencia de límites en $+\infty$ y $-\infty$.

Ejercicio 4.10. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(0) = 0$. Estudiar la continuidad de f según los valores de α.

Ejercicio 4.11. Probar que para cada número real a existe un único número positivo x verificando $x + \ln(x) = a$.

Ejercicio 4.12. Sean a, b dos números reales verificando $b < 0 < a$. Estudiar el comportamiento en cero de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{a}{x}\right) - \arctan\left(\frac{b}{x}\right), \quad g(x) = x f(x).$$

Ejercicio 4.13. Sea $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$. Calcular la imagen de f.

Derivabilidad

5

5.1 Definición. Recta tangente.

Función derivable

Definición 5.1. Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *derivable* en $a \in A \cap A'$ si existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A dicho límite lo notaremos $f'(a)$. A la función $a \mapsto f'(a)$ la llamaremos *función derivada* de f y la notaremos f'.

Observación 5.2.

a) El cociente incremental $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y la derivada se pueden ver también como un límite en cero haciendo un cambio de variable:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

b) La restricción de que a sea un punto de acumulación del dominio de la función ($a \in A \cap A'$) es obligatoria si queremos que el cociente incremental tenga sentido y no estemos dividiendo por cero. Recuerda que en el caso de que el conjunto A sea un intervalo se cumple que $A' = \overline{A}$ con lo que podemos estudiar la derivabilidad en cualquier punto del intervalo.

Ejemplo 5.3. La función $f(x) = x^2$ es derivable. Su derivada en un punto a es, según la definición,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x+a)(x-a)}{x - a} = 2a.$$

Obtenemos así la fórmula usual de la derivada de $f(x) = x^2$, esto es, que $f'(x) = 2x$. ◂

La condición de ser derivable es más fuerte que la de ser continua.

Condición necesaria de derivabilidad

Proposición 5.4. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$, entonces f es continua en a.*

El recíproco no es cierto. Hay funciones continuas que no son derivables.

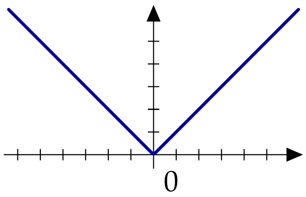


Figura 5.1 La función valor absoluto no es derivable en el origen

Ejemplo 5.5. La función valor absoluto, $f(x) = |x|$, es continua pero no es derivable en el origen: no coinciden los límites laterales en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1, \text{ y}$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Por tanto, la función valor absoluto no es derivable en el origen. En el resto de puntos de la recta real, la función es o bien la identidad o bien la identidad cambiada de signo. En ambos casos, la función es derivable. ¿Por qué? Fíjate que la definición de derivabilidad está hecha usando límites y que, en particular, cuestiones como su carácter local siguen siendo válidas. ◂

5.1.1 Interpretación geométrica de la derivada

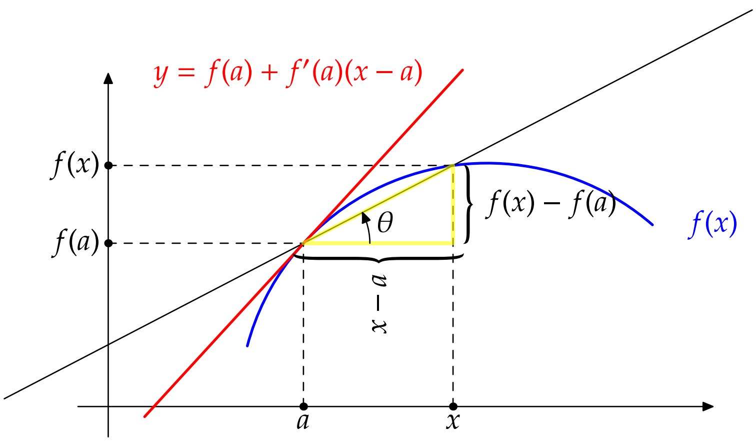


Figura 5.2 Recta tangente

La recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$ es una recta secante a la gráfica de la función f. Puedes ver en la Figura 5.2 que el cociente incremental es

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \tan(\theta).$$

Cuando hacemos tender x a a, dicha recta se convierte en tangente a la función f en el punto $(a, f(a))$. Si el valor $\tan(\theta)$ nos indica la pendiente de la recta secante, la derivada,

Recta tangente $f'(a)$, nos indica la pendiente de la *recta tangente* que tiene como fórmula

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

5.1.2 Derivadas laterales

Puesto que la derivada está definida como un límite y sabemos la relación entre límites laterales y límite, podemos hablar de *derivadas laterales*. Aunque tiene sentido para un conjunto cualquiera, vamos a enunciarlo únicamente para funciones definidas en un intervalo I.

Definición 5.6. Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, de forma que $\{x \in I : x < a\} \neq \emptyset$. Se dice que f es *derivable por la izquierda* en el punto a si existe

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^-)$$

Este límite se llama *derivada lateral izquierda* de f en el punto a.
Si ahora el punto a es tal que $\{x \in I : x > a\} \neq \emptyset$, se dice que f es *derivable por la derecha* en el punto a si existe

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$$

Este límite se llama *derivada lateral derecha* de f en el punto a.

Observación 5.7. La relación que hay entre la derivabilidad y la derivabilidad lateral para funciones definidas en un intervalo I queda reflejada en las siguientes afirmaciones:

a) Si $a = \min(I)$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la derecha a y además, $f'(a) = f'(a^+)$.

b) Si $a = \max(I)$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la izquierda en a y además, $f'(a) = f'(a^-)$.

c) Si $a \in \mathring{I}$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la izquierda y por la derecha en a y ambas derivadas coinciden. Además, en ese caso, $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$.

Resumiendo, para que una función sea derivable deben de existir todas las derivadas laterales que tengan sentido y coincidir.

5.2 Reglas de derivación

Proposición 5.8. *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $a \in A$. Entonces* **Álgebra de derivadas**

a) La suma de funciones derivables es una función derivable y su derivada es la suma de las derivadas: $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

b) El producto de funciones derivables es una función derivable y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

c) Si $g(a) \neq 0$, la función $\frac{f}{g}$ es derivable y $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Usando el primer apartado podemos calcular la derivada de cualquier polinomio, siempre que sepamos la derivada de x^n. Comencemos por eso.

Ejemplo 5.9. Es inmediato comprobar que la función identidad $f(x) = x$ es derivable y que $f'(x) = 1$. Usando la segunda propiedad se demuestra por inducción que cualquier potencia también lo es y que la derivada de la función $g(x) = x^n$ es $g'(x) = nx^{n-1}$, para cualquier natural n, aunque dicha derivada también se puede calcular directamente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h \to 0} \binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} h + \cdots = n a^{n-1}. \triangleleft$$

Con esto tenemos resuelta la derivada de una función racional. Veamos otro tipo de funciones. Por ejemplo, ¿cuál es la derivada de la función exponencial?

Ejemplo 5.10. Calculamos la derivada de la función exponencial. Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{e^a \left(e^{x-a} - 1\right)}{x - a}.$$

Usando la regla que tenemos para resolver indeterminaciones del tipo "1^∞" (Proposición 4.14),

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \left(e^{x-a} - 1\right) = L \iff \lim_{x \to a} \left(e^{x-a}\right)^{1/(x-a)} = e = e^L.$$

Por tanto $L = 1$ y

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{e^a\left(e^{x-a}-1\right)}{x-a} = e^a$$

o, lo que es lo mismo, la derivada de la función exponencial es ella misma. ◁

No parece fácil calcular la derivada de la función logaritmo únicamente con la definición, pero el siguiente resultado nos dice cómo calcular la derivada de la inversa de cualquier función.

Regla de la cadena

Proposición 5.11. *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$ y $g : B \to \mathbb{R}$. Supongamos que f derivable en $a \in A$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es también derivable en a con derivada*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)\,.$$

Teorema de derivación de la función inversa

Teorema 5.12. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva con inversa $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$. Sea $a \in A$ y supongamos que f es derivable en a. Entonces son equivalentes:*
a) $f'(a) \neq 0$ y f^{-1} es continua en $f(a)$.
b) f^{-1} es derivable en $f(a)$.
En caso de que se cumplan ambas afirmaciones se tiene que $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Ejemplo 5.13. Usemos que la derivada de la función exponencial $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$ para calcular la derivada de su inversa, f^{-1}, la función logaritmo. Aplicando el teorema de derivación de la función inversa,

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}.$$

Si $y = f(x)$, tenemos que $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y}$. ◁

5.3 Teorema del valor medio

Máximo relativo

Definición 5.14. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene un *máximo relativo* en $a \in A$ si existe un entorno de a, $]a-r, a+r[\subset A$, donde se cumple que

$$f(x) \leq f(a), \ \forall x \in]a-r, a+r[.$$

Mínimo relativo

Si se cumple que $f(x) \geq f(a)$, diremos que la función tiene un *mínimo relativo* en a. En general, nos referiremos a cualquiera de las dos situaciones diciendo que f tiene un *extremo relativo* en a.

Observación 5.15. En el caso particular de funciones definidas en intervalos, los extremos relativos sólo se pueden alcanzar en puntos del interior del intervalo, nunca en los extremos.

Al igual que la monotonía, la noción de extremo relativo no tiene nada que ver la continuidad o derivabilidad de la función en un principio. Sólo depende del valor de la función en un punto y en los puntos cercanos.

Ejemplo 5.16. La *parte entera* de un número real x es el único número entero $E(x)$ que verifica que $E(x) \leq x < E(x)+1$. La gráfica de dicha función la puedes ver en la Figura 5.3.

¿Tiene máximo o mínimos relativos? Si lo piensas un poco, descubrirás que la función alcanza un máximo relativo en *todos* los puntos y un mínimo relativo en cualquier punto que no sea entero.

En efecto, alrededor de un número no entero la función es constante y, por tanto, tiene un máximo y un mínimo relativo. En cambio, si z es un número entero, se tiene que $f(z) \leq f(x)$ para cualquier $x \in \left]z-\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}\right[$.
◁

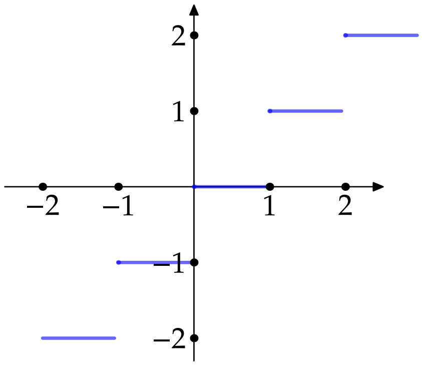


Figura 5.3 Función parte entera

En el caso de funciones derivables la búsqueda de extremos relativos es un poco más sencilla. El siguiente resultado nos dice que sólo tendremos que buscar puntos que anulen la derivada.

Proposición 5.17. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$. Si f tiene un extremo relativo en a, entonces $f'(a) = 0$.*

Usualmente llamaremos *puntos críticos* a aquellos en los que se anula la derivada. **Punto crítico**

Teorema de Rolle

Teorema 5.18. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verificando que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Usando la propiedad de compacidad, la función alcanza su máximo y su mínimo absolutos en $[a,b]$. Sean $\alpha, \beta \in [a,b]$ tales que $f(\alpha) = \max(f)$ y $f(\beta) = \min(f)$.

a) Si $\alpha \in]a,b[$, α es un máximo relativo y, por tanto, $f'(\alpha) = 0$.
b) Si $\beta \in]a,b[$, β es un máximo relativo y, por tanto, $f'(\beta) = 0$.
c) Si $\alpha, \beta \in \{a,b\}$, entonces f es constante y, por tanto $f'(x) = 0$ en todo el intervalo. □

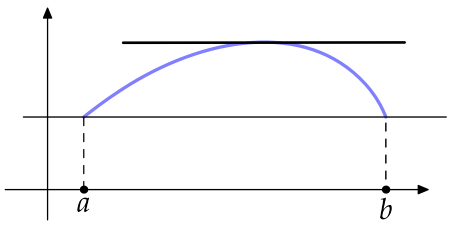


Figura 5.4 Teorema de Rolle

Teorema del valor medio

Teorema 5.19. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Demostración. La función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = (f(b) - f(a))x - (b-a)f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle. Por tanto existe $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$ como queríamos. □

Hay una versión un poco más general del teorema del valor medio que es útil cuando queremos aplicar este resultado a dos funciones al mismo tiempo.

Teorema del valor medio generalizado

Teorema 5.20. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en $]a,b[$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Consecuencias del teorema del valor medio

Proposición 5.21. *Sea I un intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivable.*
a) f es creciente si y sólo si $f'(x) \geq 0$ para cualquier $x \in I$.
b) f es decreciente si y sólo si $f'(x) \leq 0$ para cualquier $x \in I$.
c) f es constante si y sólo si $f'(x) = 0$ para cualquier $x \in I$.
d) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente.
e) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente.

Teorema del valor intermedio para la derivada

Teorema 5.22. *Sea I un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ derivable. Entonces $f'(I)$ es un intervalo.*

Observación 5.23. El teorema del valor intermedio para la derivada no es una consecuencia del teorema del valor intermedio. Sería necesario que la función fuera de clase C^1 para garantizarnos la continuidad de la derivada. Sin embargo, se pueden encontrar funciones derivables cuya derivada no es una función continua (veáse el Ejemplo 5.29).

La primera aplicación del teorema del valor intermedio para la derivada es que el estudio de la monotonía se simplifica sobremanera. Una vez que sabemos que la derivada no se anula (en un intervalo), basta evaluar en un punto arbitrario para saber su signo.

Ejemplo 5.24. Estudiemos la monotonía de la función $f(x) = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{1+x}$ para $x > 0$. Para ello, veamos cuándo se anula la derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0 \iff \sqrt{x} = \sqrt{1+x} \iff x = 1 + x$$

Por tanto, f' no se anula nunca. El teorema del valor intermedio para las derivadas nos asegura que f es estrictamente monótona en $\mathbb{R}^+$. En efecto, si la derivada cambiase de signo, tendría que anularse, cosa que no ocurre.
Una vez que sabemos que f' tiene el mismo signo en todo $\mathbb{R}^+$, podemos averiguar dicho signo evaluando en cualquier punto. Por ejemplo $f'(1) > 0$, con lo que f es estrictamente creciente. ◂

Lo que hemos visto en el ejemplo anterior, lo podemos repetir con cualquier función cuya derivada no se anule.

Corolario 5.25. *Sea I un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable con $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Entonces f es estrictamente monótona.*

Teorema de la función inversa

Teorema 5.26. *Sea I un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ derivable en I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es estrictamente monótona, f^{-1} es derivable y $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.*

5.4 Reglas de L'Hôpital

1ª regla de L'Hôpital

Proposición 5.27. *Sea I un intervalo, $a \in I$, $f, g: I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ derivables. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Entonces, si*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L, +\infty, -\infty \implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L, +\infty, -\infty.$$

Podemos aplicar este resultado al estudio de la derivabilidad de una función continua. Aplicando la primera regla de L'Hôpital al límite de la definición de derivada se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 5.28. *Sea I un intervalo, $a \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $I \setminus \{a\}$.*

Condición suficiente de derivabilidad

a) Si $\lim_{x\to a} f'(x) = L$, entonces f es derivable en a y $f'(a) = L$.

b) Si $\lim_{x\to a} f'(x) = \infty$, entonces f no es derivable en a.

Ejemplo 5.29. Estudiemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función es continua y derivable en $\mathbb{R}^*$. No es difícil comprobar que f es continua en 0. Usando que el producto de una función acotada por otra que tiende a cero es cero, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Sabemos que $f'(x) = 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$. Usando que la función coseno no tiene límite en $+\infty$ (recuerda que sabemos por el Ejemplo 4.11 que ninguna función periódica no trivial tiene límite en infinito), concluimos que no existe $\lim_{x\to 0} f'(x)$.
Para estudiar la derivabilidad en el origen nos queda únicamente la definición

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Por tanto, f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.
La función f es un ejemplo de una función derivable pero cuya derivada no es una función continua y, al mismo tiempo, un ejemplo de que la regla de L'Hôpital no es una equivalencia.◃

Proposición 5.30. *Sea I un intervalo, $a \in I$, $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ derivables. Supongamos que $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$. Entonces, si*

2ª regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

5.5 Derivadas de orden superior

Al igual que podemos estudiar la derivabilidad de una función, podemos repetir este proceso y estudiar si la derivada es una función derivable. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función derivable, notaremos f' a la primera derivada, f'' a la segunda derivada y $f^{(n)}$ a la derivada de orden n.

Función de clase C^1
Función de clase C^n

Definición 5.31. Sea $A \subset \mathbb{R}$, diremos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es de *clase* C^1 si es derivable y f' es una función continua.
Si n es un número natural cualquiera, diremos que f es de *clase* C^n si f es n veces derivable y la derivada n-ésima $f^{(n)}$ es continua.
Por último, si una función admite derivadas de cualquier orden diremos que es de *clase* C^∞.

Usaremos la siguiente notación

$$C^1(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : \text{ existe } f' \text{ y es continua}\},$$
$$C^2(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : \text{ existe } f'' \text{ y es continua}\} \ldots$$

En general,

$$C^n(A) = \left\{f : A \to \mathbb{R} : \text{ existe } f^{(n)} \text{ y es continua}\right\}, \quad \text{y}$$
$$C^\infty(A) = \left\{f : A \to \mathbb{R} : \text{ existe } f^{(n)} \text{ para todo } n \text{ natural}\right\}.$$

Se tiene la siguiente cadena de inclusiones:

$$C^\infty(A) \subsetneq \ldots C^{n+1}(A) \subsetneq C^n(A) \subsetneq \ldots C^2(A) \subsetneq C^1(A) \subsetneq C(A),$$

donde $C(A)$ denota al conjunto de las funciones continuas en A. Para comprobar que las inclusiones son estrictas, tenemos que encontrar funciones de clase n que no sean de clase $n+1$. ¿Cómo buscamos una función con estas propiedades? La respuesta es sencilla: consideremos la función valor absoluto (o cualquiera otra con un pico) y, aunque todavía no hemos hablado de ello, calculemos una primitiva. Dicha primitiva se puede derivar una vez (obtenemos la función valor absoluto) pero no se puede volver a derivar. Si queremos que se pueda derivar más veces sólo tenemos que integrar más veces. Esto es lo que hacemos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5.32. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^{n+1}, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$

es de clase C^n pero no de clase C^{n+1}. No es difícil comprobar que la derivada de orden $n+1$ no es continua en a:

$$f'(x) = \begin{cases} (n+1)(x-a)^n, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$
$$f''(x) = \begin{cases} (n+1)n(x-a)^{n-1}, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$

y, sucesivamente,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (n+1)!(x-a), & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Esta función *no* es derivable en $x = a$ porque las derivadas laterales existen y no coinciden.

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} (n+1)!, & \text{si } x > a, \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Obsérvese que la función f no es de clase $n+1$ porque no existe la derivada no porque no sea continua. En este sentido, el Ejemplo 5.29 es "mejor": la función era derivable pero la derivada no era continua.◂

Proposición 5.33. *Sea I un intervalo, $a \in I$ y n, un número natural mayor o igual que 2. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase n verificando*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \; f^{(n)}(a) \neq 0.$$

a) Si n es impar, f no tiene un extremo relativo en a.
b) Si n es par:
  i) si $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a,
  ii) si $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.

Ejemplo 5.34. La función $f(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ tiene un mínimo absoluto en el origen pero no se puede encontrar un intervalo centrado en 0 dónde la derivada tenga un único cambio de signo. ◂

5.6 Polinomio de Taylor

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $a \in I$, la recta tangente

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

tiene cierto parecido con la función original. Más concretamente, ambas pasan por el punto $(a, f(a))$ y tienen la misma pendiente.

Si la función f se puede derivar más veces podemos plantearnos encontrar un polinomio que se ajuste con más exactitud a dicha función. Para ello podemos escoger varios caminos pero, en general, necesitamos imponer condicionales adicionales al polinomio. Por ejemplo: ¿existe un polinomio de grado 2 que coincida con la función, su derivada y la segunda derivada en un punto a? Supongamos que el polinomio es $p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$. Si imponemos esas condiciones, obtenemos que:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(a), \\ a_1 &= f'(a), \\ 2a_2 &= f''(a), \end{aligned}$$

En general, si queremos que el polinomio coincida con la función y sus derivadas de orden n obtenemos que $a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición 5.35. Sea $f : I \to \mathbb{R}$, n veces derivable en $a \in I$. El *polinomio de Taylor* de orden n centrado en a de la función f es

Polinomio de Taylor

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

El *polinomio de Mclaurin* es el polinomio de Taylor en el caso particular $a = 0$.

Polinomio de Mclaurin

Ejemplo 5.36. Calcular el polinomio de Taylor de la función seno en centrado en el origen.

En primer lugar vamos a calcular las derivadas sucesivas de la función seno:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x), \\ f'(x) &= \cos(x), \\ f''(x) &= -\operatorname{sen}(x), \\ f'''(x) &= -\cos(x), \text{ y} \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Las derivadas a partir de orden 5 se vuelven a repetir. Expresar la derivada n-ésima así es, como mínimo, incómodo aunque tiene la ventaja de ser entenderse fácilmente. De otra forma,

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x), \\ f'(x) &= \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ f''(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \\ f'''(x) &= \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

y, por inducción, se tiene que

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Si sustituimos en el origen:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0, \ldots$$

Se observa que todas las derivadas de orden par son nulas y las de orden impar van alternando los valores 1 y -1. El polinomio de Taylor de orden $2n-1$ nos queda

$$\begin{aligned} P_{2n-1}(x) =& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\ =& x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ =& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}. \triangleleft \end{aligned}$$

El siguiente resultado se conoce como *fórmula infinitesimal del resto* y permite calibrar el parecido entre una función y su polinomio de Taylor cerca del punto donde estamos calculando el desarrollo.

Fórmula infinitesimal del resto

Proposición 5.37. *Sea I un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^n con $n \geq 1$ y P_n el polinomio de Taylor de f en $a \in I$. Entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

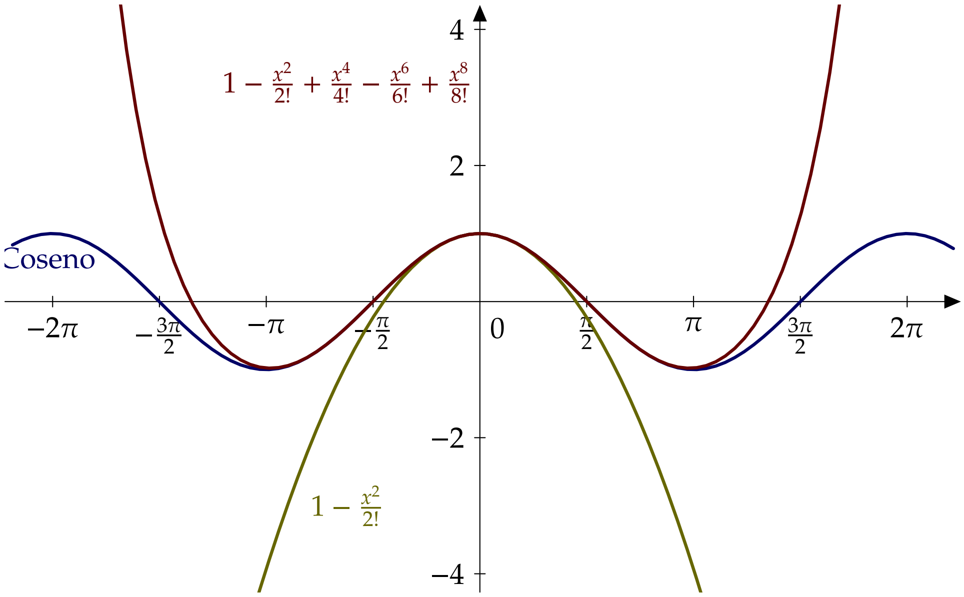


Figura 5.5 La función coseno y su polinomio de Taylor

A la diferencia entre la función y el correspondiente polinomio se le suele llamar *resto de Taylor de orden n de la función f en el punto a*: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. **Resto de Taylor**

Ejemplo 5.38. *Calcular* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(e - (1+x)^{\frac{1}{x}})$.
Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(e - (1+x)^{\frac{1}{x}}\right).$$

Consideremos la función $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = (1+x)^{1/x}, x > 0$ y $g(0) = e$, función que hemos estudiado en el Ejercicio 5.3 y obtuvimos que es derivable en cero y $g'(0) = -e/2$. Utilizando esta función y el teorema de Taylor, la función f podemos escribirla así:

$$f(x) = \frac{g(0) - g(x)}{x} = \frac{-g'(0)x - R_1(x)}{x} = \frac{e}{2} - \frac{R_1(x)}{x}, \forall x > 0$$

donde $R_1(x)$ representa el resto de Taylor de la función g en el cero, y de orden 1, por lo que sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0$. Entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{e}{2}. \triangleleft$$

Teorema 5.39. *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable. Sea P_n el polinomio de Taylor de orden n en el punto a de la función f. Entonces, dado $x \in I$ existe $c \in]a, x[$ tal que* **Teorema de Taylor**

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

La fórmula de Taylor permite dar una estimación del error que cometemos. Dejando aparte el valor de la derivada de orden $n+1$ de la función, estamos dividiendo por $(n+1)!$ lo que quiere decir que cuanto más alto sea el grado del polinomio mejor. Al mismo tiempo estamos multiplicando por $(x-a)^{n+1}$ lo cual quiere decir que cuanta mayor sea la distancia entre el punto donde desarrollemos, a, y el punto donde evaluemos, x, peor.

Ejemplo 5.40. La función coseno es uno de los ejemplos típicos de función que supuestamente conocemos. Decimos supuestamente porque en la práctica, salvo en unos cuantos valores destacados, no sabemos calcularla. En cambio sí que podemos evaluar su polinomio de Taylor, por ejemplo, en el origen. Para ello usaremos las derivadas en el origen de $f(x) = \cos(x)$:

$$f(0) = 1, \ f'(0) = 0, \ f''(0) = -1, \ f'''(0) = 0, \ \text{y} \ f^{(4)}(0) = 1.$$

El polinomio de Taylor en el origen de orden uno, dicho de otra manera, la recta tangente en 0 es

$$P_1(x) = 1.$$

Cerca del origen, el polinomio de Taylor y la función coseno no se diferencian demasiado, pero este parecido desaparece rápidamente cuando nos alejamos. Aumentemos el grado del polinomio de Taylor. La segunda derivada en el origen vale -1 y por tanto

$$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

El polinomio de grado 4 es

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

que, como se puede ver la Figura 5.6, se diferencia aún menos de la función coseno.

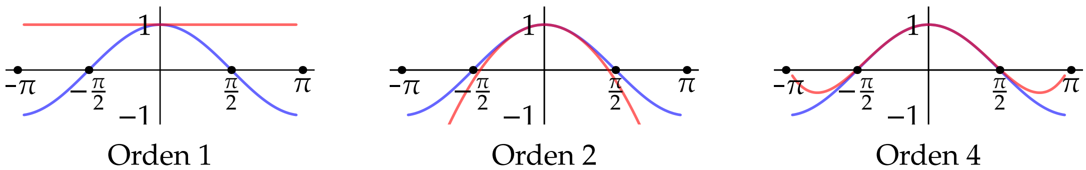


Figura 5.6 Polinomio de Taylor de la función coseno

A la vista de este ejemplo puede pensarse que si aumentamos el orden del polinomio de Taylor el error que cometemos será cada vez más pequeño y veremos que para la función coseno de hecho es así. ◁

La función exponencial coincide con su derivada y, por tanto, con su derivada n-ésima. Su polinomio de Taylor en el origen es

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}.$$

Por ejemplo, si queremos calcular el número e, el error será

$$R_n(1) = f(1) - P_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}(1-0)^{n+1},$$

donde $f(x) = e^x$ y c es un punto intermedio entre $a = 0$ y $x = 1$. No sabemos con exactitud cuanto vale e^c, lo que sí sabemos es que la exponencial es una función creciente y entre 0 y 1 está acotada por 3, por ejemplo. Por tanto

$$|R_n(1)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} \right| \le \frac{3}{(n+1)!}.$$

Por tanto, utilizando dicha cota del error, tenemos

n	$\mathbf{P_n(1)}$	**error** $\mathbf{R_n(1)}$
0	1	3
1	2=1+1	$\frac{3}{2}$
2	$2.5 = 1 + 1 + \frac{1}{2}$	½
3	$2'\hat{6} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
4	≈ 2.708	0.025

Tabla 5.1 Aproximaciones del número e

Para poder calcular este polinomio lo único que necesitamos es la existencia de derivadas de cualquier orden en un punto a del dominio. En este ambiente, es natural plantearse preguntas como

a) ¿Cualquier función de clase C^∞ es el límite en algún sentido de su polinomio de Taylor cuando el orden tiende a infinito?
b) ¿Qué ocurre con funciones que presentan problemas de regularidad como, por ejemplo, la existencia de puntos de discontinuidad o en los que no existan todas las derivadas?
c) Si el polinomio de Taylor no se parece a la función original siempre, ¿hay al menos algunos puntos en los que sí se parezca? Y, en ese caso, ¿cómo de grande es dicho conjunto?, ¿es un intervalo?, ¿es abierto, cerrado,...?

5.7 Concavidad y convexidad

Definición 5.41. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Diremos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *convexa* si verifica que

Función convexa

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

para cualesquiera $x, y \in I$.
Diremos que la función es *cóncava* si se verifica la desigualdad opuesta, esto es,

Función cóncava

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \ge (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

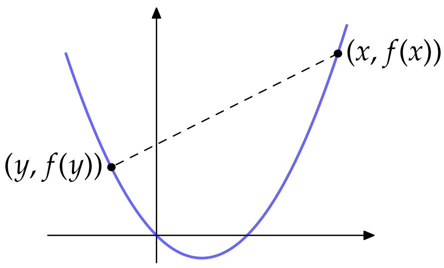


Figura 5.7 Función convexa

Las definiciones de concavidad y convexidad son completamente independientes de que la función sea o no continua, derivable o cualquier otra condición de regularidad. Dicho esto, como ocurre con la monotonía, la derivada es una gran herramienta que nos va a permitir simplificar el estudio de la concavidad y convexidad.

Observación 5.42.

a) La convexidad (análogamente la concavidad) tiene una clara interpretación geométrica. Debe verificarse que el segmento que une los puntos $(x, f(x)), (y, f(y))$ quede por encima de la gráfica de la función. Recuerda que dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$, el segmento que los une es el conjunto

$$[x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0,1]\} .$$

b) No está de más recalcar que f es convexa si, y sólo si, $-f$ es cóncava.

Proposición 5.43. *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Entonces*
a) Si $f''(x) > 0$ para cualquier $x \in I$, entonces f convexa.
b) Si $f''(x) < 0$ para cualquier $x \in I$, entonces f cóncava.

Punto de inflexión

Definición 5.44. Diremos que $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un *punto de inflexión* en $a \in I$ si en dicho punto la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

5.8 Algunas aplicaciones de la derivada

Ejemplos de máximos, mínimos, número de soluciones, desigualdades, estudio de una función, etc.

Imagen de una función

El teorema del valor intermedio junto con la monotonía permiten calcular la imagen de una función. Más concretamente, se cumple que
a) si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es creciente entonces $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$, y
b) si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente entonces $f(]a,b[) =]\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x)[$.

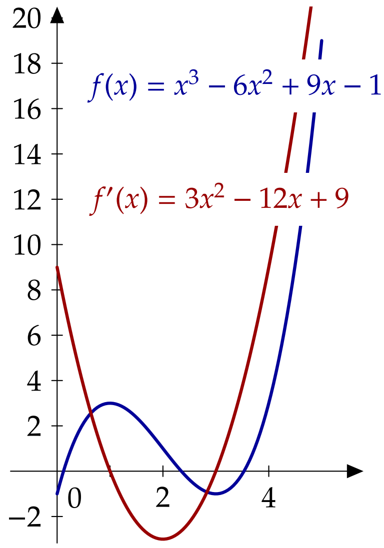
Resultados similares se tienen para funciones decrecientes. Observa que necesitamos tres datos de la función para poder aplicarlos: continuidad, monotonía y que el dominio sea un intervalo. Observa que, hasta este momento, no ha aparecido la palabra derivada. Su papel es facilitarnos el estudio de la monotonía. Nada más.

Ejemplo 5.45.

Veamos un ejemplo: vamos a calcular la imagen de la función $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. En este caso, la función es derivable en todo su dominio, es un polinomio. ¿Cuáles son sus puntos críticos?

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x = 1, 3.$$

Por tanto f es estrictamente monótona en $[0,1]$, en $[1,3]$ y en $[3,5]$. Podemos evaluar la derivada en un punto de cada uno de dichos intervalos para averiguar el carácter de la monotonía:



intervalo	x	signo de $f'(x)$	monotonía de f
$[0,1]$	0	+	est. creciente
$[1,3]$	2	-	est. decreciente
$[3,5]$	4	+	est. creciente

Con estos datos,

$$\begin{aligned} f([0,5]) &= f([0,1]) \cup f([1,3]) \cup f([3,5]) \\ &= [f(0), f(1)] \cup [f(3), f(1)] \cup [f(3), f(5)] \\ &= [-1,3] \cup [-1,3] \cup [-1,19] = [-1,19]. \end{aligned}$$

En particular, la función f tiene máximo y mínimo absolutos y ya sabemos su valor: -1 y 19. También sabemos dónde se alcanzan: el mínimo en 0 y en 3 y y el máximo en 5.◂
Si en lugar del intervalo $[0,5]$, hubiésemos considerado la función f definida en todo $\mathbb{R}$ no sería necesario estudiar la monotonía. Piénsalo un momento. Se cumple que

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = -\infty \text{ y que } \lim_{x\to+\infty} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = +\infty.$$

Esto quiere decir que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 5.46. ¿Cuál es la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \arctan(x^9 - 2x^4 + \operatorname{sen}^3(2x-3))?$$

Un vistazo a la derivada y te darás cuenta de que no parece fácil decidir la monotonía de la función. De nuevo, observa que

$$\lim_{x\to-\infty} x^9 - 2x^4 + \operatorname{sen}^3(2x-3) = -\infty \implies \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \text{ y que}$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^9 - 2x^4 + \operatorname{sen}^3(2x-3) = +\infty \implies \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, $f(\mathbb{R}) \supset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. ¿Podría ser la imagen un conjunto mayor? En este caso no, ya que la función arcotangente no toma nuca valores fuera de dicho intervalo. En consecuencia $f(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. ◁

Extremos absolutos

Acabamos de ver cómo el estudio de la imagen de una función nos da automáticamente, si existen, los extremos absolutos. En el caso de que tengamos garantizado la existencia de dichos extremos *antes* de estudiar monotonía, es posible ahorrar algunos cálculos. Por ejemplo, la función del Ejemplo 5.45 tiene máximo y mínimo por la propiedad de compacidad: es una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Eso quiere decir que los extremos absolutos se tienen que alcanzar en uno de los siguientes puntos:

a) puntos críticos,

b) extremos del intervalo, o

c) puntos donde la función no sea continua o no sea derivable.

En este caso, los extremos de la función $f : [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ tienen que estar entre los siguientes: 0, 1, 3 y 5. Hemos reducido el problema de averiguar el valor máximo o mínimo en todo un intervalo a averiguar el máximo o el mínimo de cuatro números. Sólo hace falta echar un vistazo para encontrarlos:

$$f(0) = -1,\ f(1) = 3,\ f(3) = -1, f(5) = 24.$$

Por tanto, el máximo absoluto se alcanza en 5 y el mínimo en 0 y en 1.

Desigualdades y ecuaciones

La demostración de una desigualdad o el estudio de el número de soluciones de una ecuación son sólo dos ejemplos que podemos resolver estudiando las funciones adecuadas. Por ejemplo, la validez de la desigualdad

$$\operatorname{sen}(x) < x, \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

la podemos ver de varias formas: pasamos restando o dividiendo y comprobamos que

a) la imagen de la función $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ con $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ está contenida en $\mathbb{R}^+$, o bien,

b) la imagen de la función $g(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ con $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ está contenida en $]0,1[$.

Dependiendo del tipo de funciones involucradas en la desigualdad, será más conveniente utilizar uno u otro método.

Calculemos cuál es la imagen de $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Como $f'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ en dicho intervalo, f es estrictamente creciente y, en consecuencia,

$$f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\right[= \left]0, \frac{\pi}{2} - 1\right[.$$

También podemos utilizar la monotonía para contar el número de soluciones de una ecuación. Para ello nos aprovecharemos de que una función continua y estrictamente monótona en un intervalo se anula (una única vez) si, y sólo si, cambia de signo en los extremos de dicho intervalo. Más concretamente, sea $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente. Se cumple que

a) si $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ o $\lim_{x\to b} f(x) < 0$, f no se anula en $]a,b[$, y

b) si $\lim_{x\to a} f(x) < 0$ y $\lim_{x\to b} f(x) > 0$, entonces f se anula *una única vez* en $]a,b[$.

5.9 Ejercicios

5.9.1 Ejercicios conocidos

Ejercicio 5.1. Calcular la tangente de las siguientes curvas en los puntos dados:

a) $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el origen.

b) $y = x^2 + 1$ en $(3, 10)$

c) $y = \cos(x)$ en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

d) $y = |x|$ en $(1, 1)$

Solución 5.1.

a) $y'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \implies y'(0) = 1$.

b) $y'(x) = 2x \implies y'(3) = 6$.

c) $y'(x) = -\operatorname{sen}(x) \implies y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

d) $y'(x) = 1$ en $\mathbb{R}^+$ y, por tanto, $y'(1) = 1$.

Ejercicio 5.2. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}(x+3)$

b) $y = \cos^2(x)$

c) $y = \frac{1}{\cos(x)}$

d) $y = \sec(x)$

e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

f) $y = \sqrt[3]{x^2+1}$

Solución 5.2.

a) $y'(x) = \cos(x+3)$.

b) $y'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

c) $y'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$.

d) $y'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$.

e) $y'(x) = \sqrt{\frac{1}{(1-x)^3(1+x)}}$.

f) $y'(x) = \frac{2}{3}x(x^2+1)^{-2/3}$.

Ejercicio 5.3. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.

b) $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$.

c) $f(x) = x^4 e^x \ln(x)$.

d) $f(x) = x^x$.

e) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$.

f) $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$.

Solución 5.3.

a) $f'(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^4 \left(x^{-4/5} + x^{-6/5}\right)$.
b) $f'(x) = -\operatorname{sen}(\cos(\cos(x))) \operatorname{sen}(\cos(x)) \operatorname{sen}(x)$.
c) $f'(x) = 4x^3e^x \ln(x) + x^4e^x \ln(x) + x^3e^x$.
d) $f'(x) = x^x (\ln(x) + 1)$.
e) $f'(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} \ln(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.
f) $f'(x) = |x|$.

Ejercicio 5.4. Comprobar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0, \\ 3x^2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

es continua pero no es derivable en el origen.

Solución 5.4. Es inmediato comprobar que la función es continua y que

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 2 \neq 0 = \lim_{x \to 0^+} f'(x).$$

Ejercicio 5.5. Calcular los puntos donde la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$ es paralela al eje OX.

Solución 5.5. Buscamos dónde se anula la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1.$$

Ejercicio 5.6. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones indicando los máximos, mínimos y puntos de inflexión.
a) $y = 6 - 2x - x^2$ b) $y = 3x^4 - 4x^3$ c) $y = (x-1)^3$

Solución 5.6.

a) La función alcanza su máximo absoluto en $x = -1$ y no tiene puntos de inflexión.
b) La función alcanza su mínimo en $x = 1$ y puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 24/36$.
c) No tiene extremos y tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

Ejercicio 5.7. Calcular dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

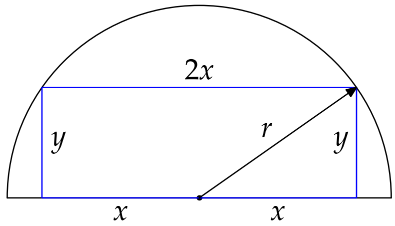
Solución 5.7. Sean x e y dichos números. Entonces $x+y = 20$. Como $y = 20-x$, tenemos que buscar el máximo de la función $f(x) = x(20-x)$. Derivamos y calculamos sus puntos críticos:

$$f'(x) = 20 - 2x = 0 \iff x = 10.$$

Puesto que $f''(x) = -2$, la función tiene su máximo en $x = 10$ y los dos números que estabamos buscando son 10 y 10.

Ejercicio 5.8. Calcular las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio r.

Solución 5.8.
Salvo multiplicar por 4, podemos trabajar en el primer cuadrante. Tenemos que maximizar la función $f : [0, r] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x\sqrt{r^2 - x^2}$. Los puntos críticos son



$$f'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \iff r^2 - 2x^2 = 0$$
$$\iff x = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Es inmediato comprobar que en dicho punto la función alcanza el máximo.

Ejercicio 5.9. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$
b) $\lim_{x\to \pi/2^-} \frac{2x-\pi}{\cos(x)}$
c) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$
d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

Solución 5.9.

a) Aplicamos las reglas de L'Hôpital $\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x)}{1} = 3 \implies \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = 3$.
b) Usamos las reglas de L'Hôpital. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{-\operatorname{sen}(x)} = -2 \implies \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\cos(x)} = -2$.
c) Usando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{2x} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{6} \implies \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} = \frac{1}{6}.$$

d) Aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{1}{2}.$$

5.9.2 Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 5.10. Sea $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\ln(1-\operatorname{sen}(x)) - 2\ln(\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)},$$

si $x \neq 0$ y $f(0) = a$. Estudia para qué valor de a la función f es continua en cero.

Solución 5.10. Calculamos el límite de f en el cero aplicando la regla de L'Hôpital y nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)} + \frac{2\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{\cos(x)} = -1.$$

Por tanto, f es continua en cero si, y sólo si, $a = -1$.

E **Ejercicio 5.11.** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right), & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2+1}, & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 + \frac{\ln(x)}{x}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Calcula la imagen de la función.

Solución 5.11. La función f es continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Para estudiar la continuidad y derivabilidad en 0 y 1, utilizamos límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right) = \arctan(0) = 0, \quad \text{y}$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x^2+1} = 0.$$

Por tanto, f es continua en cero. Veamos en 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x^2+1} = 1, \quad \text{y}$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 + \frac{\ln(x)}{x} = 1.$$

En consecuencia, f es continua en toda la recta real.
La derivada, salvo en 0 y 1, vale

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{2}{x^3}}{1+\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}, & \text{si } 0 < x < 1, \\ \frac{1-\ln(x)}{x^2}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Las derivadas laterales en 0 son

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{2}{x^3}}{1+\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} = 0, \quad \text{y}$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 2,$$

que no coinciden y, por tanto, f no es derivable en 0. En 1,

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0, \quad \text{y}$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\ln(x)}{x^2} = 1.$$

Por tanto f es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.
Para terminar el problema vamos a calcular la imagen de f. Como

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty,0]) \cup f([0,1]) \cup f([1,+\infty[),$$

calculamos la imagen de cada una de estos tres intervalos por separado

a) En $\mathbb{R}^-$, $f'(x)<0$ y, por tanto, $f(]-\infty,0]) = [f(0), \lim_{x\to-\infty} f(x)[= \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$.
b) En $]0,1[$, la derivada es positiva: $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$.
c) Por último, en $[1,+\infty[$, $f'(x)=0 \iff x=e$. Evaluando la derivada, es muy sencillo comprobar que f es creciente en $[1,e]$ y decreciente en $[e,+\infty[$. Por tanto,

$$f([1,+\infty[) = [f(1), f(e)] \cup \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(e)\right].$$

Uniendo todos los resultados anteriores, la imagen de f es $f(\mathbb{R}) = \left[0, 1+\frac{1}{e}\right]$.

5.9.3 Teorema del valor medio

Ejercicio 5.12. Probar que $\operatorname{arcsen}(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x\in[-1,1]$.

Solución 5.12. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)+\arccos(x)$. Como f es derivable en $]-1,1[$ y además $f'(x)=0$, $\forall x\in]-1,1[$ tenemos que f es constante en el intervalo $]-1,1[$. Si evaluamos la función en el cero, obtenemos $f(x)=\frac{\pi}{2}$, para todo $x\in]-1,1[$. Utilizando la continuidad de f en todo $[-1,1]$, se deduce que $f(x)=\frac{\pi}{2}$ en el intervalo cerrado.

Ejercicio 5.13. Demostrar que la desigualdad $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ se verifica para todo $x>0$.

Solución 5.13. Podemos resolver el ejercicio de varias formas.

a) En primer lugar vamos a demostrar las dos desigualdades como consecuencia directa del teorema del valor medio. Para ello, definimos $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$. Si ahora restringimos f al intervalo $[0,x]$, siendo $x>0$, por el teorema del valor medio, se asegura la existencia de $c\in]0,x[$ verificando

$$\ln(1+x) = f(x)-f(0) = f'(c)x = \frac{1}{1+c}\,x.$$

Por tanto

$$0<c<x \implies 1<1+c<1+x \implies \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$$
$$\implies \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} = \ln(1+x) < x, \ \forall x>0.$$

b) Otra posibilidad es demostrar una a una las desigualdades. Veamos cómo podemos demostrar una de las dos. Por ejemplo, como

$$\ln(1+x) < x \iff x - \ln(1+x) > 0,$$

vamos a calcular la imagen de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x - \ln(1 + x)$ y comprobar que su imagen está contenida dentro de $\mathbb{R}^+$. Como la función f es derivable, estudiamos su monotonía:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0, \ \forall x > 0.$$

Por tanto, f es estrictamente creciente y

$$f\left(]0,+\infty[\right) = \left]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[.$$

Como $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, la función siempre es positiva como queríamos demostrar.

E **Ejercicio 5.14.** Demuestra que

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$$

para cualquier x positivo.

Solución 5.14. FALTA

Ejercicio 5.15. Demostrar que $\left|\arctan(x) - \arctan(y)\right| \leq \left|x - y\right|$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución 5.15. Aplicamos el teorema del valor medio a la función $f(t) = \arctan(t)$ y tomamos valores absolutos:

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|f'(c)\right|\left|x-y\right| = \left|\frac{1}{1+c^2}\right|\left|x-y\right| \leq \left|x-y\right|.$$

E **Ejercicio 5.16.** Calcula el número de soluciones de la ecuación $x^2 = x\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$.

Solución 5.16. Vamos a estudiar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 - x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)$. Claramente es una función derivable. Su único punto crítico es

$$f'(x) = 2x - x\cos(x) = x(2-\cos(x)) = 0 \iff x = 0.$$

Examinando el signo de la derivada podemos conocer la monotonía de la función.

intervalo	x	signo de $f'(x)$	monotonía de f
$]-\infty,0]$	-1	-	estrictamente decreciente
$[0,+\infty[$	1	+	estrictamente creciente

Como $f(0) = -1$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la función cambia de signo en los intervalos $[0,+\infty[$ y $]-\infty,0]$ y tiene, por tanto, dos soluciones.

Ejercicio 5.17. Calcular el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

Solución 5.17. Consideramos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$. Calculamos los puntos críticos de la función:

$$f'(x) = 6x^5 - 6x = 6x(x^4 - 1) = 0 \iff x = -1, 0, 1.$$

Además tenemos que en -1 y en 1 hay dos ceros de f $(f(-1) = f(1) = 0)$. Si hubiera algún cero más, por el teorema de Rolle habría más de tres puntos críticos de la función. Por tanto, la función f tiene solamente dos ceros.

E **Ejercicio 5.18.** Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x).$$

Calcula su imagen.

Solución 5.18. La función a la que tenemos que calcularle la imagen es una función continua. Si estuviera definida en un intervalo el teorema del valor intermedio nos diría que su imagen es un intervalo; sin embargo $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ no es un intervalo. Sí es cierto que está formado por dos intervalos, $]-\infty, -1[$ y $]-1, +\infty[$, así que la imagen de la función, restringida a cada uno de los intervalos $]-\infty, -1[$ y $]-1, +\infty[$ tiene que ser un intervalo. Por otra parte la función, en cada uno de los dos intervalos anteriores, es derivable así que para calcular la imagen vamos a estudiar la derivada. Esto sabemos que nos da información sobre crecimiento, extremos relativos, etc.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{-2}{2+2x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0. \end{aligned}$$

y la función es constante (en cada uno de los intervalos donde está definida).
Para conocer las dos constantes basta entonces con evaluar en un punto de cada uno de los intervalos. En el intervalo $]-1, +\infty[$ no hay ningún problema ya que fácilmente $f(0) = \arctan(1) + \arctan(0) = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$. En el otro intervalo no parece tan fácil ya que no se ve un número en $]-\infty, -1[$ en el que sea fácil evaluar la función. En este caso lo que podemos hacer es calcular el límite de la función, o bien en $-\infty$ o bien en -1 por la izquierda. Por ejemplo en $-\infty$ tenemos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x) = \arctan(-1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Así que la imagen es el conjunto $\left\{-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$.

E **Ejercicio 5.19.** Calcula la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$ para cualquier x real.

Solución 5.19. FALTA

Ejercicio 5.20. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Encuentra las condiciones que deben verificar los parámetros para que f alcance un máximo y un mínimo relativo.

b) Si se verifica el enunciado anterior, demuestra que en el punto medio del segmento que une los puntos donde se alcanzan el máximo y el mínimo relativo se alcanza un punto de inflexión.

Solución 5.20.

a) La derivada de la función f es $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dicha derivada se anula en dos puntos si, y sólo si, $4b^2 - 12ac > 0$ y, efectivamente, estamos ante un polinomio de segundo grado, esto es, $a \neq 0$.

b) Olvidemos por un momento el enunciado concreto del problema y pensemos lo que tenemos y lo que queremos demostrar. La derivada de f es un polinomio de grado dos (una parábola); el máximo y el mínimo relativos de f se alcanzan en los puntos de corte de la parábola con el eje OX, esto es, en los puntos que anulan a la derivada y queremos demostrar que en el punto medio la segunda derivada de f vale cero. Para simplificar (esperemos) la notación, sean α y β los puntos donde se alcanza dichos extremos. Entonces $f'(x) = k(x-\alpha)(x-\beta)$ para conveniente constante $k \neq 0$. Para terminar es suficiente con calcular la segunda derivada en el punto medio:

$$f''(x) = k\,(2x - (\alpha+\beta)) \implies f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0.$$

Ejercicio 5.21. Probar que $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Solución 5.21. Podemos escribir cualquier real x de la forma $\tan(y)$ para conveniente $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Usando este cambio $x = \tan(y)$ tenemos que

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \iff \cos(y) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(y)}} = \frac{1}{\sec(y)}$$

y análogamente

$$\operatorname{sen}(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \iff \operatorname{sen}(y) = \frac{\tan(y)}{\sqrt{1+\tan^2(y)}} = \frac{\tan(y)}{\sec(y)}$$

Ambas igualdades son ahora evidentes.

E **Ejercicio 5.22.** Calcular la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}(x^2 - 3)$.

Solución 5.22. La función f es continua y derivable en toda la recta real. Para estudiar su monotonía, calculamos la derivada y vemos cuándo se anula

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x^2} - \left(x^2-3\right)2xe^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}2x\left(4-x^2\right) = 0 \iff x = 0, \pm 2. \end{aligned}$$

Por tanto, f es estrictamente monótona en los intervalos $]-\infty,-2]$, $[-2,0]$, $[0,2]$, $[2,+\infty[$. Para averiguar qué tipo de monotonía tenemos podemos evaluar la derivada en un punto de cada uno de dichos intervalos

intervalo	x	signo de $f'(x)$	monotonía de f
$]-\infty,0-2]$	-5	+	estrictamente creciente
[-2,0]	-1	-	estrictamente decreciente
[0,2]	1	+	estrictamente creciente
$[2,+\infty[$	5	-	estrictamente decreciente

De modo que su imagen es

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f\left(]-\infty,-2]\right) \cup f\left([-2,0]\right) \cup f\left([0,2]\right) \cup f\left(]2,+\infty[\right) \\ &= \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), f(-2)\right] \cup [f(0), f(-2)] \cup [f(0), f(2)] \cup \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(2)\right] \\ &= \left]0, e^{-4}\right] \cup \left[-3, e^{-4}\right] = \left[-3, e^{-4}\right] \end{aligned}$$

usando que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, que $f(0) = -3$ y que $f(2) = f(-2) = e^{-4}$.
Observación: Podíamos habernos ahorrado algunos cálculos utilizando que la función f es par y, por tanto, $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_0^+)$.

Ejercicio 5.23. Sea $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Estudiar la continuidad de f y los límites en $-\infty$ y $+\infty$.
b) Calcular la imagen de f.

Solución 5.23. La función es derivable por ser composición de funciones derivables. Vamos a calcular los límites en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Para calcular su imagen en primer lugar estudiamos la monotonía. Como la función arcotangente es creciente, sólo tenemos que fijarnos en $\frac{1+x}{1-x}$ y

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Esto nos dice que f es estrictamente creciente *si estamos en un intervalo*. En otras palabras, f es estrictamente creciente en $]-\infty,1[$ y en $]1,+\infty[$. Su imagen será

$$f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = f(]-\infty,1[) \cup f(]1,+\infty[) = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[= \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Ejercicio 5.24. Calcular la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

Solución 5.24. Esta función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}^+$. Calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x}x^{1/x-1} - \frac{1}{x^2}x^{1/x}\ln(x) = x^{1/x-2}(1 - \ln(x)).$$

Por tanto $f'(x) = 0 \iff x = e$. En este punto se tiene un punto de máximo relativo (la función pasa de creciente en el intervalo $]0, e[$ a ser decreciente en $]e, +\infty[$). Calculando los límites en los extremos del dominio ($\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$) se deduce que como $f(e) = e^{1/e} > 1$, la imagen de la función es $f(\mathbb{R}^+) =]0, e^{1/e}]$.

E **Ejercicio 5.25.**

a) Sean $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}, \quad g(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}.$$

Estudia los extremos, los intervalos de monotonía, los cortes con los ejes y el comportamiento en $+\infty$ y 0 de ambas funciones. Haz un esbozo de sus gráficas.

b) Sea $a > 2$. Se define la sucesión $\{x_n\}$:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + \frac{x_n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demuestra que $\{x_n\}$ es monótona y acotada y calcula su límite. (Sugerencia: usa las funciones del apartado anterior).

Solución 5.25.

a) Las funciones f y g son derivables en $\mathbb{R}^+$. Vamos paso a paso a estudiar ambas funciones.

i) Para estudiar los intervalos de monotonía, estudiamos el signo de la derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{-4 + x^2}{2x^2} = 0 \iff x = 2, \quad \text{y} \\ g'(x) &= -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2} < 0, \ \forall x > 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, g es estrictamente decreciente y f es estrictamente monótona en los intervalos $]0, 2]$ y $[2, +\infty[$. Para saber el carácter de la monotonía en cada uno de dichos intervalos, podemos evaluar en un punto de cada uno de ellos. Por ejemplo, como $f'(1) < 0$, f es estrictamente decreciente en $]0, 2]$ y, como $f'(10) > 0$, f es estrictamente creciente en $[2, +\infty[$.

ii) Los extremos de la función se obtienen como consecuencia de la monotonía. f tiene un mínimo absoluto en 2 y g no tiene extremos.

iii) Los límites en cero y en infinito valen

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x} + \frac{x}{2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \frac{x}{2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x} - \frac{x}{2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} - \frac{x}{2} = -\infty.$$

iv) Los puntos de corte con los ejes son

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} = \frac{4+x^2}{2x} > 0, \ \forall x > 0,$$
$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{2} = \frac{4-x^2}{2x} = 0 \iff x = 2.$$

Con estos datos no deberías tener dificultad en hacer un esbozo de las gráficas de ambas funciones.

b) La sucesión $\{x_n\}$ está definida de forma recurrente utilizando la función f. Observa que $x_{n+1} = f(x_n)$, esto es, cada término se obtiene del anterior aplicando la función f.

i) Para hacernos una idea de la monotonía, veamos qué término es mayor x_1 o $x_2 = f(x_1)$:

$$a > f(a) \iff a > \frac{2}{a} + \frac{a}{2} \iff a > \frac{4+a^2}{2a} \iff a^2 > 4,$$

lo cual ocurre obviamente si $a > 2$, que es el caso. Acabamos de dar el primer paso para demostrar por inducción que la sucesión es decreciente. Supongamos ahora que, para un natural n fijo, se cumple que $x_n > x_{n+1}$ y tenemos que demostrar que $x_{n+1} > x_{n+2}$. Como

$$x_{n+1} = f(x_n) > f(x_{n+1}) = x_{n+2},$$

tenemos que demostrar que $x_n > x_{n+1} \implies f(x_n) > f(x_{n+1})$. Esta implicación es cierta si los elementos de la sucesión pertenecen al intervalo donde la función f es estrictamente creciente que, habíamos comprobado en el apartado anterior, es el intervalo $[2, +\infty[$. Para ello vamos a ver que si $x > 2$, entonces $f(x) > 2$:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} > 2 \iff \frac{4-x^2}{2x} > 2 \iff x^2 - 4x + 4 > 0 \iff (x-2)^2 > 0,$$

lo cual es claramente cierto. Resumiendo, siempre que apliquemos la función f a un número mayor que dos, obtenemos de nuevo un número mayor que dos. En particular los términos de la sucesión $x_n \in]2, +\infty[$ y la sucesión es decreciente.

ii) La sucesión está acotada inferiormente por cero: sumando y dividiendo números positivos siempre obtenemos números positivos.

Una vez que sabemos que la sucesión es monótona y acotada, el límite tiene que verificar que $L = \frac{2}{L} + \frac{L}{2}$ y, despejando, obtenemos que $\{x_n\}$ tiende a 2.

Ejercicio 5.26. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Probar que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real única.

Solución 5.26. Definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se trata de una función polinómica de grado impar luego, por el teorema de Bolzano, sabemos que al menos se anula en un punto de la recta real. Estudiamos la derivada para deducir la unicidad de la solución de la ecuación $f(x) = 0$ utilizando el teorema de Rolle.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \iff x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12b}}{6}.$$

Teniendo en cuenta que $a^2 < 3b \implies 4a^2 - 12b < 0$; se tiene que la derivada no se anula en ningún punto real, por lo que la solución de la ecuación $f(x) = 0$ que teníamos es única ya que la función es estrictamente creciente.

E **Ejercicio 5.27.** Demostrar que, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la ecuación $x = -a + \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{\sqrt{2}}\right)$ tiene una única solución.

Solución 5.27. Vamos a estudiar la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = x + a - \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{\sqrt{2}}\right).$$

Es muy fácil ver que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Por tanto, el teorema del valor intermedio nos dice que su imagen es todo $\mathbb{R}$ y, en particular, se anula en algún momento. En particular, tenemos demostrado que la ecuación tiene solución. Vamos a estudiar la monotonía de f.

$$f'(x) = 1 - \cancel{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{a-x}{\sqrt{2}}\right)\frac{-1}{\cancel{\sqrt{2}}} = 1 + \cos\left(\frac{a-x}{\sqrt{2}}\right) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

y

$$f'(x) = 0 \iff \cos\left(\frac{a-x}{\sqrt{2}}\right) = -1 \iff \frac{a-x}{\sqrt{2}} = (2k+1)\pi \iff x = a - \sqrt{2}(2k+1)\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Como f es creciente en $\mathbb{R}$ ya que su derivada es mayor o igual que cero y es estrictamente creciente en cualquier intervalo de la forma $\left[a - \sqrt{2}(2k+1)\pi, a - \sqrt{2}(2k+3)\pi\right]$, la continuidad nos da que f es estrictamente creciente y, por tanto, la solución de la ecuación es única.

Otra posibilidad para comprobar que la función no alcanza un extremo relativo en dichos puntos es estudiar las derivadas superiores en los puntos críticos. Puedes comprobar fácilmente que

$$f''\left(a - \sqrt{2}(2k+1)\pi\right) = 0 \text{ y que } f'''\left(a - \sqrt{2}(2k+1)\pi\right) = 0,$$

para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, con lo que f tiene un punto de inflexión y no un extremo en dichos puntos.

E **Ejercicio 5.28.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(1 + x^2\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ \pi, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Estudia su continuidad, derivabilidad y calcula su imagen.

Solución 5.28. FALTA

5.9.4 Reglas de L'Hôpital

Ejercicio 5.29. Calcula los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+3x-1}{2x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos(x)}{x\operatorname{sen}(2x)}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{a^x-a^a}$, donde $a>0$ y $a\neq 1$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$.

Solución 5.29.

a) Aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)+3}{2}=\frac{3}{2}\implies\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+3x-1}{2x}=\frac{3}{2}.$$

b) Sabemos que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$, por tanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos(x)}{x\operatorname{sen}(2x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos(x)}{2x^2}\ \text{(aplicamos la regla de L'Hôpital)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2\operatorname{sen}(x)}{4x}\ \text{(regla de L'Hôpital de nuevo)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2\cos(x)}{4}=1.\end{aligned}$$

c) Aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to a}\frac{ax^{a-1}-a^x\ln(a)}{a^x\ln(a)}=\frac{1}{\ln(a)}-1\implies\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{a^x-a^a}=\frac{1}{\ln(a)}-1.$$

d) Usamos la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1/x}{\ln(x)}}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)}=0\implies\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}=0.$$

Ejercicio 5.30. Calcular los limites de las siguientes funciones en el punto indicado:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\cos(x)+a\operatorname{sen}(bx))^{\frac{1}{x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan(\frac{x}{2})}{\operatorname{sen}^2(2x)\cos(\operatorname{sen}(x))}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left[\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]^{\tan(\frac{\pi x}{2})}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(4x)}{x^3\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x-\cos(x)}$

Solución 5.30.

a) Utilizamos la regla del número e y estudiamos el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) + a\,\mathrm{sen}(bx) - 1}{x} = \frac{0}{0}.$$

Esta indeterminación la resolvemos utilizando la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\,\mathrm{sen}(x) + ab\cos(bx)}{1} = ab,$$

con lo que $\lim_{x\to 0^+} (\cos(x) + a\,\mathrm{sen}(bx))^{\frac{1}{x}} = e^{ab}$.

b) El límite que tenemos que calcular presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$", pero si aplicamos la regla de L'Hôpital directamente las derivadas se complican demasiado. Observa que $\lim_{x\to 0} \cos(\mathrm{sen}(x)) = 1$ y que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 1 \implies \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2(2x)}{(2x)^2} = 1,$$

con lo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\arctan(\frac{x}{2})}{\mathrm{sen}^2(2x)\cos(\mathrm{sen}(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{x\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{(2x)^2} \cdot \frac{(2x)^2}{\mathrm{sen}^2(2x)} \cdot \frac{1}{\cos(\mathrm{sen}(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{4x}.$$

Este último límite lo resolvemos aplicando las reglas de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{4} = \frac{1}{8} \implies \lim_{x\to 0} \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{4x} = \frac{1}{8}.$$

c) Estamos ante una indeterminación del tipo "1^∞". Por tanto

$$\lim_{x\to 1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^L \iff \lim_{x\to 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1\right) = L.$$

Calculemos el límite de la derecha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1\right) &= \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \cdot \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\end{aligned}$$

y, como $\lim_{x\to 1} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1$ y $\lim_{x\to 1} \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Para resolver este último límite aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

y por tanto

$$\lim_{x\to 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \implies \lim_{x\to 1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{-1}.$$

d) Usando que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} = 1$ y que $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(4x)}{x^3\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} &= \lim_{x\to 0}\frac{4x(1-\cos(x))}{x^3}\cdot\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}(1-\cos(x))}{x^2}.\end{aligned}$$

Este último límite se resuelve aplicando la primera regla de L'Hôpital y se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(4x)}{x^3\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = 2\sqrt{2}.$$

e) Si aplicamos la regla de L'Hôpital, llegamos al límite $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}$ que no existe y, por tanto, no podemos decir nada sobre el límite original. En cambio, dividiendo numerador y denominador por x se resuelve fácilmente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x-\cos(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{1-\frac{\cos(x)}{x}} = 1,$$

usando que $\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{x} = 0$.

Ejercicio 5.31. Estudiar el comportamiento de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]2,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$, $\alpha = 2$.

b) $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$, $\alpha = 1$.

c) $A =]1,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x^x - x}{1-x-\ln(x)}$, $\alpha = 1$.

Solución 5.31.

a) Aplicando la primera regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})\sqrt{x^2-4}}{2x\sqrt{x(x-2)}}$$

simplificando el factor $\sqrt{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})\sqrt{x+2}}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$.

b) Como $f(x) = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}$, si aplicamos L'Hôpital nos queda

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln(x)+x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} = \frac{x-1}{x\ln(x)+x-1}.$$

Volviendo a aplicar L'Hôpital, $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln(x)+2} = \frac{1}{2}$. Por tanto, $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

c) Aplicamos L'Hôpital y nos queda $\lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln(x))-1}{-1-1/x} = 0$. Por tanto $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

Ejercicio 5.32. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dadas por

a) $f(x) = \dfrac{\ln(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$,

b) $g(x) = (a^x + x)^{1/x}$, donde $a \in \mathbb{R}^+$.

Solución 5.32.

a) Para estudiar el límite de f en $+\infty$ aplicamos la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\,e^x}{2+3e^x}\,\frac{\sqrt{2+3x^2}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por tanto el límite de f es $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Vamos a calcular ahora el límite en $+\infty$ de la función g. Para ello, aplicamos logaritmos y estudiamos la función $h(x) = \frac{\ln(a^x+x)}{x}$. Discutimos en función del parámetro a:

i) Si $a = 1$, entonces $h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, y aplicando L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = 0 \;\to\; \lim_{x\to +\infty} g(x) = 1.$$

ii) Si $a > 1$, utilizando la regla de L'Hôpital tenemos:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x\,\ln(a)+1}{a^x+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(a)+1/a^x}{1+x/a^x} = \ln(a).$$

Por tanto, en este caso $\lim_{x\to +\infty} g(x) = e^{\ln(a)} = a$.

iii) En el caso en que $a < 1$, repetimos los cálculos del caso anterior, pero teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0$ y por tanto $\lim_{x\to +\infty} h(x) = 0 \implies \lim_{x\to +\infty} g(x) = e^0 = 1$.

Ejercicio 5.33. Estudiar el comportamiento en el punto cero de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{R}^+,\ f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}}$,

b) $A =]0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) = (\operatorname{sen}(x)+\cos(x))^{1/x}$

c) $A =]0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) = \left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Solución 5.33.

a) Aplicamos L'Hôpital y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} 2\sqrt{x}\operatorname{sen}(x) = 0$$

b) Teniendo en cuenta la regla del número e, $\lim_{x\to 0} f(x) = e^L \iff \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)-1}{x} = L$. Por tanto, y aplicando L'Hôpital a la última expresión,

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) = 1 \implies \lim_{x\to 0} f(x) = e.$$

c) Razonando igual que en el caso anterior

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) + x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2x} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Luego $\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1$.

Ejercicio 5.34. Estudiar el comportamiento en el punto cero de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = (1 - \tan(x))^{\frac{1}{x^2}}$,
b) $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^{\operatorname{sen}(x)}$,
c) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \frac{x-\arctan(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}$.

Solución 5.34.
a) Aplicando las reglas de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(1 + \tan^2(x))}{2x} = -\infty \implies \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

b) Si escribimos la función $f(x) = x^{\operatorname{sen}(x)} = (x^x)^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}$, se obtiene fácilmente que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
c) Utilizando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(x)} \frac{1}{3\cos(x)(1 + x^2)} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 5.35. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)^{1/x}$
b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x} + \operatorname{sen}(x))}{\sqrt{3x^2 + 1}}$.
c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(a^{x-1} - x + 1\right)^{\frac{1}{x-1}}$, $(a > 0)$.

Solución 5.35.
a) Tomando logaritmos

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)^{1/x} = e^L \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)}{x}.$$

Para resolver el límite de la derecha, aplicamos la regla de L'Hôpital y nos queda

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)},$$

volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital nos queda

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0,$$

y, por tanto, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)^{1/x} = 1$.

b) Aplicamos la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2e^{2x}+\cos(x)}{e^{2x}+\operatorname{sen}(x)}}{\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x}+\operatorname{sen}(x))}{\sqrt{3x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

c) Tenemos una indeterminación del tipo "1^∞". Por tanto,

$$\lim_{x\to1}\left(a^{x-1} - x + 1\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^L \iff \lim_{x\to1} \frac{1}{x-1}\left(a^{x-1} - x + 1 - 1\right) = L.$$

Resolvemos el límite de la derecha aplicando la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to1} \frac{a^{x-1}\ln(a) - 1}{1} = \ln(a) - 1 \implies \lim_{x\to1}\left(a^{x-1} - x + 1\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\ln(a)-1} = \frac{a}{e}.$$

E **Ejercicio 5.36.** Calcula $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Solución 5.36. Calculamos a qué tiende la base aplicando la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to0} \frac{3\cos(x) - 3\cos(x) + 3x\sin(x)}{3x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Dado que tenemos una indeterminación del tipo "1^∞", se tiene que

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^L \iff \lim_{x\to0} \frac{1}{x}\left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3} - 1\right) = L.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3} - 1\right) = \lim_{x\to0} \frac{3\sin(x) - 3x\cos(x) - x^3}{x^4}$$

aplicando la 1ª regla de L'Hôpital

$$= \lim_{x\to0} \frac{3\sin(x) - 3x}{4x^2}$$

aplicamos la primera regla de L'Hôpital de nuevo

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(x) - 3}{8x}$$

una última vez...

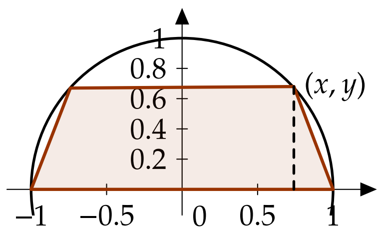
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3\sin(x)}{8} = 0$$

con lo que $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

5.9.5 Optimización

E **Ejercicio 5.37.** Calcula las dimensiones del trapecio con mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio 1.

Solución 5.37. Vamos a poner el área que queremos que sea máxima como una función de una variable. Hay varias posibilidades de hacerlo aunque el resultado, evidentemente tiene que ser el mismo.



El área del trapecio será la media aritmética de la base mayor M y la base menor m multiplicado por la altura h; $A = \frac{M+m}{2}h$. Si llamamos (x, y) al vértice del trapecio que se aprecia en el dibujo tendremos que

$$A = \frac{2 + 2x}{2x} y = (1 + x)y.$$

Si no se recuerda el área del trapecio siempre puede hacerse sumando el área del rectángulo central y los dos triángulos simétricos que quedan a los lados. Esta función anterior depende de dos variables pero es claro que el punto (x, y) está en la circunferencia de radio 1 y por tanto $x^2 + y^2 = 1$ de donde $y = \sqrt{1 - x^2}$ con lo que la función a considerar es $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 + x)\sqrt{(1 - x^2)}$. Esta función es continua en el intervalo de definición y por tanto alcanza máximo y mínimo absoluto. Además es claro que el mínimo se alcanza cuando $x = 1$, que el área vale 0. Para calcular el máximo vamos a calcular los puntos críticos (obsérvese que la función no es derivable en 0).

$$f'(x) = \sqrt{1 - x^2} + (1 + x)\frac{(-x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - x - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall x \in [0, 1[.$$

Y $f'(x) = 0 \iff 2x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ o $x = -1$. Evidentemente el valor que nos interesa es $x = \frac{1}{2}$. Además si $0 < x < 1/2$ se tiene que $f'(x) > 0$ y si $1/2 < x \leq 1$ $f'(x) < 0$ con lo que f alcanza máximo (relativo y absoluto) en $x = 1/2$ (entonces la altura será $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$) y el área máxima es $f(1/2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

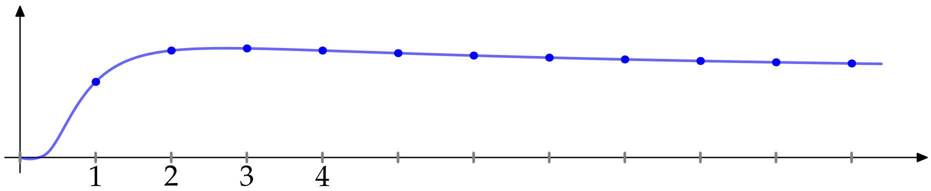
Ejercicio 5.38. Calcular $\max\left\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

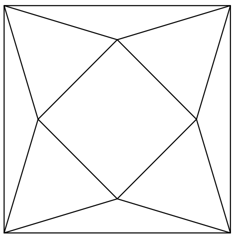
Solución 5.38. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^{1/x}$. Los puntos críticos son

$$f'(x) = x^{1/x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e.$$

Como $f''(e) < 0$, la función f tiene un máximo relativo y absoluto en e. Pero a nosotros no nos interesa el máximo de la función f sino su valor máximo *en los números naturales*. Se tiene que

$$\max\left\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \max\left\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\right\} = \sqrt[3]{3}.$$



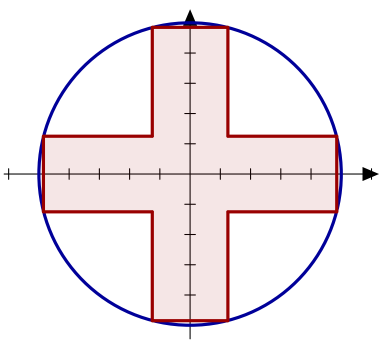


Ejercicio 5.39. De un cuadrado de lado 2 se recortan cuatro triángulos isósceles iguales. ¿Cuál es el volumen máximo de la pirámide que se puede formar? (Indicación: el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base y h su altura).

Solución 5.39. FALTA

Ejercicio 5.40. Demostrar que la suma de un número positivo y su recíproco es al menos 2.

Solución 5.40. Tenemos que demostrar que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x + \frac{1}{x}$ verifica que $f(x) \geq 2$, para tod $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Calculemos su imagen. f es una función derivable y $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. Por tanto $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = 1$. Como $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, f alcanza su mínimo absoluto en $x = 1$, o lo que es lo mismo $f(x) \geq f(1) = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ como queríamos demostrar.



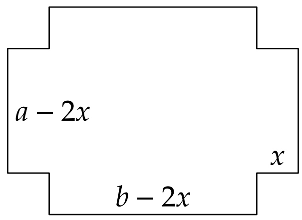
Ejercicio 5.41. Calcula las dimensiones de la cruz simétrica respecto de los ejes y con área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 1.

Solución 5.41. FALTA

Ejercicio 5.42. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados

a) 10 y 10,
b) 12 y 18.

Solución 5.42.



Sean a y b las longitudes de los lados de la lámina y x la longitud del lado del cuadrado que se cortará en cada esquina. El volumen de la caja resultante es $f(x) = (a-2x)(b-2x)x$. Definamos $\gamma = \min\{a/2, b/2\}$. Se trata de calcular el máximo absoluto de la función f en el intervalo $[0, \gamma]$. Derivando resulta $f'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$. Los ceros de la derivada son $\alpha = \frac{1}{6}\left(a + b - \sqrt{a^2+b^2-a\,b}\right)$, y $\beta = \frac{1}{6}\left(a + b + \sqrt{a^2+b^2-a\,b}\right)$.
Fíjate que, como $a^2+b^2-a\,b > 0$, (esta desigualdad es consecuencia de que $u\,v \leqslant \frac{1}{2}(u^2+v^2)$) las raíces de f' son *reales*. Observa también que, al ser $f(0) = f(\gamma) = 0$, en virtud del teorema de Rolle, *al menos una de ellas* tiene que estar en el intervalo $]0, \gamma[$. Además, f tiene que alcanzar en un punto de $[0, \gamma]$ un máximo absoluto y como, evidentemente, *dicho punto tiene que estar en* $]0, \gamma[$, deducimos que ese punto o bien es α o es β. El criterio de la derivada segunda nos permite salir de dudas. Tenemos que $f''(x) = -4(a+b-6x)$. Con ello, $f''(\alpha) = -4(a+b-6\alpha) = -4\sqrt{a^2+b^2-a\,b}$, $f''(\beta) = -4(a+b-6\beta) = 4\sqrt{a^2+b^2-a\,b}$. Por tanto, $f(\alpha) < 0$ y $f(\beta) > 0$. Deducimos así que el punto α está en el intervalo $]0, \gamma[$ y en él la función f alcanza su máximo absoluto en $[0, \gamma]$. Con unos sencillos cálculos se obtiene

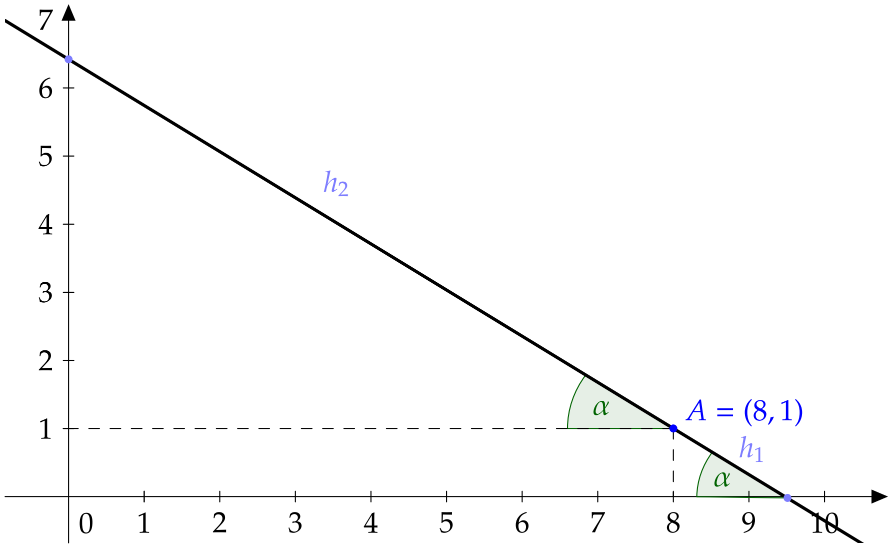
$$f(\alpha) = \frac{1}{54}(-2a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 2b^3 + 2(a^2 - ab + b^2)^{3/2}).$$

Comentario. Este sencillo ejercicio es bastante instructivo y, a pesar de su apariencia, no es del todo trivial. La dificultad está en que, una vez calculados, α y β no es fácil saber cuál de ellos está en el intervalo $[0, \gamma]$. Incluso, podría sospecharse que una veces esté α, otras β, o que estén los dos o que no esté ninguno. Todo ello, dependiendo de los valores de a y de b. El teorema de Rolle nos dice que al menos uno de los números α, β está en $]0, \gamma[$ (pudieran estar los dos). El criterio de la derivada segunda nos dice que el punto β es un mínimo relativo de f por lo que no puede ser el punto que buscamos. Dicho criterio también nos dice que f alcanza en α un máximo *relativo*. Si a esto le añadimos que, en virtud del teorema de Weierstrass, *sabemos* que f alcanza un máximo absoluto en $[0, \gamma]$, deducimos que es α el punto que buscamos. Como *propina* obtenemos que α está en $]0, \gamma[$ cualesquiera sean a y b.
Alternativamente, puedes estudiar el signo de la primera derivada. Escribiendo $f'(x) = 12(x-\alpha)(x-\beta)$, se sigue que $f'(x) < 0$ si $x \in]\alpha, \beta[$ y $f'(x) > 0$ si $x < \alpha$ o si $x > \beta$. Deducimos que f es creciente en el intervalo $]-\infty, \alpha]$, decreciente en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y creciente en $[\beta, +\infty[$. Luego en α hay un máximo relativo. Para justificar que α está en $[0, \gamma]$ y que es el punto donde f alcanza su máximo absoluto en dicho intervalo, hay que razonar como antes.

Ejercicio 5.43. ¿Cuál es la longitud mínima del segmento que tiene un extremo en el eje x, otro extremo en el eje y, y pasa por el punto $(8, 1)$?

Solución 5.43. Consideramos el triángulo rectángulo formado por una recta que pase por $(8, 1)$ y corte a los ejes OX y OY, y llamamos α al ángulo que forma la hipotenusa con el eje OX. Haciendo uso de las funciones coseno y seno tenemos que:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{h_1} \implies \quad h_1 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{8}{h_2} \implies \quad h_2 = \frac{8}{\cos(\alpha)}$$



La función que queremos optimizar es $f(\alpha) = h_1 + h_2 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} + \frac{8}{\cos(\alpha)}$, con $\alpha \in]0, \pi/2[$. Vamos a calcular los puntos críticos de la función f:

$$f'(\alpha) = -\frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} + \frac{8\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{8\operatorname{sen}^3(\alpha) - \cos^3(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}$$

y esta función se anula siempre y cuando $8\operatorname{sen}^3(\alpha) - \cos^3(\alpha) = 0$, es decir $8\operatorname{sen}^3(\alpha) = \cos^3(\alpha)$. De aquí deducimos que

$$\tan^3(\alpha) = \frac{1}{8} \iff \tan(\alpha) = \frac{1}{2} \iff \alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por la monotonía creciente de la función tangente podemos deducir que la derivada $f'(\alpha) < 0$ cuando $0 < \alpha < \arctan(1/2)$, y $f'(\alpha) > 0$ cuando $\arctan(1/2) < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Por tanto, en el punto $\arctan(1/2)$ tenemos que la función alcanza un mínimo relativo que, por ser el único punto crítico es también el mínimo absoluto. Entonces, el segmento de longitud mínima que nos piden es:

$$f\left(\arctan(\frac{1}{2})\right) = 8\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5} = 5\sqrt{5},$$

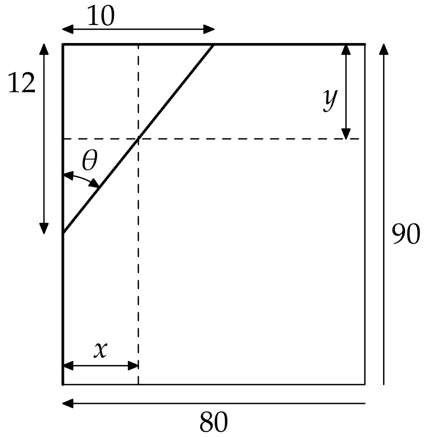
donde hemos utilizado que

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \implies \cos\left(\arctan(\frac{1}{2})\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \implies \operatorname{sen}\left(\arctan(\frac{1}{2})\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ejercicio 5.44. A un espejo rectangular de medidas 80x90 cm. se le rompe (accidentalmente) por una esquina un triángulo de lados 10x12 cm. como indica el dibujo. Calcula las medidas del espejo de mayor área de forma rectangular que se puede obtener del la pieza restante.

Solución 5.44. El área del trozo de espejo que queremos maximizar es $(80-x)(90-y)$. Podemos relacionar x e y la tangente del ángulo θ:

$$\frac{x}{12-y} = \frac{10}{12} \implies y = 12 - \frac{6}{5}x$$



Por tanto, tenemos que buscar el máximo de la función $f(x) = (80-x)\left(78+\frac{6}{5}x\right)$ con $x \in [0,10]$. Calculamos los puntos críticos:

$$f'(x) = -78+\frac{6}{5}x+\frac{6}{5}(80-x) = -\frac{12}{5}x+18 = 0 \iff x = \frac{15}{2}.$$

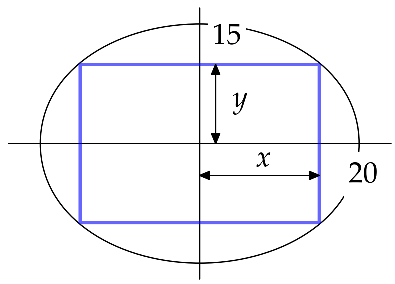
Como $f''\left(\frac{15}{2}\right) = -\frac{12}{5} < 0$, la función alcanza un máximo relativo en dicho punto. El máximo absoluto se alcanza en este punto, en $x=0$ o en $x=10$. Como

$$f(0) = 6240, \quad f\left(\frac{15}{2}\right) = 6307.5 \text{ y } f(10) = 6300$$

el máximo absoluto se alcanza en $x = \frac{15}{2}$.

Ejercicio 5.45. Se inscribe un rectángulo en la elipse $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{225} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hallar las dimensiones del rectángulo para que
a) el área sea máxima,
b) el perímetro sea máximo.

Solución 5.45.
En cualquiera de los dos casos, la simetría nos permite trabajar en el primer cuadrante. En ambos casos usaremos que, utilizando la notación de la figura,



$$\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{225} = 1 \implies y = \frac{15}{20}\sqrt{400-x^2}.$$

a) El área que queremos maximizar es $4xy$, por tanto vamos a estudiar la función $f : [0,20] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{15}{20}x\sqrt{400-x^2}.$$

Si derivamos,

$$f'(x) = \frac{15}{20}\sqrt{400-x^2} - \frac{15}{20}\frac{x^2}{\sqrt{400-x^2}} = 0 \iff 400 = 2x^2 \iff x = \sqrt{200}.$$

Como f es una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado, f alcanza su máximo y mínimo absolutos. Los posibles candidatos son $0, 20$ y $\sqrt{200}$. Es suficiente con comprobar que $f(\sqrt{200}) > f(0), f(20)$ para asegurar que el máximo se alcanza en $\sqrt{200}$.

b) El perímetro es $4(x+y)$. La función a maximizar es $f : [0,20] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = x + \frac{15}{20}\sqrt{400-x^2},$$

o sea, $x+y$. Veamos cuándo se anula la derivada

$$f'(x) = 1 - \frac{15}{20}\frac{x}{\sqrt{400-x^2}} = 0 \iff x = \frac{400}{\sqrt{400+225}}.$$

Como f es una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado, f alcanza su máximo y mínimo absolutos. Los posibles candidatos son $0, 20$ y $\frac{400}{\sqrt{400+225}}$. Es suficiente con comprobar que $f\left(\frac{400}{\sqrt{400+225}}\right) > f(0), f(20)$ para asegurar que el máximo se alcanza en $\frac{400}{\sqrt{400+225}}$.

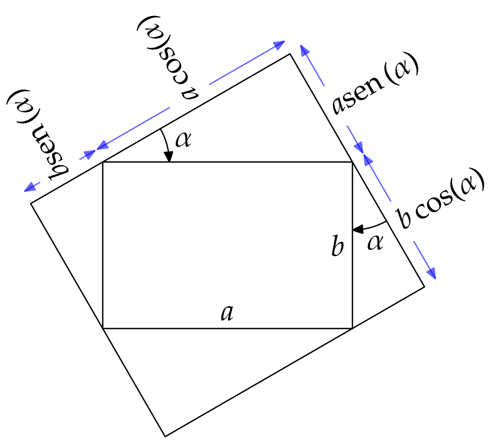
E **Ejercicio 5.46.** Calcula el área máxima del rectángulo circunscrito a un rectángulo de lados a y b.

Solución 5.46. En función del ángulo α, la función a maximizar es $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, definida como

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (a\cos(\alpha) + b\operatorname{sen}(\alpha))(a\operatorname{sen}(\alpha) + b\cos(\alpha)) \\ &= (a^2+b^2)\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) + ab = (a^2+b^2)\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2} + ab. \end{aligned}$$

Los puntos críticos de está función son

$$f'(\alpha) = (a^2+b^2)\cos(2\alpha) = 0 \iff 2\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \alpha = \frac{\pi}{4}.$$



¿Cuánto vale la segunda derivada en $\frac{\pi}{4}$? Como

$$f''(\alpha) = -2(a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha),$$

se tiene que la segunda derivada es negativa en $\frac{\pi}{4}$ y, por tanto, f alcanza un máximo relativo en dicho punto, pero ¿es éste el máximo absoluto? Piénsalo un poco.

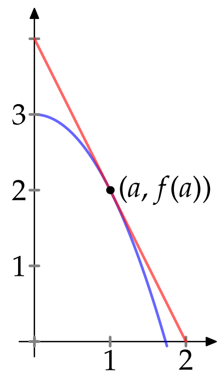
Como f es una función continua en un intervalo cerrado y acotado, f tiene máximo y mínimo absolutos que, necesariamente, tienen que estar en 0, en $\frac{\pi}{4}$ o en $\frac{\pi}{2}$. Como

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + ab > ab = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

el área máxima es $\frac{1}{2}(a^2+b^2)+ab$ y se alcanza en $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

E **Ejercicio 5.47.** Calcula el punto (a,b) de la parábola $y = 3-x^2$ de forma que el triángulo determinado por la recta tangente a la parábola en dicho punto y los ejes de coordenadas tenga área mínima.

Solución 5.47. Para poder calcular el triángulo de área mínima que genera la tangente a la parábola $y = 3-x^2$ y los ejes tenemos que, en primer lugar, calcular la recta tangente en un punto a que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es positivo. La recta tangente que pasa por el punto $(a, f(a))$ es $y-(3-a^2) = -2a(x-a)$.
Los puntos de corte con los ejes son:
a) Si $x = 0$, entonces $y = a^2+3$, y
b) si $y = 0$, entonces $x = \frac{a^2+3}{2a}$.
Por tanto, la función a la que tenemos que calcularle el mínimo es, en función del punto a,



$$f(a) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(a^2+3)^2}{4a},$$

con $a \in]0, \sqrt{3}]$. Su derivada vale

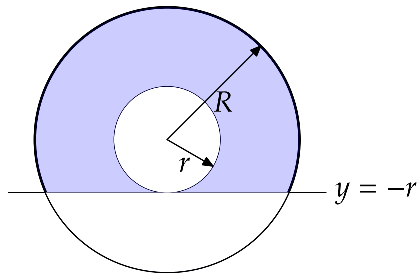
$$f'(a) = \frac{3a^4+6a^2-9}{4a^2} = 0 \iff a^4+2a^2-3 = 0.$$

Resolvemos este polinomio bicuadrático mediante el cambio usual $a^2 = t$ y obtenemos que la única solución positiva es $a = 1$. ¿Es aquí donde f alcanza su mínimo absoluto? Observa que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$

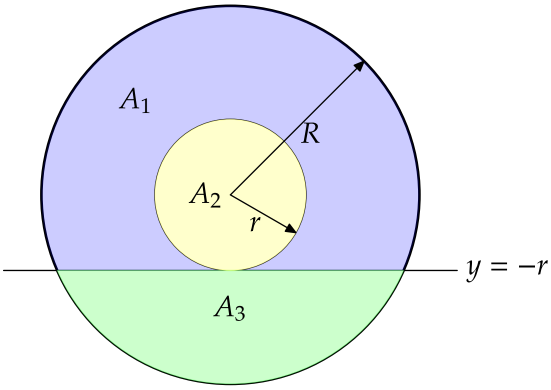
y que, por tanto, f es estrictamente decreciente en $]0,1]$. En cambio, como $f'(\sqrt{3}) > 0$, f es estrictamente creciente en $\left[1, \sqrt{3}\right]$. En consecuencia, f alcanza su mínimo absoluto en $a = 1$.

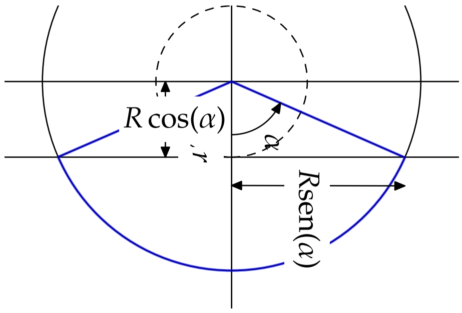
E **Ejercicio 5.48.** Con un disco de radio R queremos hacer, recortando un disco concéntrico de radio r, una arandela como la de la figura. Se pide calcular el radio r cumpliendo la condición de que el área de la parte de la arandela que queda por encima de la recta $y = -r$, la zona coloreada en la figura, sea máxima.



Solución 5.48. El área que queremos hacer máxima es $A_1 = \pi R^2 - A_2 - A_3$. Cada una de ellas es sencilla de expresar en términos de R y el ángulo α. Como $r = R\cos(\alpha)$, $A_2 = \pi R^2\cos^2(\alpha)$. Por otro lado, el área del segmento circular A_3 se pude calcular como diferencia del área del correspondiente sector circular menos el área del triángulo sobrante. Más concretamente, la función a maximizar es $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida como

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \pi R^2 - \pi R^2\cos^2(\alpha) - \left(\alpha R^2 - \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}{\cancel{2}}\right) \\ &= R^2\left(\pi\operatorname{sen}^2(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - \alpha\right). \end{aligned}$$





Su derivada vale

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= R^2\left(2\pi \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) - 1\right) \\ &= R^2\left(2\pi \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - 2\operatorname{sen}^2(\alpha)\right) \\ &= 2R^2 \operatorname{sen}(\alpha)\left(\pi\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\right). \end{aligned}$$

Entonces

$$f'(\alpha) = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0, \text{ ó} \\ \pi\cos(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha) \iff \alpha = \arctan(\pi). \end{cases}$$

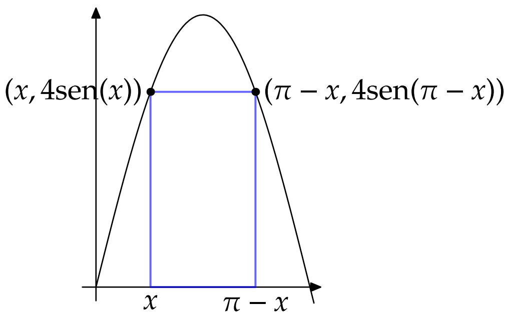
En consecuencia, f es estrictamente monótona en $[0, \arctan(\pi)]$ y en $\left[\arctan(\pi), \frac{\pi}{2}\right]$. Observa que, como $2R^2 \operatorname{sen}(\alpha) \geq 0$ para $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, sólo nos hace falta saber el signo de $\pi\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)$ para conocer el signo de la derivada, pero esto es fácil ya que

$$\pi\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha) > 0 \iff \pi > \tan(\alpha) \iff \arctan(\pi) > \alpha,$$

y, por tanto, f es estrictamente creciente en $[0, \arctan(\pi)]$ y estrictamente decreciente en $\left[\arctan(\pi), \frac{\pi}{2}\right]$. En consecuencia f alcanza su máximo en $\alpha = \arctan(\pi)$.

E **Ejercicio 5.49.** Calcula el perímetro máximo que puede tener un rectángulo que tiene dos vértices en el eje de abscisas y los otros dos en la gráfica de la función $f(x) = 4\operatorname{sen}(x)$, con $x \in [0, \pi]$.

Solución 5.49.



Teniendo en cuenta la simetría de la función $f(x) = 4\,\text{sen}(x)$ respecto de la recta $x = \frac{\pi}{2}$, los vértices del rectángulo que están apoyados en el eje OX serán x y $\pi - x$. Obviamente la altura viene dada por la función f con lo que la función que nos mide el perímetro de un rectángulo con estas características es $g(x) = 2f(x) + 2(\pi - 2x)$. Su derivada $g'(x) = 8\cos(x) - 4$ sólo se anula en cuando $\cos(x) = \frac{1}{2}$, lo que en nuestro caso implica que $x = \frac{\pi}{3}$. Es inmediato comprobar que en dicho punto se alcanza el máximo y que, por tanto, el perímetro máximo vale $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$.

Ejercicio 5.50. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engendrado de esta manera?

Solución 5.50. El volumen de un cono con radio de la base r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. En este caso, r y h están relacionados por el teorema de Pitágoras: $r^2 + h^2 = a^2$. Despejando todo en función de la altura, la función a maximizar es $f :]0, a[\to \mathbb{R}$ definida por $f(h) = \frac{\pi}{3} h(a^2 - h^2)$. Su derivada se anula en

$$f'(h) = \frac{\pi}{3}(a^2 - 3h^2) = 0 \iff h = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Como $\lim_{x\to 0} f(h) = \lim_{x\to a} f(h) = 0$ y $f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \pi a\sqrt{2}$ es positivo, el volumen máximo se alcanza en $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$ y vale $\pi a\sqrt{2}$

5.9.6 Polinomio de Taylor

Ejercicio 5.51. Expresar el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ en potencias de $(x - 2)$.

Solución 5.51. Vamos a calcular el polinomio de Taylor de orden 4 centrado en $a = 2$ de $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6 \implies & f(2) &= -16,\\
f'(x) &= 4x^3 - 15x^2 - 6x + 7 \implies & f'(2) &= -33,\\
f''(x) &= 12x^2 - 30x - 6 \implies & f''(2) &= -18,\\
f'''(x) &= 24x - 30 \implies & f'''(2) &= 18,\\
f^{(4)}(x) &= 24 \implies & f^{(4)}(2) &= 24.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
f(x) =& f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4\\
=& -16 - 33(x-2) - 9(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.52. Calcular un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-2} en cada uno de los casos siguientes:
a) $\alpha = \sqrt{e}$,
b) $\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Solución 5.52.
a) Consideramos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Lo que se nos pide es el valor aproximado de $f(1/2)$ con un error menor que 10^{-2}. Aplicando el teorema de Taylor en el punto cero, sabemos que existe $c \in]0, 1/2[$ verificando

$$f(1/2) = 1 + 1/2 + \frac{1}{2^2\, 2!} + \frac{1}{2^3\, 3!} + \cdots + \frac{1}{2^n\, n!} + R_n(1/2)$$

donde $R_n(x)$ representa el resto de Taylor de la función exponencial de orden n, y por tanto

$$R_n(1/2) = \frac{e^c}{2^{n+1}\,(n+1)!}\,.$$

Entonces, sólo nos queda encontrar el n suficiente para que $|R_n(1/2)|$ sea menor que 10^{-2} . Como $e < 3$ y $c < 1/2$, entonces $e^c < 2$. Luego, si encontramos el natural suficiente para que

$$\frac{1}{2^n\,(n+1)!} < 10^{-2} \iff 2^n\,(n+1)! > 100$$

y para ello basta que $n \geq 3$.
El valor aproximado que se nos pide es: $\sqrt{e} \sim 1 + 1/2 + \frac{1}{2^2\,2!} + \frac{1}{2^3\,3!} = 1,6458$.

b) Repetimos el ejercicio anterior, pero ahora la función es $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, la desarrollamos en torno al cero, y calculamos su valor aproximado en $x = 1/2$. Como el desarrollo de Taylor de la función seno en el cero es

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + R_n(x)$$

donde $R_n(x) = \operatorname{sen}\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, al ser la función seno una función acotada en valor absoluto por 1, sólo tenemos que exigir que

$$|\,R_n(1/2)\,| < \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!} < 10^{-2} \iff 100 < 2^{n+1}\,(n+1)! \iff n \geq 3.$$

Por tanto, el valor aproximado que se nos pide es $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\,3!} = 0.479$.

Ejercicio 5.53. Utilizar el polinomio de Taylor para calcular $\sqrt{102}$ con un error menor que 10^{-2}.

Solución 5.53. Para calcular $\sqrt{102}$ vamos a desarrollar la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 100$. Comencemos calculando derivadas de f:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2},\\
f''(x) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}x^{-3/2},\\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}x^{-5/2},\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}x^{-7/2}
\end{aligned}$$

En general,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n} x^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

El error es

$$R_n(102) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(102-100)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) c^{-(2n+1)/2}}{2^{n+1}(n+1)!} 2^{n+1}, \tag{5.1}$$

donde $c \in [100, 102]$. La función $g(x) = x^{-(2n+1)/2} = \frac{1}{\sqrt{x^{2n+1}}}$ es decreciente y, por tanto, su valor máximo en el intervalo $[100, 102]$ lo alcanza en 100. Sustituimos en la ecuación 5.1 y obtenemos que

$$|R_n(102)| \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n+1)!\, 10^{2n+1}}.$$

Para $n = 1$, $R_1(102) \leq \frac{1}{2 \cdot 10^3}$ es un error suficientemente pequeño. ¿Cuánto vale $\sqrt{102}$?

$$\sqrt{102} \approx P_1(102) = f(100) + f'(100)(102-100) = 10 + \frac{1}{10} = 10.1.$$

E **Ejercicio 5.54.** Calcula una aproximación de $\cosh(1/2)$ con un error menor que 10^{-4}.

Solución 5.54. FALTA

E **Ejercicio 5.55.** Sea f una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 es

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en cero de la función $g(x) = xf(x)$.

Solución 5.55. Recordemos que el polinomio de grado 3 de la función f centrado en 0 es

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Despejando en la fórmula anterior se tiene que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$ y $f'''(0) = 2$. Para calcular el polinomio de Taylor de la función $g(x) = xf(x)$ centrado en el origen y de orden 3 necesitamos el valor de las 3 primeras derivada en 0:

$$\begin{aligned}
g(x) &= xf(x) && \Longrightarrow g(0) = && 0, \\
g'(x) &= f(x) + xf'(x) && \Longrightarrow g'(0) = && 1 \\
g''(x) &= 2f'(x) + xf''(x) && \Longrightarrow g''(0) = && 2, \text{ y} \\
g'''(x) &= 3f''(x) + xf'''(x) && \Longrightarrow g'''(0) = && 3.
\end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio de orden 3 de g es

$$g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

5.9.7 Ejercicios complementarios

Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 5.1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de f y calcular su imagen.

Ejercicio 5.2. Estudiar la continuidad y derivabilidad en cero de la función $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (1 - e^{x^2}) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5.3. Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ para $x \in \mathbb{R}^+$, $f(0) = e$.

Ejercicio 5.4. Sea $f : [-1/2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x + e^x)^{1/x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = e^2$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en cero.

Teorema del valor medio

Ejercicio 5.5. Demostrar que $\left| \operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(ay) \right| \leq |a| \left| x - y \right|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5.6. Para $a > 0$ demostrar que $-ae \ln(x) \leq x^{-a}$ $\forall x > 0$.

Ejercicio 5.7. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ verificando

$$f'(x) = g(x), \quad g'(x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1.$$

Probar que f y g son, respectivamente, las funciones seno y coseno.

Ejercicio 5.8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ verificando $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para todo número real λ existe un punto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$. (Indicación: Considérese la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{-\lambda x} f(x)$, $\forall x \in [a, b]$).

Ejercicio 5.9. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}^+$. Supongamos que f y f' tienen límite en $+\infty$. Probar que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Ejercicio 5.10. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable, verificando que $f(0) = 0$ y que $|f'(x)| \leq |f(x)|$, $\forall x \in [0, 1]$. Probar que $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

Ejercicio 5.11. Demostrar que para $0 < a < b$ se verifica $1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1$.

Ejercicio 5.12. Sea $a > 0$. Probar que $\frac{ea}{x} \leq e^{a/x}$, $\forall x > 0$ y se da la igualdad si, y sólo si, $x = a$.

Ejercicio 5.13. Estudiar continuidad, derivabilidad, crecimiento, extremos relativos y extremos absolutos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]-1, 1[\\ e^{-(x-1)^{-2}} \cdot e^{-(x+1)^{-2}} & \text{si } x \in]-1, 1[\end{cases}$$

Ejercicio 5.14. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivable y verificando $f(0) = 0$. Supongamos que la función f' es creciente. Probar que la función $g :]0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $\forall x \in]0, 1]$ también es creciente.

Ejercicio 5.15. Sea $a > 0$ un número real que verifica $a^{x/a} \geq x$ $\forall x > 0$. Probar que $a = e$.

Ejercicio 5.16. Probar que para $0 < a < 1$ se verifica $(1 + x)^a \leq 1 + ax$, $\quad \forall x \geq -1$.

Ejercicio 5.17. Calcular el número de soluciones de la ecuación $3\ln(x) - x = 0$.

Ejercicio 5.18. Determinar el número de raíces reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = m$ según el valor de m.

Ejercicio 5.19. Demostrar que $\forall p \geq 1$ se verifica que $\dfrac{(1 + x)^p}{1 + x^p} \leq 2^{p-1}$ para todo $x \geq 0$.

Ejercicio 5.20. Sea $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ con $A > 0$. Calcula $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{f(x + 1)} - \sqrt[3]{f(x)}$.

Optimización

Ejercicio 5.21. Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos
a)

$$f(x) = \begin{cases} x \ln |x|, & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x|, & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 5.22. Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \cosh(x) + \cos(x)$.

Ejercicio 5.23. Calcular para qué valores del parámetro m se cumple que la ecuación $20x^5 - x = m$ tiene exactamente dos raíces reales distintas.

Ejercicio 5.24. Durante la tos, el diámetro de la tráquea disminuye. La velocidad v del aire en la tráquea durante la tos se relaciona con el radio, r, mediante la ecuación $v = Ar^2(r_0 - r)$, donde A es una constante y r_0 es el radio en estado de relajación. Determínese el radio de la tráquea cuando la velocidad es máxima, así como esta velocidad.

Ejercicio 5.25. Calcular el área máxima de un rectángulo, que tiene dos vértices sobre una circunferencia de radio R y los otros dos sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

Ejercicio 5.26. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de longitud L en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de circunferencia, y el otro en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortar el alambre para que la suma de áreas sea mínima? ¿Y máxima?

Ejercicio 5.27. Se traza la tangente en un punto de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$ de forma que el segmento (de dicha tangente) interceptado por los ejes sea mínimo. Demostrar que la longitud de dicho segmento es 9 unidades.

Ejercicio 5.28. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

Ejercicio 5.29. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcular sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

Ejercicio 5.30. Demostrar que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

Ejercicio 5.31. Atamos el extremo de una cuerda de longitud L a una columna de radio R mediante un nudo corredizo. Calcular la máxima distancia posible del otro extremo al centro de la columna.

Ejercicio 5.32. Un muro de 4 metros de altura está a 3 metros de la fachada de una casa. Hallar la escalera más corta que llegará desde el suelo hasta la casa por encima del muro.

Ejercicio 5.33. Investigar la posibilidad de inscribir un cilindro circular recto de área total máxima (sin las tapas) en un cono circular recto de radio r y altura h.

Ejercicio 5.34. Un cultivador de naranjas estima que, si planta 60 naranjos, obtendrá una cosecha media de 400 naranjas por árbol. Este número bajará 4 unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Halle el número de árboles que hace máxima la cosecha.

Ejercicio 5.35. Una fábrica de plásticos recibe del ayuntamiento de la ciudad un pedido de 8000 tablas flotadoras para el programa de natación del verano. La fábrica posee 10 máquinas, cada una de las cuales produce 50 tablas por hora. El coste de preparar las máquinas para hacer el trabajo es de 800€ por máquina. Una vez que las máquinas están preparadas, la operación es automática y puede ser supervisada por una sola persona, que gana 35€/hora.

a) ¿Cuántas máquinas hay que usar para minimizar el coste de producción?
b) Si se usa el número óptimo de máquinas, ¿cuánto ganará el supervisor durante el proceso?

Ejercicio 5.36. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor volumen entre todos aquellos que tienen la superficie lateral total constante.

Ejercicio 5.37. Dado un punto $P = (a, b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determinar el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

Ejercicio 5.38. ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que puede hacerse pasar a través de la esquina, en ángulo recto, que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b?

Ejercicio 5.39. Las palomas domésticas no suelen volar sobre extensiones grandes de agua a menos que se vean forzadas a ello, posiblemente porque se requiera más energía para mantener la altitud sobre el agua fría. Supongamos que se suelta una paloma desde un barco situado a 3 km de un punto A de la costa, y dicho punto de la costa está a 10 km del palomar. Si la paloma gasta dos veces más energía volando sobre el agua que sobre la tierra firme y sigue un camino que hace mínima la energía gastada, determínese el punto dónde la paloma abandona el agua.

Ejercicio 5.40. Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Determínense las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

Ejercicio 5.41. Se proyecta un jardín de forma de sector circular de radio R y ángulo central θ. El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de R y θ hacen mínimo el perímetro que bordea el jardín?

Ejercicio 5.42.

a) Calcula los extremos relativos y la imagen de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
b) ¿Qué número es mayor e^π o π^e? ¿Y entre $999999^{1000000}$ y 1000000^{999999}.

Reglas de L'Hôpital

Ejercicio 5.43. Calcular $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen}(x) + e^{-x})^{\frac{1}{x^2}}$.

Ejercicio 5.44. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x(x^{1/x}-1)}{\ln(x)}$.

Ejercicio 5.45. Calcula

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a + \operatorname{sen}(x)}{a - \operatorname{sen}(x)} \right)^{1/x}$$

con $a > 0$.

Polinomio de Taylor

Ejercicio 5.46.

a) Consideremos la función $f : \mathbb{R}_0^+$ definida como $f(x) = x - \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ si $x \in \mathbb{R}^+$ y $f(0) = 0$. Demuestra que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y estudia el signo de la derivada de f para demostrar que

$$0 < \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) < x, \ \forall x < 0.$$

b) Dado $a > 0$, se define la sucesión

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comprueba que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente a cero.

Ejercicio 5.47. Probar que las funciones exponencial, seno y coseno son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 5.48. Utilizar el polinomio de Taylor para calcular $\sqrt[3]{28}$ con un error menor que 10^{-2}.

Ejercicio 5.49. Estudiar el comportamiento de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\backslash\{0\}, \ f(x) = \frac{\tan(x)\arctan(x)-x^2}{x^6}, \ \alpha = 0$

b) $A = \mathbb{R}^*, \ f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^5}, \ \alpha = 0$

Ejercicio 5.50.

a) Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 centrado en $a = 1$ de la función arcotangente.

b) Utiliza dicho polinomio para calcular arctan(1.1) y acota el error cometido.

c) ¿Se puede utilizar el desarrollo centrado en cero para calcular arctan(1.1)?

Integración

6

El área de un recinto, la longitud de un cable que cuelga entre dos postes, el volumen o la superficie de una esfera... Estos son el tipo de problemas que vamos a resolver en este capítulo. Para ello presentamos el concepto de integral de una función.

6.1 Funciones integrables

Partición

Definición 6.1. Una *partición* P de un intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito del tipo $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ donde

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Ejemplo 6.2. Los conjuntos $\{0,1\}$, $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ o $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right\}$ son particiones del intervalo $[0,1]$. No lo son, en cambio, conjuntos como $\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right\}$, $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$. ◂

Suma superior

Definición 6.3. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada y P una partición del intervalo. La *suma superior* $S(f,P)$ de la función f relativa a la partición P es

$$\begin{aligned}S(f,P)=&\sup f([x_0,x_1])(x_1-x_0)+\sup f([x_1,x_2])(x_2-x_1)+\ldots\\&+\sup f([x_{n-1},x_n])(x_n-x_{n-1}).\end{aligned}$$

Suma inferior

Análogamente se define la *suma inferior* $I(f,P)$ como

$$\begin{aligned}I(f,P)=&\inf f\left([x_0,x_1]\right)\left(x_1-x_0\right)+\sup f([x_1,x_2])(x_2-x_1)+\ldots\\&+\sup f([x_{n-1},x_n])(x_n-x_{n-1}).\end{aligned}$$

Las sumas inferiores y superiores que vemos en la siguiente figura son una aproximación del área que queremos calcular. Ahora bien, el valor de la suma inferior siempre será menor que el de la integral y a la suma superior le ocurre lo contrario.

Integral superior

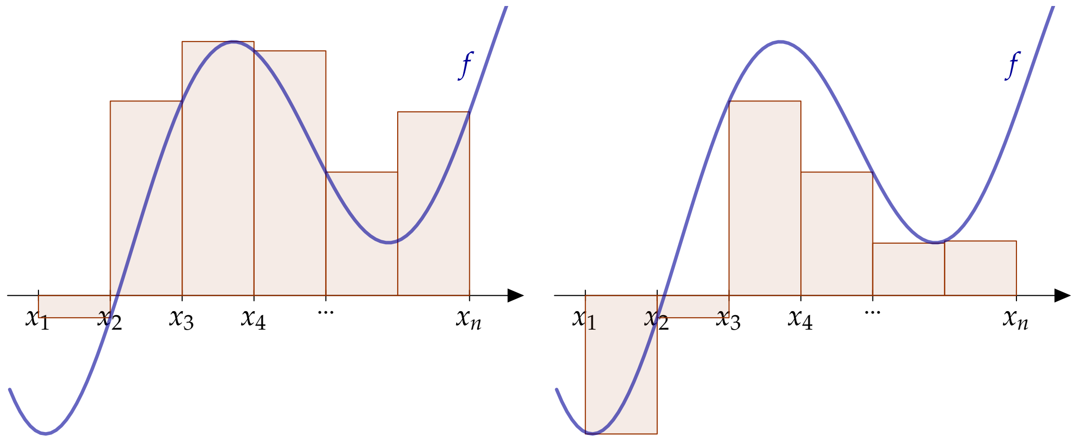
Definición 6.4. La *integral superior* de f se define como

$$\overline{\int}_{[a,b]} f=\inf\left\{S(f,P):\ P \text{ partición de } [a,b]\right\}.$$

Integral inferior

La *integral inferior* de f se define como

$$\underline{\int}_{[a,b]} f=\sup\left\{I(f,P):\ P \text{ partición de } [a,b]\right\}.$$



Suma superior Suma inferior

Figura 6.1 Sumas superiores e inferiores

Las integrales superior e inferior son aproximaciones a la integral de la función. En un caso por exceso y en otro por defecto. Cuando ambas aproximaciones coinciden, tenemos una función integrable.

Integral

Definición 6.5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es *integrable* si coinciden la integral superior e inferior. En ese caso, denotaremos $\int_{[a,b]} f$ a dicha integral.

También usaremos con frecuencia las notaciones $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)\, dx$ si queremos hacer hincapié en la variable de integración.

Ejemplo 6.6. Calcular la integral de $f(x) = x$ en el intervalo $[0,1]$ Consideremos la partición P_n del intervalo $[0,1]$ que consiste en dividirlo en n trozos iguales:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}.$$

Como la función f es creciente, su valor máximo se alcanzará en el extremo de la derecha y el mínimo en el extremos de la izquierda. Con esto es fácil calcular el valor de las sumas superiores e inferiores.

$$S(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2}, \text{ y}$$
$$I(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i-1 = \frac{(n-1)n}{2n^2}.$$

Si hacemos tender n a infinito, $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \frac{1}{2}$. Por tanto $\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$.$\triangleleft$

No es fácil calcular la integral de una función con la definición. En el ejemplo anterior hemos tenido que usar la suma de una progresión aritmética y usar particiones de una forma particular. En el resto del tema veremos qué funciones son integrables, qué propiedades tienen y, por último, el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow nos permitirán calcular integrales de una forma más cómoda.

6.1.1 Propiedades

Comenzamos recopilando información sobre la integrabilidad de funciones relacionada con las operaciones usuales.

Linealidad de la integral

Con respecto a la suma, el conjunto de las funciones integrables es un espacio vectorial y la integral es una aplicación lineal.

Proposición 6.7. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables. Entonces*
a) La suma $f+g$ es integrable y $\int (f+g) = \int f + \int g$.
b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\int (\lambda f) = \lambda \int f$.

Producto de funciones

La integral que acabamos de introducir también se comporta bien con respecto al producto aunque en este caso *no* hay una identidad que relaciones la integral de un producto de funciones con el producto de las integrales.

Proposición 6.8. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables.*
a) El producto de ambas funciones, fg, es una función integrable.
b) $\left(\int (fg)\right)^2 \leq \int f^2 \int g^2$. **Desigualdad de Schwarz**
c) $\left(\int (f+g)^2\right)^{1/2} \leq \left(\int f^2\right)^{1/2} + \left(\int g^2\right)^{1/2}$. **Desigualdad de Minkowski**

Orden

En cuanto al orden, el siguiente resultado nos dice que la integral lo conserva.

Proposición 6.9. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables. Si $f(x) \leq g(x)$ para cualquier $x \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

En particular, si $f(x) \geq 0$ para cualquier x se tiene que $0 \leq \int_a^b f(x)\, dx$.

No es evidente de la definición, pero se puede comprobar que si una función es integrable, su valor absoluto también lo es.

Proposición 6.10. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces la función $\left|f\right|(x) = \left|f(x)\right|$ es integrable y*

$$\left| \int_{[a,b]} f(x)\, dx \right| \leq \int_{[a,b]} \left| f \right| (x)\, dx.$$

Dominio

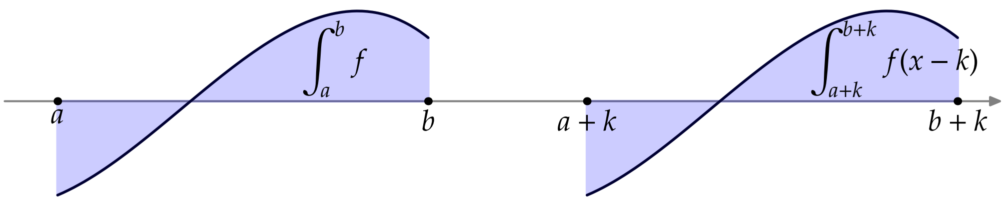
Se puede demostrar que si una función es integrable en un intervalo, también lo es en cualquier intervalo contenido en él. Teniendo en cuenta esto, podemos calcular la integral de una función en un intervalo dividiendo este en varios trozos y sumar los resultados. Esto se conoce como aditividad de de la integral respecto de su dominio.

Aditividad respecto del dominio

Proposición 6.11. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $c \in]a,b[$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, es integrable en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$. En ese caso,*

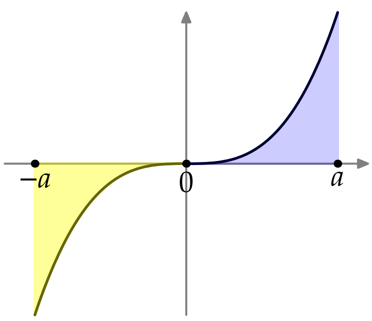
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Observación 6.12. La integral de una función f en un intervalo $[a,b]$ no cambia si "trasladamos" dicha función.



Podemos utilizar esto para simplificar el cálculo de algunas integrales. Por ejemplo, si f es una función impar, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$



¿Por qué? Sólo tenemos que mirar la gráfica de la función. El área entre 0 y a es igual que el área entre $-a$ y 0 pero con signos opuestos y ambas se cancelan. Por ejemplo

$$\int_{-a}^{a} x^3\, dx = 0.$$

Si por el contrario f es una función par entonces $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

6.1.2 Condiciones suficientes de integrabilidad

Ya hemos visto que las funciones integrables tienen muchas propiedades interesantes. La siguiente cuestión es ¿hay muchas? ¿Qué funciones son integrables? ¿Tenemos suficientes ejemplos de funciones integrables?

El primer resultado que presentamos nos dice que el conjunto de las funciones integrables incluye a la mayoría de las funciones con las que hemos estado trabajando hasta ahora.

Proposición 6.13. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función.*

Condiciones suficientes de integrabilidad

a) Si f es continua, entonces es integrable.
b) Si f es monótona, entonces es integrable.

Observa que no hemos mencionado que la función tenga que ser acotada. En ninguno de los casos es necesario: para funciones monótonas es inmediato y para funciones continuas es consecuencia de la propiedad de compacidad.

Podemos ir un poco más lejos, si "estropeamos" una función integrable en unos pocos puntos, ni la integrabilidad ni el valor de la integral se alteran.

Proposición 6.14. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ verificando que el conjunto $\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ es finito. Entonces g es integrable y*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Esta resultado afirma que si se cambia el valor de una función en una cantidad finita de puntos se obtiene una función que sigue siendo integrable y, de hecho, el valor de la integral no cambia.

Observación 6.15. *Existen funciones integrables que no son continuas.* Este hecho debería estar claro después de haber afirmado que las funciones monótonas son integrables y recordando que ya conocemos funciones monótonas que no son continuas (como por ejemplo la parte entera). De todas formas la última proposición nos da una manera muy fácil de fabricar funciones integrables que no son continuas: tómese una función continua y cámbiesele el valor en un punto. De este modo se obtiene una función que deja de ser continua en dicho punto pero que tiene la misma integral.

Cambiando el valor de una función en un punto sólo obtenemos discontinuidades evitables. Aunque las discontinuidades no sean evitables, si no son demasiadas, la función es integrable.

Proposición 6.16. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades, entonces es integrable.*

Existe una caracterización completa de las funciones integrables. Para darla, se necesita hablar de conjuntos "pequeños": los llamados conjuntos de medida nula. Si la medida, la longitud en esta caso de un intervalo acotado es $\ell(I) = \sup(I) - \inf(I)$. Un conjunto de medida nula es un conjunto que tiene longitud cero. Veamos la definición con más detalle.

Definición 6.17. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que A es un *conjunto de medida nula* si dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos acotados $\{I_n\}$ verificando que

Conjunto de medida nula

a) $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n$, y
b) $\ell(I_1) + \ell(I_2) + \cdots + \ell(I_n) \leq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 6.18. Cualquier conjunto finito es de medida nula. ◂

Teorema de Lebesgue

Teorema 6.19. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:*
a) f es integrable.
b) El conjunto de puntos de discontinuidad de f es un conjunto de medida nula.

6.1.3 Sumas de Riemann

Una de las dificultades de la definición de integral que hemos dado radica en el hecho de que involucra *todas* las posibles particiones del intervalo $[a, b]$. La segunda dificultad es averiguar cuál es el supremo o el ínfimo de la función en cada uno de los intervalos asociados a una partición. Vamos a dar respuesta a ambas cuestiones:

a) En cuanto a las particiones, veremos que es necesario considerar todas sino sólo algunas elegidas adecuadamente. Así nos encontraremos el concepto de norma de una partición.
b) En cuanto al segundo punto, el teorema de Darboux nos dirá que no hace falta calcular el supremo ni el ínfimo y que cualquier punto del intervalo puede jugar el mismo papel.

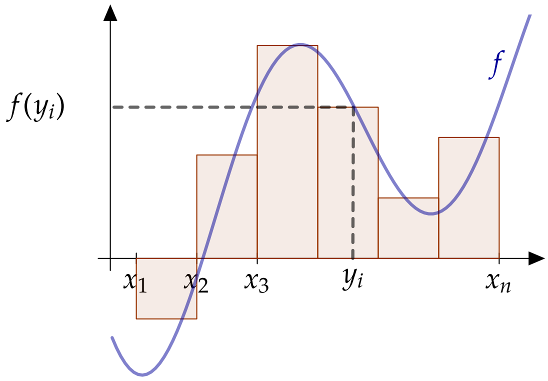


Figura 6.2 Suma integral o de Riemann

Comencemos con las particiones. El ejemplo típico de partición que hemos usado consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en trozos iguales. Aumentando el número de trozos, nos aproximamos al valor de la integral. En este caso, la longitud de cada uno de los trozos es $\frac{b-a}{n}$, la longitud del intervalo dividido por el número de trozos, n. La norma de una partición nos mide el tamaño de los trozos o, más concretamente, el tamaño del trozo más grande.

Norma de una partición

Definición 6.20. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. La *norma* de la partición P es

$$\|P\| = \max \{x_i - x_{i-1} : \; i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Si en las sumas inferiores y superiores aproximábamos por rectángulos cuya altura era el supremo o el ínfimo de la función, ahora vamos a elegir como altura el valor de la función en un punto arbitrario en cada uno de los intervalos relativos la partición. Para cada partición, tenemos muchas posibles elecciones de puntos. A cualquiera de éstas, las vamos a llamar sumas integrales o sumas de Riemann.

Suma integral o suma de Riemann

Definición 6.21. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Una *suma integral* o *suma de Riemann* es una suma de la forma

$$f(y_1)(x_1 - x_0) + f(y_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(y_n)(x_n - x_{n-1})$$

donde $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ... n$.

Ya podemos dar la respuesta a la pregunta que planteamos al principio de la sección: para aproximarnos al valor de la integral de la función sólo tenemos que asegurarnos de que la norma de las particiones tiendan a cero independientemente de cuáles sean los puntos elegidos en el intervalo.

Teorema de Darboux

Teorema 6.22. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $\{P_n\}$ una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$ con $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$. Entonces, si S_n son sumas de Riemann asociadas a P_n se cumple $\lim_{n\to\infty} S_n = \int f$.*

Esta es una versión "light" del teorema de Darboux que, de hecho, permite caracterizar las funciones integrables utilizando sumas integrales en lugar de sumas superiores e inferiores.

6.2 Teorema fundamental del Cálculo

Si f es una función definida y a es un elemento de su dominio, diremos que f es integrable en $[a,a]$ y que $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. También convendremos que $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Función localmente integrable

Definición 6.23. Sea I un intervalo. Diremos que $f : I \to \mathbb{R}$ es *localmente integrable* si es integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en I.

Ejemplo 6.24.
a) Las funciones continuas y las funciones monótonas son localmente integrables.
b) Si f es integrable en $[a,b]$, es localmente integrable en dicho intervalo. ◂

Lema 6.25. *Sea f una función localmente integrable en un intervalo I y sean $a, b, c \in I$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Obsérvese que la comodidad del lema anterior radica en que no sabemos como están ordenados a, b y c.

Definición 6.26. Si f es una función localmente integrable en I y $a \in I$ podemos definir una nueva función que mide como cambia la integral de la función de la forma

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

A las funciones F definidas de esta forma las llamaremos *integrales indefinidas* de f.

Integral indefinida

La integral indefinida es la función que nos da el área sombreada de la Figura 6.3.

Primitiva

Definición 6.27. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Una *primitiva* de una función $f : I \to \mathbb{R}$ es una función $G : I \to \mathbb{R}$ continua y derivable en el interior del intervalo que cumple que $G'(x) = f(x)$ para cualquier x en el interior de I.

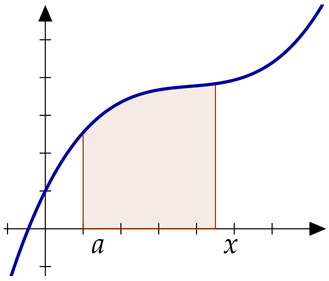


Figura 6.3 Integral indefinida

Observación 6.28. Dos integrales indefinidas se diferencian en una constante. Ocurre lo mismo para dos primitivas de una misma función. En efecto, la diferencia entre dos funciones con la misma derivada tiene derivada cero y por tanto es constante (en un intervalo). En cuanto a integrales indefinidas, si

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \text{y} \quad G(x) = \int_b^x f(t)\,dt$$

son integrales indefinidas, entonces

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \int_a^x f(t)\,dt - \int_b^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Existe una gran tendencia a confundir integral y primitiva. Es usual que hablemos de "vamos a calcular la integral" cuando nos estamos refiriendo a "encontremos una función cuya derivada sea...". Los conceptos de integral definida y primitiva son, en principio, independientes. El objetivo de los dos siguientes resultados es poner de manifiesto que existe una clara relación entre ellos y, de paso, obtener una forma práctica de calcular integrales.

Teorema fundamental del Cálculo

Teorema 6.29. *Sea I un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable y F una integral indefinida de f. Entonces*

a) F es una función continua.

b) Si f es continua en $a \in I$, entonces F es derivable en a con $F'(a) = f(a)$.

En particular, si f es una función continua, F es una función derivable y $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Ejemplo 6.30.

a) La función parte entera, $E(x)$, es monótona y por tanto integrable en cualquier intervalo. Dicho de otra manera, la función parte entera es localmente integrable en $\mathbb{R}$. Cualquier integral indefinida será una función continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Sin embargo, la función parte entera no tiene primitiva. El teorema del valor intermedio para las derivadas (Teorema 5.22) nos dice que la función parte entera no es la derivada de nadie porque su imagen no es un intervalo.

b) La función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = \pm 1, \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } -1 < x < 1, \end{cases}$$

no es integrable por no ser acotada. En cambio, sí admite una primitiva: la función arcoseno. ◃

Una de las primeras utilidades del Teorema fundamental del Cálculo es poder definir funciones de una manera rigurosa usando la integral. Por ejemplo, se puede definir la función logaritmo como

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

La función $G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt$ es continua si lo son f y g. Si, además, g y h son derivables, y f es continua, entonces G es derivable con

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt \right)' (x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Ejemplo 6.31. La función $f(x) = \int_1^{x^2+1} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\, dt$ es derivable y su derivada es

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(x^2+1\right)}{x^2+1} 2x. \triangleleft$$

6.2.1 Regla de Barrow

El siguiente resultado, la regla de Barrow, nos permite resolver de modo práctico el cálculo de integrales y sustituirlo por el cálculo de primitivas.

Teorema 6.32. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y G una primitiva de f. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

Regla de Barrow

Ejemplo 6.33. La primera integral que calculamos fue la de la identidad en el intervalo $[0,1]$ (ver Ejemplo 6.6). Ahora podemos calcularla mucho más fácilmente.

$$\int_0^1 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \triangleleft$$

Ejemplo 6.34. Las propiedades de la integral nos pueden servir para darnos cuenta de que estamos haciendo algo mal. Por ejemplo:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+x^4}\, dx = \int_{-1}^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx = \left[\frac{2}{3}\frac{1}{2}(1+x^2)^{3/2} \right]_{-1}^1 = 0.$$

A primera vista puede parecer correcto, pero la integral de una función continua y positiva no puede valer cero, tiene que ser positiva también. ¿Qué hemos hecho mal? La respuesta es que $\sqrt{x^2}$ es $|x|$ y no x como hemos dicho. Hagámosla correctamente:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+x^4}\, dx = \int_{-1}^1 |x| \sqrt{1+x^2}\, dx$$

usemos que el integrando es una función par,

$$= 2\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx = \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}. \triangleleft$$

Teorema de cambio de variable

Corolario 6.35. *Sea $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable y con derivada ϕ' integrable. Sea I un intervalo tal que $\phi([a,b]) \subset I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua con primitiva G. Entonces*

$$\int_a^b (f \circ \phi)\phi' = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = G(\phi(b)) - G(\phi(a)).$$

6.3 Cálculo de áreas de regiones no acotadas. Integrales impropias

Hasta ahora hemos visto cómo calcular integrales de funciones acotadas en intervalos cerrados y acotados. En esta sección vamos a extender la noción de integral a intervalos de cualquier tipo y a funciones no acotadas. Pensemos por un momento en un caso concreto: la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $]-1,1[$. Sabemos calcular su integral en cualquier intervalo de la forma $[a,b] \subset]-1,1[$:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(b) - \operatorname{arcsen}(a).$$

Si queremos definir la integral en $]-1,1[$, la idea más natural parece tomar límites. Movamos b hacia 1 y a hacia -1. La forma más cómoda de formalizar estos límites es utilizar sucesiones.

Impropiamente integrable

Definición 6.36. Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Diremos que f es *impropiamente integrable* si para cualesquiera sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de elementos de $]a,b[$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ se cumple que existe el límite[2]

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx.$$

En ese caso, usaremos la notación

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La integral impropia satisface propiedades similares a la de la integral ya vista. Sirvan los siguientes resultados como muestra.

Aditividad respecto del dominio

Proposición 6.37. *Sea f una función localmente integrable en el intervalo $]a,b[$ y sea $c \in]a,b[$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) f es impropiamente integrable en $]a,b[$.

b) f es impropiamente integrable en $]a,c[$ y en $]c,b[$.

Además, caso de ser ciertas, se cumple que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

[2] En esta definición no hemos asumido que el límite es único. Esto se obtiene como consecuencia de que el límite exista para cualesquier pareja de sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

Proposición 6.38. *Sean f y g funciones impropiamente integrables en $]a,b[$ y sean λ, μ números reales.*
a) La función $\lambda f + \mu g$ es impropiamente integrable y

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

b) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en $]a,b[$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Sí hay una diferencia en cuanto a la integrabilidad impropia de la función $|f|$. Hay funciones impropiamente integrables cuyo valor absoluto no lo es. El recíproco sí es cierto.

Test de comparación

Teorema 6.39. *Sea f una función localmente integrable en $]a,b[$ y supongamos que g es una función impropiamente integrable en $]a,b[$ con $|f(x)| \leq g(x)$, para todo $x \in]a,b[$. Entonces f es impropiamente integrable y se cumple que*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b g(x)\ dx.$$

En particular si f es localmente integrable y $|f|$ es impropiamente integrable, f también es impropiamente integrable.

Ejemplo 6.40. La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ si $x > 0$ y $f(0) = 1$ es impropiamente integrable en $]0,+\infty[$ pero $|f|$ no lo es. ◁

En el caso de funciones continuas la situación es un poco más sencilla. El teorema fundamental del Cálculo nos garantiza que la integral indefinida es una primitiva. Vamos a ver tres casos posibles.

6.3.1 Integración en intervalos no acotados

Supongamos que tenemos una función definida en un intervalo no acotado, $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, que es continua en todo $[a,+\infty[$. Podemos buscar una primitiva de f, llamémosla F, y estudiar su comportamiento en $+\infty$: si la función F tiene límite en $+\infty$, diremos que existe la integral impropia de f en $[a,+\infty[$, y dicha integral valdrá:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \left(\lim_{x\to+\infty} F(x) \right) - F(a),$$

es decir, la integral vale "$F(+\infty) - F(a)$", considerando $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$. Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$.

Una vez que hemos definido una integral para este tipo de funciones, podemos generalizar el área bajo una curva, la longitud de un arco de curva, la superficie y el volumen de un sólido de revolución,etc. siendo todas fórmulas perfectamente válidas.

El caso de una función definida en un intervalo de la forma $]-\infty,b]$ es completamente análogo. Además, si tenemos una función definida en todo $\mathbb{R}$, podemos dividir la integral como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Si la suma vale “$\infty - \infty$”, *no podemos calcular la integral.*

Ejemplo 6.41. Calcular el área comprendida bajo la curva $y = 1/x^2$ en el intervalo $[1, +\infty[$.
Viendo el área bajo la curva como una integral se tiene que

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{+\infty} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x}\right) - (-1) = 1. \triangleleft$$

6.3.2 Integración de funciones continuas en intervalos abiertos

Se trata de calcular integrales de funciones definidas en un intervalo abierto en uno de sus extremos, y que tienen una asíntota vertical en dicho extremo. Supongamos que el intervalo es de la forma $]a, b]$; el caso de un intervalo $[a, b[$ es completamente análogo.

Sea pues $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua a la que queremos calcular su integral, y sea F una primitiva suya. Estudiamos entonces el límite por la derecha de la primitiva en a, y si existe podemos calcular la integral de f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - \left(\lim_{x\to a^+} F(x)\right)$$

Nota: Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$. Si tenemos una función continua en un intervalo abierto $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, su integral valdrá

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\lim_{x\to b^-} F(x)\right) - \left(\lim_{x\to a^+} F(x)\right)$$

Otra vez, si la suma vale “$\infty - \infty$”', *no podemos calcular la integral.*

Al igual que antes, podemos aplicar estos resultados al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.

Ejemplo 6.42. Calcular el área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en $]0, 1]$.
Aplicamos la fórmula dada, y tenemos

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2 - \left(\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\right) = 2. \triangleleft$$

6.3.3 Integración de funciones continuas en un intervalo salvo un punto interior

Supongamos que tenemos una función $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ que es continua en $[a, b] \setminus \{c\}$ y que tiene una asíntota vertical en $x = c$. Entonces, si queremos calcular la integral de f entre a y b, tenemos que dividir dicha integral en dos trozos: la integral en $[a, c[$ y la integral en $]c, b]$. Como estos dos casos quedan contemplados en los supuestos anteriores, podemos calcular la integral de f entre a y b como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

El único problema que se puede presentar es, de nuevo, que la suma valga “$\infty - \infty$”, en cuyo caso *no podemos calcular la integral.*

Ejemplo 6.43. Calcular $\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2\right)\, dx$.
La función que nos dan es $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2)$. Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, por lo que para calcular su integral dividimos el intervalo en dos partes, $[-1,0[$ y $]0,1]$. Cada una de las dos integrales vale:

$$\int_{-1}^{0} \ln\left(x^2\right)\, dx = \left[x \ln\left(x^2\right) - 2x\right]_{-1}^{0} = -2$$

$$\int_{0}^{1} \ln\left(x^2\right)\, dx = \left[x \ln\left(x^2\right) - 2x\right]_{0}^{1} = -2,$$

con lo que se tiene que $\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2\right)\, dx = -2 - 2 = -4$. ◁

Ejemplo 6.44. Calcular $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$.
Si hacemos

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - (+1) = -2!!!!!$$

Pero la función que estamos integrando es positiva, ¡no tiene sentido que tenga integral negativa! ¿Qué ha pasado? Como la función $1/x^2$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, tenemos que descomponer la integral como

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx,$$

pero

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{0} = \lim_{x \to 0^-} (-1/x) - (+1) = +\infty$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{0}^{1} = -1 - \lim_{x \to 0^+} (-1/x) = +\infty,$$

y por tanto $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = +\infty$. ◁

6.4 Cálculo de primitivas

Utilizaremos la notación $\int f(x)\, dx$ para denotar una primitiva de la función f. Además, abusando del lenguaje, a menudo hablaremos de "integral de la función" cuando deberíamos decir "primitiva de la función".

Los métodos que vamos a comentar son sólo unos pocos y cubren la mayoría de los casos usuales, pero no debes olvidar que hay muchos más. En cualquier caso, lo primero y más importante es manejar con soltura las derivadas de las funciones elementales. En el Apéndice C puedes encontrar un par de tablas con algunas de las derivadas y primitivas.

6.4.1 Cambio de variable

Mediante un cambio de variable es posible transformar la integral en otra más sencilla. Si hacemos $y = \phi(x)$, $dy = \phi'(x)\, dx$, se tiene

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy.$$

Para terminar sólo tenemos que deshacer el cambio.

Ejemplo 6.45. Calcular $\int \frac{e^x+3e^{2x}}{2+e^x}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+3e^{2x}}{2+e^x}\,dx &= \begin{bmatrix} y = e^x \\ dy = e^x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{y+3y^2}{2+y}\cdot\frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1+3y}{2+y}\,dy \\ &= \int \left(3 - \frac{5}{2+y}\right) dy \\ &= 3y - 5\ln\left|y+2\right| = 3e^x - 5\ln\left(e^x+2\right). \triangleleft\end{aligned}$$

6.4.2 Integración por partes

Si u y v son dos funciones, teniendo en cuenta que $(u\cdot v)' = u\cdot v' + v\cdot u'$, obtenemos que

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Esta fórmula aparece escrita en muchas ocasiones de la forma

$$\int udv = uv - \int vdu$$

El teorema especifica con un poco más de rigurosidad las condiciones necesarias.

Integración por partes

Teorema 6.46. *Sean $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables con derivada continua. Entonces uv' y vu' son integrables en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Ejemplo 6.47. Calcular $\int x\,e^x\,dx$.

$$\int x\,e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x\,dx, & v = e^x \end{bmatrix} = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x = e^x(x-1). \triangleleft$$

Ejemplo 6.48. Calcular $\int \operatorname{sen}(x)\,e^x\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx &= \begin{bmatrix} u = \operatorname{sen}(x), & du = \cos(x) \\ dv = e^x\,dx, & v = e^x \end{bmatrix} = \operatorname{sen}(x)e^x - \int \cos(x)e^x\,dx \\ &= \begin{bmatrix} u = \cos(x), & du = -\operatorname{sen}(x) \\ dv = e^x\,dx, & v = e^x \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx,\end{aligned}$$

con lo que despejando tenemos $\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x\right)$. $\triangleleft$

6.4.3 Integración de funciones racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, y queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, supondremos siempre que el grado de P es menor que el grado de Q.

Integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{(ax+b)^n}$

El cambio de variable $y = ax + b$ la transforma en una integral inmediata de la forma $\int \frac{P(y)}{y^n}\,dy$.

Ejemplo 6.49.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+5x+2}{(x-1)^3}\,dx = [y = x-1, dy = dx] = \int \frac{3(y+1)^2+5(y+1)+2}{y^3}\,dy \\ = \int \frac{3y^2+11y+10}{y^3}\,dy \\ =3\int \frac{dy}{y} + 11\int \frac{dy}{y^2} + 10\int \frac{dy}{y^3} \\ =3\ln|x-1| - \frac{11}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$ ◁

Integrales del tipo $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$, donde el denominador no tiene raíces reales

Siempre se puede escribir $x^2+bx+c = (x-d)^2+k^2$, con lo que descomponemos nuestra integral en dos:

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{Mx+N}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \int \frac{M(x-d)+N+Md}{(x-d)^2+k^2}\,dx \\ &= \int \frac{M(x-d)}{(x-d)^2+k^2}\,dx + \int \frac{N+Md}{(x-d)^2+k^2}\,dx \\ &= \frac{M}{2}\ln\left|(x-d)^2+k^2\right| + (N+Md)\int \frac{dx}{(x-d)^2+k^2}\end{aligned}$$

y la última integral es inmediata (del tipo arcotangente) si hacemos el cambio de variable $y = \frac{x-d}{k}$.

Ejemplo 6.50. Calcular $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx$.
Como $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, hacemos el cambio $y = x+1$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \frac{2(y-1)+3}{y^2+1}\,dy = \int \frac{2y}{y^2+1}\,dy + \int \frac{dy}{y^2+1} \\ &= \ln(y^2+1) + \arctan(y) = \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1).\end{aligned}$$ ◁

Raíces reales y/o complejas simples

En este caso

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2)\dots(x^2 + b_mx + c_m).$$

Lo que vamos a hacer es descomponer de nuevo en fracciones más sencillas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} =& \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n}\\ &+ \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 + b_2x + c_2} + \dots \frac{B_mx + C_m}{x^2 + b_mx + c_m},\end{aligned}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, C_m$ son constantes a determinar. Para calcularlas desarrollamos e igualamos los coeficientes del mismo grado.

Observación 6.51. Si el polinomio $Q(x)$ sólo tiene raíces reales se pueden calcular las constantes A_1,...,A_n dando a la variable x los valores a_1,..., a_n.

Ejemplo 6.52. Cálculo de $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$:
Como $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$, la descomposición nos quedaría:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2+1}$$

Si desarrollamos e igualamos coeficientes:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}$$

$$1 = (A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D)$$

$$\left.\begin{array}{r} A + B + C = 0\\ A - B + D = 0\\ A + B - C = 0\\ A - B - D = 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} A = 1/4\\ B = -1/4\\ C = 0\\ D = -1/2\end{array}\right.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4-1} =& \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}\\ =& \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan(x).\triangleleft\end{aligned}$$

Raíces reales múltiples

En este caso el denominador tiene la forma $Q(x) = (x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2}\dots(x - a_n)^{r_n}$, y podemos descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \dots \frac{C_{r_n}}{(x-a_n)^{r_n}}$$

Cada una de estas fracciones pertenecen a alguno de los casos ya estudiados.

Ejemplo 6.53. Calcular $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}\,dx$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x+1)^3} =& \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}\\ =& \frac{A(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^2+C(x-1)(x+1)+D(x-1)}{(x-1)(x+1)^3}\\ =& \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}\end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{r} A+B=0\\ 3A+B+C=0\\ 3A-B+D=0\\ A-B-C-D=1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{8}\\ B=-\frac{1}{8}\\ C=-\frac{1}{4}\\ D=-\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

La integral nos queda

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^3} =& \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^3}\\ =& \frac{1}{8}\ln|x-1|-\frac{1}{8}\ln|x+1|+\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}. \triangleleft\end{aligned}$$

Raíces reales y complejas múltiples. Método de Hermite

El método que vamos a estudiar, conocido como Método de Hermite, consiste en descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones más simples de una forma muy particular. Pasos a seguir:

Descomponemos el denominador, $Q(x)$, como producto de factores de grado 1 y factores de grado 2 irreducibles: *Paso 1*

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}.$$

Escribimos el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la siguiente forma: *Paso 2*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} =& \frac{A_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{x^2+b_mx+c_m}+\\ &+\frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}\right)\end{aligned}$$

donde $A_1,\dots,A_n,M_1,\dots,M_m,N_1,\dots,N_m$ son coeficientes que tenemos que determinar, y en la fracción que aparece con una derivada $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que el denominador. En resumen, se trata de escribir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples, una por cada factor, más la derivada de un cociente que tiene por denominador lo que queda de $Q(x)$.

¿Cómo determinamos todos los coeficientes? Basta efectuar la derivada, reducir todas las fracciones a común denominador (que será $Q(x)$), e igualar $P(x)$ al numerador resultante. Esto nos producirá un sistema de ecuaciones cuya resolución nos dará el valor de todos los coeficientes.

Paso 3 Una vez escrita la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la forma anterior, es fácil calcular su integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}\,dx + \cdots + \int \frac{M_1x+N1}{x^2+b_1x+c_1}\,dx + \cdots$$
$$+\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}$$

Ejemplo 6.54. Cálculo de $\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(x^2+9)^2} &= \frac{Mx+N}{x^2+9} + \frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{x^2+9}\right)\\ &= \frac{(Mx+N)(x^2+9)}{(x^2+9)^2} + \frac{a(x^2+9)-2x(ax+b)}{(x^2+9)^2}\\ &= \frac{Mx^3+(N-a)x^2+(9M-2b)x+(9a+9N)}{(x^2+9)^2}\end{aligned}$$

Igualando los numeradores coeficiente a coeficiente, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} M &= 0\\ -a+N &= 1\\ -2b+9M &= 0\\ 9a+9N &= 0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} M=0 & b=0\\ N=1/2 & a=-1/2\end{cases}$$

De esta forma se tiene

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+9} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+9},$$

y la última integral vale

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{1/9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

En resumen,

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{-x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x}{3}\right).\triangleleft$$

Ejemplo 6.55. Calcular $\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$.

$$\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}\right).$$

Realizando la derivada y reduciendo a común denominador, obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución es $a=0$, $b=5/2$, $c=0$, $d=1$, $A=5$, $M=-5$ y $N=0$; por lo tanto

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{(5/2)x^2+1}{x^2(x^2+1)} + 5\ln(x) - \frac{5}{2}\ln(x^2+1).\triangleleft$$

6.4.4 Integración de funciones trigonométricas

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)$, $\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)$, $\int \cos(ax)\cos(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) &= \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)],\\
\cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)],\\
\operatorname{sen}(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)].
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.56.

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x)\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos(x). \triangleleft$$

Integrales de la forma $\int \tan^n(x)$, $\int \operatorname{cotan}^n(x)$

Se reducen a una con grado inferior separando $\tan^2(x)$ o $\operatorname{cotan}^2(x)$ y sustituyéndolo por $\sec^2(x)-1$ y $\operatorname{cosec}^2(x)-1$.

Ejemplo 6.57. Calcular $\int \tan^5(x)\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \tan^5(x)\,dx &= \int \tan^3(x)\tan^2(x)\,dx = \int \tan^3(x)\left(\sec^2(x)-1\right)\,dx\\
&= \int \tan^3(x)\sec^2(x)\,dx - \int \tan^3(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Acabamos por separado cada integral:

$$\int \tan^3(x)\sec^2(x)\,dx = -\frac{1}{4}\tan^4(x)\,dx \quad \text{(utilizando el cambio } y=\tan(x))$$

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(x)\,dx &= \int \tan(x)\tan^2(x)\,dx = \int \tan(x)(\sec^2(x)-1)\,dx\\
&= \int \tan(x)\sec^2(x)\,dx - \int \tan(x)\,dx = \frac{1}{2}\tan^2(x) + \ln|\cos(x)|. \triangleleft
\end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)$, con n o m enteros impares

Se transforman en una integral racional con el cambio $y=\cos(x)$ (si m es impar) o $y=\operatorname{sen}(x)$ (si n es impar).

Ejemplo 6.58. Calcular $\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx &= \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2(x))\cos(x)\,dx}{\operatorname{sen}^2(x)} = \left[\begin{array}{c} y=\operatorname{sen}(x)\\ dy=\cos(x)\,dx\end{array}\right] = \int \frac{1-y^2}{y^2}\,dy\\
&= -\frac{1}{y} - y = \frac{-1}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x). \triangleleft
\end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)$, con n y m enteros pares

Se resuelven usando las identidades $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$, y $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$.

Ejemplo 6.59. Calcular $\int \cos^2(x)\,dx$.

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}. \triangleleft$$

Integrales de la forma $\int R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$, R una función racional par.

Diremos que R es una función racional par si $R(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = R(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x))$. Se resuelven utilizando el cambio $y = \tan(x)$

Ejemplo 6.60. Calcular $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)}$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)} = \left[\begin{array}{c} y = \tan(x) \\ dy = \sec^2 x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{(1+y^2)^3}{y^3}\,dy$$
$$= -\frac{1}{2}\operatorname{cotan}^2(x) + 3\ln|\tan(x)| + \frac{3}{2}\tan^2(x) + \frac{1}{4}\tan^4(x)\,. \triangleleft$$

Integrales de la forma $\int R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. En general, se hace el cambio de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, con lo que $\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, y $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$. Con este cambio convertimos la integral en la integral de una función racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 6.61. Calcular $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\tan(x)}$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\tan(x)} = \int \frac{\cos(x)\,dx}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} = \left[\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t\right] = \cdots = \int \frac{t^2-1}{2t^3}\,dt$$
$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{\ln|t|}{2} = \frac{1}{4\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|. \triangleleft$$

6.4.5 Integración de funciones hiperbólicas

Integrales de la forma $\int R(\operatorname{senh}(x), \cosh(x))$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$. En general, se hace el cambio de variable $e^x = t$, con lo que la integral en una racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 6.62. Calcular $\int \frac{dx}{1+2\operatorname{senh}(x)+3\cosh(x)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+2\operatorname{senh}(x)+3\cosh(x)} &= \int \frac{dx}{1+\frac{5}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}} = \left[\begin{array}{c} e^x = t \\ dx = dt/t \end{array}\right] \\ &= 2\int \frac{dt}{5t^2+2t+1} \\ &= \arctan\left(\frac{5\,t+1}{2}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{5\,e^x+1}{2}\right).\end{aligned}$$

En algunos casos, utilizar un método similar al que usamos para calcular primitivas de funciones trigonométricas puede simplificar los cálculos. El siguiente método es un ejemplo de ello.

Integrales de la forma $\int \operatorname{senh}(ax)\cosh(bx)$, $\int \operatorname{senh}(ax)\operatorname{senh}(bx)$ o $\int \cosh(ax)\cosh(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y) &= \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y)-\operatorname{senh}(x-y)\right) \\ \cosh(x)\cosh(y) &= \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y)+\operatorname{senh}(x-y)\right) \\ \operatorname{senh}(x)\cosh(y) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{senh}(x+y)+\operatorname{senh}(x-y)\right).\end{aligned}$$

Ejemplo 6.63.

$$\int \operatorname{senh}(3x)\cosh(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{senh}(4x)\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{senh}(2x)\,dx = -\frac{1}{8}\cosh(4x) - \frac{1}{4}\cosh(2x).\triangleleft$$

6.4.6 Integración de funciones irracionales

Integrales de la forma $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$

Se resuelven utilizando el cambio de variable $y^q = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde q es el mínimo común múltiplo de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Ejemplo 6.64. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Haciendo el cambio $x = y^6$,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6y^5}{y^3+y^2}\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy \\ &= 2y^3 - 3y^2 + y - \ln|y+1| = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - \ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|.\triangleleft\end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$

Se transforman en una integral trigonométrica con el cambio $x = a\operatorname{sen}(t)$ o $x = a\cos(t)$. También se puede realizar el cambio $x = a\tanh(t)$ y se transforma en una integral hiperbólica.

Ejemplo 6.65. Cálculo de $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$:
Hacemos el cambio $x = 2\operatorname{sen}(t)$, con lo que $dx = 2\cos(t)dt$ y $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(t)} = 2\cos(t)$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{(2\cos(t))(2\cos(t))}{4\operatorname{sen}^2(t)}\,dt = \int \operatorname{cotan}^2(t)\,dt\\ &= \int (\operatorname{cosec}^2(t)-1)\,dt = -\operatorname{cotan}(t) - t\end{aligned}$$

usando que $\operatorname{cotan}(t) = \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$, se tiene que

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right). \triangleleft$$

Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$

Se transforman en una integral trigonométrica usando el cambio $x = a\tan(t)$. También se pueden resolver utilizando el cambio $x = a\,\operatorname{senh}(t)$.

Ejemplo 6.66. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.
Hacemos el cambio $x = \tan(t)$, $dx = \sec^2(t)dt$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2(t)}{\tan(t)\sec(t)}\,dt = \int \frac{dt}{\operatorname{sen}(t)} = -\ln\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| + \ln\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|. \triangleleft$$

Ejemplo 6.67. Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.
Hacemos el cambio $x = \operatorname{senh}(t)$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \operatorname{senh}^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int (\cosh(2t)-1)\;dt = \frac{1}{4}\operatorname{senh}(2t) - \frac{t}{2}. \triangleleft$$

Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$

Se resuelven utilizando los cambios $x = a\sec(t)$ o $x = a\cosh(t)$.

Ejemplo 6.68. Calcular $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$.

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \tan(t)\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)}\,dt = \int \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\cos^3(t)}\,dt,$$

que se resuelve aplicando los métodos ya vistos. También podríamos haber utilizado el cambio $x = \cosh(t)$ y, en ese caso, se tiene que

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \operatorname{senh}^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt = \ldots = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\operatorname{arccosh}(x)}{2}. \triangleleft$$

Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Se reducen a uno de los casos anteriores completando cuadrados, esto es, escribiendo ax^2+bx+c de la forma $a(x+\alpha)^2+\beta$.

Ejemplo 6.69. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$.
Transformamos el integrando:

$$8x-x^2 = -(x^2-8x+16)+16 = -(x-4)^2+16 = 16\left(1-\left(\frac{x-4}{4}\right)^2\right)$$

y hacemos el cambio de variable $y=(x-4)/4$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16\left(1-\left(\frac{x-4}{4}\right)^2\right)}} = \left[\begin{array}{c} y=(x-4)/4 \\ dy = dx/4 \end{array}\right] =$$
$$= \int \frac{4dy}{4\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arcsen}(y) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-4}{4}\right). \triangleleft$$

6.5 Aplicaciones de la integral

6.5.1 Cálculo de áreas

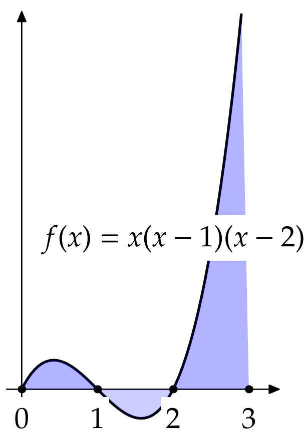
El área entre dos funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ se define como

$$\text{Área} = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx.$$

Hasta ahora no hemos visto ningún metodo que nos permita calcular primitivas en las que aparecen valores absolutos. Por eso, antes de comenzar a integrar, es necesario estudiar cuánto vale $\left| f-g \right|$ o, dicho de otra forma, averiguar cuál de las dos funciones es la mayor.

Ejemplo 6.70.
Calcular el área entre la función $f(x)=x(x-1)(x-2)$ y el eje OX en el intervalo $[0,3]$.
Dividimos en intervalos donde sepamos el signo de la función e integramos:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \left|f(x)\right| dx &= \int_0^1 \left|f(x)\right| dx + \int_1^2 \left|f(x)\right| dx + \int_2^3 \left|f(x)\right| dx \\ &= \int_0^1 x(x-1)(x-2)\,dx - \int_1^2 x(x-1)(x-2)\,dx \\ &\quad + \int_2^3 x(x-1)(x-2)\,dx \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{15} + \frac{19}{30} = \frac{3}{4}. \triangleleft\end{aligned}$$



6.5.2 Longitudes de curvas

Sea f una función derivable con derivada continua en el intervalo $[a,b]$. La longitud del arco de la curva $y=f(x)$ entre $x=a$ y $x=b$ es

$$\text{longitud} = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Ejemplo 6.71. Calcular la longitud de una circunferencia de radio 1.
La ecuación de una circunferencia de radio 1 es $x^2+y^2=1$. Podemos despejar y en la parte positiva: $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$ con $x\in[-1,1]$. Así, la longitud de *media* circunferencia será:

$$l=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\cdots=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\Big[\operatorname{arcsen}(x)\Big]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.\triangleleft$$

6.5.3 Área de sólidos de revolución

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua en $[a,b]$. Entonces el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje OX el arco de curva $y=f(x)$ en $[a,b]$ es

$$\text{Superficie} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Ejemplo 6.72. Calcular la superficie de una esfera de radio 1.
Podemos generar una esfera girando respecto del eje OX la curva del ejemplo anterior

$$y=f(x)=\sqrt{1-x^2} \qquad x\in[-1,1]$$

De esta forma, la superficie será:

$$S=2\pi\int_{-1}^{1}f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\cdots=2\pi\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-1}^{1}dx=2\pi\cdot 2=4\pi.\triangleleft$$

6.5.4 Volúmenes de sólidos de revolución

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. El volumen del sólido generado al girar el área bajo la curva $y=f(x)$ respecto del eje OX es

$$V_{OX}=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

y el volumen del sólido generado al girar dicha área respecto al eje OY es

$$V_{OY}=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx.$$

En este segundo caso, la función f tiene que ser positiva.

Ejemplo 6.73. Calcular el volumen de una esfera de radio 1. Podemos generar una esfera rotando respecto del eje OX el área bajo la curva $y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad x \in [-1,1]$ Con ello, el volumen será

$$\begin{aligned} V =& \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \\ =& \pi \left((1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) \right) = \frac{4\pi}{3}. \triangleleft \end{aligned}$$

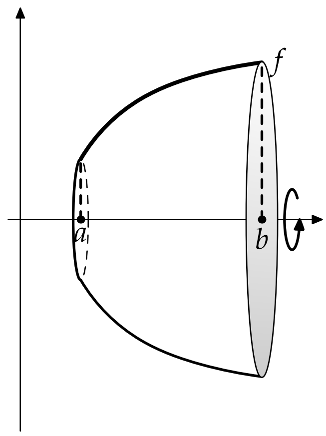


Figura 6.4 Volumen al girar respecto al eje OX

6.5.5 Algunas funciones definidas mediante integrales

La función gamma

La función gamma $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ está definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Esta función, debida a Euler, tiene interés como posible generalización del factorial para números reales cualesquiera. Se puede demostrar que

a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para cualquier $x \in \mathbb{R}^+$.
b) $\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)\Gamma(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
c) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La función beta

La función $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ está definida como $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$. Está relacionada con la función gamma mediante la igualdad $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

6.6 Ejercicios

6.6.1 Teorema Fundamental del Cálculo

Ejercicio 6.1. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3(t)\,dt$,
b) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}\,dt$,
c) $F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}\,dt$.

Solución 6.1.
a) $F'(x) = \operatorname{sen}^3(x)$
b) $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2+\operatorname{sen}^2(x)}$
c) $F'(x) = \int_a^b \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}$

Ejercicio 6.2. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:
a) $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\ln(1+t))\,dt$,
b) $F(x) = \int_{x^2}^1 \operatorname{sen}^3(t)\,dt$,
c) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos^3(t)\,dt$.

Solución 6.2.
a) $F'(x) = \operatorname{sen}\left(\ln(1+x^2)\right)2x$,
b) $F'(x) = -\operatorname{sen}^3\left(x^2\right)2x$,
c) $F'(x) = \cos(x^3)3x^2 - \cos(x^2)2x$.

E **Ejercicio 6.3.** Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2}\,dt.$$

Como consecuencia, estudiar los extremos relativos de dicha función.

Solución 6.3. La función f es derivable con $f'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2}(3x^2-2x)$. Por tanto, los únicos puntos críticos son $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$. Como $f'\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ y $f'(2) > 0$, f es estrictamente decreciente en $\left]0, \frac{2}{3}\right]$ y estrictamente creciente en $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$. En consecuencia f alcanza su mínimo absoluto (y relativo) en $x = \frac{2}{3}$.

E **Ejercicio 6.4.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt}{\operatorname{sen}(x^4)}.$$

Solución 6.4. En este caso estamos ante una indeterminación de la forma "$\frac{0}{0}$" y estamos en condiciones de aplicar la primera regla de L'Hôpital. Si calculamos el cociente de las derivadas de las dos funciones, aplicando el teorema fundamental del cálculo se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt + x\operatorname{sen}(x^2)}{4x^3\cos(x^4)}.$$

Volvemos a estar ante una indeterminación del mismo tipo. Para no complicar los cálculos notemos que $\cos(x^4)$ tiene límite 1 cuando x tiende a 0, así

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt + x\operatorname{sen}(x^2)}{4x^3\cos(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt + x\operatorname{sen}(x^2)}{4x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt}{4x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}(x^2)}{4x^3}$$

Al primer límite le volvemos a aplicar la primera regla de L'Hôpital, con lo que nos queda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{12x^2} = \frac{1}{12},$$

donde la última igualdad se sigue aplicando una última vez la primera regla de L'Hôpital o recordando que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.
De forma análoga se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}(x^2)}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{4x^2} = \frac{1}{4},$$

y el límite buscado es

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt}{\operatorname{sen}(x^4)} = \frac{1}{12}+\frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

E **Ejercicio 6.5.** Calcula el máximo absoluto de la función $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{x-1}\left(e^{-t^2} - e^{-2t}\right)dt.$$

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi}-1)$, calcula el mínimo absoluto de f.

Solución 6.5.

a) Estudiamos la monotonía de la función f. Para ello veamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = e^{-(x-1)^2} - e^{-2(x-1)} = 0 \iff (x-1)^2 = 2(x-1) \iff x = 1, 3.$$

Por tanto, f es estrictamente monótona en $[1,3]$ y en $[3,+\infty]$. Como $f'(2) > 0$ y $f'(4) < 0$, se tiene que f es estrictamente creciente en $[1,3]$ y estrictamente decreciente en $[3,+\infty]$. En particular, la función alcanza su máximo absoluto en 3.

b) Dado que $f(1) = 0 < \lim_{x\to+\infty} f(x)$, f alcanza su mínimo absoluto en 1.

E **Ejercicio 6.6.** Demostrar que, para cualquier $x \in \mathbb{R}^+$, se verifica que

$$\int_1^{\cosh(x)}\sqrt{t^2-1}\,dt = \frac{\cosh(x)\operatorname{senh}(x)}{2} - \frac{x}{2}.$$

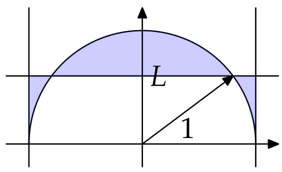
Solución 6.6. Sea $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_1^{\cosh(x)}\sqrt{t^2-1}\,dt - \frac{\cosh(x)\operatorname{senh}(x)}{2} + \frac{x}{2}.$$

Para comprobar que f vale constantemente cero, vamos a ver que, en primer lugar, f es constante. Para ello comprobamos que su derivada se anula:

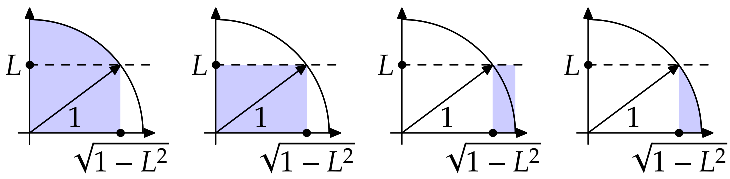
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{\cosh^2(x)-1}\right)\operatorname{senh}(x) - \frac{1}{2}\left(\operatorname{senh}^2(x)+\cosh^2(x)\right) + \frac{1}{2} \\
&= \operatorname{senh}^2(x) - \frac{1}{2}\left(\operatorname{senh}^2(x)+\cosh^2(x)\right) + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\operatorname{senh}^2(x)+\cosh^2(x)\right) + \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

Una vez que sabemos que f es constante, podemos averiguar dicha constante evaluando en un punto cualquiera. Por ejemplo, es inmediato comprobar que $f(0) = 0$.



Ejercicio 6.7. Consideremos la circunferencia centrada en el origen con radio uno y la recta $y = L$ con L un número real positivo. ¿A qué altura L se consigue que el área sombreada sea mínima?

Solución 6.7. Este es un problema de optimización: tenemos que buscar una altura para que una magnitud, en este caso un área, sea mínima.



Área 1 Área 2 Área 3 Área 4

Por otro lado también es cierto que al tratarse de un área vamos a utilizar la integración para calcular el área. Para no duplicar los cálculos vamos a calcular solamente el área de la parte de la derecha, teniendo en cuenta que el área total será el doble de la que estamos calculando. En cualquier caso como lo que buscamos es la altura L a la que se alcanza el mínimo del área, la altura será la misma si calculamos el área total o la mitad. Llamemos $f(L)$ a la función que nos da el área a la derecha. Teniendo en cuenta que la semicircunferencia superior tiene de fórmula $\sqrt{1-x^2}$ y que el punto donde la recta de altura L corta a la circunferencia unidad tiene de abscisa $\sqrt{1-L^2}$ se tiene que (fíjate en la figura) el área buscada es

$$
\begin{aligned}
f(L) &= (\text{Área } 1 - \text{Área } 2) + (\text{Área } 3 - \text{Área } 4) \\
&= \int_0^{\sqrt{1-L^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx - L\sqrt{1-L^2} + \left(1-\sqrt{1-L^2}\right)L - \int_{\sqrt{1-L^2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.
\end{aligned}
$$

Hay que tener en cuenta que esta función está definida para $L \in [0,1]$. Las integrales que aparecen en la fórmula de $f(L)$ son fáciles de calcular pero en cualquier caso no es necesario calcularlas ya que para calcular el mínimo de la función L (que es derivable en base al teorerma fundamental del cálculo) nos basta con derivar, calcular los púntos críticos y estudiar qué tipo de extremos son.

Con la ayuda del teorema fundamental del cálculo podemos calcular la derivada de la función.

$$\begin{aligned}
f'(L) &= \sqrt{1-(1-L^2)}\frac{-L}{\sqrt{1-L^2}} - \left(\sqrt{1-L^2} + \frac{-L^2}{\sqrt{1-L^2}}\right) \\
&\quad + \frac{L^2}{\sqrt{1-L^2}} + 1 - \sqrt{1-L^2} + \sqrt{1-(1-L^2)}\frac{-L}{\sqrt{1-L^2}} \\
&= \frac{-L^2}{\sqrt{1-L^2}} - \sqrt{1-L^2} + \frac{L^2}{\sqrt{1-L^2}} + \frac{L^2}{\sqrt{1-L^2}} + 1 - \sqrt{1-L^2} + \frac{-L^2}{\sqrt{1-L^2}} \\
&= 1 - 2\sqrt{1-L^2} = 0 \\
\iff \sqrt{1-L^2} &= \frac{1}{2} \iff L^2 = \frac{3}{4} \iff L = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Además la segunda derivada vale $f''(L) = \frac{L}{\sqrt{1-L^2}}$ que es positivo (en cualquier valor de $L\in]0,1[$). Así en el valor de $L = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se alcanza un mínimo relativo, y como es el único mínimo relativo que se alcanza es también absoluto.

E **Ejercicio 6.8.** Pruébese que para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se verifica que

$$\int_0^{\cos^2(x)} \arccos\left(\sqrt{t}\right) dt + \int_0^{\operatorname{sen}^2(x)} \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{t}\right) dt = \frac{\pi}{4}.$$

Solución 6.8. Para demostrar que una función es constante, comprobemos que su derivada es cero.

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^{\cos^2(x)} \arccos\left(\sqrt{t}\right) dt + \int_0^{\operatorname{sen}^2(x)} \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{t}\right) dt\right)' \\
&= -\arccos(\cos(x))2\cos(x)\ \operatorname{sen}(x) + \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x))2\operatorname{sen}(x)\cos(x) \\
&= -2x\cos(x)\operatorname{sen}(x) + 2x\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0.
\end{aligned}$$

Ahora que sabemos que es constante, podemos evaluar en cualquier punto para calcular su valor. Tomemos $x = \frac{\pi}{4}$ y recordemos que $\arccos(x) + \operatorname{arcsen}(x) = \frac{\pi}{2}$ (Ejercicio 5.12):

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos(\sqrt{t})\, dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen}(\sqrt{t})\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

E **Ejercicio 6.9.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^{(x+1)e^x} \ln(t)\arctan(t)\, dt}{x^2e^x}.$$

Solución 6.9. Aplicando la segunda regla de L'Hôpital, estudiamos el cociente de las derivadas:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left((x+1)e^x\right)\arctan\left((x+1)e^x\right)\left(e^x + (x+1)e^x\right)}{e^x(2x+x^2)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x+1)+x)\arctan\left((x+1)e^x\right)(x+2)}{2x+x^2}
\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to+\infty} = \frac{\pi}{2}$, y $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x+1)+x)(x+2)}{2x+x^2} = 1$, se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^{(x+1)e^x} \ln(t)\arctan(t)\,dt}{x^2e^x} = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio 6.10. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{2x} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\,dt}{x^2}.$$

Solución 6.10. Tenemos un cociente de funciones derivables, ambas con límite cero en el origen y la derivada del denominador no se anula (salvo en el origen). Estamos en condiciones de aplicar la primera regla de L'Hôpital para resolver dicho límite. Nos queda el siguiente cociente

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x)) - \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{2x},$$

que sigue presentando una indeterminación de la forma "$\frac{0}{0}$". Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\cos(\operatorname{sen}(2x))\cos(2x) - \cos(\operatorname{sen}(x))\cos(x)}{2} = \frac{3}{2}. \tag{6.1}$$

E **Ejercicio 6.11.** Se considera la función $f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2}\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Encontrar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f en $\mathbb{R}$.
b) Encontrar los extremos relativos de f.
c) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x^3 - x^2)}$.

Solución 6.11.

a) La función integral f es una integral indefinida cuyo integrando es e^{-t^2}. En concreto, se puede escribir como:

$$f(x) = \int_0^{g(x)} e^{-t^2}\,dt$$

donde $g(x) = x^3 - x^2$ es un polinomio y, por tanto, derivable. Al ser el integrando una función continua y, aplicando el teorema fundamental del cálculo, tenemos que la función f es derivable, y además su derivada vale

$$f'(x) = e^{-g(x)^2}\,g'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2}\,(3x^2 - 2x)\ , \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar los intervalos de monotonía de f tendremos que analizar el signo de la derivada. Para ello factorizamos la función derivada:

$$f'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2}\,x(3x-2).$$

Como la función exponencial es siempre positiva, la función derivada se anulará siempre y cuando $x = 0$ o $x = 2/3$; concretamente:

$$f'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2}\, x(3x-2) = 0 \iff x(3x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = \frac{2}{3}.$$

Tenemos entonces que f tiene dos puntos críticos que nos van a permitir descomponer el dominio de f de la forma siguiente:

i) Si $x < 0$, entonces $f'(x) > 0$ (se puede evaluar f' en un punto cualquiera negativo) y, por tanto, f es estrictamente creciente en $]-\infty, 0[$.

ii) Si $0 < x < 2/3$, entonces $f'(x) < 0$ y, por tanto, f es estrictamente decreciente en $]0, 2/3[$.

iii) Si $x > 2/3$, $f'(x) > 0$ y, por tanto, f es estrictamente creciente en $]2/3, +\infty[$.

b) Con la información que tenemos del apartado anterior podemos concluir que f alcanza un máximo relativo en 0 (la función pasa de ser creciente a decreciente) y un mínimo relativo en 2/3 (pasa de ser decreciente a creciente).

c) El límite planteado presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$" y, como es posible aplicar la regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\cos(x^3 - x^3)(3x^2 - 2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-(x^3-x^2)^2}\,(3x^2 - 2x)}{\cos(x^3 - x^3)(3x^2 - 2x)}$$

Simplificamos el cociente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-(x^3-x^2)^2}}{\cos(x^3 - x^2)} = \frac{1}{1} = 1 \implies \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x^3 - x^2)} = 1$$

donde hemos tenido en cuenta que $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ y que $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$.

E **Ejercicio 6.12.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\log(x)}}{x} \cdot \int_2^x \frac{dy}{\sqrt{\log(y^2)}}.$$

Solución 6.12. FALTA

6.6.2 Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas y cambio de variable

Ejercicio 6.13. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int 5a^2x^6 dx$

b) $\int x(x+a)(x+b) dx$

c) $\int (a + bx^3)^2 dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$

e) $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$

f) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$

Solución 6.13.

a) $\int 5a^2x^6dx = \frac{5}{7}a^2x^7$
b) $\int x(x+a)(x+b)dx = \frac{1}{2}abx^2 + \frac{1}{3}(a+b)x^3 + \frac{x^4}{4}$
c) $\int (a+bx^3)^2dx = a^2x + \frac{1}{7}b^2x^7 + \frac{1}{2}abx^4$
d) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \frac{x^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}$
e) $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3dx = a^2x - \frac{9}{5}a^{4/3}x^{5/3} + \frac{9}{7}a^{2/3}x^{7/3} - \frac{x^3}{3}$
f) $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx = x + \frac{x^2}{2} + 2\ln(-1+x)$

Ejercicio 6.14. Calcula las siguientes primitivas
a) $\int 2\operatorname{senh}(5x) - \cosh(5x)dx$
b) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln(x)}}{x}dx$
c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$
d) $\int \frac{dx}{e^x+1}$
e) $\int x(2x+5)^{10}dx$

Solución 6.14.
a) La integral es $\int 2\operatorname{senh}(5x) - \cosh(5x)dx = \frac{2}{5}\cosh(5x) - \frac{1}{5}\operatorname{senh}(5x)$.
b) Hacemos el cambio de variable $1+\ln(x) = y$,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln(x)}}{x}dx = \int y^{1/3}\,dy = \left(\frac{3}{4} + \frac{3\ln(x)}{4}\right)(1+\ln(x))^{1/3}$$

c) $\frac{-1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-2+x^2}}\right)$
d) Sumamos y restamos e^x,

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = x - \ln(1+e^x).$$

e) Hacemos el cambio de variable $2x+5 = y$,

$$\begin{aligned}\int x(2x+5)^{10}\,dx &= \left[2x+5 = y \implies x = \frac{1}{2}(y-5)\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(y-5)y^{10}\,dy\\ &= \frac{1}{4}\int y^{11} - 5y^{10}\,dy = \frac{1}{4}\left(\frac{y^{12}}{12} - \frac{5y^{11}}{11}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{(2x+5)^{12}}{12} + \frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right).\end{aligned}$$

Integración por partes

Ejercicio 6.15. Calcula las siguientes primitivas
a) $\int \ln(x)dx$
b) $\int \arctan(x)dx$
c) $\int \operatorname{arcsen}(x)dx$
d) $\int x\operatorname{sen}(x)dx$
e) $\int xe^{-x}dx$
f) $\int x^2e^{3x}dx$
g) $\int x\operatorname{sen}(x)\cos(x)dx$

Solución 6.15.

a) Integrando por partes

$$\int \ln(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) \implies du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \implies v = x \end{bmatrix} = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x.$$

b) Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,dx =& \begin{bmatrix} u = \arctan(x) \implies du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \implies v = x \end{bmatrix}\\ =& x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).\end{aligned}$$

c) Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx =& \begin{bmatrix} u = \operatorname{arcsen}(x) \implies du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \implies v = x \end{bmatrix}\\ =& x\operatorname{arcsen}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

d) Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int x\operatorname{sen}(x)\,dx =& \begin{bmatrix} u = x \implies du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(x)\,dx \implies v = -\cos(x) \end{bmatrix}\\ =& -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x).\end{aligned}$$

e) Integrando por partes

$$\int x\,e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x \implies du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \implies v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}(1+x).$$

f) Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int x^2e^{3x}\,dx =& \begin{bmatrix} u = x^2 \implies du = 2x\,dx \\ dv = e^{3x}\,dx \implies v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx\\ =& \begin{bmatrix} u = x \implies du = dx \\ dv = e^{3x}\,dx \implies v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx\right)\\ =& \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x}.\end{aligned}$$

g) Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int x\operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx =& \frac{1}{2}\int x\operatorname{sen}(2x)\,dx = \begin{bmatrix} u = x \implies du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(2x)\,dx \implies v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{bmatrix}\\ =& \frac{1}{2}\left(-\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx\right) = -\frac{x\cos(2x)}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x).\end{aligned}$$

Ejercicio 6.16. Demuestra que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$ para cualquier natural n.

Solución 6.16. Vamos a demostrarlo por inducción. Para $n = 1$,

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \implies du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \implies v = -e^{-x} \end{array}\right] = \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$
$$= \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Supongamos que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$ y veamos qué ocurre para $n+1$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x}\,dx &= \left[\begin{array}{c} u = x^{n+1} \implies du = (n+1)x^n \\ dv = e^{-x}\,dx \implies v = -e^{-x} \end{array}\right] \\ &= \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1)x^n e^{-x}\,dx \\ &= (n+1)\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = (n+1)n! = (n+1)!\end{aligned}$$

E **Ejercicio 6.17.** Demuestra que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

para cualquier natural n.

Solución 6.17. Vamos a demostrarlo por inducción. Si llamamos

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx,$$

se trata de demostrar que $I_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}$ para cualquier natural n.
Veamos si se verifica para $n = 1$. En este caso, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, se tiene que

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}.$$

Supongamos ahora que para un natural n se verifica que $I_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}$ y vamos a ver si somos capaces de demostrar la correspondiente fórmula para $n+1$.

$$\begin{aligned}I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2(n+1)}(x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+2}(x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}(x)\operatorname{sen}^2(x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\,dx \\ &= I_n - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}(x)\cos^2(x)\,dx.\end{aligned}$$

En esta última integral podemos utilizar integración por partes para resolverla; si llamamos $u(x) = \cos(x)$ y $v'(x) = \operatorname{sen}^{2n}(x)\cos(x)$ entonces $u'(x) = -\operatorname{sen}(x)$ y $v(x) = \frac{\operatorname{sen}^{2n+1}(x)}{2n+1}$ y se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}(x)\cos^2(x)\,dx &= \left[\frac{\cos(x)\operatorname{sen}^{2n+1}(x)}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^{2n+2}(x)}{2n+1}\,dx \\ &= 0 + \frac{1}{2n+1} I_{n+1}.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión de I_{n+1} tenemos que

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2n+1} I_{n+1} \implies I_{n+1}\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) = I_n \implies I_{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) = I_n,$$

de donde

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2(n+1)-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)(2(n+1))}\cdot\frac{\pi}{2}$$

que es la fórmula esperada.

Integración de funciones racionales

Ejercicio 6.18. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$
b) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$
c) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$
d) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$
e) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$

Solución 6.18.

a) Descomponemos en fracciones simples, $\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{(b-a)(x+a)} + \frac{1}{(a-b)(x+b)}$ y sustituimos

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \int \frac{1}{(b-a)(x+a)}\,dx + \int \frac{1}{(a-b)(x+b)}\,dx = \frac{\ln|a+x|}{-a+b} + \frac{\ln|b+x|}{a-b}.$$

b) Puesto que numerador y denominador tienen el mismo grado, comenzamos dividiendo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx &= \int 1 + \frac{3}{x^2-5x+6}\,dx \\ &= x + 3\int \frac{dx}{x^2-5x+6}\end{aligned}$$

descomponemos en fracciones simples y usamos el apartado anterior,

$$
\begin{aligned}
&= x + 3\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} \\
&= x + 3\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) \\
&= x + 3\ln|-3+x| - 3\ln|-2+x|.
\end{aligned}
$$

c) Dividimos y descomponemos en fracciones simples,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx &= \int \left(5 + \frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}\right) dx \\
\Gamma &= \int \left(5 + \frac{1}{2x} - \frac{7}{3(x-1)} + \frac{161}{6(x-4)}\right) dx \\
&= 5x + \frac{161}{6}\ln(-4+x) - \frac{7}{3}\ln|-1+x| + \frac{\ln|x|}{2}.
\end{aligned}
$$

d) Descomponemos en fracciones simples e integramos:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x(x+1)^2} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{1+x} + \ln|x| - \ln|1+x|.
\end{aligned}
$$

e) Descomponemos en fracciones simples y resolvemos,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)} &= \int \left(\frac{4x+15}{130(x^2+4x+5)} - \frac{1}{20(x-1)} + \frac{1}{52(x-3)}\Gamma\right) dx \\
&= \frac{7}{130}\arctan(2+x) + \frac{1}{52}\ln|-3+x| - \frac{1}{20}\ln|-1+x| \\
&\quad + \frac{1}{65}\ln\left|5+4x+x^2\right|.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 6.19. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{dx}{x^3+1}$
b) $\int \frac{dx}{x^4+1}$
c) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$
d) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$

Solución 6.19.

a) Descomponemos en fracciones simples e integramos,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+1} &= \int \left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right) dx \\
&= \frac{\arctan\left(\frac{-1+2x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln\left|1-x+x^2\right|.
\end{aligned}
$$

b) Para calcular la descomposición en fracciones simples, nos hace falta conocer las raíces del polinomio $x^4+1=0$ o, lo que es lo mismo, las raíces cuartas de -1. Como $-1=1_\pi$, sus raíces cuartas son

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}},\ z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}},\ z_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ y }\ z_4=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Agrupando cada raíz con su conjugada y multiplicando, se tiene que

$$x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right).$$

Esto permite descomponer en fracciones simples y comprobar que

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{-\sqrt{2}+2x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}+2x}{\sqrt{2}}\right)$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|-1+\sqrt{2}x-x^2\right|+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}x+x^2\right).$$

c) Utilizando la descomposición

$$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\int\left(\frac{b_0}{x+1}+\frac{b_1+b_2x}{x^2+1}\right)dx$$

se demuestra que

$$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}=-\frac{1}{4(1+x)}+\frac{1}{4(1+x^2)}+\frac{\arctan(x)}{4}+\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^2).$$

d) Como $(x^4-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2$, tenemos la descomposición

$$\int\frac{dx}{(x^4-1)^2}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}+\int\left(\frac{b_0}{x+1}+\frac{b_1}{x-1}+\frac{b_2+b_3x}{x^2+1}\right)dx.$$

Derivando y calculando los coeficientes se obtiene que

$$\int\frac{dx}{(x^4-1)^2}=-\frac{x}{4(-1+x^4)}+\frac{3\arctan(x)}{8}-\frac{3}{16}\ln|-1+x|+\frac{3}{16}\ln|1+x|.$$

Integración de funciones trigonométricas

Ejercicio 6.20. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int\cos^3(x)dx$
b) $\int\operatorname{sen}^5(x)dx$
c) $\int\operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)dx$
d) $\int\frac{\cos^5(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}dx$
e) $\int\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx$
f) $\int\cos^6(3x)dx$

Solución 6.20.

a) Utilizando el cambio de variable $\operatorname{sen}(x) = t$ la integral queda

$$\int \cos^3(x)\,dx = \int \left(1 - t^2\right)\,dt = t - \frac{t^3}{3} = \operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}(x)^3}{3}.$$

b) Utilizando el cambio de variable $\cos(x) = t$, la integral es

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(x)\,dx &= -\int \left(1 - t^2\right)^2\,dt = -\int t^4 - 2t^2 + 1\,dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} - t\\ &= -\frac{\cos^5(x)}{5} + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \cos(x).\end{aligned}$$

c) Utilizamos el cambio de variable $\operatorname{sen}(x) = t$,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)\,dx = \int t^2\left(1 - t^2\right)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5(x)}{5}.$$

d) Utilizamos el cambio de variable $\operatorname{sen}(x) = t$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^5(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}\,dx &= \int \frac{\left(1 - t^2\right)^2}{t^3}\,dt = \int t^{-3} + t - 2t^{-1}\,dt = -\frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{2}t^2 - 2\ln|t|\\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x) - 2\ln|\operatorname{sen}(t)|.\end{aligned}$$

e) Utilizando que $2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x)$,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\,dx = \int \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2x)\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1 - \cos(4x)}{2}\,dx = \frac{1}{32}\left(4x - \operatorname{sen}(4x)\right).$$

f) Utilizando repetidamente que $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$ y el cambio de variable $3x = t$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int \cos^6(3x)\,dx &= \frac{1}{3}\int \cos^6(t)\,dt = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right)^3\,dt\\ &= \frac{1}{24}\int 1 + 3\cos(2t) + 3\cos^2(2t) + \cos^3(2t)\\ &= \frac{1}{576}\Big(180x + 45\operatorname{sen}(6x) + 9\operatorname{sen}(12x) + \operatorname{sen}(18x)\Big).\end{aligned}$$

Ejercicio 6.21. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$

b) $\int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}dx$

c) $\int \frac{dx}{1+\cos^2(3x)}$

d) $\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2(x)+5\cos^2(x)}$

e) $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}dx$

Solución 6.21.

a) Hacemos el cambio $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\,dx &= \int \frac{1-y^2}{1+y^2}\,dy\\ &= \int \left(\frac{2}{1+y^2}-1\right)dy = 2\arctan(y)-y\\ &= x-\tan\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

b) Como la función es par en seno y coseno, utilizamos el cambio $\tan(x) = t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}dx &= \int \frac{1+t}{(1-t)(1+t^2)}\,dt\\ &= \int \left(\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t-1}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\tan^2(x)+1\right)-\ln\left(\tan(x)-1\right).\end{aligned}$$

c) El integrando es par pero antes de hacer el cambio $y = \tan(x)$ lo "arreglamos" un poco.

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2(3x)} = [3x = t] = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+\cos^2(t)} = [\tan(t) = y] = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{2+y^2}$$

eliminamos el 2 del denominador buscando un arcotangente,

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3}\int \frac{dy}{2\left(1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \left[y = \sqrt{2}z\right]\\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan(3x)}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

d) Aprovechamos que el integrando es una función par en seno y coseno para realizar el cambio de variable $\tan(x) = t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3\,\mathrm{sen}^2(x)+5\cos^2(x)} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx}{5+3\tan^2(x)} = [\tan(x) = t]\\ &= \int \frac{dt}{5+3t^2} = \int \frac{dt}{5\left(1+\frac{3}{5}t^2\right)} = \left[y = \sqrt{\tfrac{3}{5}}t\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{15}}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\tan(x)\right)\end{aligned}$$

e) Utilizamos las fórmula del ángulo doble, y hacemos el cambio de variable $y = \mathrm{sen}^2(x)$,

$$\int \frac{\mathrm{sen}(2x)}{1+\mathrm{sen}^2(x)}\,dx = \int \frac{2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)}{1+\mathrm{sen}^2(x)}\,dx = \int \frac{dy}{1+y} = \ln\left|1+y\right| = \ln\left(1+\mathrm{sen}^2(x)\right).$$

Integración de funciones irracionales

Ejercicio 6.22. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

d) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx$

Solución 6.22.

a) Hacemos el cambio de variable $x-1=t^2$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx = 2\int (t^2+1)^3\,dt = \sqrt{-1+x}\left(\frac{32}{35}+\frac{16x}{35}+\frac{12x^2}{35}+\frac{2x^3}{7}\right).$$

b) Hacemos el cambio de variable $x+1=t^2$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan(t) = 2\arctan\left(\sqrt{x+1}\right).$$

c) Utilizando el cambio de variable $x=t^6$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx &= \int \frac{6t^3}{t+1}dt = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt\\ &= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)\\ &= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|.\end{aligned}$$

d) Hacemos el cambio de variable $x+1=t^2$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx &= \int \frac{2t(t+2)}{t^4-t}dt = \int\left(\frac{-2t-2}{t^2+t+1}+\frac{2}{t-1}\right)dt\\ &= -\ln\left(t^2+t+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+2\ln(t-1)\\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}\right)+2\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)-\ln\left(\sqrt{x+1}+x+2\right)\end{aligned}$$

Ejercicio 6.23. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

b) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$

c) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$

d) $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Solución 6.23.

a) Como $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = [x - 1/2 = t] = \int \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}}\,dt$$

hacemos el cambio de variable $t = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{senh}(y)$,

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{senh}(y) + \frac{1}{2}\right)^2 dy \\ &= 2\sqrt{3}\,\cosh(y) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{2y}}{2} - \frac{e^{-2y}}{2} - 2y\right) + y\Gamma \end{aligned}$$

y se deshacen los cambios.

b) Utilizamos el cambio de variable $x = \sec(t)$,

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2 - 1}} = \int \cos^4(t)\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}t + \operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(4t)\right).$$

Para terminar, basta deshacer el cambio realizado.

c) Hacemos el cambio de variable $x = \operatorname{sen}(t)$,

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \int \operatorname{sen}^5(t)\,dt = -\frac{1}{5}\cos^5(t) + \frac{2}{3}\cos^3(t) - \cos(t)\Gamma,$$

y se deshacen los cambios.

d) Hacemos el cambio de variable $x = \operatorname{senh}(t)$,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = \int \operatorname{senh}^6(t)\,dt &= \int \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^6 dt \\ &= \frac{1}{2^6}\int \left(e^{6t} + \binom{6}{1}e^{4t} + \binom{6}{2}e^{2t} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4}e^{-2t} + \binom{6}{5}e^{-4t} + e^{-6t}\right) dt \\ &= \frac{1}{64}\left(\frac{e^{6t} - 9e^{4t} + 45e^{2t}}{6} - \frac{e^{-6t}\left(45e^{4t} - 9e^{2t} + 1\right)}{6} - 20t\Gamma\right) \end{aligned}$$

y se deshacen los cambios.

Integración de funciones hiperbólicas

Ejercicio 6.24. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \operatorname{senh}^3(x)dx$

b) $\int \cosh^4(x)dx$

c) $\int \operatorname{senh}^3(x)\cosh(x)dx$

d) $\int \operatorname{senh}^2(x)\cosh^2(x)dx$

e) $\int \tanh^3(x)dx$
f) $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}(x)\cosh^2(x)}$
g) $\int \frac{dx}{2\operatorname{senh}(x)+3\cosh(x)}$

Solución 6.24.
a) Utilizando el cambio de variable $\cosh(x) = t$,

$$\int \operatorname{senh}^3(x)\,dx = \int t^2 - 1\,dt = \frac{t^3}{3} - t = \frac{1}{3}\cosh^3(x) - \cosh(x).$$

b) En estos problemas podemos seguir dos estrategias: podemos imitar el método empleado con funciones trigonométricas o podemos desarrollar en términos de exponenciales. Si seguimos la primera estrategia, usaremos que $\cosh^2(x) = ½(1 + \cosh(2x))$, con lo que

$$\begin{aligned}\int \cosh^4(x)\,dx &= \int \left(\frac{1+\cosh(2x)}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1 + \cosh^2(2x) + 2\cosh(x)\right) dx\end{aligned}$$

integramos y volvemos a aplicar la fórmula del ángulo doble,

$$\begin{aligned}&= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{senh}(2x) + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cosh(4x)}{2}\right) dx \\ &= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{senh}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{senh}(4x).\end{aligned}$$

La otra posibilidad es desarrollar en términos de exponenciales:

$$\begin{aligned}\int \cosh^4(x)dx &= \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4}\int \left(e^{4x} + 4e^{2x} + 12 + 4e^{-2x} + e^{-4x}\right) dx \\ &= \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{4}e^{4x} + 2e^{2x} + 12x - 2e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-4x}\right).\end{aligned}$$

Agrupando es fácil comprobar que los dos resultados coinciden.
c) La integral es inmediata: $\int \operatorname{senh}^3(x)\cosh(x)\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{senh}^4(x)$.
d) En este caso vamos a utilizar el desarrollo como exponenciales:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{senh}^2(x)\cosh^2(x)\,dx &= \int \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int \left(e^{2x}-e^{-2x}\right)^2\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int \left(e^{4x}+e^{-4x}-2\right)\,dx\\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\operatorname{senh}(4x)-2x\right).\end{aligned}$$

e) La resolvemos de forma análoga a la correspondiente integral trigonométrica:

$$\begin{aligned}\int \tanh^3(x)\,dx &= \int \left(\operatorname{sech}^2+1\right)\tanh(x)\,dx\\ &= \int \operatorname{sech}^2(x)\tanh(x)\,dx + \int \tanh(x)\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\tanh^2(x)+\ln\left(\cosh(x)\right).\end{aligned}$$

f) Hacemos el cambio de variable $\cosh(x)=y$,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{senh}(x)\cosh^2(x)} = \int \frac{dy}{y^2(y^2-1)}$$

descomponemos en fracciones simples,

$$= \int\left(\frac{1}{2(y-1)}-\frac{1}{2(y+1)}-\frac{1}{y^2}\right)dy = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+\frac{1}{y}$$

y terminamos deshaciendo el cambio con $y=\operatorname{arccosh}(x)$.

g) Desarrollamos seno y coseno hiperbólicos,

$$\int \frac{dx}{2\operatorname{senh}(x)+3\cosh(x)} = 2\int\frac{dx}{5e^x+e^{-x}}$$

hacemos el cambio de variable $e^x=t$,

$$= 2\int \frac{dt}{1+5t^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5}\,t\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5}\,e^x\right).$$

Un poco de todo

Ejercicio 6.25. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$

b) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right)-\operatorname{arcsen}\left(\frac{7}{12}\right)$

c) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$
d) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{\pi}{6}$
e) $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx = \frac{3\pi+\ln(2)}{10}$
f) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4} dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$
g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$
h) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x) dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$
i) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$

Solución 6.25.

a) Ya sabemos la primitiva de esta función, la calculamos en el Ejercicio 6.14 d, con lo que

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = [x - \ln(1+e^x)]_0^1 = 1 - \ln(1+e) + \ln(2) = 1 + \ln\left(\frac{2}{1+e}\right).$$

b) Teniendo en cuenta que $20 - 8x + x^2 = 36 - (x-4)^2$, y haciendo el cambio de variable $y = x - 4$ se tiene que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{36-(x-4)^2}} = \int_{-4}^{-3.5} \frac{dy}{\sqrt{36-y^2}} = \int_{-4}^{-3.5} \frac{dy}{6\sqrt{1-\left(\frac{t}{6}\right)^2}}$$

hacemos el cambio $t = y/6$,

$$= \int_{-2/3}^{-7/12} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{7}{12}\right)$$

c) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_0^3 \frac{dx}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \left[\frac{x}{3} = y\right] = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(0) = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \left[y = x^3\right] = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(0)\right) \frac{\pi}{6}$

e) Descomponemos $\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}$ como suma de fracciones simples:

$$\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5}$$

Desarrollando se obtiene que $A = -\frac{1}{5}$, $B = \frac{1}{5}$ y $C = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx &= \int \frac{1}{5}\frac{x}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2-4x+5} dx.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Calculamos por separado una primitiva de

$$\int \frac{x}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)+4}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right) + 2\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

completamos cuadrados $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$,

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right)+2\int \frac{dx}{1+(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right)+2\arctan(x-2) \tag{6.3}$$

Usando (6.2) y (6.3),

$$\int_1^{+\infty} x-1x^3-3x^2+x+5\,dx = \frac{1}{5}\left[-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+2\arctan(x-2)\right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x+1}\right)+\arctan(x-2)\right]_1^{+\infty} = \frac{3\pi+\ln(2)}{10}.$$

f) Utilizando el cambio de variable $y=x^2$ pasamos a una integral sencilla:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{3+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{3+y^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\lim_{y\to+\infty}\arctan(y)-\arctan(0)\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}.$$

g) Usamos el cambio de variable $e^x=t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty}\arctan(t)-\arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

h) Utilizamos el método de integración por partes dos veces:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,dx = \begin{bmatrix} u=e^{-\alpha x} \implies du=-\alpha e^{-\alpha x}\,dx \\ dv=\cos(\beta x)\,dx \implies v=\frac{1}{\beta}\operatorname{sen}(\beta x)\end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{\beta}e^{-\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\right]_0^{+\infty} + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\,dx$$

usamos que $\lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)=0$ y $\operatorname{sen}(0)=0$,

$$= \frac{\alpha}{\beta}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\,dx$$

e integramos por partes de nuevo,

$$= \begin{bmatrix} u=e^{-\alpha x} \implies du=-\alpha e^{-\alpha x}\,dx \\ dv=\operatorname{sen}(\beta x)\,dx \implies v=-\frac{1}{\beta}\cos(\beta x)\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\left(\left[-\frac{1}{\beta}e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\right]_0^{+\infty} - \frac{\alpha}{\beta}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,dx\right)$$

Si $I=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$, entonces $I=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}I\right) \iff I=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$.

i) Análogo al apartado anterior.

Ejercicio 6.26. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

a) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(x))^2\,dx = 3\pi$

c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x)|^3 dx = \frac{4}{3}$

d) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{16}$

e) $\int_0^1 \left(1-\rho^{2/3}\right)^{3/2} 3\rho d\rho = \frac{8}{35}$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$

g) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(1+\sqrt{2})$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+y)(1+yx^2)} = \frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}}$

i) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$

Solución 6.26.

a) Mediante el cambio de variable $x = \operatorname{sen}(t)$, nos queda que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(1+\cos(2t)\right)\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

b) Desarrollamos el cuadrado,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(x))^2\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 1+2\cos(x)+\cos^2(x)\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1+2\cos(x)+\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\,dx = 3\pi.\end{aligned}$$

c) Usando que la función seno es impar,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x)|^3\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(x)\,dx = [\cos(x)=t] = -2\int_1^0 1-t^2\,dt = \frac{4}{3}.$$

d) Utilizando que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, se tiene que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2x)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} 1-\cos(4x)\,dx = \frac{\pi}{16}.$$

e) Vamos poco a poco simplificando la integral mediante sucesivos cambios de variable,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(1-\rho^{2/3}\right)^{3/2} 3\rho d\rho &= \left[\rho = x^3 \implies d\rho = 3x^2\,dx\right] = 9\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{3/2} x^5\,dx \\ &= \left[y = 1-x^2 \implies dy = -2x\,dx\right] = \frac{9}{2}\int_0^1 y^{3/2}(1-y)^2\,dy \\ &= \frac{9}{2}\int_0^1 \left(y^{3/2}+y^{7/2}-2y^{5/2}\right)\,dy \\ &= \left[\frac{9}{2}\left(\frac{y^{5/2}}{5/2}+\frac{y^{9/2}}{9/2}-2\frac{y^{7/2}}{7/2}\right)\right]_0^1 = \frac{8}{35}\end{aligned}$$

f) Comenzamos dividiendo numerador y denominador por $1 + y^2$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} &= \frac{1}{1+y^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2} \\
&= \left[\frac{x}{\sqrt{1+y^2}} = t\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \left(\lim_{x\to+\infty} \arctan(t) - \arctan(0)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}\,.
\end{aligned}$$

g) La integral es inmediata: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsenh}(1) - \operatorname{arcsenh}(0) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

h) Hacemos el cambio de variable $t = \sqrt{y}\,x$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+y)(1+yx^2)} &= \frac{1}{1+y} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(\sqrt{y}x)^2} \\
&= \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}} \left(\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) - \arctan(0)\right) = \frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

i) Mediante el cambio de variable $x = t^2$ pasamos a tener una integral inmediata

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left[x = t^2\right] = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\left(\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) - \arctan(0)\right) = \pi.$$

E **Ejercicio 6.27.** Calcula $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3x+14}{(x+4)(x+3)^2}\,dx.$

Solución 6.27. Tenemos que calcular una integral impropia (el dominio no es acotado) de una función continua. Para ello, calculamos una primitiva y estudiamos sus límites en 0 y en $+\infty$.

En primer lugar descomponemos como suma de fracciones simples. Es fácil comprobar que

$$\frac{3x+14}{(x+4)(x+3)^2} = \frac{2}{x+4} - \frac{2}{x+3} + \frac{5}{(x+3)^2}\,.$$

Calculamos la primitiva

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+14}{(x+4)(x+3)^2}\,dx &= \int \frac{2}{x+4}\,dx - \int \frac{2}{x+3}\,dx + \int \frac{5}{(x+3)^2}\,dx \\
&= 2\ln(x+4) - 2\ln(x+3) - \frac{5}{x+3} \\
&= \ln\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^2 - \frac{5}{x+3}\,.
\end{aligned}$$

Observa que si calculamos cada integral por separado entre 0 y $+\infty$ no llegamos a nada ya que, por ejemplo,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+3) = +\infty$$

y, por tanto, $\frac{2}{x+3}$ no es impropiamente integrable en $]0,+\infty[$. Pero nosotros no estamos integrando esta función. La integral que queremos calcular es

$$\int_0^{+\infty} \frac{3x+14}{(x+4)(x+3)^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^2 - \frac{5}{x+3} - \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^2 - \frac{5}{x+3}$$
$$= -\ln\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}.$$

E **Ejercicio 6.28.** Calcula $\int \log\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)dx$.

Solución 6.28. FALTA

6.6.3 Aplicaciones

Longitudes, áreas y volúmenes

Ejercicio 6.29. Calcula las siguientes áreas:
a) Área limitada por las curvas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$
b) Área limitada por $y = xe^{-x^2}$, el eje OX, la ordenada en el punto $x = 0$ y la ordenada en el máximo.
c) Área de la figura limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX.

Solución 6.29.
a) Las curvas $y = x^2$ e $y^2 = 8x$ se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$. Por tanto el área es

$$\int_0^2 \sqrt{8x} - x^2\,dx = \left[\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

b) La función $f(x) = x\,e^{-x^2}$ es derivable. Derivando

$$f'(x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si evaluamos la segunda derivada, $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$ y $f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$, con lo que el máximo se alcanza en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. El área pedida es

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2e}}.$$

c) La función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es positiva en $[0,1]$ y negativa en $[1,2]$, por tanto el área pedida es

$$\int_0^1 x(x-1)(x-2)\,dx - \int_1^2 x(x-1)(x-2)\,dx = \int x^3 + 2x - 3x^2 = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 6.30. Halla el área comprendida entre el eje de abscisas y la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$.

Solución 6.30. La curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ corta al eje OX en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$. Además, está por encima de dicho eje en el intervalo $[0,2]$ y por debajo en $[2,4]$. Por tanto, el área pedida es

$$\int_0^2 x^3 - 6x^2 + 8x\,dx - \int_2^4 x^3 - 6x^2 + 8x\,dx = 4 + 4 = 8.$$

Ejercicio 6.31. Halla el área comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Solución 6.31. Las parábolas se cortan en $x = 0$ y $x = 4$. Además es fácil comprobar que en dicho intervalo la primera parábola está por encima de la segunda con lo que el área es

$$\int_0^4 6x - x^2 - (x^2 - 2x)\,dx = \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3}.$$

Ejercicio 6.32. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x) = \cosh(x)$ y $g(x) = \operatorname{senh}(x)$, en el primer cuadrante.

Solución 6.32. Como $\cosh(x) \geq \operatorname{senh}(x)$ en todo $\mathbb{R}$, tenemos que calcular

$$\int_0^{+\infty} \cosh(x) - \operatorname{senh}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

E **Ejercicio 6.33.** Calcula el área entre las curvas $y = \operatorname{sech}(x)$ e $y = \frac{3}{4}\cosh(x)$.

Solución 6.33. FALTA

E **Ejercicio 6.34.** El cuadrado con un vértice en el origen y el vértice opuesto en $(1,1)$ se divide en dos partes por cada una de las siguiente curvas. En cada caso, halla la razón entre el área mayor y el área menor.

a) $y^2 = x^3$, b) $y = x^n$, $n > 1$, c) $y = xe^{x-1}$.

Solución 6.34. El área del cuadrado con estos vértices es uno. Las curvas dividen a dicho cuadrado en dos partes. Conocida el área de una de ellas, el área de la otra es uno menos dicha área. El cociente entre ambas es la razón que estamos buscando.

a) El área que encierra la curva $y^2 = x^3$ es

$$\int_0^1 \sqrt{x^3}\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Por tanto la razón es $\frac{1-\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{2}$.

b) El área es

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

y la razón n.

c) El área es

$$\int_0^1 xe^{x-1}\,dx = \left[xe^{x-1} - e^{x-1}\right]_0^1 = \frac{1}{e}$$

y la razón es $e-1$.

Ejercicio 6.35. Halla la longitud de las siguientes curvas:

a) $y = \frac{x^4+48}{24x}$ en $[2,4]$

b) $y = \ln(1-x^2)$ en $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

c) Halla la longitud de la catenaria, o sea, de la función $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right).$$

Solución 6.35.

a) Si $f(x) = \frac{x^4+48}{24x}$, entonces

$$f'(x) = \frac{x^4-16}{8x^2} \implies 1 + f'(x)^2 = \left(\frac{x^4+16}{8x^2}\right)^2,$$

y la longitud es $\int_2^4 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_2^4 \frac{x^4+16}{8x^2}\,dx = \frac{17}{6}$.

b) Si $f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$, la longitud es

$$\begin{aligned}
\int_{1/3}^{2/3} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx &= \int_{1/3}^{2/3} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx \\
&= \int_{1/3}^{2/3} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \int_{1/3}^{2/3} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{12}\left(12\ln\left(\frac{4}{3}\right) - 12\ln\left(\frac{2}{3}\right) - 13\right) - \frac{1}{15}\left(15\ln(3) + 15\ln\left(\frac{5}{3}\right) - 46\right).
\end{aligned}$$

Observa que hemos usado que $1-x^2$ es positivo entre $1/3$ y $2/3$. La misma integral entre, por ejemplo 3 y 4 nos obligaría a utilizar x^2-1. Recuerda que $\sqrt{x^2} = |x|$.

c) La longitud de la catenaria es

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})\right)^2}\,dx \\
&= \int_{-a}^{a} \sqrt{\left(\frac{1}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})\right)^2}\,dx = a\left(e - \frac{1}{e}\right).
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.36. Hállese la longitud del arco de curva $x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4y}$ desde $y = 1$ hasta $y = 3$.

Solución 6.36. Si notamos $f(y) = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4y}$, la longitud es

$$\int_1^3 \sqrt{1 + f'(y)^2}\, dy = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(y^2 - \frac{1}{4y^2})\right)^2}\, dy = \int_1^3 y^2 + \frac{1}{4y^2}\, dy = \frac{53}{6}.$$

Ejercicio 6.37. Hállese la longitud del arco de la curva $9x^2 = 4y^3$ entre los puntos $(0,0)$ y $(2\sqrt{3}, 3)$.

Solución 6.37. Queremos calcular la longitud de $x = \sqrt{\frac{4}{9}y^3} = g(y)$ con $y \in [0,3]$. Dicha longitud es

$$\int_0^3 \sqrt{1 + g'(y)^2}\, dy = \int_0^3 \sqrt{1+y}\, dy = \frac{14}{3}.$$

Ejercicio 6.38. La curva $y = \operatorname{sen}^2(x)$, para $x \in [0, \pi]$, gira en torno al eje OX determinando un sólido. Calcula su volumen.

Solución 6.38. Tenemos que calcular

$$\begin{aligned}\pi \int_0^\pi \left(\operatorname{sen}^2(x)\right)^2 dx =&\pi \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\ =&\frac{\pi}{4}\int_0^\pi 1 + \cos^2(2x) - 2\cos(2x)\, dx \\ =&\frac{\pi}{4}\left[x + \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{8} - \operatorname{sen}(2x)\right]_0^\pi = \frac{3\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Ejercicio 6.39. Halla el volumen generado al girar alrededor del eje OX la gráfica de $f(x) = \frac{18x}{x^2+9}$.

Solución 6.39. La función sólo corta al eje OX en el origen. Por tanto el volumen de 0 a $+\infty$ es

$$\pi \int_0^\infty \left(\frac{18x}{x^2+9}\right)^2 dx = 27\pi.$$

Ejercicio 6.40. Calcula el volumen del sólido generado al girar la región limitada por $x = y^2$ e $y = x^2$

a) alrededor del eje OX.

b) alrededor del eje OY.

Solución 6.40. Las curvas $x = y^2$ e $y = x^2$ se cortan en $(0,0)$ y en $(1,1)$.

a) Respecto al eje OX: $\pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$.

b) Respecto al eje OY: $2\pi \int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^2\right) = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)\pi$.

Ejercicio 6.41. Halla el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la curva $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ entre $x = 1$ y $x = -1$.

Solución 6.41. El volumen es

$$\pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{1} e^{2x} + e^{-2x} + 2\, dx = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - e^{-2} + 4\right).$$

Ejercicio 6.42. Al girar alrededor del eje OX, el segmento de curva $y = \sqrt{x}$ comprendido entre las abscisas 0 y a, engendra un tronco de paraboloide de revolución cuya superficie es igual a la de una esfera de radio $\sqrt{13/12}$. Hállese el valor de a.

Solución 6.42. El área de la superficie obtenida al girar la curva $f(x) = \sqrt{x}$ entre 0 y a respecto al eje OX es

$$2\pi \int_0^a \sqrt{x}\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 2\pi \int_0^a \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_0^a \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, dx = \frac{4\pi}{3}\left(a + \frac{1}{4}\right)^{3/2}.$$

Si ahora igualamos a la superficie de una esfera de radio $\sqrt{13/12}$,

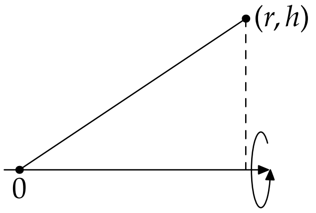
$$\frac{4\pi}{3}\left(a + \frac{1}{4}\right)^{3/2} = 4\pi\frac{13}{12} \iff a = \sqrt[3]{\frac{165}{4}}.$$

Ejercicio 6.43. Halla el área de la superficie generada al girar la curva $y = x^2$ alrededor del eje OX entre $y = 0$ y $y = \sqrt{2}$.

Solución 6.43. El área es $2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = -\frac{\operatorname{arcsen}\left(2\sqrt{2}\right)-102\sqrt{2}}{64}$.

Ejercicio 6.44. Halla mediante integración el área y volumen de un cono circular recto de altura h y con base de radio r.

Solución 6.44.



Estamos girando la recta que pasa por el origen con pendiente r/h respecto del eje OX. Su volumen es

$$\pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \left[\pi\frac{r^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

El área lateral es

$$2\pi \int_0^h \frac{r}{h}x\sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}\, dx = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}.$$

6.6.4 Ejercicios complementarios

Teorema fundamental del Cálculo

Ejercicio 6.1. Sea $a > 0$ y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{\ln(x)} (1+e^t)^a\, dt.$$

Demostrar que f es estrictamente creciente y calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\ln(x)}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^a}.$$

Como consecuencia, calcula la imagen de la función f.

Ejercicio 6.2. Pruébese que para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se verifica la igualdad

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\tan(x)} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cotan(x)} \frac{t\,dt}{t(1+t^2)} = 1.$$

Ejercicio 6.3. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\,dt - 3x^2}{x^2}.$$

Ejercicio 6.4. Calcula todas las funciones f de clase uno verificando que

$$f(x)^2 = \int_0^x f(t)^2 + f'(t)^2\, dt, \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 6.5. Sea $f(x) = \int_0^x t^2 \cos(t^2)\ dt$.

a) Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en 0 de dicha función.

b) Utiliza el polinomio anterior para aproximar el valor de $\int_0^1 x^2\cos(x^2)\,dx$. Da una cota razonada del error cometido.

Cálculo de primitivas

Ejercicio 6.6.

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

b) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}}dx$

d) $\int 4^{2-3x}dx$

e) $\int x7^{x^2}dx$

f) $\int x\sqrt{5-x^2}dx$

Ejercicio 6.7.

a) $\int x^2\ln(x)dx$

b) $\int \ln^2(x)dx$

c) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$

d) $\int x\arctan(x)dx$

e) $\int x\operatorname{arcsen}(x)dx$

f) $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2(x)}dx$

Ejercicio 6.8. ¿Dónde está el error en el siguiente desarrollo?

$$\begin{aligned}\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx &= \begin{bmatrix} u = \frac{1}{\cos(x)} \implies du = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}\,dx \\ dv = \operatorname{sen}(x)dx \implies v = -\cos(x)\end{bmatrix} \\ &= -1 + \int \cos(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}\,dx = -1 + \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx = -1 + \int \tan(x)\,dx.\end{aligned}$$

Ejercicio 6.9.

a) $\int \frac{dx}{\cos^4(x)}$
b) $\int \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^6(x)}dx$
c) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)}$
d) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5(x)\cos^3(x)}$
e) $\int \tan^5(5x)dx$
f) $\int \operatorname{cotan}^3(x)dx$

Ejercicio 6.10.
a) $\int x\operatorname{sen}^2(x^2)\,dx$
b) $\int \operatorname{sen}(9x)\operatorname{sen}(x)\,dx$
c) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$
d) $\int \frac{dx}{3+5\cos(x)}$
e) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$
f) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)\tan(x/2)}{\sin(x)(\sin(x)+\cos(x))}\,dx$

Ejercicio 6.11.
a) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$
b) $\int \frac{dx}{2x^2-4x+9}$
c) $\int \frac{x^3}{x^2+x+\frac{1}{2}}dx$
d) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

Ejercicio 6.12.
a) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$
b) $\int \frac{dx}{\cos(x)\operatorname{sen}^5(x)}$
c) $\int \tan^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx$
d) $\int \frac{dx}{\cos^2(x)+2\operatorname{sen}(x)\cos(x)+2\operatorname{sen}^2(x)}$

Ejercicio 6.13. Probar las siguientes igualdades:
a) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$,
b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}\,dx = 2$,
c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 6.14. Probar las siguientes igualdades:
a) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2$,
b) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2} = \frac{1}{\ln(2)}$,
c) $\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1$.

Ejercicio 6.15.
a) $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$
b) $\int \sqrt{2+x^2}dx$
c) $\int \sqrt{x^2+x}dx$

Ejercicio 6.16.
a) $\int \frac{x}{(x^2-x+1)^2}\,dx$
b) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3}\,dx$
c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$
d) $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$

Ejercicio 6.17.
a) $\int x\operatorname{sen}^2(x)dx$
b) $\int xe^{2x}dx$

c) $\int \operatorname{senh}(x)\cosh(x)dx$
d) $\int |x|dx$

Ejercicio 6.18. Demuestra que
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx,$$
para cualquier natural $n \geq 2$. Como consecuencia demuestra que
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}, \text{ y que}$$
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$

Longitudes, áreas y volúmenes

Ejercicio 6.19. Calcular la longitud de la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x)$ entre los puntos que tienen de abscisas $x = -\ln(2)$ y $x = 0$.

Ejercicio 6.20. Calcular las siguientes áreas:
a) Área comprendida entre la curva $y = \tan(x)$, el eje OX y la recta $x = \pi/3$.
b) Área del recinto limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$
c) Área de la superficie obtenida por la revolución de la parábola $y^2 = 4x$ y la rexta $x = 5$ alrededor del eje OX.

Ejercicio 6.21. Hallar el área comprendida entre el eje de abscisas y la parábola $y = 4x - x^2$.

Ejercicio 6.22. Hallar el área de la intersección de los círculos $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4x$.

Ejercicio 6.23. Hallar el área limitada por $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 2$.

Ejercicio 6.24. Calcular el área bajo la gráfica de la función $f[1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2$.

Ejercicio 6.25. Hallar la longitud del arco de la curva $y = x^{\frac{2}{3}}$ desde $x = 0$ hasta $x = 5$.

Ejercicio 6.26. Hallar la longitud de la curva $y = e^x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Ejercicio 6.27. Hallar la longitud del arco de la curva $y = \operatorname{arcsen}(e^x)$ desde $x = -\ln(2)$ hasta $x = 0$.

Ejercicio 6.28. Hallar el volumen de los cuerpos engendrados al girar $y = e^x$ entre $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje OX y del eje OY.

Ejercicio 6.29. Hallar el área de la superficie generada al girar la curva $y = x^3$ alrededor del eje OX entre $x = 0$ y $x = 1$.

Ejercicio 6.30. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las rectas $y = 1$, $x = 1$ y la curva $y = x^3 + 2x + 1$

a) alrededor del eje OX, y b) alrededor del eje OY.

Ejercicio 6.31. Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje OX el arco de la curva $y = \text{sen}(x)$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Ejercicio 6.32. Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje OY el arco de la curva $y = \text{sen}(x)$ comprendido entre $x = 0$ y $x = \pi$.

Ejercicio 6.33. Hallar el volumen del elipsoide engendrado por la rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje OX ($a > 0, b > 0$).

Ejercicio 6.34. Hallar el volumen del sólido S que se genera al girar alrededor del eje OX la región bajo la curva $y = x^2 + 1$ en $[0, 2]$.

Ejercicio 6.35. Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene girando la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, limitado por las rectas $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$ alrededor de

a) el eje OX b) el eje OY

Series numéricas

7

En el siglo XVIII muchos matemáticos buscaban, sin demasiado éxito, el valor de la expresión

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

La primera aportación relevante fue hecha por Jacobo Bernoulli en 1689 cuando demostró la convergencia de dicha serie. Más tarde, en 1728–1729, D. Bernoulli calculó su valor con una precisión de una centésima. Stirling aumentó la precisión hasta los ocho primeros decimales al año siguiente. Cuatro años después, Euler calculó el valor con dieciocho cifras decimales y se dio cuenta de que coincidían con la expresión de $\pi^2/6$. En años posteriores, Euler no sólo demostró que, efectivamente, ese era el valor de dicha suma sino que calculó $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots$ para k par.

En este tema vamos a estudiar sucesiones de esta forma. Veremos que, en algunos casos concretos, seremos capaces de calcular su límite. En el resto de ocasiones intentaremos, al menos, decidir sobre la convergencia o no de dichas sucesiones.

7.1 Definición y propiedades

Las series de números reales son un caso particular de sucesiones. Comencemos con una sucesión $\{a_n\}$ y construimos la sucesión

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ s_2 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. A las sucesiones de la forma $\{s_n\}$ las llamaremos series y hablaremos de la suma de la serie para referirnos a su límite.

Serie de números reales

Definición 7.1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión $\{s_n\}$ definida como

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

A esta sucesión $\{s_n\}$ la llamaremos *serie de término general* a_n y la notaremos $\sum_{n\geq 1} a_n$.

A los términos s_n se les suele llamar *sumas parciales* de la serie. Si $\{s_n\}$ tiene límite, lo notaremos

$$\lim_{n\to\infty} a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,.$$

La principal dificultad para estudiar la convergencia de una serie es que normalmente no disponemos de una fórmula para las sumas parciales. En aquellos casos en que sí, la convergencia de una serie se reduce al cálculo de un límite. Vamos a empezar por un ejemplo sencillo.

Ejemplo 7.2. Vamos a estudiar si la serie $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^n}$ es convergente o, lo que es lo mismo, vamos a calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \,.$$

Los términos de la sucesión de sumas parciales son

n	**sumas parciales**	s_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
4	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$	$\frac{14}{16}$
	...	
n	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^n}$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$.

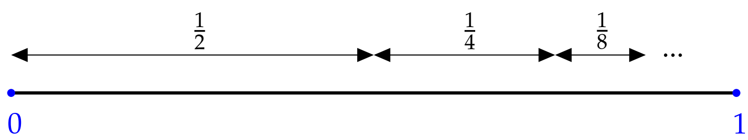


Figura 7.1 La suma de una progresión geométrica de razón ½

Vale, pero ¿de dónde ha salido la fórmula de la suma de los n términos? Gráficamente es muy fácil de ver. El segmento $[0,1]$ se obtiene uniendo el $[0,\frac{1}{2}]$, y luego vamos añadiendo la mitad de la mitad que nos falta. ◂

Este ejemplo se basa en la suma de los términos de una progresión geométrica. Recordemos cuál es la fórmula para calcular su suma.

Progresiones geométricas

Ejemplo 7.3. Una *progresión geométrica de razón r* es una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n,$$

donde cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una cantidad fija r, la razón. Esta forma particular hace que se puede calcular su suma de manera explícita. Fijémonos que

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^k - r\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 - r^{n+1}$$

de donde se deduce que

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = a\sum_{k=0}^{n} r^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}. \tag{7.1}$$

Por ejemplo, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

El hecho de que tengamos la fórmula (7.1) nos pone en bandeja el cálculo del límite cuando n tiende a $+\infty$. Es fácil comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{si } r \in]-1,1[, \\ 1, & \text{si } r = 1, \\ \text{no existe}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

si, y sólo si, $|r| < 1$.◃

Estamos dando una definición de suma de infinitos números. La primera condición parece inmediata: los números que sumemos tienen que ser pequeños (cercanos a cero) si no queremos que el resultado final se dispare.

Proposición 7.4. *Si la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Condición necesaria de convergencia

Demostración. Si $\{A_n\}$ es la sucesión de sumas parciales,

$$A_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Restamos y obtenemos que $A_{n+1} - A_n = a_{n+1} \to 0$. □

Ejemplo 7.5. Este resultado nos da una condición necesaria para la convergencia de la serie. Sin embargo, esta condición no es suficiente. El término general de la serie $\sum \frac{1}{n}$, usualmente llamada *serie armónica* converge a cero, pero la serie no es convergente.

La serie armónica no es convergente

a) Vamos a comprobarlo estudiando las sumas parciales hasta un índice que sea potencia de 2.

$$\begin{aligned}
1 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\ldots}^{n} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Como consecuencia $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

b) También podemos usar el Ejercicio 3.13. Recordemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n)} = 1$$

y que, por tanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = +\infty$.

c) También podemos utilizar integrales para calcular la suma. Fijado un natural n, consideremos la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, n]$ y consideremos la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ de dicho intervalo. ¿Cuánto valen las sumas superiores e inferiores?

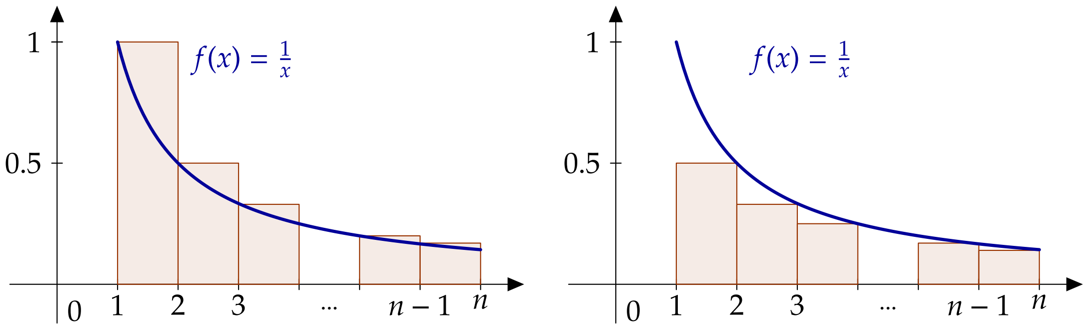


Figura 7.2 Sumas superiores e inferiores de la función $1/x$ en el intervalo $[1, n]$

Sumando las área de los rectángulos de la Figura 7.2, podemos acotar la integral superiormente por

$$\ln(n) = \int_1^n \frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \tag{7.2}$$

e inferiormente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln(n). \tag{7.3}$$

De la desigualdad (7.2), obtenemos que

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

y desigualdad (7.3) se deduce que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(n).$$

En resumen,

$$\ln(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le 1 + \ln(n).$$

Como la función logaritmo diverge positivamente en $+\infty$, obtenemos que la serie no es convergente, aunque la anterior desigualdad nos da más información sobre el valor de las sumas parciales del que hemos conseguido en los dos apartados anteriores.◁

Dado que una serie de números reales no es más que una sucesión, las propiedades que ya conocemos de límites de sucesiones siguen siendo ciertas en este ambiente. La siguiente proposición nos dice que el límite de una serie es lineal: parte sumas y saca fuera escalares.

Proposición 7.6. *Sean $\sum_{n\ge1} a_n$ y $\sum_{n\ge1} b_n$ dos series convergentes. Sean λ y μ números reales. Entonces la serie $\sum_{n\ge1}(\lambda a_n + \mu b_n)$ es convergente y*

Linealidad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Trabajando con sucesiones es inmediato comprobar (de hecho, ya lo hemos usado en varias ocasiones) que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si, y sólo si, lo son sus colas $\{a_{n+k}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además, ambas tienen el mismo límite. Si consideramos la serie asociada a cada de una ellas, la convergencia de ambas está también muy relacionada.

Proposición 7.7. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y k un número natural fijo. Entonces la serie $\sum_{n\ge1} a_n$ es convergente si, y sólo si, lo es la serie $\sum_{n\ge1} a_{n+k}$. Además, caso de que sean convergentes, se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k},$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

De nuevo obtenemos que la convergencia de una serie depende de las colas de dicha serie aunque la suma total sí depende de que añadamos o no los primeros términos.

7.2 Convergencia absoluta e incondicional

Definición 7.8.

a) Diremos que la serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Convergencia absoluta

b) La serie $\sum a_n$ es *incondicionalmente convergente* si para cualquier aplicación biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum a_{\sigma(n)}$ es convergente y

Convergencia incondicional

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}\,.$$

Observación 7.9. La convergencia incondicional de una serie es el análogo a la propiedad conmutativa para una suma infinita. Una serie es incondicionalmente convergente si se puede sumar en cualquier orden y el resultado siempre es el mismo. Este es el motivo de que en algunos textos se hable de series conmutativamente convergentes.

La convergencia absoluta y la convergencia incondicional son condiciones más fuertes que la convergencia de una serie. El siguiente resultado nos dice que están relacionadas.

Teorema de Riemann

Teorema 7.10. *Sea $\sum a_n$ una serie de números reales. La serie converge incondicionalmente si, y sólo si, converge absolutamente.*

En la práctica, es sumamente difícil comprobar la convergencia incondicional de una serie directamente. No es sencillo trabajar con todas las reordenaciones posibles de una sucesión de números reales. Lo que sí haremos es estudiar la convergencia absoluta.

El primer criterio y, posiblemente, el más importante que vamos a utilizar en el estudio de la convergencia de series de números reales es el criterio de comparación. Esencialmente nos dice que si una serie se puede sumar también se puede sumar otra más pequeña y, recíprocamente, si una serie no se puede sumar, otra mayor tampoco se puede.

Criterio de comparación

Teorema 7.11. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales verificando que $|a_n| \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
a) Si $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.
b) Si $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ es divergente.

Si aplicamos el criterio de comparación tomando $b_n = |a_n|$, se obtiene que las series absolutamente convergentes son convergentes, esto es, una de las implicaciones del teorema de Riemann. El recíproco del criterio de comparación no es cierto.

Ejemplo 7.12. La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente pero no absolutamente convergente.◂

Dado que la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ no es incondicionalmente convergente, si la sumamos en distinto orden nos puede dar un resultado diferente pero ¿cuántos?. La respuesta es que muchos. Más concretamente, la serie se puede reordenar de forma que su suma sea el número real que queramos.

Teorema de Riemann

Teorema 7.13. *Sea $\sum a_n$ una serie convergente pero no absolutamente convergente. Dado un número real x cualquiera, existe una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$.*

7.3 Criterios de convergencia para series de términos no negativos

El primer criterio es una versión del criterio de comparación usando límites.

Criterio de comparación por paso al límite

Proposición 7.14. *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sucesiones de números reales verificando $a_n \geq 0$, y $b_n > 0$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

a) *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ *entonces,* $\sum a_n$ *converge* $\iff \sum b_n$ *converge.*
b) *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *entonces,* $\sum b_n$ *converge* $\implies \sum a_n$ *converge.*
c) *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ *entonces,* $\sum a_n$ *converge* $\implies \sum b_n$ *converge.*

Ejemplo 7.15. Las series $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{3n^2-n+7}$ tienen el mismo carácter de convergencia. La ventaja del criterio de comparación por paso al límite es que no hace falta saber que una de ellas es mayor que la otra. Es suficiente con que sean "aproximadamente" iguales:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{3n^2-n+7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+7}{n^2} = 3.$$

Por ahora no sabemos si ambas series son convergentes o no (dentro de poco veremos que sí lo son) pero sí podemos aplicarlo a otras series. Por ejemplo, $\sum \frac{1}{2^n-n}$ y $\sum \frac{1}{2^n}$ tiene el mismo carácter. Como sabemos que $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente, también lo es $\sum \frac{1}{2^n-n}$. Observa que el criterio de comparación *no* nos resuelve este mismo problema: $\frac{1}{2^n-n}$ es mayor que $\frac{1}{2^n}$ y, por tanto, el criterio de comparación no da información. ◁

Criterio de la raíz o de Cauchy

Proposición 7.16. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números positivos.*
a) *Si* $\sqrt[n]{a_n} \leq L < 1$*, entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*
b) *Si* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$*, entonces* $\sum a_n$ *no es convergente.*

Corolario 7.17. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números positivos.*
a) *Si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$*, entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*
b) *Si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$*, entonces* $\sum a_n$ *no es convergente.*

Ejemplo 7.18. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum \left(\frac{n}{7n+3}\right)^{2n+1}$ utilizando el criterio de la raíz. Para ello calculamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{7n+3}\right)^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{7n+3}\right)^{\frac{2n+1}{n}} = \frac{1}{7^2}.$$

Como dicho límite es menor que uno, la serie es convergente. ◁

Para calcular el límite de una raíz n-ésima podemos aplicar el criterio de la raíz (véase Proposición 3.30).

Criterio del cociente o de D'Alembert

Proposición 7.19. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números positivos.*
a) *Si* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L < 1$*, entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*
b) *Si* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$*, entonces* $\sum a_n$ *no es convergente.*

Corolario 7.20. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números positivos.*
a) *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*
b) *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, entonces* $\sum a_n$ *no es convergente.*

Ejemplo 7.21. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum \frac{2n^2}{2^n+3}$ utilizando el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)^2}{2^{n+1}+3}}{\frac{2n^2}{2^n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{2n^2} \frac{2^n+3}{2^{n+1}+3} = \frac{1}{2}.$$

Como el límite es menor que uno la serie es convergente. ◂

Criterio de Raabe

Proposición 7.22. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq L > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 7.23. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 7.24. Vamos a estudiar la convergencia de la series cuyo término general es

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \frac{1}{(2n+1)\,2^{2n}}.$$

Aplicamos, en primer lugar, el criterio del cociente.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{1}{(2n+3)\,2^{2n+2}}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{(2n+1)\,2^{2n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{4(n+1)(n+1)(2n+3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6} = 1.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6} \leq 1$$

el criterio del cociente no da información útil. Aplicamos ahora el criterio de Raabe:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+5n}{4n^2+10n+6} = \frac{6}{4} > 1,
\end{aligned}$$

y, por tanto, el criterio de Raabe nos dice que la serie es convergente. ◂

Criterio de condensación

Proposición 7.25. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números no negativos tal que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente a cero. Entonces se verifica que*

$$\sum a_n \text{ es convergente} \iff \sum 2^n\, a_{2^n} \text{ es convergente}.$$

Ejemplo 7.26. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$, con $a \in \mathbb{R}$.

Serie armónica generalizada

a) Si $a \leq 0$, el término general $\frac{1}{n^a}$ no tiende a cero y, por tanto, la serie no es convergente.
b) Si $a > 0$, el término general es decreciente y converge a cero. Podemos aplicar el criterio de condensación: las series $\sum \frac{1}{n^a}$ y $\sum \frac{2^n}{(2^n)^a}$ tienen el mismo comportamiento. Como
$$\sum \frac{2^n}{(2^n)^a} = \sum \frac{1}{2^{(a-1)n}},$$
aplicamos el criterio de la raíz:
$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{(a-1)n}}} = \frac{1}{2^{a-1}} < 1 \iff a > 1.$$
Resumiendo, si $a > 1$ la serie es convergente. Si $a < 1$, la serie no es convergente y si $a = 1$ ya sabíamos que no era convergente.

A esta serie se la suele llamar *serie armónica generalizada de exponente a*. ◂

El ejemplo anterior será clave en muchos ejercicios para poder aplicar el criterio de comparación. Es por esto que lo resaltamos:

Proposición 7.27. *$\sum \frac{1}{n^a}$ es convergente si, y sólo si, $a > 1$.*

Por ejemplo, si comparamos $\frac{1}{n^a}$ con a_n tenemos que estudiar el cociente
$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^a}} = n^a a_n .$$

El siguiente resultado recoge las diferentes posibilidades que se pueden presentar.

Proposición 7.28. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números no negativos.*

Criterio de Pringsheim

a) Si existe $a > 1$ tal que la sucesión $\{n^a a_n\}$ está acotada entonces $\sum a_n$ es convergente.
b) Si existe $a \leq 1$ tal que $\{n^a a_n\}$ converge a $L \neq 0$ o es divergente entonces $\sum a_n$ no es convergente.

7.4 Otros criterios

La principal herramienta para estudiar la convergencia de series de términos cualesquiera serán los criterios de Dirichlet y Abel.

Teorema 7.29. *Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales.*

Criterio de Dirichlet

a) Si $\{a_n\}$ es monótona, converge a cero y la serie $\sum b_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n b_n$ converge.

Criterio de Abel

b) Si $\{a_n\}$ es monótona, acotada y la serie $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n b_n$ es convergente.

La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente pero sus sumas parciales siempre valen -1 o 0 y, en particular, están acotadas. Tomando $b_n = (-1)^n$ en el criterio de Dirichlet obtenemos lo siguiente.

Proposición 7.30. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales no negativos. Si la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente a cero, entonces la serie alternada $\sum(-1)^n x_n$ es convergente.*

Criterio de Leibniz

Ejemplo 7.31. La serie alternada $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$, que ya comentamos en el Ejemplo 7.12, es convergente porque $\frac{1}{n}$ es decreciente y convergente a cero. ◂

7.5 Suma de series

Sólo en contadas ocasiones es factible calcular de manera explícita la suma de una serie. La mayoría de las veces serán necesarios medios indirectos como veremos, por ejemplo, en la siguiente sección. La dificultad radica en el cálculo explícito del valor de las sumas parciales. Si sabemos cuánto valen, el problema de estudiar la convergencia de la serie se reduce a un problema de cálculo de límites, cosa normalmente mucho más sencilla.

Observación 7.32. Hasta ahora sólo hemos estudiado la convergencia y no el valor de la suma de la serie. No es lo mismo $\sum_{n\geq 1} a_n$ que $\sum_{n\geq 0} a_n$. ¡Hay un sumando de diferencia!

7.5.1 Series telescópicas

Las series telescópicas son aquellas series $\sum a_n$ cuyo término general se puede escribir de la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$ para alguna sucesión $\{b_n\}$. El cálculo de su suma equivale al cálculo del límite de la sucesión $\{b_n\}$. Para verlo sólo tienes que calcular las sumas parciales:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \cdots + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Resumiendo,

Proposición 7.33. *Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces la serie que tiene como término general $a_n = b_n - b_{n+1}$ es convergente si, y sólo si, $\{b_n\}$ es convergente. En ese caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ejemplo 7.34. Vamos a calcular el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, las sucesión de sumas parciales es

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

con lo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$ ◁

7.5.2 Series geométricas

La serie $\sum r^n$ se puede sumar utilizando que conocemos sus sumas parciales, como ya hicimos en el Ejemplo 7.3. Sabemos que

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

y tomando límites cuando n tiende a infinito obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 7.35. *La serie $\sum r^n$ es convergente si, y sólo si, $|r| < 1$. En ese caso* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

Demostración. Sólo hay que usar la fórmula de la suma de una progresión geométrica que vimos en el Ejemplo 7.3:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}-1}{1-r} = \frac{1}{1-r},$$

ya que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$. En cualquier otro caso el término general de la serie no converge a cero y, por tanto, la serie no es convergente. □

Veamos un ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{5^n} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{4}{1-\frac{1}{5}} = 5\,.$$

Si la serie no comienza en $n = 0$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = [m = n-2] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+2}} = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

7.5.3 Series aritmético-geométricas

Las series aritmétrico-geométricas son series de la forma $\sum p(n)r^n$, donde p es un polinomio. Para calcular su suma, transformamos la serie en otra en la que el grado del polinomio es menor hasta obtener una serie geométrica. Si $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^n = S$, entonces

$$\begin{aligned}(1-r)S &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^n + 1 \\ &= p(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p(n) - p(n-1)\right) r^n.\end{aligned}$$

Observa que $p(n)-p(n-1)$ sigue siendo un polinomio, pero con grado estrictamente menor que el grado de $p(n)$. Repitiendo este proceso las veces necesarias, acabamos obteniendo una serie geométrica. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 7.36. Vamos a calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(n^2-n)r^n$. Si su suma es S, entonces

$$(1-r)S = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n^2-n) - ((n-1)^2 - (n-1))\right] r^n = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-2)r^n,$$

o, lo que es lo mismo,

$$S = \frac{2}{1-r}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nr^n - \sum_{n=1}^{\infty} r^n\right) = \frac{2}{1-r}\sum_{n=1}^{\infty} nr^n - \frac{2r}{1-r^2}.$$

Repetimos el proceso anterior, si $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n$, entonces

$$(1-r)S_1 = r + \sum_{n=2}^{\infty}[n-(n-1)]r^n = r + \frac{1}{1-r} - 1 - r = \frac{r}{1-r}.$$

Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n)r^n = \frac{2}{1-r}\cdot\frac{r}{1-r} = \frac{2r}{(1-r)^2}. \triangleleft$$

7.5.4 Cocientes de polinomios

En algunos casos se pueden sumar descomponiendo el término general en fracciones simples. También pueden ser de utilidad algunas identidades como, por ejemplo, la que define la constante de Euler.

La constante de Euler-Mascheroni

En el Ejercicio 5.13 vimos que

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

se cumple para cualquier x positivo. En particular, para $x = \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$\ln(1+n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

y que

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

.

Si definimos $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ y $a_{2n} = \ln(n+1) - \ln(n)$, las desigualdades anteriores se escriben como

$$a_{2n+1} < a_{2n} < a_{2n-1},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

o, lo que es lo mismo, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. El criterio de Leibniz nos da que la serie $\sum(-1)^{n+1}a_n$ es convergente, o sea que existe el límite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} -a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n &= \lim_{n\to\infty} 1 - (\cancel{\ln(2)} - \ln(1)) \\ &\quad + \frac{1}{2} - (\cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)}) + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \cancel{\ln(n)}) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).\end{aligned}$$

Este límite recibe el nombre de *constante de Euler-Mascheroni* y se denota por γ:

Constante de Euler-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Ejemplo 7.37. FALTA ◃

7.5.5 Series hipergeométricas

Serie hipergeométrica

Definición 7.38. Diremos que una serie de números reales $\sum_{n\geq 1} a_n$ es una *serie hipergeométrica* si existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$.

Proposición 7.39. *Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie hipergeométrica con $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$. Entonces la serie es convergente si, y sólo si, $\gamma > \alpha + \beta$. En dicho caso, se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\gamma a_1}{\gamma - \alpha - \beta}.$$

Ejemplo 7.40. FALTA ◃

7.6 Ejercicios

7.6.1 Series numéricas

Ejercicio 7.1. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:
a) $\sum \frac{1}{n2^n}$
b) $\sum \frac{\ln(n)}{n}$
c) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
d) $\sum \frac{1}{2n-1}$
e) $\sum \frac{1}{2^n-n}$

Solución 7.1.
a) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.
b) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n}$ que no es convergente. Como $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$, la serie no es convergente.
c) Comparamos con la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}} = 1.$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ no es convergente.

d) No es convergente. La serie se comporta igual que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$.

e) Comparamos con la serie convergente $\sum \frac{1}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n}{2^n} = 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 7.2. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$

b) $\sum \frac{1}{(2n-1)2n}$

c) $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$

d) $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

e) $\sum \frac{2^n}{n}$

Solución 7.2.

a) Aplicamos el criterio de la raíz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$. Por tanto, la serie es convergente.

b) Comparamos con la serie convergente $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(2n-1)2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)2n}{n^2} = 4.$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\frac{2}{5} = \frac{2}{5} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

e) No es convergente porque $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$.

Ejercicio 7.3. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

b) $\sum \frac{n+1}{2n+1}$

c) $\sum \frac{1}{10n+1}$

d) $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$

e) $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$

Solución 7.3.

a) No es convergente porque $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$.
b) No es convergente porque el término general no tiende a cero: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$.
c) La serie tiene el mismo carácter que $\sum \frac{1}{n}$ y, por tanto, no es convergente.
d) Aplicando el criterio de condensación, la serie tiene el mismo carácter que la serie $\sum 2^n \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = \sum \frac{1}{\ln(2^n)} = \sum \frac{1}{n\ln(2)}$ y esta última serie no es convergente comparando con $\sum \frac{1}{n}$.
e) Aplicando el criterio de condensación $\sum 2^n \frac{1}{2^n (\ln(2^n))^2} = \sum \frac{1}{n^2(\ln(2))^2}$ y esta última serie es convergente (compárase con $\sum \frac{1}{n^2}$).

Ejercicio 7.4. Estudiar la convergencia de las series
a) $\sum \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$
b) $\sum \sqrt{\frac{2\cdot 3 \cdots (n+2)}{5\cdot 6 \cdots (n+5)}}$
c) $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$

Solución 7.4.
a) Aplicamos el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)^{(n+1)}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{(n+1)^n}{3^n n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{e}{3} < 1,$$

y, por tanto, la serie es convergente. Observa que en el último paso hemos utilizado la regla del número e.
b) La serie

$$\sum \sqrt{\frac{2\cdot 3 \cdots (n+2)}{5\cdot 6 \cdots (n+5)}} = \sum \sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(n+3)(n+4)(n+5)}}$$

tiene el mismo carácter de convergencia que la serie $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ usando el criterio de comparación por paso al límite. Esta última serie es convergente.
c) Aplicamos el criterio de la raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, la serie es convergente.

Ejercicio 7.5. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:
a) $\sum \frac{1}{n^2 \ln(n)}$
b) $\sum \frac{n^2}{(3n-1)^2}$
c) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$
d) $\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$
e) $\sum \frac{2\cdot 5\cdot 8 \cdots (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9 \cdots (4n-3)}$

Solución 7.5.
a) Como $\ln(n) \geq 1$ para $n \geq 3$, se tiene que $\frac{1}{n^2\ln(n)} \leq \frac{1}{n^2}$, para cualquier $n \geq 3$. La serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente y, el criterio de comparación nos dice que $\sum \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ también lo es.
b) El término general no converge a cero y, por tanto, la serie no es convergente.

c) Comparamos con la serie convergente $\sum \frac{1}{n^{7/6}}$

$$\lim_{n\to\infty} n^{7/6} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n+1)-1}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^{n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

e) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)(4n+1)}}{\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 7.6. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{n!}$

b) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

c) $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

d) $\sum \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

e) $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$

Solución 7.6.

a) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

b) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-2)(3n+1)}{n^2} = 9$$

y, por tanto la serie es convergente.

c) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n^3}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}} = 2.$$

En consecuencia, las dos series tienen el mismo carácter de convergencia. Puesto que la serie $\sum \frac{1}{n^3}$ es convergente, ambas lo son.

d) No es convergente porque el término general no converge a cero:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = e^L \iff \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n}{3n+1} - 1\right) = L$$

y el segundo límite vale

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n}{3n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n-3n-1}{3n+1}\right)=-1/3.$$

Por tanto el término general de la serie converge a $e^{-1/3}\neq 0$.

e) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{4^{(n-1)}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{4^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{4}<1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 7.7. Estudiar la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{(e-1)^n}$

b) $\sum \frac{3^{-\sqrt{n}}}{n}$

Solución 7.7.

a) La serie dada es equivalente a la serie $\sum \frac{1}{n(e-1)^n}$, y si a ésta le aplicamos el criterio de la raíz obtenemos la convergencia de la misma, y por tanto de la primera.

b) Si escribimos el término general como $a_n=\frac{1}{3^{\sqrt{n}}\,n}$, entonces comparamos con la serie $\sum\frac{1}{n^2}$, y se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^{\sqrt{n}}}=0$$

de lo que se deduce que la serie es convergente.

Ejercicio 7.8. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum\frac{n^3}{e^n}$

b) $\sum\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

c) $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

d) $\sum\frac{n^n}{e^{(n^2+1)}}$

e) $\sum\frac{2^n n!}{n^n}$

Solución 7.8.

a) Aplicamos el criterio de la raíz $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{e^n}}=\frac{1}{e}<1$ y, en consecuencia, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}<1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}<1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{\frac{n^2+1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} \frac{1}{e^{1/n}} = 0 < 1$$

de lo que se deduce que la serie es convergente.

e) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$$

de lo que se deduce la convergencia de la serie.

Ejercicio 7.9. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) $\sum \frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$

c) $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$

d) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}$

e) $\sum \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}$

Solución 7.9.

a) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)(2n+3)}}{\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n+3} = 0 < 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)(2n+4)}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+4} = 1$$

pero, como $\frac{2n+1}{2n+4} \leq 1$, el criterio del cociente no decide. Ya que hemos calculado $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, aplicamos el criterio de Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n+1}{2n+4}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+4} = \frac{3}{2} > 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

e) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n\cdot(2n+2)}{5\cdot7\cdot9\cdots(2n+3)\cdot(2n+5)}}{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{5\cdot7\cdot9\cdots(2n+3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+5} = 1,$$

pero $\frac{2n+2}{2n+5} \leq 1$ por lo que el criterio del cociente no decide. Aplicamos el criterio de Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n+2}{2n+5}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+5} = \frac{3}{2} > 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

Ejercicio 7.10. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum(-1)^n \frac{20^n}{n+1}$

b) $\sum\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\right)^2$

c) $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

d) $\sum \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)$

e) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}\ln(n)}{n^2+1}$

Solución 7.10.

a) No es convergente porque el término general no converge a cero.

b) Aplicamos el criterio de Raabe y llegamos a $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{4n^2+3n}{4n^2+8n+4} \leq 1$, de lo que se deduce la no convergencia de la serie.

c) Comparamos con la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln(e) = 1$$

y, por tanto, la serie no es convergente.

d) Podemos escribir el término general de la forma:

$$a_n = \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right).$$

Comparando con la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ se obtiene la convergencia de la serie dada.

e) Comparamos con la serie $\sum \frac{\ln(n)}{n^{5/3}}$ ya que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{\ln(n)}{n^{5/3}}} = 1$$

Y aplicando el criterio de condensación a la serie $\sum \frac{\ln(n)}{n^{5/3}}$ se obtiene que es convergente, luego la de partida también lo es.

Ejercicio 7.11. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{2^n}{n!}\operatorname{sen}(n)$

b) $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$

c) $\sum \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{\sqrt{n}}$

d) $\sum \frac{1}{n(\ln(n))\ln(\ln(n))}$

Solución 7.11.

a) Acotamos y utilizamos el test de comparación. Como $\left|\frac{2^n}{n!}\operatorname{sen}(n)\right| \leq \frac{2^n}{n!}$, vamos a estudiar la serie $\sum \frac{2^n}{n!}$. Le aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Por tanto, la serie $\sum \frac{2^n}{n!}$ es convergente y, como consecuencia, también lo es la serie $\sum \frac{2^n}{n!}\operatorname{sen}(n)$.

b) Como $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \leq \frac{1}{n^2}$, la serie es convergente por el test de comparación.

c) Aplicando el criterio de comparación por paso al límite, la serie se comporta igual que $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ y, por tanto es convergente.

d) El término general es decreciente y convergente a cero. Estamos en condiciones de aplicar el criterio de condensación. La serie tiene el mismo carácter de convergencia que la serie

$$\sum \frac{2^n}{2^n \ln(2^n) \ln(\ln(2^n))} = \sum \frac{1}{n \ln(2) \ln(n \ln(2))}$$

que, a su vez y por el criterio de comparación por paso al límite, se comporta igual que $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$. Esta última serie ya sabemos que no es convergente (véase el Ejercicio 7.3).

E **Ejercicio 7.12.** Estudiar, según los valores de $a > 0$ la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{a^n}{n^a}$

b) $\sum a^n n^a$

Solución 7.12.

a) Sólo tenemos en cuenta $0 < a < 1$ puesto que en para $a = 1$ es la serie armónica que no converge, y para $a > 1$ el término general no converge a cero. Entonces, para $0 < a < 1$ aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.

b) Sólo tenemos en cuenta $0 < a < 1$ puesto que para $a \geq 1$ el término general no converge a cero. Entonces, para $0 < a < 1$ aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.

Ejercicio 7.13. Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = \ln(2)$.

Solución 7.13. Sabemos que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln(n-1), \tag{7.4}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln(2n) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln(2) - \ln(n) \end{aligned} \tag{7.5}$$

Si restamos (7.5)-(7.4) obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \ln(2) + \ln(n) - \ln(n-1) = \ln(2).$$

Ejercicio 7.14. Discutir la convergencia de la serie $\sum \dfrac{(n!)^2}{(kn)!}$ según los valores de $k \in \mathbb{N}$.

Solución 7.14. A la vista de la expresión que tiene el término general de la serie, parece lógico aplicarle el crierio del cociente. Si llamamos $a_n = \frac{(n!)^2}{(kn)!}$ tenemos que estudiar el límite de $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ y ver si es mayor o menor que 1. Veamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(k(n+1))!} \frac{(kn)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(kn+k)\cdots(kn+1)}.$$

Este límite tiene varias posibilidades dependiendo de cuánto valga k.

a) Si $k > 2$ entonces el denominador es un polinomio de grado k y el numerador de grado 2 y por tanto el cociente de esos dos polinomios (polinomios en n) tiene límite 0, que es menor que 1 y la serie es convergente.

b) Si $k = 1$ el polinomio del numerador tiene grado 2 y en el denominador queda $n+1$ que es un polinomio de grado 1. En este caso el cociente diverge positivamente y la serie no es convergente.

c) Hemos dejado para el final el caso dudoso. Si $k = 2$ entonces los dos polinomios, tanto numerador como denominador tienen el mismo grado, 2 y el cociente tiene límite el cociente de los coeficientes líderes. El numerador es $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ y el denominador en este caso queda $(2n+2)(2n+1) = 4n^2 + 7n + 2$ y el cociente tiende a $\frac{1}{4} < 1$ y la serie es convergente.

7.6.2 Suma de series

Ejercicio 7.15. Sumar, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

Solución 7.15.

a) Usando la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n} = 15 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 15 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{150}{9}.$$

b) La suma es $\frac{1}{2}$ puesto que la serie es la mitad de la del Ejemplo 7.34.

c) De nuevo utilizamos la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} - \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Ejercicio 7.16. Sumar, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$

Solución 7.16.

a) Calculamos las sumas parciales usando la descomposición en fracciones simples del término general:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+3)} - \frac{1}{(n+4)} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{n+4} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

b) Aprovechamos que estamos sumando una progresión geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{16} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

c) Dividimos en dos progresiones geométricas y sumamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{13}{6}.$$

Ejercicio 7.17. Sumar la serie de números reales $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

Solución 7.17. Vamos a escribir el término general a_n de la forma

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}.$$

Entonces la sucesión de sumas parciales $\{A_n\}$ nos queda:

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

y, en consecuencia, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$.

Ejercicio 7.18. Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$

Solución 7.18. Escribimos el término general como $a_n = \frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$. La suma de la series, o sea el límite de la sucesión de sumas parciales es

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Ejercicio 7.19. Sumar la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n+1}{n!}$

Solución 7.19. Esta serie se suma haciendo uso de que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, y para ello descomponemos el numerador del término general de la forma siguiente:

$$n^3 + n + 1 = \alpha n(n-1)(n-2) + \beta n(n-1) + \gamma n + \varphi$$

e igualando coeficientes obtenemos que $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$ y $\varphi = 1$. Por tanto la suma de la serie (que existe por el criterio del cociente) es:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n+1}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= e + 3e + 2e + (e-1) = 7e - 1.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.20. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^3-n} = 2\ln(2) - 1$.

Solución 7.20. En primer lugar descomponemos como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{4n^3-n} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}.$$

Si notamos $A_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, entonces las sumas parciales de la serie son

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{4n^3-n} = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}\right) &= \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)\\
&\quad-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right)\\
&=\left(A_{2n}-\frac{1}{2}A_n\right)+\left(-1+A_{2n+2}-\frac{1}{2}A_{n+1}\right)-A_n
\end{aligned}$$

sumamos y restamos logaritmos buscando la constante de Euler-Mascheroni,

$$\begin{aligned}
&=\left(A_{2n}-\ln(2n)-\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{2}\ln(n)\right)\\
&\quad+\left(-1+A_{2n+2}-\ln(2n+2)-\frac{1}{2}A_{n+1}+\frac{1}{2}\ln(n+1)\right)-(A_n-\ln(n))\\
&\quad-\left(-\ln(2n)+\frac{1}{2}\ln(n)-\ln(2n+2)+\frac{1}{2}\ln(n+1)+\ln(n)\right)
\end{aligned}$$

simplificamos y tomamos límites (usando que $\lim_{n\to\infty} A_n-\ln(n)=\gamma$),

$$\begin{aligned}
&=\left(A_{2n}-\ln(2n)-\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{2}\ln(n)\right)\\
&\quad+\left(-1+A_{2n+2}-\ln(2n+2)-\frac{1}{2}A_{n+1}+\frac{1}{2}\ln(n+1)\right)-(A_n-\ln(n))\\
&\quad-\left(-2\ln(2)+\ln(n)-\frac{1}{2}\ln(n+1)+\frac{1}{2}\ln(n)\right)\xrightarrow{n\to\infty} 2\ln(2)-1
\end{aligned}$$

7.6.3 Ejercicios complementarios

Series numéricas

Ejercicio 7.1. Discutir en función del parámetro a la convergencia de la serie de números reales

$$\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{(\ln(n))^a}\right)$$

Ejercicio 7.2. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^{\ln(n)}$

b) $\sum \ln\left(\frac{1+\tan(\frac{1}{n})}{1-\tan(\frac{1}{n})}\right)$

c) $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{10}}$

d) $\sum\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-n}$

Ejercicio 7.3. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$
b) $\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$
c) $\sum \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2} n!}{(2n)^n}$
d) $\sum \frac{\ln(1+n^2)}{1+n^2}$
e) $\sum \frac{(\ln(n+1)-\ln(n))^3}{(\ln(n))^2}$

Ejercicio 7.4. Estudiar la convergencia de las siguientes series:
a) $\sum(-1)^{n+1}\frac{(\ln(n))^2}{n}$
b) $\sum \left(1-e^{-1/n}\right)^2$
c) $\sum \frac{1}{n(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}$
d) $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$
e) $\sum \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Ejercicio 7.5. Sea a un número positivo. Estudiar la convergencia de la serie $\sum \left(\ln(a+\frac{1}{n})\right)^n$.

Ejercicio 7.6. Estudiar la convergencia de las series
a) $\sum \left(n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$,
b) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$,
c) $\sum \left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$,
d) $\sum \ln\left(n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Suma de series

Ejercicio 7.7. Suma las series de números reales:
a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left((n+1)^{\ln(n)}\right)}$
b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+3)!}$

Ecuaciones diferenciales ordinarias

8

8.1 Introducción

Encontrar una función de la que conocemos únicamente su derivada era el fin del cálculo de primitivas. Si la derivada es $f(x)$, dicha primitiva es la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Esta es, quizás, la primera ecuación diferencial que todos resolvemos.

Definición 8.1. Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función, su variable o variables y sus derivadas. Diremos que es una *ecuación diferencial ordinaria* (edo) si sólo hay una variable independiente, y diremos que es una *ecuación en derivadas parciales* si aparecen derivadas parciales respecto de dos o más variables.

Por ejemplo, las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias

$$y'(x) + y(x) = x^2, \tag{8.1a}$$

$$\frac{dy}{dx} + 2y^2 - 1 = 0, \tag{8.1b}$$

$$(x - 2y)dy + y^2dx = 0, \tag{8.1c}$$

$$y''(x)^2 + 3xy'(x) - \cos(x) = 0. \tag{8.1d}$$

donde y es la función incógnita y x es la variable independiente. Como se puede ver, utilizaremos la notación y' o dy/dx de manera indistinta para indicar la derivada.

Las siguientes ecuaciones son ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u^2, \tag{8.2a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{8.2b}$$

Recordemos que también podemos utilizar la notación $D_i f$ para indicar la derivada parcial de f respecto a la variable i-ésima o $D_{22}f$ para indicar $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Además de distinguir entre ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales, utilizaremos el orden de la ecuación.

Orden

Definición 8.2. Se llama *orden* de una ecuación diferencial al orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y' &= 3xy \\ y'' + y' &= \cos(x) \\ y''' + e^y &= x \end{aligned}$$

tiene orden uno, dos y tres respectivamente.

Grado

Definición 8.3. Se llama *grado* de una ecuación que puede ser escrita como un polinomio en la variable dependiente a la mayor potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden.

Ejemplo 8.4.
a) Las ecuaciones

$$\begin{aligned} (y')^3 &= 3xy \\ y'' + y' &= \cos(x) \\ (y''')^2 + y^4 &= x \end{aligned}$$

tienen grado tres, uno y dos respectivamente.
b) Las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$y'(x) + y(x) = x^2, \tag{8.3a}$$
$$\frac{dy}{dx} + 2y^2 - 1 = 0, \tag{8.3b}$$
$$(x - 2y)dy + y^2 dx = 0, \tag{8.3c}$$
$$y''(x)^2 + 3xy'(x) - \cos(x) = 0. \tag{8.3d}$$

tienen orden y grado uno salvo la última que tiene orden y grado dos. ◁

Ecuación diferencial lineal

Definición 8.5. Una ecuación diferencial diremos que es *lineal* si es lineal en la variable dependiente.

Ejemplo 8.6. La ecuación $y'\cos(x) + x^2 y = e^x$ es lineal y la ecuación $(y')^2\cos(x) + x^2 y = e^x$ no lo es. ◁

Ecuación diferencial lineal homogénea

Definición 8.7. Una ecuación diferencial lineal diremos que es *homogénea* si no tiene términos que dependan sólo de la variable independiente.

Ejemplo 8.8. La ecuación $y' + xy = y''$ es homogénea mientras que la ecuación $y' + xy = x^2$ no lo es. ◁

Soluciones

Una *solución* de una ecuación diferencial ordinaria es una función definida en un intervalo que verifica dicha ecuación. Por ejemplo, $y(x) = e^x$ definida en $\mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial $y'(x) - y(x) = 0$. También es solución la función constantemente igual a cero. Otras ecuaciones, en cambio, no tiene solución. Por ejemplo, la ecuación $(y')^4 + y^2 = -1$ no puede tener solución porque el miembro de la izquierda es positivo mientras que el de la derecha es negativo. Si la ecuación fuera $(y')^4 + y^2 = 0$, la única solución posible sería la constantemente igual a cero. Resumiendo, hay ecuaciones que tienen solución única, otras que tienen muchas soluciones y otras que no tienen ninguna.

Llamaremos *solución particular* de una ecuación diferencial a una función que verifique la ecuación. Si nos referimos al conjunto de todas las soluciones, hablaremos de *solución general*. Por ejemplo, $y(x) = e^x$ es una solución particular de la ecuación diferencial $y'(x) - y(x) = 0$ que tiene como solución general $y = ce^x$.

Solución particular
Solución general

No siempre seremos capaces de expresar la solución de forma explícita: algunas veces lo haremos de forma implícita como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.9. La solución de la ecuación diferencial $y' = -x/y$ en el intervalo $-5 < x < 5$ son aquellas funciones que verifican que $x^2 + y^2 = 25$. Para comprobarlo, basta derivar:

$$x^2 + y(x)^2 = 25 \implies 2x + 2y(x)y'(x) = 0 \implies y'(x) = -\frac{x}{y(x)} \, . \triangleleft$$

Observación 8.10. La solución general no siempre se puede expresar por medio de una única fórmula. Por ejemplo, la ecuación $y' + y^2 = 0$ tiene como soluciones particulares $y(x) = \frac{1}{x}$ e $y(x) = 0$ y, por tanto, no la podemos describir con una única expresión.

Problemas de valores iniciales y problemas de contorno

Es usual que junto con la ecuación diferencial tengamos algunas condiciones adicionales sobre la función y sus derivadas. Si exigimos las condiciones sobre el mismo valor de la variable independiente, hablaremos de un *problema de valores iniciales*. En cambio, si exigimos condiciones adicionales sobre más de un valor de la variable independiente, estaremos frente un *problema de contorno o de valores en la frontera*.

A cualquiera de estas condiciones adicionales las llamaremos *condiciones iniciales*.

Condiciones iniciales

Ejemplo 8.11. El problema

$$\left.\begin{aligned} y''(x) - y'(x) &= \cos(x) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

es un problema de valores iniciales. En cambio

$$\left.\begin{aligned} y''(x) - y'(x) &= \cos(x) \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

es un problema de valores en la frontera. $\triangleleft$

Forma implícita y explícita

Definición 8.12. Diremos que una ecuación diferencial de orden n está dada en *forma implícita* cuando tiene la forma $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, siendo F una función definida en conjunto Ω de $\mathbb{R}^{n+2}$ con valores en $\mathbb{R}$. Diremos que la ecuación está en forma explícita si tiene la forma $y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, siendo F una función real definida en $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Por ejemplo, en el caso de edos de primer orden una ecuación en forma implícita tiene la forma

$$F(x, y, y') = 0$$

y, en forma explícita, tiene el aspecto $y' = f(x, y)$.

Ejemplo 8.13. Las ecuaciones diferenciales

$$y' = 3y - x$$
$$y'' = y' + xy$$

están escritas en forma explícita. En cambio, las ecuaciones

$$\cos(xy) + y'e^{y''} = 0$$
$$\arctan(y'y'') + xe^{y} = 0$$

están escritas en forma implícita. ◂

8.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden

La ecuación de primer orden y primer grado tiene la forma

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

escrita en forma implícita. A veces, la escribiremos de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ o, si la queremos en forma explícita, $y' = f(x, y)$.

Para estas ecuaciones hay teoremas que nos garantizan la existencia de solución en condiciones no demasiado restrictivas, pero antes de comentarlos, veamos cómo podemos buscar soluciones.

8.2.1 Campos de pendientes y curvas integrales

Aunque no sepamos cuál es la solución de una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$, podemos preguntarnos qué propiedades debe verificar teniendo que conocemos la derivada de la solución. Por ejemplo, consideremos la ecuación diferencial

$$y' = 1 + x - y.$$

No conocemos la función y pero sí conocemos la pendiente en cualquier punto: la pendiente en el punto $(2, 1)$ es $y'(2) = 1 + 2 - 1 = 2$. Hemos aprendido algo: la solución que pase por el punto $(2, 1)$ tiene que ser tangente a la recta que pasa por dicho punto con pendiente 2.

Esto que hemos hecho con un punto lo podemos repetir con todos los puntos del dominio. No es posible hacer un dibujo con todos los puntos pero sí podemos hacernos una idea aproximada dibujando las pendientes en una malla de puntos tan densa como queramos (o podamos). Esto es lo que hemos hecho en la Figura 8.2. En esta figura hemos representado con una flecha la pendiente en cada punto. Cualquier solución tiene que seguir el flujo de direcciones marcado. A dicha representación del flujo de direcciones se le suele llamar *campo de pendientes o de direcciones.*

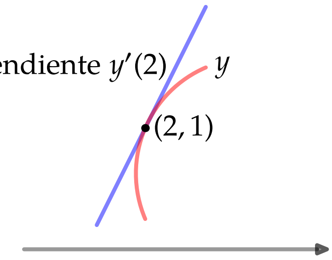


Figura 8.1 Pendiente en el punto $(2, 1)$

Campo de pendientes

En la Figura 8.2 podemos ver dos "soluciones": la que pasa por el punto $(2, 1)$ y la que pasa por el punto $(1, 1)$. A estas soluciones, en realidad, un bosquejo de curva, se les suele llamar *curvas integrales.* El teorema de existencia y unicidad nos garantiza que, en este caso, por cada punto del plano pasa una curva integral (existencia de solución) y que dos curvas no se cortan (unicidad de la solución).

Curva integral

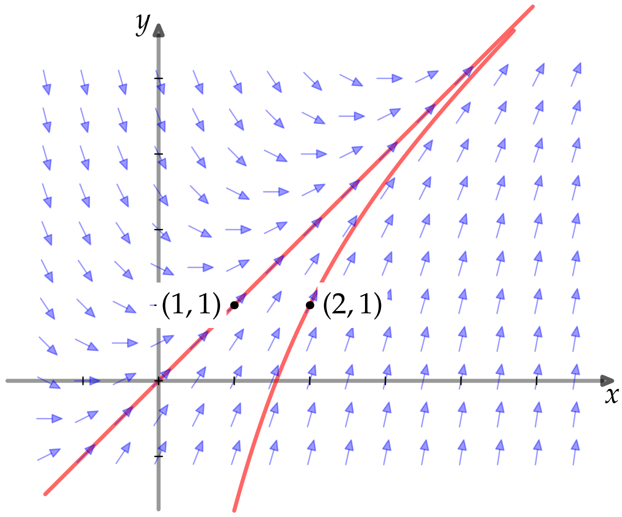


Figura 8.2 Campo de pendientes y curvas integrales

8.2.2 Existencia y unicidad de solución

Existencia y unicidad de solución para edos de primer orden

Teorema 8.14. *Sea $I =]a, b[\times]c, d[\subset \mathbb{R}^2$, sea $f : I \to \mathbb{R}$ y tomemos $(x_0, y_0) \in I$.*

a) Si f es continua en I, entonces existe $\delta > 0$ y existe una función y definida en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ que es solución de

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}\right\}$$

b) Si además $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en I, entonces la solución es única.

Ejemplo 8.15. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = 1 + y^2$ es continua en todo el plano y su derivada parcial respecto de la variable y también lo es. Eso quiere decir que la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$ tiene solución y que el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} y' &= 1 + y^2, \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}\right\}$$

tiene solución única para cualquier $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Por ejemplo, la única solución de

$$\left.\begin{aligned} y' &= 1 + y^2, \\ y(0) &= 0, \end{aligned}\right\}$$

es la función $y(x) = \tan(x)$ para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Conviene poner de manifiesto que, aunque $f(x, y) = 1 + y^2$ es una función de clase infinito en todo el plano, la solución sólo tiene sentido en un entorno del origen que, obligatoriamente, debe estar incluido en el intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Más aún, la solución general de la ecuación $y' = 1 + y^2$ tiene la forma $y(x) = \tan(x + c)$ que, también, tiene estar definida en un intervalo de longitud π como máximo. ◂

El intervalo donde está definida la solución puede, y suele, depender de la condición inicial, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.16. La función $f(x, y) = -x/y$ es continua en cualquier punto del plano salvo en el eje OX. Cualquier rectángulo que tenga intersección vacía con dicho eje es un dominio en el que tenemos garantizada la existencia y unicidad de solución del problema de valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{y} \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}\right\}$$

La solución general de la ecuación, en forma implícita, es $x^2 + y^2 = c$, siendo c un número positivo arbitrario y $x \in]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[$. Por ejemplo, la solución de

$$\left.\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{y} \\ y(0) &= 1, \end{aligned}\right\}$$

es $y = \sqrt{1 - x^2}$ con $x \in]-1, 1[$. En cambio, la solución de

$$\left.\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{y} \\ y(0) &= -100, \end{aligned}\right\}$$

es $y = -\sqrt{100 - x^2}$ con $x \in]-10, 10[$. ◂

8.3 Métodos de resolución de edos de primer orden

8.3.1 Variables separadas

Una ecuación diferencial diremos que es de *variables separadas* si es del tipo

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

o, lo que es lo mismo, si podemos separar a ambos lados de la igualdad x e y. Para resolverla tenemos que encontrar primitivas de M y N. Si p q son dichas primitivas, entonces las soluciones de la ecuación verifican $p(x)+q(y) = C$. Para comprobar que esto es así, sólo hace falta derivar esta expresión lo que nos daría la ecuación original $M(x) + N(y)y' = 0$.

Ejemplo 8.17. Resolver $xdx - y^2dy = 0$.
Separando variables e integrando, tenemos que

$$xdx = y^2dy \iff \int x\,dx = \int y^2\,dy \iff \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{3}y^3 + c \iff 3x^2 - 2y^3 = c. \triangleleft$$

Ejemplo 8.18. La ecuación $(x^2 + 4)y' = xy$ es una ecuación de variables separadas. Resolvámosla:

$$\begin{aligned}(x^2+4)y' = xy &\iff \frac{x}{x^2+4} = \frac{y'}{y} \iff \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{y'}{y}\,dy = c\\ &\iff \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) - \ln\left|y\right| = c \iff \left|y\right| = e^{-c}\sqrt{x^2+4}\\ &\iff y = \pm e^{-c}\sqrt{x^2+4}.\end{aligned}$$

Obsérvese que $\pm e^{-c}$ es una manera, un poco enrevesada, de escribir un número real distinto de cero. Por tanto, la solución sería $y = k\sqrt{x^2+4}$ con $k \neq 0$.
¿Qué ocurre con $k = 0$? Si volvemos a la ecuación original, vemos que $y = 0$ también es solución de la ecuación. En realidad, cuando hemos pasado dividiendo y, implícitamente hemos exigido que y no se anule eliminando al mismo tiempo la solución constantemente igual a cero. Resumiendo, la solución es $y = k\sqrt{x^2+4}$ con k un número real cualquiera. ◂

Observación 8.19. Cuando queremos resolver la ecuación $y'(x) = g(x)h(y)$ usando separación de variables tenemos que tener cuidado por si h se anula. Si $h(a) = 0$, entonces la función constante $y(x) = a$ verifica $y' = g(x)h(y)$. Si intentamos el método que hemos usado en los ejemplos anteriores, nos queda

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx,$$

que no está definido en $y = a$ y, es posible, que dicha solución constante no nos aparezca integrando.

Ejemplo 8.20. Resolvamos la ecuación $y' = y^2 - 1$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = y^2 - 1 &\iff \frac{dy}{y^2-1} = dx \iff \int \frac{dy}{y^2-1} = \int dx + c\\ &\iff \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + c \iff \frac{y-1}{y+1} = e^{2c}e^{2x},\end{aligned} \tag{8.4}$$

de donde, despejando y, obtenemos $y = \frac{1+ke^{2x}}{1-ke^{2x}}$, con $k = \pm e^{2c}$ o, lo que es lo mismo, un número cualquiera distinto de cero. De la observación anterior sabemos que $y = 1$ e $y = -1$ son soluciones de la ecuación diferencial que no nos han aparecido. Por tanto, *hemos perdido soluciones* en el desarrollo (8.4). ◂

8.3.2 Ecuaciones lineales de primer orden

Ecuación diferencial lineal

Definición 8.21. Una ecuación diferencial ordinaria es *lineal* si tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x).$$

Homogénea

Diremos que es *lineal homogénea* si $g(x) = 0$.

Como caso particular, una ecuación lineal de primer orden es de la forma $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$. Si dividimos por a_1, obtenemos la forma usual $y' + a(x)y = b(x)$ (a veces llamada *forma estándar*).

Caso homógeneo

La ecuación diferencial $y' + a(x)y = 0$ es una ecuación en variables separadas. Siempre tenemos la solución trivial $y(x) = 0$ como solución. Para buscar soluciones no triviales resolvemos y obtenemos como solución general

$$y = K \exp\left(-\int a(x)\,dx\right).$$

Caso general

Para resolver la ecuación general vamos a usar el hecho de que esta solución se puede obtener a partir de una solución particular y de las soluciones del problema homogéneo. Más concretamente, supongamos que y_0 e y_1 son solución de

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{8.5}$$

Entonces $(y_1' - y_0') + a(x)(y_1 - y_0) = 0$ o, lo que es lo mismo, $y_1 - y_0$ es solución de la correspondiente ecuación diferencial homogénea. Como dos soluciones cualesquiera se diferencian en una solución del problema homogéneo, el conjunto de soluciones de (8.5) se obtiene sumando a una solución particular las soluciones del homogéneo.

Para obtener una solución particular de (8.5), multiplicamos dicha ecuación por $\exp\left(\int a(x)\,dx\right)$ y obtenemos:

$$\exp\left(\int a(x)\,dx\right) y' + \exp\left(\int a(x)\,dx\right) a(x)y = \exp\left(\int a(x)\,dx\right) b(x).$$

Fijémonos que el primer miembro de la igualdad es la derivada del producto $\exp\left(\int a(x)\,dx\right) y$, con lo que

$$\exp\left(\int a(x)\,dx\right) y = \int \exp\left(\int a(x)\,dx\right) b(x)\,dx,$$

y, por tanto, una solución es

$$y(x) = \frac{\int \exp\left(\int a(x)\,dx\right) b(x)\,dx}{\exp\left(\int a(x)\,dx\right)}.$$

Resumiendo, la solución general del problema la conseguimos sumando a esta solución particular las soluciones del problema homogéneo.

Proposición 8.22. *La solución general de la ecuación diferencial de primer orden*

$$y' + a(x)y = b(x)$$

se escribe como suma de una solución particular y la solución general de la ecuación homogénea $y' + a(x)y = 0$. Más concretamente, la solución general es

$$y(x) = \frac{\int \exp\left(\int a(x)\,dx\right) b(x)\,dx}{\exp\left(\int a(x)\,dx\right)} + K\exp\left(-\int a(x)\,dx\right).$$

Ejemplo 8.23. Resolvamos la ecuación $xy' - 4y = x^6 e^x$.
La forma estándar de la ecuación es $y' - \frac{4y}{x} = x^5 e^x$. En este caso $a(x) = -\frac{4}{x}$. Multiplicamos por $\exp\left(-4\int \frac{1}{x} dx\right) = \exp(-4\ln(x)) = x^{-4}$:

$$x^{-4}y' - 4x^{-5}y = xe^x \iff (x^{-4}y)' = xe^x.$$

Integrando por partes, se obtiene que la solución es $y = x^5e^x - x^4e^x + Kx^4$. ◃

Observación 8.24. El paso a la forma estándar incluye la división por $a_1(x)$. Aquellos valores de x para los que $a_1(x) = 0$ se suelen llamar *puntos singulares* y son potencialmente problemáticos. **Punto singular**

Ejemplo 8.25. Resolver el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} y' - 2xy &= 2, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Como en los ejemplos anteriores, multiplicamos por e^{-x^2} y nos queda que

$$y = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + Ke^{x^2}.$$

Utilizando que $y(0) = 1$, se tiene que $K = 1$ y, por tanto,

$$y = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2} = e^{x^2}\left(2 + \int_0^x e^{-t^2}\,dt + 1\right). \triangleleft$$

Observación 8.26. Hay funciones relativamente sencillas que no tienen una primitiva expresable mediante funciones elementales. La función e^{-x^2} es un ejemplo. Las funciones definidas de esta manera tienen, en muchas ocasiones, nombre en la literatura matemática. Por ejemplo, la *función error* está definida como **Función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Con esta notación, la solución del Ejemplo 8.25 es $y(x) = e^{x^2}\left(1 + \sqrt{\pi}\operatorname{erf}(x)\right)$.

8.3.3 Ecuaciones diferenciales exactas

La ecuación diferencial $ydx + xdy = 0$ es de variables separadas. También podemos recordar en este momento la derivada de un producto: $d(xy) = ydx + xdy$ para concluir que la solución de la ecuación es $xy = c$. Si en lugar del producto tenemos una familia uniparamétrica de funciones $f(x, y) = c$, podemos derivar y obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

Por ejemplo, si tenemos $f(x, y) = x^3 + xy^2 = c$, conseguimos la ecuación

$$(3x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Ecuación diferencial exacta

Definición 8.27. La ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ diremos que es *exacta* si existe un campo escalar $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

o, lo que es lo mismo, $\nabla F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$. Al campo escalar F se le suele llamar *potencial*.

Potencial

Si la ecuación diferencial es exacta, es muy fácil expresar la solución en forma implícita, sólo nos hace falta encontrar un potencial de la ecuación.

Proposición 8.28. *Si $M(x, y)dx+N(x, y)dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta con potencial F y f es una función real de variable real verificando que $F(x, f(x)) = C$ para algún C en el dominio de f, entonces f es solución de la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.*

Pero, ¿cómo podemos saber si una ecuación diferencial es exacta? En dominios adecuados, como por ejemplo los rectángulos, existe una condición muy cómoda de verificar. Esta condición nos la da el Teorema de Poincaré.

Teorema de Poincaré

Teorema 8.29. *Sean $M, N :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ funciones de clase uno. Entonces la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si, y sólo si,*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y).$$

Ejemplo 8.30. Vamos a resolver la ecuación $3y + e^x + (3x + \cos(y))y' = 0$.
En este caso tenemos que $M(x, y) = 3y + e^x$ y que $N(x, y) = 3x + \cos(y)$. Veamos en primer lugar que es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 3 = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y).$$

Para resolverla tenemos que encontrar la función potencial F. Como $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3y + e^x$,

$$F(x, y) = \int (3y + e^x)dx = 3yx + e^x + f(y).$$

Derivamos respecto de y e igualamos a N: $3x + f'(y) = 3x + \cos(y)$. Con lo que $f'(y) = \cos(y)$ y, por tanto $f(y) = \operatorname{sen}(y)$. En resumen, la solución de la ecuación escrita en forma implícita es $3yx + e^x + \operatorname{sen}(y) = C$. ◁

Factores integrantes

Si la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no es exacta, existe la posibilidad de que al multiplicar por una función adecuada se convierta en exacta, esto es, que la ecuación

$$\mu(x,y)\left(M(x,y)dx + N(x,y)dy\right) = 0$$

sí que sea exacta. Si la función μ no es constantemente cero, ambas ecuaciones tienen las mismas soluciones. La cuestión que se plantea es cuándo es posible encontrar una tal función μ y cómo lo hacemos. A dicha función μ la llamaremos *factor integrante.* **Factor integrante**

No es fácil encontrar condiciones genéricas que garantizen la existencia de factores integrantes. Sí es posible encontrar factores integrantes de algún tipo particular. Por ejemplo, supongamos que μ sólo depende de x. En ese caso la ecuación

$$\mu(x)M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0$$

es exacta y, por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)N(x,y)\right).$$

Derivamos

$$\mu(x)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \mu'(x)N(x,y) + \mu(x)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

Despejamos

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N(x,y)} = h(x),$$

y h tiene que ser una función que dependa sólo de x. En ese caso,

$$\mu(x) = \exp\left(\int h(x)\,dx\right).$$

Resumimos lo que hemos hecho en el siguiente resultado.

Proposición 8.31. *Consideremos la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Supongamos que*

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N(x,y)}$$

es una función de x, a la que denotaremos $h(x)$. Entonces

$$\mu(x) = \exp\left(\int h(x)\,dx\right)$$

es un factor integrante de la ecuación.

De manera similar se pueden buscar factores integrantes de un tipo particular como por ejemplo que sólo dependan de y o de $x+y$ o de xy, etc. Como muestra puedes ver la proposición siguiente.

Proposición 8.32. *Consideremos la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.*

a) Si

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)} = h(y),$$

entonces $\mu(y) = \exp\left(\int h(y)\,dy\right)$ es un factor integrante.

b) Si

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y) - N(x,y)} = h(x+y),$$

entonces $\mu(x+y) = \exp\left(\int h(x+y)\,d(x+y)\right)$ es un factor integrante.

c) Si

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{-M(x,y) - N(x-y)} = h(x-y),$$

entonces $\mu(x-y) = \exp\left(\int h(x-y)\,d(x-y)\right)$ es un factor integrante.

Ejemplo 8.33. La ecuación $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$ no es exacta. En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3xy + y^2\right) = 3x + 2y \neq 2x + y = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + xy\right).$$

La ecuación admite un factor integrante que es función sólo de x:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N(x,y)} = \frac{3x + 2y - 2x - y}{x^2 + xy} = \frac{x+y}{x^2+xy} = \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}.$$

El factor integrante es, por ejemplo,

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) = \exp\left(\ln(x)\right) = x.$$

Es inmediato comprobar que la ecuación $x(3xy+y^2)+x(x^2+xy)y' = 0$ ya sí es exacta. Para resolverla buscamos la función potencial:

$$F(x,y) = \int 3x^2y + xy^2\,dx = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + f(y).$$

Para calcular f, derivamos respecto de y: $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^3 + x^2y + h'(y)$, de donde $h'(y) = 0$. Por tanto, la solución general de forma implícita es

$$F(x,y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C. \triangleleft$$

8.3.4 Otros cambios de variable

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Definición 8.34. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *homogénea de grado p* si $f(tx) = t^p f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $t \in \mathbb{R}$.

Función homogénea

Ejemplo 8.35. El ejemplo típico de función homogénea es $f(x) = x^n$ que es homogénea de orden n. Pero también lo son aquellos polinomios de una o varias variables que sólo tienen sumandos de orden n. Por ejemplo,

$$f(x, y, z) = x^3y^2 - 3x^2y^3 + xyz^3 + 7x^5$$

es una función homogénea de orden 5.
No es necesario que la función sea polinómica para ser homogénea. La función

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} + \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)$$

es homogénea de grado 0. ◁

Definición 8.36. Una ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ es *homogénea* si M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

Ecuación diferencial homogénea

Ejemplo 8.37. Las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas

$$\begin{aligned}(x + y)dx + (x - 3y)dy &= 0\\ (x^3 + xy^2)dx + (y^3 - x^2y)dy &= 0\\ x^2dx + (xy - 3y^2)dy &= 0.\end{aligned}$$

En cambio, $(x + y - 1)dx + (x - y)dy = 0$ no lo es. ◁

Observación 8.38. Según la definición, la ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ es homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo grado digamos n. Esto quiere decir que, utilizando la definición de función homogénea con $\lambda = 1/x$, se cumple que

$$\frac{M(x, y)}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n M(x, y) = M\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = M\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

y, el resultado análago para $N(x, y)$ con lo que

$$\begin{aligned} M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 &\iff x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0\\ &\iff M\left(1, \frac{y}{x}\right) + N\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0\\ &\iff \frac{dy}{dx} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}\end{aligned}$$

y, por tanto, la ecuación se puede escribir de la forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Estas ecuaciones se transforman en una de variables separadas mediante el cambio $u = \frac{y}{x}$. Como $y = ux$, derivando tenemos que $y' = u'x + u$, es decir, $u'x = f(u) - u$, que es una ecuación de variables separadas.

Para resolverla, si $f(u) \neq u$, la ecuación es $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$. Por tanto la solución es

$$\begin{aligned} x =& C\exp\left(\int \frac{du}{f(u)-u}\right) \\ y =& Cux = Cu\exp\left(\int \frac{du}{f(u)-u}\right). \end{aligned}$$

Si $f(u_0) = u_0$ para algún u_0, entonces se puede comprobar que la recta $y = u_0x$ es solución ya que

$$y' = u_0 = f(u_0) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ejemplo 8.39. La ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ es homogénea. Para resolverla hacemos el cambio $y = ux$, con lo que nos queda

$$u + \frac{du}{dx}x = y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{x+ux}{x-ux} = \frac{1+u}{1-u},$$

de donde, $\frac{1-u}{u^2+1}\frac{du}{dx} = \frac{dx}{x}$ que es una ecuación de variables separadas. Integramos y obtenemos la solución:

$$\int \frac{1-u}{u^2+1}\,du = \int \frac{dx}{x} \iff \ln(x) + \frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) - \arctan(u) = C.$$

Por último, como $u = \frac{x}{y}$, la solución es $\ln(x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{x^2}+1\right) - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = C$. ◁

Ecuaciones de la forma $y' = f(ax + by + c)$

Distinguimos dos casos:

a) Si a o b son cero, entonces la ecuación es de variables separadas.

b) En otro caso el cambio $z = ax + by + c$ la transforma en una ecuación de variables separadas en x y z. Fíjate que, como $y = \frac{z-ax-c}{b}$, la ecuación se transforma en $z' = bf(z) + a$.

Ejemplo 8.40. Las siguientes edos son ejemplos del primer caso

$$\begin{aligned} y' =& \cos(3x+1), \\ y' =& \sqrt{2y+3}, \end{aligned}$$

que, como se puede ver, se resuelven fácilmente utilizando que son ecuaciones en variables separadas. ◁

Veamos un ejemplo del segundo tipo.

Ejemplo 8.41. Para resolver la ecuación $y' = \cos(3x + y - 1)$, hacemos el cambio de variable $z = 3x + y - 1$. Se tiene que $y = z - 3x + 1$ y, por tanto, la ecuación se transforma en

$$y' = \cos(3x + y - 1) \iff z' = \cos(z) + 3 \iff \frac{z'}{\cos(z) + 3} = 0$$
$$\iff \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(z)}{\sqrt{2}(\cos(z) + 1)}\right) = k, \; k \in \mathbb{R}.$$

Basta con deshacer el cambio para terminar. ◂

Ecuaciones del tipo $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

En estas ecuaciones M y N son lineales, pero no necesariamente homogéneas, y la ecuación diferencial tiene la forma

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0.$$

A la hora de resolverla, vamos a tener en cuenta cómo es el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

a) Si $c_1 = c_2 = 0$, la ecuación es homogénea y ya sabemos resolverla.
b) Si el sistema es compatible indeterminado, esto es, si $a_1b_2 = a_2b_1$, el cambio de variable $z = a_1x + b_1y$ transforma la ecuación en una de variables separadas.
c) Por último, si el sistema es compatible determinado, o sea, si $a_1b_2 \neq a_2b_1$, entoces el sistema tiene solución única $x = \alpha$, $y = \beta$. El cambio de variable $u = x - \alpha$, $v = y - \beta$ transforma la ecuación en

$$v' = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right),$$

una ecuación homogénea donde u es la variable independiente.

Ejemplo 8.42. La ecuación diferencial

$$y' = \left(\frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}\right)^2$$

se corresponde al segundo tipo mencionado. El cambio de variable $z = 2x+y$ la transforma en

$$z' = \left(\frac{z + 1}{2z - 3}\right)^2 - 2,$$

que, integrando, tiene como solución

$$-\frac{45}{98\sqrt{2}} \ln\left(\frac{14z - 5\sqrt{2^3} - 26}{14z + 5\sqrt{2^3} - 26}\right) - \frac{10}{49} \ln\left(7z^2 - 26z + 17\right) - \frac{4z}{7} = k, \; k \in \mathbb{R}.$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución que buscábamos. ◂

Ejemplo 8.43. La ecuación diferencial

$$y' = \frac{x+y-3}{x-y+1}$$

es del tercer tipo mencionado anteriormente. Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 3 \\ x-y &= 1 \end{aligned}\right\} \iff (x,y)=(2,1).$$

El cambio de variable $(u,v)=(x-2,y-1)$ transforma la ecuación diferencial en la ecuación

$$v' = \frac{u+v}{u-v}$$

que ya sí es homogénea y, de hecho, ya hemos resuelto en el Ejemplo 8.39. ◁

Ecuación de Bernoulli

Una ecuación diferencial es una *ecuación de Bernoulli* si tiene la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

donde n es un número real. Para resolverlas, utilizamos el cambio de variable $z=y^{1-n}$ que la transforma en una ecuación diferencial lineal en z.

8.3.5 Algunas aplicaciones

Familias de curvas y trayectorias ortogonales

Dada una familia de curvas en el plano $F(x,y,c)=0$, podemos encontrar una ecuación diferencial que la represente a dicha familia. Para ello derivamos respecto de x y eliminamos la constante c. En algunos caso, al derivar directamente desaparece c.

Ejemplo 8.44. La familia de curvas $x^2+y^2=c$ es la solución de la ecuación diferencial $2x+2yy'=0$. ◁

En otras ocasiones es necesario realizar algunas operaciones más para conseguirlo.

Ejemplo 8.45. Para obtener la ecuación diferencial que verifica la familia de curvas $xy^2=ce^x$, derivamos respecto de x y obtenemos que

$$y^2+2xyy'=ce^x$$

Usando que $c=\frac{xy^2}{e^x}$, se deduce que la ecuación diferencial es de la familia de curvas es

$$y^2+2xyy'=xy^2. \ ◁$$

Conocida la ecuación diferencial de una familia de curvas, es fácil plantear la que corresponde a la familia de curvas que corten de manera perpendicular a todas las curvas de la familia inicial. La pendiente de las curvas de la primera familia se pueden calcular derivando de forma implícita. Si $y'=f(x,y)$, entonces las familia de trayectorias ortogonales debe verificar $y'=-\frac{1}{f(x,y)}$.

Desintegración radioactiva

La actividad radioactiva de un elemento inestable como el carbono 14 es proporcional a la cantidad de dicho elemento. Si $M(t)$ denota la cantidad de átomos en un momento t dado, la tasa de cambio viene dada por

$$M'(t) = -kM$$

donde $k > 0$ es la constante de desintegración con un valor determinado para cada material. Si resolvemos esta ecuación obtenemos que la solución general es $M(t) = Ce^{-kt}$. La constante C se puede calcular: evaluando para $t = 0$ obtenemos que $C = M(0)$ es la cantidad inicial de material. Para calcular la constante k de un determinado material necesitamos una medición para un tiempo t. Si, por ejemplo, conocemos la cantidad de material al inicio ($t = 0$) y para un tiempo $t = 3$, podemos calcular k despejando en la ecuación $M(3) = M(0)e^{-3k}$. Para el carbono 14, la constante es $k = 0.000120968$.

Datación usando carbono 14

FALTA

8.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

En una ecuación diferencial de orden n aparecen relacionadas la variable independiente y las n primeras derivadas de una función y. Dependiendo si podemos despejar la derivada n-ésima, $y^{(n)}$, la escribiremos en forma implícita

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

o explícita

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Un problema de valores iniciales o de Cauchy es una ecuación diferencial junto con algunas condiciones sobre el valor de la función incógnita en un un punto, esto es,

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} &= f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \\ &\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Existencia y unicidad de solución

Teorema 8.46. *Consideremos el problema de valores iniciales* (8.6). *Entonces*

a) Si f es continua en un entorno del punto $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)})$ entonces el problema (8.6) *tiene solución.*

Existencia de solución

Unicidad de solución

b) Si f tiene derivadas parciales continuas, esto es, es de clase C^1, entonces el problema (8.6) tiene solución única.

8.5 Ecuaciones lineales de orden superior

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x).$$

Si $a_n(x) \neq 0$, dividiendo por $a_n(x)$ obtenemos la forma estándar

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x). \tag{8.7}$$

La ecuación anterior es *homogénea* si $b(x) = 0$. Asimismo, dada la ecuación diferencial (8.7), la ecuación homogénea asociada es

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \tag{8.8}$$

El Teorema 8.46 tiene una expresión simplificada para ecuaciones diferenciales lineales. El motivo es que la unicidad la obtenemos gratis. Para la existencia, necesitamos continuidad de las funciones a_i.

Existencia y unicidad de solución

Teorema 8.47. *Sea $n \geq 2$ y sean $a_0, a_1, \ldots, a_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas, entonces el problema de valores iniciales*

$$\left.\begin{aligned} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y &= b(x), \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \\ \ldots \quad & \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

tiene solución única en todo el intervalo I.

Podemos aprovechar la linealidad de la ecuación para estudiar el conjunto de soluciones. Obsérvese que si tenemos dos soluciones y y z de (8.9), entonces restando

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x)$$

y

$$a_n(x)z^{(n)} + a_{n-1}(x)z^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)z = b(x)$$

obtenemos que

$$a_n(x)(y-z)^{(n)} + a_{n-1}(x)(y-z)^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

o, lo que es lo mismo, la diferencia $y-z$ es solución de la correspondiente ecuación homogénea. Asimismo, la suma de dos soluciones de la correspondiente ecuación diferencial homogénea también es solución. Con esto en mente, podemos dar un primer paso para encontrar la solución.

8.5.1 Resolución de ecuaciones diferenciales lineales

El problema homogéneo

Dada la ecuación diferencial lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0, \tag{8.10}$$

consideremos operador L definido como

$$L[y] = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y.$$

El operador L está definido en el conjunto de las funciones de clase C^n. Con esta notación, la ecuación (8.10) se escribe de una forma mucho más simple: $L[y] = 0$.

Es muy fácil comprobar que L es un operador lineal, esto es, que

a) $L[cy] = cL[y]$, para cualquier c real y que

b) $L[y + z] = L[y] + L[z]$, para cualesquiera par de funciones y, z.

¿Qué funciones son solución de la ecuación (8.10)? Si recordamos la definición de núcleo de una aplicación:

$$L[y] = 0 \iff y \in \ker(L) = \{y : L[y] = 0\}.$$

En otras palabras, el conjunto de las soluciones es un subespacio vectorial. Como ya sabes, la mejor manera de expresar los elementos de un espacio vectorial es utilizar una base del mismo, pero antes tenemos que averiguar cuál es su dimensión.

Proposición 8.48. *El conjunto de las soluciones de*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0 \tag{8.11}$$

es un espacio vectorial de dimensión n. Por tanto, si $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es una base de dicho espacio, la solución general de la ecuación (8.10) *es*

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots c_ny_n,$$

donde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son números reales arbitrarios.

El problema general

Pasamos ahora al problema general. Dada la ecuación diferencial lineal

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x) \tag{8.12}$$

o, utilizando la notación anterior, $L[y] = b(x)$. ¿Cuál es la solución? Sólo tenemos que fijarnos en que la diferencia entre dos soluciones de (8.9) es una solución del problema homógeneo para obtener la siguiente proposición.

Proposición 8.49. *La solución de la ecuación diferencial*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x)$$

se puede escribir de la forma $y_p + y_h$, donde y_p es una solución particular de dicha ecuación diferencial e y_h es la solución general de la ecuación homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0.$$

8.5.2 Independencia lineal de funciones

Definición 8.50. Un conjunto de funciones $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ es linealmente independiente si las únicas constantes c_1, c_2,..., c_n para las que se cumple que

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0 \tag{8.13}$$

son $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Si se verifica la ecuación (8.13), sus derivadas, hasta orden $n-1$, también se anulan:

$$\left.\begin{aligned} c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0,\\ c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + \cdots + c_ny_n'(x) = 0,\\ c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x) + \cdots + c_ny_n''(x) = 0,\\ \ldots\\ c_1y_1^{(n-1)}(x) + c_2y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.14}$$

La existencia de constantes c_i no nulas verificando el sistema de ecuaciones (8.13), (8.14) depende del determinante

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{8.15}$$

Wronskiano

Dicho determinante se suele llamar el *wronskiano* de $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$. Por tanto, si el wronksiano $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es distinto de cero, las funciones $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ son linealmente independientes.

Ejemplo 8.51. Si r_1 y r_2 son dos números reales distintos, ¿son las funciones e^{r_1x} y e^{r_2x} linealmente independientes? Comprobémoslo:

$$W\left(e^{r_1x}, e^{r_2x}\right) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\, e^{(r_1+r_2)x} \neq 0,$$

y, por tanto, son linealmente independientes. ◂

8.6 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

En esta sección vamos a ver cómo podemos resolver una ecuación diferencial de la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = b(x). \tag{8.16}$$

Teniendo en cuenta la Proposición 8.49, podemos escribir la solución general como solución general = solución particular + solución general de la ecuación homogénea

Vamos a estudiar cada caso por separado.

8.6.1 Resolución de edos lineales homogéneas con coeficientes constantes

El conjunto de las soluciones de la ecuación

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0$$

es un espacio vectorial n-dimensional según la Proposición 8.48. Para encontrar n soluciones linealmente independientes vamos a utilizar el polinomio característico de dicha ecuación.

Definición 8.52. Consideremos la ecuación diferencial lineal

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0.$$

Llamaremos *polinomio característico* de la ecuación al polinomio

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Polinomio característico

Ejemplo 8.53. Aquí tenemos algunas ecuaciones diferenciales con sus correspondientes polinomios característicos:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - y &= 2 & P(t) &= t^2 + 2t - 1 \\ 3y'' - y &= 2\cos(x) & P(t) &= 3t^2 - 1 \\ y''' - y'' - e^x &= 0 & P(t) &= t^3 - t^2 \triangleleft \end{aligned}$$

Teorema 8.54. *La función e^{rx} es solución de la ecuación diferencial*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0.$$

si, y sólo si, r es raíz del polinomio característico P.

Además,

a) *Si r es una real y simple de P, entonces la función e^{rx} es solución de la ecuación y si r_1 y r_2 son dos raíces reales distintas, e^{r_1x} y e^{r_2x} son linealmente independientes.*

b) *Si r es una raíz real con multiplicidad m, entonces las funciones e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx},..., $x^{m-1}e^{rx}$ son soluciones linealmente independientes.*

c) *Si $a \pm ib$ son un par de raíces complejas conjugadas simples de P, entonces las funciones $e^{ax}\cos(bx)$ y $e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$ son soluciones linealmente independientes.*

d) *Si $a \pm ib$ son un par de raíces complejas conjugadas de P con multiplicidad m, entonces las funciones*

$$e^{ax}\cos(bx),\ xe^{ax}\cos(bx), \ldots, x^{m-1}e^{ax}\cos(bx),$$
$$e^{ax}\operatorname{sen}(bx),\ xe^{ax}\operatorname{sen}(bx), \ldots, x^{m-1}e^{ax}\operatorname{sen}(bx),$$

son soluciones linealmente independientes.

Este teorema nos da tantas soluciones independientes como grado tenga el polinomio característico que forman, por tanto, una base del subespacio de soluciones.

Ejemplo 8.55. Vamos a calcular la solución general de la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$. El polinomio característico es $x^2 - x - 2$ cuyas raíces son -1 y 2. Por tanto, la solución general es

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}, \; c_1, \; c_2 \in \mathbb{R}. \triangleleft$$

Ejemplo 8.56. Resolver el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} y'' - y' - 2 = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Sabemos que la solución general es $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$. Si sustituimos las condiciones iniciales nos queda el sistema

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \implies c_1 = \frac{1}{3}, \; c_2 = \frac{2}{3}.$$

Por tanto, la solución es $y = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x}$. ◁

8.6.2 Solución particular de edos lineales con coeficientes constantes

Vamos a comentar dos formas de buscar *una* solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. El primero de ellos consiste en buscar soluciones de una forma muy concreta. Es rápido y fácil de usar, pero sólo se aplica a algunos casos. El segundo es completamente genérico y se puede aplicar a ecuaciones arbitrarias.

Método de coeficientes indeterminados

Consideremos la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots a_{n-1} y' + a_n y = b(x). \tag{8.17}$$

a) Si $b(x) = \operatorname{sen}(rx)$ o $\cos(rx)$, entonces buscamos soluciones de la forma

$$y_p = A \operatorname{sen}(rx) + B \cos(rx).$$

b) Si $b(x) = e^{rx}$, entonces buscamos soluciones de la forma

$$y_p = A e^{rx}.$$

c) Si $b(x) = \operatorname{senh}(rx)$ o $\cosh(rx)$, entonces buscamos soluciones de la forma

$$y_p = A \operatorname{senh}(rx) + B \cosh(rx).$$

d) Si $b(x) = x^m$, entonces buscamos soluciones de la forma

$$y_p = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^m.$$

Ejemplo 8.57. FALTA ◁

Método de Lagrange o de variación de parámetros

En el apartado anterior hemos resuelto la correspondiente ecuación homogénea

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Supongamos que tenemos que el conjunto $\{y_1, y_2, \cdots y_n\}$ es una base del conjunto de soluciones de la ecuación homogénea. Entonces sabemos que cualquier solución de la ecuación homogénea es de la forma

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

El método de variación de parámetros consiste en buscar una solución de la ecuación (8.16) sustituyendo las constantes "c_i" por funciones derivables (realmente n veces derivables) $v_i(x)$. Es decir, buscamos una solución de la forma

$$y_p = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x) + \cdots + v_n(x) y_n(x)$$

que verifique (8.16).

Evidentemente considerar funciones arbitrarias v_i da un gran grado de libertad. Vamos a imponer condiciones adicionales sobre las funciones de forma que el resultado esté lo más determinado posible.

Consideremos la derivada de la función y_p,

$$y_p' = \sum_{j=1}^{n} v_j y_j' + \sum_{j=1}^{n} v_j' y_j$$

e imponemos que $\sum_{j=1}^{n} v_j' y_j = 0$. Así obtenemos que

$$y_p' = \sum_{j=1}^{n} v_j y_j'.$$

Si derivamos otra vez obtenemos

$$y_p'' = \sum_{j=1}^{n} v_j y_j'' + \sum_{j=1}^{n} v_j' y_j'.$$

Si ahora imponemos que $\sum_{j=1}^{n} v_j' y_j' = 0$ tenemos que

$$y_p'' = \sum_{j=1}^{n} v_j y_j''.$$

Si este proceso de derivar e imponer que una parte de la derivada vale 0 lo repetimos hasta un total de $(n-1)$ veces obtenemos que, para $k = 0, 1, \ldots, n-2$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} v_j' y_j^{(k)} = 0, \tag{8.18}$$

y, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, se tiene

$$y_p^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} v_j y_j^{(k)}.$$

Si derivamos una vez más tenemos que

$$y_p^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} v_j' y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} v_j y_j^{(n)}.$$

Finalmente exigimos que la función y_p satisfaga la ecuación (8.16) se tiene que

$$\begin{aligned} b(x) &= y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \cdots a_1 y_p' + a_0 y_p \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(v_j' y_j^{(n-1)} + v_j y_j^{(n)} \right) + a_{n-1} \sum_{j=1}^{n} v_j y_j^{(n-1)} + \cdots + a_1 \sum_{j=1}^{n} v_j y_j' + a_0 \sum_{j=1}^{n} v_j y_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j' y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} v_j \left(y_j^{(n)} + a_{n-1} y_j^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_j' + a_0 y_j \right). \end{aligned}$$

Pero, para $j = 1, 2, \cdots n$, y_j es solución de la ecuación homogénea, es decir

$$y_j^{(n)} + a_{n-1} y_j^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_j' + a_0 y_j = 0$$

y se obtiene que

$$b(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j' y_j^{(n-1)}. \tag{8.19}$$

Por otra parte el conjunto de funciones $\{y_1, y_2, \cdots y_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y entonces el sistema formado por la ecuación (8.19) y las $n-1$ ecuaciones (8.18) tiene solución única que se resuelve por el método de Cramer. Así obtenemos las funciones $v_1', v_2', \ldots, v_n'$. Calculando primitivas obtenemos $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

En el siguiente resultado resumimos todo el desarrollo anterior.

Teorema 8.58. *Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reales y consideremos la ecuación diferencial*

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x), \tag{8.20}$$

donde $b : I \subset\to \mathbb{R}$ es una función continua. Entonces

$$y_p = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x) + \cdots + v_n(x) y_n(x)$$

es una solución particular de (8.20) donde y_1, y_2,..., y_n son n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y v_i son funciones cuyas derivadas son soluciones del sistema[3]

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 8.59. Consideremos la ecuación diferencial $y''' + y' = \tan(x)$.
Primero buscamos la solución general de la correspondiente ecuación homogénea $y''' + y' = 0$. El polinomio característico de la ecuación es $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1)$. Igualando 0 el polinomio característico obtenemos como soluciones $\lambda = 0, \lambda = i$ y $\lambda = -i$ y obtenemos que una base del conjunto de soluciones de la ecuación homogénea es el conjunto $\{1, \cos(x), \operatorname{sen}(x)\}$. Ahora buscamos una solución particular de la ecuación $y''' + y' = \tan(x)$ por el método de variación de parámetros. Es decir, buscamos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x) + v_2(x)\cos(x) + v_3(x)\operatorname{sen}(x)$$

y las funciones a encontrar, v_1, v_2 y v_3 verifican el sistema siguiente (no exactamente ellas, sino sus derivadas)

$$\begin{aligned} v_1'(x) + v_2'(x)\cos(x) + v_3'(x)\operatorname{sen}(x) &= 0 \\ -v_2'(x)\operatorname{sen}(x) + v_3'(x)\cos(x) &= 0 \\ -v_2'(x)\cos(x) - v_3'(x)\operatorname{sen}(x) &= \tan(x) \end{aligned}$$

Aplicando el método de Cramer obtenemos que

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ 0 & -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ \tan(x) & -\cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ 0 & -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ 0 & -\cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}} = \frac{\tan(x)}{1} = \tan(x),$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \operatorname{sen}(x) \\ 0 & 0 & \cos(x) \\ 0 & -\tan(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ 0 & -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ 0 & -\cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}} = -\operatorname{sen}(x),$$

[3] Observa que el sistema tiene solución única ya que el determinante viene dado por el wronskiano de $\{y_1, ..., y_n\}$ que es distinto de cero.

y

$$v_3'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}(x) & 0 \\ 0 & -\cos(x) & \tan(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ 0 & -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ 0 & -\cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}} = -\operatorname{sen}(x)\tan(x).$$

Integrando las tres funciones tenemos que $v_1(x) = -\log|\cos(x)|$, $v_2(x) = \cos(x)$ y $v_3(x) = \operatorname{sen}(x) - \log|\tan(x) + \sec(x)|$.
Finalmente la solución general de la ecuación $y''' + y' = \tan(x)$ será

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 + c_2\cos(x) + c_3\operatorname{sen}(x) - \log|\cos(x)| + \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) \\ &\qquad - \operatorname{sen}(x)\log|\tan(x) + \sec(x)| \\ &= c_1 + c_2\cos(x) + c_3\operatorname{sen}(x) - \log|\cos(x)| - \operatorname{sen}(x)\log|\tan(x) + \sec(x)|. \ \triangleleft \end{aligned}$$

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 8.60. Calcular la solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Como antes, lo primero que hay que hacer es buscar la solución general de la ecuación homogénea correspondiente; en este caso $y'' - 2y' + y = 0$. El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. La única solución de $y'' - 2y' + y = 0$ es $\lambda = 1$ con multiplicidad 2 y por tanto una base del conjunto de soluciones es la formada por las funciones $\{e^x, xe^x\}$.
Consideremos ahora una solución particular de la ecuación diferencial de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)e^x + v_2(x)xe^x,$$

y le exigimos

$$\begin{aligned} v_1'(x)e^x + v_2'(x)xe^x &= 0 \\ v_1'(x)e^x + v_2'(x)(x+1)e^x &= \frac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

Considerando el anterior sistema como un sistema de Cramer, con incógnitas $\{v_1'(x), v_2'(x)\}$ resolvemos

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x/x & (x+1)e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}} = \frac{-e^{2x}}{e^{2x}} = -1,$$

y

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x/x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}} = \frac{e^{2x}}{xe^{2x}} = 1/x.$$

Integrando tenemos que $v_1(x) = -x$ y que $v_2(x) = \log|x|$ y la solución general queda

$$ae^x + bxe^x - xe^x + \log|x|xe^x,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. ◁

8.7 Ejercicios

Ejercicio 8.1. Decidir el orden las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias y si son lineales o no.

a) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos(x)$,

b) $x\frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$,

c) $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$,

d) $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + u = \cos(r+u)$.

Solución 8.1.

a) Tiene orden 2 y sí es lineal.

b) Es de orden 3 y no es lineal.

c) Es de orden 4 y sí es lineal.

d) Es de orden 2 y no es lineal.

Ejercicio 8.2. Decidir si las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales o no en alguna variable.

a) $(y^2-1)dx + xdy = 0$,

b) $udv + (v + uv - ue^u)du = 0$.

Solución 8.2.

a) Es lineal en x: $(y^2+1)x' + x = 0$

b) Es lineal en v: $uv' + (1+u)v = ue^u$

Ejercicio 8.3. Comprobar que la función indicada es solución de la correspondiente ecuación diferencial.

a) $2y' + y = 0$; $y = e^{-x/2}$,

b) $y^2 + (y')^2 = 1$; $y = \cos(x)$.

Solución 8.3.

a) Sustituímos $y = e^{-x/2}$ en la ecuación dada y nos queda

$$2y' + y = 2\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-x/2} + e^{-x/2} = 0.$$

b) Sustituímos $y = \cos(x)$ en la ecuación dada $y^2 + (y')^2 = 1$

$$y^2 + (y')^2 = \cos^2(x) + \operatorname{sen}(x)^2 = 1.$$

Ejercicio 8.4. Decidir si las siguientes ecuaciones diferenciales son ordinarias o en derivadas parciales y cuál es su grado y orden.
a) $y'' + x^2 + (y')^2 = y^3$,
b) $x^2 \frac{\partial y}{\partial x} + t^2 \frac{\partial y}{\partial t} = 0$,
c) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = tx^3$,
d) $x^2 + y'' + (y')^3 = xy$,
e) $y' + x^4 + 4x^2y^2 = 0$.

Solución 8.4.
a) Es una edo con orden es 2 y grado 1.
b) Es una ecuación en derivadas parciales.
c) Es una ecuación en derivadas parciales.
d) Es una edo de orden 2 y grado 1.
e) Es una edo de orden y grado 1.

Ejercicio 8.5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales
a) $dx + 3dy = 0$,
b) $x(1 + y)dx + x^3(1 - y)dy = 0$,
c) $3x + y' = 0$,
d) $(2x + 3)y' + xy = 0$.

Solución 8.5.
a) Se trata de una ecuación diferencial con variables separadas.

$$\int dx + 3\int dy = C \implies x + 3y = C.$$

b) Dividimos ambos sumandos por $x^3(1 + y)$ y así se convierte en variables separadas:

$$\frac{1}{x^2}dx + \frac{(1-y)}{1+y}dy = 0 \implies -\frac{1}{x} + \int \frac{1-y}{1+y}\,dy = C.$$

Por tanto, la solución general es:

$$-\frac{1}{x} - y + 2\ln\left|1+y\right| = C \implies \frac{1}{x} + y - 2\ln\left|1+y\right| = C.$$

c) Escribimos la ecuación de la forma $3xdx + dy = 0$, que es de variables separadas.

$$3\int x\,dx + \int dy = C \implies \frac{3}{2}x^2 + y = C.$$

d) Escribimos la ecuación de esta forma equivalente:

$$xy\,dx + (2x - 3)\,dy = 0$$

que es de variables separadas sin más que dividir por $(2x - 3)y$, y entonces

$$\frac{x}{2x-3}dx + \frac{dy}{y} = 0 \implies \int \frac{x}{2x-3}dx + \int \frac{dy}{y} = C.$$

La solución general es:

$$\frac{x}{2} - \frac{3}{4} \ln |2x - 3| + \ln \left| y \right| = C.$$

Ejercicio 8.6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales

a) $y' + \frac{1}{x} y = 3x$,
b) $y' + x\, y = x\, e^{-x^2/2}$,
c) $y' = x + y$,
d) $y' + y \cos(x) = \operatorname{sen}(x) \cos(x)$,
e) $y' - \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} y = 4 \operatorname{sen}^2(x)$.

Solución 8.6.

a) La ecuación es lineal. Para resolverla, si $a(x) = \frac{1}{x}$, multiplicamos la ecuación por el factor:

$$\exp\left(\int a(x)\, dx \right) = \int \frac{1}{x} dx = \exp\left(\ln(x)\right) = x.$$

La ecuación nos queda:

$$xy' + xy = 3x^2 \implies (xy)' = 3x^2 \implies xy = \int (3x^2) dx = x^3 + C$$

Por tanto, la solución general es: $y = x^2 + \frac{C}{x}$.

b) Sea $a(x) = x$; entonces multiplicamos la ecuación por el factor:

$$\exp\left(\int a(x)\, dx \right) = \int x\, dx = \exp\left(\frac{x^2}{2} \right).$$

La ecuación nos queda:

$$e^{x^2/2} y' + x e^{x^2/2} y = x \implies (e^{x^2/2} y)' = x \implies e^{x^2/2} y = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Por tanto, la solución general es: $y = e^{-x^2/2} \left(\frac{x^2}{2} + C \right)$.

c) Si escribimos la ecuación de esta forma $y' - y = x$, entonces $a(x) = -1$, por lo que el factor por el que multiplicamos la ecuación es: $\exp(-x)$. La ecuación nos queda:

$$e^{-x} y' - e^{-x} y = x e^{-x} \implies (e^{-x} y)' = x e^{-x} \implies e^{-x} y = \int x e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + C$$

Por tanto, la solución general es: $y = -(x+1) + C\, e^x$.

d) Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea. Esta es de variables separadas.

$$y' + y \cos(x) = 0 \iff \frac{y'}{y} = -\cos(x) \iff y = k\, e^{-\operatorname{sen}(x)},\ k \in \mathbb{R}.$$

Ahora buscamos una solución particular de la ecuación diferencial. Para ello multiplicamos la ecuación por $e^{\operatorname{sen}(x)}$. Nos queda que

$$(y e^{\operatorname{sen}(x)})' = \operatorname{sen}(x) \cos(x) e^{\operatorname{sen}(x)}.$$

Integrando por partes

$$ye^{\operatorname{sen}(x)} = \int \operatorname{sen}(x)\cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)}\,dx = (\operatorname{sen}(x) - 1)\,e^{\operatorname{sen}(x)}$$
$$\implies y = \operatorname{sen}(x) - 1.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y = k\,e^{-\operatorname{sen}(x)} + \operatorname{sen}(x) - 1,\ k \in \mathbb{R}.$$

e) Sea $a(x) = -\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$; entonces multiplicamos la ecuación por el factor:

$$\exp\left(\int a(x)\,dx\right) = \exp\left(-\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx\right) = \exp\left(-\ln(\operatorname{sen}(x)\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

La ecuación nos queda:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\,y' - \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = 4\operatorname{sen}(x) \implies \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\,y\right)' = 4\operatorname{sen}(x)$$
$$\implies \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}y = \int 4\operatorname{sen}(x)dx = -4\cos(x) + C$$

Por tanto, la solución general es: $y = -4\cos(x)\ \operatorname{sen}(x) + C\operatorname{sen}(x)$.

Ejercicio 8.7. Resolver las ecuaciones diferenciales exactas

a) $x^2(3y^2 + 1)dx + y(2x^3 + y)dy = 0$,
b) $y\cos(x)dx + \operatorname{sen}(x)dy = 0$,
c) $(\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy))\,dx + x^2\cos(xy)dy = 0$.

Solución 8.7.

a) Comprobamos, en primer lugar, que la ecuación

$$x^2(3y^2 + 1)dx + y(2x^3 + y)dy = 0$$

es exacta. Para ello, llamamos $M(x, y) = x^2(3y^2 + 1)$ y $N(x, y) = y(2x^3 + y)$. Calculamos las correspondientes parciales

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 6x^2y = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Por tanto, es exacta, es decir, existe un potencial $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \ \text{ y } \ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

y la solución general será $F(x, y) = C$.
Comenzamos con la primera igualdad, de la que se deduce que

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx = \int x^2(3y^2 + 1)\,dx = \frac{x^3}{3}(3y^2 + 1) + f(y)$$

y obligamos a que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x, y) = 2x^3y + y^2$, planteándose la siguiente igualdad

$$\frac{x^3}{3}(6y) + f'(y) = 2x^3y + y^2 \implies f'(y) = y^2 \implies f(y) = \frac{y^3}{3} + C$$

Por tanto, la solución general es

$$\frac{x^3}{3}(3y^2+1) + \frac{y^3}{3} + C = C' \implies \frac{x^3}{3}(3y^2+1) + \frac{y^3}{3} = K.$$

b) Es fácil comprobar que la ecuación $y\cos(x)dx + \operatorname{sen}(x)dy = 0$ es exacta. Sea F un potencial de la ecuación, entonces

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y\cos(x) \implies F(x,y) = \int y\cos(x)\,dx = y\operatorname{sen}(x) + f(y)$$

Como $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = \operatorname{sen}(x)$, tenemos que

$$\operatorname{sen}(x) + f'(y) = \operatorname{sen}(x) \implies f(y) = C.$$

La solución general es $y\operatorname{sen}(x) = K$.

c) Se puede comprobar que la ecuación diferencial es exacta. Sea F un potencial de la ecuación. Entonces

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,dy = \int x^2\cos(xy)\,dy = x\operatorname{sen}(xy) + f(x).$$

Como

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy) + f'(x) = M(x,y) \implies f'(x) = 0$$

y, por tanto, la solución de la ecuación diferencial es $x\operatorname{sen}(xy) = C$.

Ejercicio 8.8. Resolver la ecuación diferencial $(x+y^2)dx - 2xydy = 0$ utilizando un factor integrante que sólo dependa de la variable x.

Solución 8.8. Comprobemos que no es exacta:

$$M(x,y) = x + y^2 \implies \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y$$
$$N(x,y) = -2xy \implies \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2y$$

Pero como

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-4}{2x} = \frac{-2}{x},$$

podemos considerar el factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left(-\int \frac{2}{x}\,dx\right) = \exp\left(-2\ln(x)\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Multiplicamos la ecuación por dicho factor integrante y obtenemos la siguiente ecuación que, ahora, sí es exacta:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0.$$

Aplicamos el método para la resolución de ecuaciones diferenciales exactas. Sea F un potencial de la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2} \implies F(x,y)=\ln(x)-\frac{y^2}{x}+f(y)\\
\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= -\frac{2y}{x} \implies -\frac{2y}{x}+f'(y)=-\frac{2y}{x} \implies f(y)=C.
\end{aligned}$$

La solución general es: $\ln(x)-\frac{y^2}{x}=K$.

Ejercicio 8.9. Resolver la ecuación diferencial $2xy\ln(y)dx+\left(x^2+y^2\sqrt{1+y^2}\right)dy=0$ utilizando un factor integrante que sólo dependa de la variable y.

Solución 8.9. Veamos, en primer lugar, que no es exacta:

$$\begin{aligned}
M(x,y) &= 2xy\,\ln(y) \implies \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2x\,(\ln(y)+1)\\
N(x,y) &= \left(x^2+y^2\sqrt{1+y^2}\right) \implies \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2x.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1}{y},$$

podemos considerar el factor integrante

$$\mu(y)=\exp\left(-\int\frac{1}{y}\,dy\right)=\exp\left(-\ln(x)\right)=\exp\left(\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right)=\frac{1}{y}.$$

Multiplicamos la ecuación por dicho factor integrante y obtenemos la siguiente ecuación que, ahora, sí es exacta:

$$2x\,\ln(y)\,dx+\left(\frac{x^2}{y}+y\sqrt{1+y^2}\right)dy=0$$

Sea entonces F un potencial de la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= 2x\,\ln(y) \implies F(x,y)=x^2\,\ln(y)+f(y)\\
\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= \frac{x^2}{y}+y\sqrt{1+y^2} \implies \frac{x^2}{y}+f'(y)=\frac{x^2}{y}+y\sqrt{1+y^2}\\
&\implies f'(y)=y\sqrt{1+y^2} \implies f(y)=\frac{(1+y^2)^{3/2}}{3}+C.
\end{aligned}$$

La solución general es: $x^2\,\ln(y)+\dfrac{(1+y^2)^{3/2}}{3}=K$.

Ejercicio 8.10. Resolver las ecuaciones diferenciales
a) $ydy + (2x - 3y)dx = 0$,
b) $x^2dy + (xy - y^2)dx = 0$,
c) $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$.
d) $(x^2 - y^2)dx + x^2dy = 0$.

Solución 8.10.
a) La ecuación $ydy + (2x - 3y)dx = 0$ es homogénea de grado 1; por tanto, hacemos el cambio de variable $y = ux$ y nos queda $dy = xdu + udx$. Sustituímos en la ecuación dada y agrupamos coeficientes:

$$(xu^2 + 2x - 3xu)dx + x^2udu = 0 \implies (u^2 - 3u + 2)dx + xudu = 0.$$

Esta última es de variables separadas, ya que nos queda dividiendo en ambos miembros por $x(u^2 - 3u + 2)$:

$$\frac{dx}{x} + \frac{u}{u^2 - 3u + 2}du = 0 \implies \int \frac{dx}{x} + \int \frac{u}{u^2 - 3u + 2}du = \ln(C).$$

Resolvemos la segunda integral (descomposición en fracciones simples) y la solución general es:

$$\ln(|x|) + \ln\left(\frac{(u-2)^2}{u-1}\right) = \ln(C)$$

que podemos escribir así:

$$x\,\frac{(u-2)^2}{u-1} = C$$

y deshaciendo el cambio $u = y/x$, la solución es $\frac{(y-2)^2}{y-x} = C$.

b) La ecuación $x^2dy + (xy - y^2)dx = 0$ es homogénea de grado 2. Seguimos los mismos pasos que en el apartado anterior y llegamos a la siguiente ecuación:

$$(2u - u^2)dx + xdu = 0 \ \text{, donde } u = y/x$$

que es de variables separadas: $\frac{dx}{x} + \frac{du}{2u-u^2} = 0$
Entonces la solución general es

$$\ln(|x|) + \int \frac{du}{2u - u^2} = \ln(C).$$

Integrando y deshaciendo el cambio de variable tenemos:

$$x\sqrt{\frac{u}{u-2}} = C \implies x\sqrt{\frac{y}{y-2x}} = C.$$

c) Volvemos a encontrarnos con una ecuación diferencial homogénea de grado 2. Procedemos de igual forma que en los apartados anteriores para llegar a la siguiente ecuación:

$$(2u^2 + 1)dx + uxdu = 0, \text{ donde } u = \frac{y}{x}$$

que también es de variables separadas. resolvemos la ecuación y la solución general es:

$$x\sqrt[4]{1+\frac{2y^2}{x^2}} = C.$$

d) La ecuación $(x^2 - y^2)dx + x^2dy = 0$ es homogénea de grado 2. Aplicamos el método para este tipo de ecuaciones y llegamos a la siguiente ecuación de variables separadas:

$$(1-u^2+u)dx + xdu = 0 \quad \text{, donde } u = y/x$$

cuya solución general (deshaciendo el cambio) es

$$\ln(x) + \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{2y+(\sqrt{5}-1)x}{(\sqrt{5}+1)x-2y}\right) = C.$$

Ejercicio 8.11. Calcular la solución general de la ecuación diferencial

$$x\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)y' = y\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) + x.$$

Solución 8.11. Veamos que la ecuación diferencial es homogénea. Si la ecuación la ponemos como

$$x\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)dy - (y\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) + x)dx = 0$$

tenemos que $M(x,y) = -(y\operatorname{sen}(\frac{y}{x}) + x)$ y $N(x,y) = x\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)$. Es claro que ambas funciones son homogéneas de grado 1 y entonces la ecuación es homogénea como habíamos dicho. En este caso el cambio $u = y/x$ la convierte en una ecuación de variables separadas. Si $u = y/x$, entonces $y = ux$ y $dy = udx + xdu$. Sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} x\operatorname{sen}(u)(udx+xdu) = (xu\operatorname{sen}(u)+x)dx &\implies x^2\operatorname{sen}(u)du = xdx \\ &\implies \operatorname{sen}(u)du = dx/x \implies -\cos(u) = \ln(x) + c. \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable, tenemos que la solución general es $-\cos(y/x) = \ln(x) + c$.

Ejercicio 8.12. Resolver las ecuaciones diferenciales
a) $(x+y)dx + (3x-2y+1)dy = 0$,
b) $(x+y+1)dx - (x-y+1)dy = 0$.

Solución 8.12.
a) La ecuación $(x+y)dx + (3x-2y+1)dy = 0$ es reducible a homogénea. Calculamos la intersección de las rectas $x+y=0$ y $3x-2y+1=0$ y obtenemos el punto $x = -1/5$, $y = 1/5$. Usamos entonces el cambio de variable

$$\begin{aligned} u = x + \frac{1}{5} &\implies x = u - \frac{1}{5} \\ v = y - \frac{1}{5} &\implies y = v + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Sustituímos en la ecuación dada y obtenemos la ecuación homogénea de grado 1 siguiente:

$$(u+v)du + (3u-2v)dv = 0.$$

Entonces, haciendo el cambio $z = v/u$ llegamos a la ecuación de variables separadas:

$$(4-z)du + u(3-2z)dz = 0 \implies \frac{du}{u} + \frac{2z-3}{z-4}dz = 0.$$

Integramos y la solución (en u y z) es: $2z + \ln\left(u(z-4)^5\right) = C$. Deshacemos todos los cambios y la solución general de la ecuación inicial es

$$2\left(\frac{5x+1}{5y-1}\right) + \ln\left(\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5x-20y+5}{5y-1}\right)^5\right) = C.$$

b) La ecuación $(x+y+1)dx - (x-y+1)dy = 0$ es reducible a homogéneas. El punto de corte de las rectas $x+y+1=0, x-y+1=0$ es $(-1,0)$, así que el cambio de variables que hacemos es

$$u = x+1 \implies x = u-1$$
$$v = y \implies y = v$$

Sustituímos en la ecuación dada:

$$(u+v)du - (u-v)dv = 0$$

que es homogénea de grado 1. Volvemos a aplicar el cambio $v = zu$ y la ecuación se reduce a una de variables separadas:

$$(1+z)du - u(1-z)dz = 0 \implies \frac{du}{u} + \frac{z-1}{z+1}dz = 0.$$

La solución general es: $\frac{y}{x+1} + \ln\left(\frac{(x+1)^3}{(x+y+1)^2}\right) = C$.

Ejercicio 8.13. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y' = 1 + e^{2x}$
b) $yy' = -x$
c) $y' = e^{x-y}$
d) $(x^2+y^2)dx + xy\,dy = 0$
e) $(x+y)\,dx + (x+y^2)\,dy = 0$,

Solución 8.13.

a) La ecuación $y' = 1 + e^{2x}$ es de variables separadas:

$$dy = (1+e^{2x})dx \implies y = \int \left(1+e^{2x}\right)dx = x + \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

b) La ecuación $yy' = -x$ es de variables separadas:

$$ydy + xdx = 0 \implies \int ydy + \int xdx = C \implies \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C.$$

La solución general se puede escribir como $x^2 + y^2 = K$.

c) La ecuación $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ es de variables separadas:

$$dy = \frac{e^x}{e^y}dx \implies e^y dy = e^x dx \implies e^y = e^x + C$$

d) La ecuación $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$ es homogénea de grado 2. Hacemos el cambio $y = ux$ y nos queda:

$$(x^2 + u^2x^2)dx + ux^2(udx + xdu) = 0 \implies (1 + 2u^2)dx + xudu = 0$$

Esta última es de variables separadas:

$$\frac{1}{x}dx + \frac{u}{1+2u^2}du = 0 \implies \ln(x) + \frac{1}{4}\ln\left(1 + 2u^2\right) = C.$$

Deshaciendo el cambio ($u = y/x$), la solución general es: $x\sqrt[4]{\frac{x^2+2y^2}{x^2}} = C$.

e) La ecuación $(x + y)dx + (x + y^2)dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Sea F el potencial de la ecuación; entonces

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = x + y \implies F(x,y) = \int (x+y)dx = \frac{x^2}{2} + yx + f(y)$$

Ahora, como $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ tenemos que

$$x + f'(y) = x + y^2 \implies f'(y) = y^2 \implies f(y) = \frac{y^3}{3} + C.$$

Luego, la solución general es : $\frac{x^2}{2} + x\,y + \frac{y^3}{3} = K$.

Ejercicio 8.14. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(2xe^y + e^x)\,dx + (x^2 + 1)e^y\,dy = 0$,

b) $y\,y' + x = 0; \quad y(4) = 3$

c) $2x^2\,\frac{dy}{dx} = 3xy + y^2; \quad y(1) = -2$

d) $y' + 2y = e^{-x}$

e) $x\,dy + y\,dx = \operatorname{sen}(x)$

Solución 8.14.

a) $(2xe^y + e^x)dx + (x^2 + 1)e^y dy = 0$

Se trata también de una ecuación diferencial exacta. En efecto:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2xe^y = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Sea entonces F el potencial de la ecuación; por tanto

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2xe^y + e^x$$
$$F(x,y) = \int (2xe^y + e^x)\,dx = x^2\,e^y + e^x + f(y)$$

Ahora, como $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ tenemos que

$$x^2 e^y + f'(y) = x^2 e^y + e^y \implies f'(y) = e^y \implies f(y) = e^y + C$$

Luego, la solución general es : $(x^2+1)\,e^y + e^x = K$.

b) $yy' + x = 0$, $y(4) = 3$.
Se trata de un problema de valores iniciales. En primer lugar integramos la ecuación diferencial, que es de variables separadas, y después obligaremos a que la solución $y(x)$ pase por el punto $(4,3)$.

$$ydy + xdx = 0 \implies \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C \implies x^2 + y^2 = K$$

Las curvas integrales son las circunferencias de centro $(0,0)$. Sustituimos el punto $(4,3)$ para encontrar el valor concreto de K, y tenemos que $K = 25$. Por tanto, la solución particular es: $x^2 + y^2 = 25$.

c) $2x^2\frac{dy}{dx} = 3xy + y^2$
Es una ecuación homogénea de grado 2. Sustituímos $y = ux$ en la ecuación:

$$\begin{aligned}(3xy+y^2)dx - 2x^2dy = 0 &\implies (3x^2u + x^2u^2)dx - 2x^2(udx + xdu) = 0\\ &\implies \frac{dx}{x} - \frac{2}{u^2+u}du = 0.\end{aligned}$$

La ecuación a la que hemos llegado es de variables separadas. Integramos y deshacemos el cambio:

$$\ln(x) - 2\ln\left(\frac{u}{u+1}\right) = C \implies \frac{x(x+y)^2}{y^2} = K.$$

d) $y' + 2y = e^{-x}$
Esta ecuación es lineal en y donde la función que acompaña a la variable y es $a(x) = 2$. Entonces, multiplicamos la ecuación por $\exp(\int 2dx) = e^{2x}$ y obtenemos

$$e^{2x}\,y' + 2e^{2x}y = e^x \implies (e^{2x}\,y)' = e^x \implies e^{2x}\,y = e^x + C.$$

Por tanto, la solución general es: $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$.

e) $xdy + ydx = \operatorname{sen}(x)$
Si la escribimos así: $xy' + y = \operatorname{sen}(x)$ es fácil reconocerla ya que

$$(xy)' = \operatorname{sen}(x) \implies xy = \int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + C$$

Por tanto, la solución general es: $y = \frac{-\cos(x)}{x} + \frac{C}{x}$.

Ejercicio 8.15. Calcular las trayectorias ortogonales a las siguientes familias de curvas:

a) $y^2 + x^2 = c$
b) $y = cx^2$
c) $y = \frac{x}{1-cx}$
d) $xy = c$

Solución 8.15.

a) Derivamos la ecuación $2yy' + 2x = 0$ y sustituimos y' por $\frac{-1}{y'}$. Nos queda entonces la ecuación:

$$\frac{-2y}{y'} + 2x = 0 \implies -y + xy' = 0 \implies -ydy + xdx = 0.$$

Y esta última es de variables separadas: $\frac{dx}{x} + \frac{-dy}{y} = 0$. Integramos y la solución general es

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = C \implies y = Kx$$

b) Derivamos la ecuación y sustituimos la constante $c = y/x^2$. Entonces

$$y' = 2cx \implies y' = \frac{2y}{x} \text{ (Cambio: } y' \to -\frac{1}{y'}) \implies \frac{-1}{y'} = \frac{2y}{x}$$

La ecuación que obtenemos es de variables separadas: $xdx + 2ydy = 0$. Las trayectorias ortogonales son $x^2 + 2y^2 = K$.

c) Derivamos la ecuación y sustituimos la constante $c = -1/y^2$, expresión que hemos despejado de la propia ecuación. Entonces

$$y(1 - cx) = x \implies y'(1 - cx) - cy = 1 \implies y'\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}y = 1.$$

Hacemos la sustitución $y' \to -\frac{1}{y'}$ y tenemos

$$\frac{-x}{yy'} + \frac{1}{y} = 1 \implies -x + y' = yy' \implies x + (y-1)y' = 0 \implies xdx + (y-1)dy = 0.$$

La última ecuación a la que hemos llegado es de variables separadas. Así que la familia de trayectorias ortogonales es $x^2 - 2y + y^2 = C$.

d) Derivamos la ecuación : $y + xy' = 0$. Sustituimos $y' \to -\frac{1}{y'}$ y la ecuación final es

$$y - \frac{x}{y'} = 0 \implies yy' - x = 0 \implies xdx - ydy = 0.$$

Es también de variables separadas, así que la familia de trayectorias ortogonales es $x^2 - y^2 = C$.

Ejercicio 8.16. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de grado 2

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$
b) $y'' = y$
c) $9y'' - 30y' + 25y = 0$
d) $y'' - 4y' + 13y = 0$
e) $y'' + 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$
f) $y'' + 4y = 0$, $y(\pi/6) = 1$, $y'(\pi/6) = 0$

Solución 8.16.

a) El polinomio característico es $t^2 - 3t + 2$ y sus raíces son 1 y 2. Por tanto, la solución general es

$$\left\{c_1 e^x + c_2 e^{2x} : \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

b) El polinomio característico es $t^2 - 1$ y sus soluciones son ± 1. Por tanto, la solución general es

$$\left\{c_1 e^x + c_2 e^{-x} : \quad c_1, \ c_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

c) El polinomio característico es $9t^2 - 30t + 25$ cuya única solución es $\frac{5}{3}$ (con multiplicidad 2). Por tanto la solución general es

$$\left\{c_1 e^{\frac{5}{3}x} + c_2 x e^{\frac{5}{3}x} : \quad c_1, \ c_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

d) El polinomio característico es $t^2 - 4t + 13$ que tiene como raíces $2 \pm 3i$. Por tanto la solución general es

$$\left\{c_1 e^{2x} \cos(3x) + c_2 e^{2x} \operatorname{sen}(3x) : \quad c_1, \ c_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

e) Las soluciones del polinomio característico, $t^2 + 3t - 4$ son 1 y -4. Por tanto la solución general de la ecuación es $c_1 e^x + c_2 e^{-4x}$, con c_1, c_2 reales arbitrarios. Si imponemos las condiciones iniciales, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 2 \\ y'(0) &= c_1 - 4c_2 = -3 \end{aligned}$$

cuya solución es $c_1 = c_2 = 1$. Por tanto, la solución del problema de valores iniciales es la función $e^x + e^{-4x}$.

f) Como las soluciones del polinomio característico son $\pm 2i$, la solución general de la ecuación diferencial es $c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)$. Si imponemos las condiciones iniciales, obtenemos que

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{6}\right) &= c_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -2c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2c_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \end{aligned}$$

cuya solución es $c_1 = 1/2$, $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

E **Ejercicio 8.17.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable verificando que $f(0) = m$ y que $f'(x) = f(x) - 2x$.

a) Calcular el desarrollo en serie de Taylor de la función f centrado en cero.
b) Estudiar la convergencia de dicha serie.
c) Calcular explícitamente la función f cuando $m = 1$.
d) Resolver el problema de valores iniciales $y' = y - 2x$, $y(0) = 1$.

Solución 8.17.

a) Vamos a comenzar calculando la derivada n-ésima de la función f en el origen

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) - 2x & &\Longrightarrow f'(0) = m, \\ f''(x) &= (f(x) - 2x)' = f'(x) - 2 = f(x) - 2x - 2 & &\Longrightarrow f''(0) = m - 2, \\ f'''(x) &= f''(x) & &\Longrightarrow f'''(0) = m - 2 \end{aligned}$$

y, en general, $f^{(n)}(x) = f''(x)$ y $f^{(n)}(0) = m - 2$ para cualquier $n \geq 2$. Por tanto, el desarrollo de Tayor es

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= m + mx + \sum_{n\geq 2} \frac{m-2}{n!} x^n \\ &= m \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} - 2 \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

y usando que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

$$= me^x - 2\left(e^x - 1 - x\right) = (m-2)e^x + 2 + 2x.$$

b) La serie es convergente en todo $\mathbb{R}$. Es el desarrollo de la función exponencial.
c) Si $m = 1$, $f(x) = 2 + 2x - e^x$.
d) Podemos resolver la ecuación diferencial o usar que la solución del problema de valores iniciales es único y que la función f verifica el problema de valores iniciales exigido.

Ejercicio 8.18. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de grado 2
a) $y'' + y = \tan(x)$,
b) $y'' - y' - 6y = \cos(3x)$,
c) $y'' + 2y' + 2y = x^3 - 1$,
d) $y'' - y' = e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
e) $y'' - y = xe^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Solución 8.18.
a) Sabemos que la solución general se obtiene calculando la solución general de la correspondiente ecuacion lineal homogeneizada y sumándole una solución particular de la ecuación (sin homogeneizar) que obtendremos por el método de variación de constantes.
Para obtener una solución particular de la ecuación $y''+y = 0$ calculamos el polinomio característico y le calculamos las raices. $P(\lambda) = \lambda^2+1 = 0$ que da como soluciones $\lambda = i$ y $\lambda = -i$. Esto produce las soluciones $v_1(x) = \cos(x)$ y $v_2(x) = \operatorname{sen}(x)$.
Por otra parte el método de variación de constantes nos dice que tenemos que buscar una solución particular de la ecuación diferencial de la forma $c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\operatorname{sen}(x)$ donde $c_1(x)$ y $c_2(x)$ son funciones que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\operatorname{sen}(x) &= 0 \\ -c_1'(x)\operatorname{sen}(x) + c_2'(x)\cos(x) &= \tan(x). \end{aligned}$$

Este sistema es muy fácil de resolver y se obtienen de soluciones

$$c_2'(x) = \operatorname{sen}(x) \quad \text{y} \quad c_1'(x) = -\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}.$$

Así obtenemos

$$
\begin{aligned}
c_2(x) &= \int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x),\\
c_1(x) &= \int -\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}dx = \operatorname{sen}(x) + \log\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}\right) - \log\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}\right).
\end{aligned}
$$

Si recapitulamos obtenemos que la solución general a la ecuación diferencial es

$$
\begin{aligned}
y(x) &= A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x) + \Big(\operatorname{sen}(x) + \log(\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}) - \log(\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)})\Big)\cos(x)\\
&\quad - \cos(x)\operatorname{sen}(x)\\
&= A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x) + \Big(\log(\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}) - \log(\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)})\Big)\cos(x).
\end{aligned}
$$

b) La solución general de la correspondiente ecuación homogénea la calculamos utilizando que el polinomio característico $t^2 - t - 6 = 0$ tiene como raíces 3 y -2 y que, por tanto, las funciones $y_1(x) = e^{3x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$ son dos soluciones linealmente independientes.
Para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial utilizando el método de variación de constantes, buscamos una solución de la forma $v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ donde v_i son funciones que verifican el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) &= 0,\\
v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) &= \cos(3x),
\end{aligned}
$$

o, lo que es lo mismo,

$$
\begin{aligned}
v_1'(x)e^{3x} + v_2'(x)e^{-2x} &= 0,\\
3v_1'(x)e^{3x} - 2v_2'(x)e^{-2x} &= \cos(3x).
\end{aligned}
$$

La solución de este sistema es

$$
v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \cos(3x) & -2e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-2x} \\ 3e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}e^{-3x}\cos(3x) \implies v_1(x) = -\frac{e^{-3x}\,(3\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x))}{90}\Gamma
$$

$$
v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & \cos(3x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-2x} \\ 3e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}} = -\frac{1}{5}e^{2x}\cos(3x) \implies v_2(x) = -\frac{e^{2\,x}\;(3\;\operatorname{sen}(3\,x) + 2\;\cos(3\,x))}{65}\Gamma
$$

Por tanto la solución general es $c_1y_1 + c_2y_2 + v_1y_1 + v_2y_2$, esto es,

$$
c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - \frac{\operatorname{sen}(3x) - \cos(3x)}{30} - \frac{3\operatorname{sen}(3x) + 2\cos(3x)}{65},
$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

c) Las raíces del polinomio característico de la ecuación $y'' + 2y' + 2y = 0$ son $-1 \pm i$ y, por tanto, $e^{-x}\cos(x)$ y $e^{-x}\operatorname{sen}(x)$ son dos soluciones independientes de dicha ecuación. En segundo lugar, utilizando el método de variación de constantes, buscamos una solución particular de la ecuación $y''+2y'+2y = x^3-1$ de la forma $v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x)$ donde v_i son funciones que verifican el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) &= 0, \\ v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) &= x^3 - 1, \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} v_1'(x)e^{-x}\cos(x) + v_2'(x)e^{-x}\operatorname{sen}(x) \quad &= 0, \\ -v_1'(x)e^{-x}(\cos(x)+\operatorname{sen}(x)) + v_2'(x)e^{-x}(\cos(x)-\operatorname{sen}(x)) &= x^3 - 1. \end{aligned}$$

Despejando, las soluciones del sistema son

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x}\operatorname{sen}(x) \\ x^3-1 & -e^{-x}(\cos(x)-\operatorname{sen}(x)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x}\cos(x) & e^{-x}\operatorname{sen}(x) \\ -e^{-x}(\cos(x)+\operatorname{sen}(x)) & e^{-x}(\cos(x)-\operatorname{sen}(x)) \end{vmatrix}} = e^x(x^3-1)\operatorname{sen}(x),$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x}\cos(x) & 0 \\ -e^{-x}(\cos(x)+\operatorname{sen}(x)) & x^3-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x}\cos(x) & e^{-x}\operatorname{sen}(x) \\ -e^{-x}(\cos(x)+\operatorname{sen}(x)) & e^{-x}(\cos(x)-\operatorname{sen}(x)) \end{vmatrix}} = e^x\cos(x)(x^3-1).$$

????????????? REPASARLO
Integrando

$$v_1(x) = -\frac{1}{2}\left[\left(x^3-3x+2\right)e^x\operatorname{sen}(x) + \left(-x^3+3x^2-3x-1\right)e^x\cos(x)\right]$$

y

$$v_2(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x^3-3x^2+3x-1\right)e^x\operatorname{sen}(x) + \left(x^3-3x+2\right)e^x\cos(x)\right].$$

Resumiendo, la solución general de la ecuación diferencial es

$$c_1e^{-x}\cos(x) + c_2e^{-x}\operatorname{sen}(x) + v_1(x)e^{-x}\cos(x) + v_2(x)e^{-x}\operatorname{sen}(x),$$

donde c_1 y c_2 son números reales arbitrarios y v_i son las funciones que acabamos de calcular.

d) La ecuación $y''-y' = 0$ tiene como polinomio característico t^2-t y, por tanto, $y_1(x) = 1$ e $y_2(x) = e^x$ son soluciones linealmente independientes.
Buscamos una solución particular de la ecuación $y'' - y' = e^x$ de la forma $v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ donde v_i son funciones que verifican el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) &= 0,\\
v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) &= e^x,
\end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}
v_1'(x) + v_2'(x)e^x &= 0,\\
v_2'(x)e^x &= e^x.
\end{aligned}$$

Despejando obtenemos que $v_1(x) = -e^x$ y que $v_2(x) = x$. La solución general tiene la forma $c_1y_1 + c_2y_2 + v_1y_1 + v_2y_2$, o sea,

$$y(x) = c_1 + c_2e^x - e^x + xe^x, \quad \text{donde } c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si imponemos las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, se obtiene que la solución del problema de valores iniciales es $y(x) = xe^x$.

e) La ecuación diferencial $y''-y = 0$ tiene como polinomio característico t^2-1 que se anula en ± 1. Por tanto, $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-x}$ son soluciones linealmente independientes de dicha ecuación.

Ahora buscamos una solución particular de la ecuación $y'' - y = xe^{3x}$ de la forma $v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ donde v_i son funciones que verifican el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) &= 0,\\
v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) &= xe^{3x},
\end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}
v_1'(x)e^x + v_2'(x)e^{-x} &= 0,\\
v_1'(x)e^x - v_2'(x)e^{-x} &= xe^{3x}.
\end{aligned}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos que

$$\begin{aligned}
v_1'(x) &= \frac{xe^{2x}}{2} \implies v_1(x) = \frac{(2x-1)e^{2x}}{8},\\
v_2'(x) &= -\frac{xe^{4x}}{2} \implies v_2(x) = \frac{(1-4x)e^{4x}}{32}.
\end{aligned}$$

La solución general tiene la forma $c_1y_1 + c_2y_2 + v_1y_1 + v_2y_2$, o sea,

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1e^x + c_2e^{-x} + v_1e^x - v_2e^{-x}\\
&= c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{(2x-1)e^{2x}e^x}{8} + \frac{(1-4x)e^{4x}e^{-x}}{32}\\
&= c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{(4x-3)e^{3x}}{32}
\end{aligned}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Imponiendo las condiciones iniciales, obtenemos que

$$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{3}{32} = 0,$$
$$y'(0) = c_1 - c_2 - \frac{5}{32} = 1.$$

Resolviendo el sistema se obtiene que $c_1 = \frac{5}{8}$ y $c_2 = \frac{17}{32}$ y, por tanto, la solución es

$$\frac{5e^x}{8} + \frac{17e^{-x}}{32} + \frac{(4x-3)e^{3x}}{32}.$$

8.7.1 Ejercicios complementarios

Ejercicio 8.1. Contestar razonadamente si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: La solución de la ecuación diferencial $x' = x^2 + t^2$, $x(1) = 2$ verifica que $x(2) = 1$.

Ejercicio 8.2. Utilícese la sustitución $u = x + y$ para resolver la ecuación $y' = (x + y)^2$.

Ejercicio 8.3. Un cultivo tiene inicialmente una cantidad N_0 de bacterias. Para $t = 1$ hora, el número de bacterias medido es $\frac{3}{2}N_0$. Si la rapidez de multiplicación es proporcional al número de bacterias presentes, determinar el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

Ejercicio 8.4. Sabiendo que la semivida del Carbono 14 radioactivo (C-14) es aprox. 5600 años, determinar la edad de un fósil que contiene 1/1000 de la cantidad original de C-14.

Ejercicio 8.5. Un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un Campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Si se supone que la rapidez de propagación del virus es proporcional no sólo al número de estudiantes contagiados, sino también al número de alumnos no contagiados, determinar el número de estudiantes contagiados después de 6 días, si se ha observado que después de 4 días dicho número es de 50.

Ejercicio 8.6. Está nevando con regularidad. A las 12 sale una máquina quitanieves que recorre en la primera hora 2 km y en la segunda sólo 1 km. ¿A qué hora empezó a nevar? Nota: se admite que la cantidad de nieve que quita la máquina por unidad de tiempo es uniforme, de modo que la velocidad de avance es inversamente proporcional a la altura de la nieve encontrada en el camino.

Ejercicio 8.7. Hallar las curvas de $\mathbb{R}^2$ que verifican la siguiente propiedad: en cada punto el vector de posición y el vector tangente son ortogonales.

Ejercicio 8.8. Se disuelven inicialmente 50 kg de sal en un gran tanque que contiene 300 litros de agua. Se bombea salmuera al tanque a razón de 3 litros por minuto, y luego la disolución adecuadamente mezclada se bombea fuera del tanque a la misma velocidad. Si la concentración de la solución que entra es de 2 kg/l, determinar la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánta sal hay después de 50 minutos? ¿Cuánta después de un tiempo suficientemente largo?

Ejercicio 8.9. Decidir si es exacta la ecuación diferencial $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$. Resolverla.

Ejercicio 8.10. En las siguientes ecuaciones, calcúlese un factor integrante adecuado (de la forma que se sugiere) para obtener ecuaciones diferenciales exactas. Resuélvanse luego las ecuaciones.
a) $(x + 2y)\,dx - x\,dy = 0$ con un factor integrante $\mu = \mu(x)$.
b) $(3x^2 - t)\,dt + (2x^3 - 6xt)\,dx = 0$ con f.i. $\mu = \mu(t + x^2)$.
c) $2x(1 + y)\,dx - dy = 0$ con f.i. $\mu = \mu(x)$.
d) $(y + x^3 + xy^2)\,dx - x\,dy = 0$ con f.i. $\mu = \mu(x^2 + y^2)$.

Ejercicio 8.11. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:
a)

$$\begin{aligned} x' - 4y &= 1 \\ x + y' &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x' - 5x + y' &= e^t \\ x' - x + y' &= 5e^t \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x' &= t - y \\ y' &= x - t \end{aligned}$$

Límites y continuidad de funciones de varias variables

9

9.1 El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$, o sea,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \overbrace{\ldots}^{n} \times \mathbb{R}$$

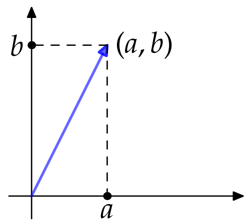


Figura 9.1 Coordenadas cartesiandas en dos dimensiones

9.1.1 Estructura de espacio vectorial

Tenemos definidas una *suma* y un *producto por escalar* en $\mathbb{R}^n$ de la manera siguiente:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n),$$

para cualesquiera $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observación 9.1. Usaremos la notación $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Es común en algunos textos utilizar negrita, $\mathbf{x}$, o una flecha, $\vec{x}$ para indicar elementos de $\mathbb{R}^n$ y distinguirlos de los elementos del cuerpo base $\mathbb{R}$. Sólo usaremos esa notación en caso de que, por claridad, sea necesario.

Propiedades

Si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se verifican las siguientes propiedades.

a) Propiedad conmutativa: $x + y = y + x$.
b) Propiedad asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$.

c) Existe elemento neutro, 0: $x + 0 = x$.
d) Existe elemento opuesto: dado x, $x + (-x) = 0$.
e) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
f) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
g) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
h) $1\,x = x$.

En definitiva, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ es un *espacio vectorial*.

9.1.2 Norma, distancia y producto escalar

El papel del valor absoluto en la recta real o el módulo en el plano complejo lo juega la norma de un vector en dimensiones superiores.

Norma o módulo

Definición 9.2. Se define la *norma* o *módulo* de $x \in \mathbb{R}^n$ como

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Distancia

La norma de un vector es la longitud de dicho vector o, si se prefiere así, la distancia al origen. En general, la *distancia* entre dos elementos del espacio euclídeo es el módulo de la diferencia $\operatorname{dist}(x, y) = \|x - y\|$.

La siguiente proposición recoge alguna de las propiedades de la norma.

Proposición 9.3.
a) $\|x\| \geq 0$, *para cualquier* $x \in \mathbb{R}^n$.
b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
c) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, *para cualquier* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$.
d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}^n$. **Desigualdad triangular**

Producto escalar

Definición 9.4. El *producto escalar* de dos vectores x e y de $\mathbb{R}^n$ está definido como

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Observación 9.5. El producto escalar y la norma o la distancia si se prefiere así, están relacionados mediante la igualdad $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

Bilinealidad

Proposición 9.6. *El producto escalar es una aplicación bilineal: si* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle,$$
$$\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda\langle z, x\rangle + \mu\langle z, y\rangle.$$

Identidad del paralelogramo

Proposición 9.7. *Sean* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *entonces se cumple que*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

El producto escalar mide el ángulo entre dos vectores.

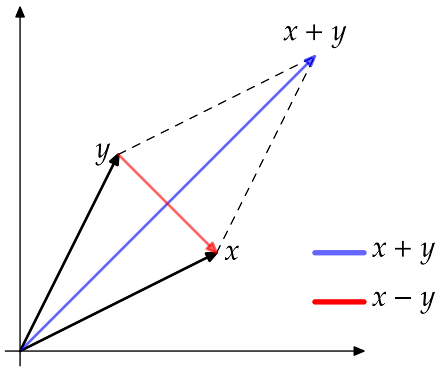


Figura 9.2 Identidad del paralelogramo

> **Teorema 9.8.** *Sean x e y dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Entonces*
> $$\langle x, y\rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta),$$
> *donde θ es el ángulo de la* Figura 9.3.

De este resultado se deduce que la definición de ángulo entre dos vectores no nulos x e y es

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \|y\|}\right). \tag{9.1}$$

Ortogonalidad

> **Definición 9.9.** Dos vectores x e y de $\mathbb{R}^n$ son *ortogonales* si su producto escalar es cero. Utilizaremos la notación $x \perp y$ para indicarlo.
> Diremos que un conjunto de vectores es un *conjunto ortogonal* si sus elementos son ortogonales entre sí. En el caso de que los vectores estén también normalizados hableremos de un *conjunto ortonormal*.

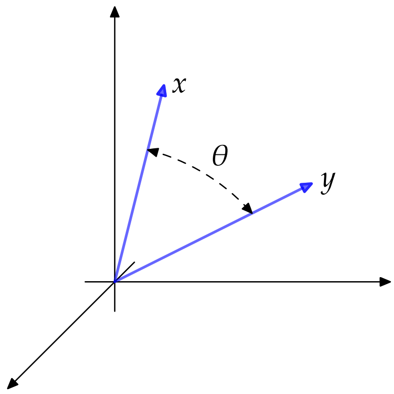


Figura 9.3 Ángulo entre vectores

El siguiente resultado es consecuencia directa del Teorema 9.1 y la acotación de la función coseno.

Desigualdad de Cauchy–Schwarz

Proposición 9.10. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se cumple que $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \|y\|$. Además, la igualdad se da si, y sólo si, x e y son linealmente dependientes.*

Teorema de Pitágoras

Proposición 9.11. *Dos vectores no nulos x e y de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si, y sólo si, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

9.1.3 Un poco de topología

Bola abierta

El papel de los intervalos en $\mathbb{R}$ lo van a jugar las bolas abiertas y cerradas en dimensiones superiores. La *bola abierta* centrada en a y de radio r es

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(a, x) < r\},$$

Bola cerrada y la *bola cerrada* es $\overline{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(a,x)\leq r\}$.

Definición 9.12. Sea $A\subset\mathbb{R}^n$.

a) **Punto interior** Diremos que $a\in A$ es un *punto interior* del conjunto A si existe $r>0$ tal que $B(a,r)\subset A$.

b) **Conjunto abierto** Diremos que A es un conjunto *abierto* si coincide con su interior:

$$\mathring{A}=\{a\in A : a \text{ es un punto interior de } A\},$$

equivalentemente, si todos los puntos de A son puntos interiores.

c) **Punto adherente** Diremos que $x\in\mathbb{R}^n$ es un punto *adherente* si para cualquier $r>0$, $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$.

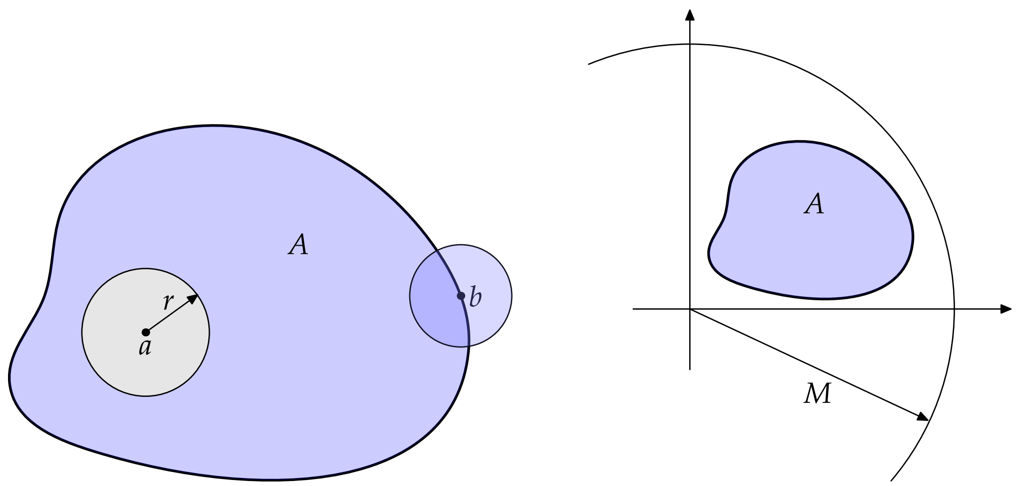
d) El *cierre* o la *adherencia* de un conjunto A es

$$\overline{A}=\{x\in\mathbb{R}^n : x \text{ es un punto adherente de } A\}.$$

Conjunto cerrado Diremos que A es *cerrado* si coincide con su adherencia.

e) **Punto de acumulación** Diremos que $x\in\mathbb{R}^n$ es un *punto de acumulación* de A si para cualquier $r>0$ se cumple que $(B(x,r)\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset$. Notaremos A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A.

f) **Punto aislado** Diremos que $a\in A$ es un *punto aislado* si existe $r>0$ verificando que $B(a,r)\cap A=\{a\}$.



Interior, adherencia y frontera Conjunto acotado

Figura 9.4

En la figura 9.4, el punto a pertenece al interior del conjunto A puesto que la bola centrada en a y de radio r se queda contenida en A. En cambio, el punto b no pertenece al interior. Por pequeño que tomemos el radio, hay una parte de la bola centrada en b que está fuera de A. Ambos puntos, a y b sí son puntos adherentes: las bolas centradas en dichos puntos siempre tienen intersección no vacía con A.

Conjunto acotado **Definición 9.13.** Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ está acotado si existe $M\in\mathbb{R}$ tal que $\|a\|\leq M$ para cualquier $a\in A$.

Ejemplo 9.14.

a) Cualquier subespacio afín del espacio euclídeo es un conjunto cerrado y, si es propio, tiene interior vacío.
b) Las bolas abiertas son conjuntos abiertos y las bolas cerradas son conjuntos cerrados. En particular los intervalos abiertos son conjuntos abiertos y los cerrados son conjuntos cerrados.◁

La siguiente proposición recoge cómo se comportan estas propiedades con respecto a las operaciones usuales de conjuntos.

Proposición 9.15.
a) Un conjunto es abierto si, y sólo si, su complementario es cerrado.
b) La intersección de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
c) La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
d) La intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
e) La unión de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

9.2 Funciones de varias variables

Definición 9.16. Llamaremos función real de n-variables reales, función real de variable vectorial o *campo escalar* a cualquier aplicación $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Como es usual, llamamos *dominio* al conjunto A y llamaremos *imagen* o *recorrido* al conjunto

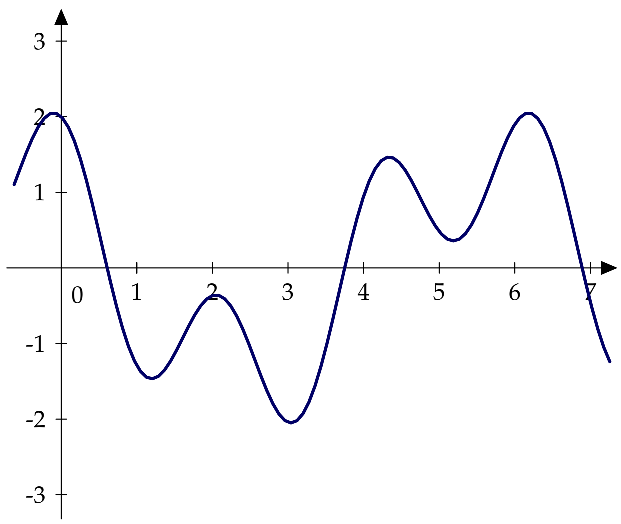
$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}$$

Campo escalar

Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la gráfica (también llamado grafo) de la función es el conjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\right\},$$

que automáticamente asociamos con el dibujo de la gráfica de la función.



Si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de dos variables, la gráfica de f se puede definir de manera análoga

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\right\},$$

y podemos seguir representándola aunque ahora en $\mathbb{R}^3$.

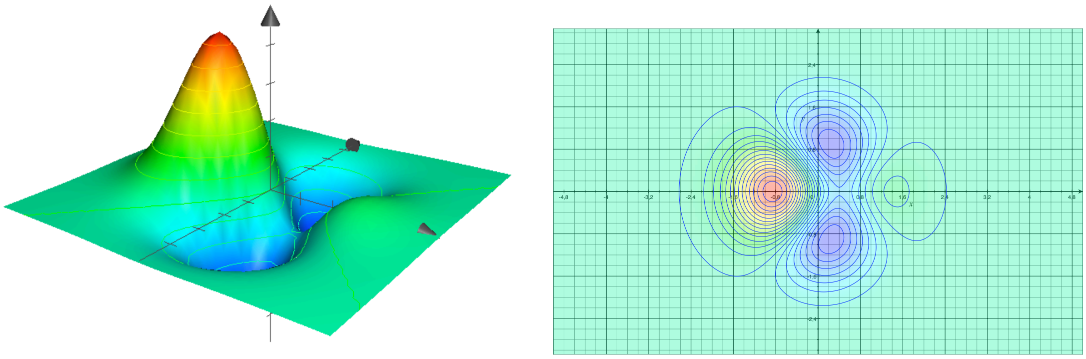


Figura 9.5 Gráfica y curvas de nivel de una función de dos variables

Definición 9.17. La *gráfica* de una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el conjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ y = f(x)\right\}.$$

Curvas de nivel

Las *curvas de nivel* de una función son los cortes de la gráfica de la función con planos de la forma $z = c$ con c real, o sea, son los conjuntos

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}.$$

Campo vectorial

Componente

Definición 9.18. Una función de variable vectorial con valores vectoriales o *campo vectorial* es una aplicación $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Si $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$, llamaremos *funciones componentes* de f a las m funciones $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2,\ldots,m$.

Ejemplo 9.19. Las funciones componentes de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\cos(x + y), \frac{x^3}{y}\right), & \text{si } y \neq 0 \\ (0, 0), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

son

$$f_1(x, y) = \cos(x + y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y}, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \triangleleft$$

9.3 Límite funcional

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función entre espacios euclídeos, y $x \in A'$ podemos definir límite de una manera similar a como lo hacíamos para funciones de una variable pero ahora sustituimos valor absoluto por norma. Formalmente al menos, no hay más diferencias.

Límite

Definición 9.20. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in A'$. Diremos que f tiene *límite* en a y que vale L si dado un número positivo ε existe δ positivo de forma que si

$$\left.\begin{array}{c} 0 < \|x - a\| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies \left\|f(x) - L\right\| < \varepsilon.$$

La definición de la norma de un vector en términos de sus coordenadas permite comprobar que la existencia de límite de una función con valores vectoriales se puede reducir al estudio del límite de las funciones componentes.

Proposición 9.21. *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in A'$. Entonces*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a} f^i(x) = L_i, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

En virtud de esta proposición, podemos restringirnos a estudiar funciones escalares.

Proposición 9.22. *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de A. Supongamos que ambas funciones tienen límite en a. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

Álgebra de límites

a) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$,

b) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$,

c) *si* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$,

d) *si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *y g está minorada, entonces* $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$, *y*

e) *si* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *y g está acotada, entonces* $\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0$.

9.3.1 Límites dobles

En general, el cálculo de límites de funciones de varias variables es mucho más difícil que el correspondiente para funciones de una variable. En dimensión dos nos podemos hacer una idea de las técnicas y de los problemas que se pueden presentar.

La definición de limite de una función en un punto implica que sea cual sea la forma de acercarse a dicho punto, la función converge al valor del límite. Los siguientes resultados juegan con esta propiedad para demostrar que una función no tiene límite. En otras palabras, en cuanto encontremos una manera de acercarnos al punto de forma que la función no tienda al posible límite, se tiene que el límite no existe. Tres ejemplos de este tipo de razonamiento son los límites reiterados, los límites según rectas o los límites según parábolas.

Proposición 9.23. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Supongamos que existen los primeros pasos para los límites reiterados, es decir, para cualquier $(x, y) \in A$ existen los límites:*

Relación entre límite doble y límites reiterados

$$\lim_{x\to 0} f(x,y), \quad \lim_{y\to 0} f(x,y).$$

Si existe el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L,$$

entonces existen los límites reitarados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = L$$

y coinciden.

Proposición 9.24. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Entonces*

Relación entre límite doble y límites según rectas

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \implies \exists \lim_{x\to 0} f(x,mx) = L, \ \forall m \in \mathbb{R}$$

Relación entre límite doble y límites según parábolas

Proposición 9.25. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Entonces*

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \implies \exists \lim_{x\to 0} f(x,kx^2) = L, \ \forall K \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 9.26. Vamos a calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
Para ello, calculemos los límites reiterados.

$$f_1(x) = \lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Hemos supuesto que $x \neq 0$. De aquí tenemos que $L_1 = 1$.
De la misma forma obtenemos que

$$f_2(y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1 = L_2$$

Como los límites reiterados son distintos, esta función no tiene límite en $(0,0)$. ◁

Un cambio de variable permite, en algunas ocasiones, transformar el límite en uno más sencillo de calcular. Un ejemplo es el cambio a coordenadas polares.

Proposición 9.27. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Entonces*

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \iff \exists \lim_{\rho\to 0} \sup \{|f(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) - L|;\ \theta \in [0,2\pi]\} = 0.$$

Ejemplo 9.28. Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\, y^3}{x^2+y^2}$
Cambiando a coordenadas polares, podemos acotar y calcular el límite de forma sencilla:

$$\left|\frac{\rho^6\cos^3(\theta)\operatorname{sen}^3(\theta)}{\rho^2}\right| = \left|\rho^4\cos^3(\theta)\operatorname{sen}^3(\theta)\right| \leq \rho^4.$$

Si ahora tomamos límites cuando ρ tiende a cero, se tiene que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\, y^3}{x^2+y^2} = 0$.

9.4 Continuidad

Función continua

Definición 9.29. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $a \in A$. Diremos que f es *continua* en a si existe $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Proposición 9.30. *Sea $A \subset \mathbb{R}^k, A \neq \emptyset$, y sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ y $a \in A$. Entonces:*

$$f \text{ es continua en } a \iff f^i \text{ es continua en } a, \ \forall i = 1,2,\ldots,m.$$

Proposición 9.31. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) f *es continua en* a.
b) *La imagen inversa de un abierto que contiene a* $f(a)$ *es un abierto.*
c) *La imagen inversa de un cerrado conteniendo a* $f(a)$ *es un cerrado.*

Con este resultado es fácil comprobar si conjuntos definidos mediante ecuaciones son abiertos, cerrados,... Por ejemplo,

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x^2 + 3y^2 \leq 1\right\}$$

es cerrado por ser la imagen inversa por la función continua $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ del intervalo cerrado $]-\infty, 1]$.

9.4.1 Propiedades

Dado que la continuidad de una función es equivalente a la continuidad de sus funciones componentes, es suficiente enunciar las propiedades para funciones con valores escalares.

Proposición 9.32. *Sean* $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funciones continuas en* $a \in A$ *y sean* λ *y* μ *dos números reales.*
a) $\lambda f + \mu g$ *es continua en* a.
b) *La función producto* fg *es continua en* a.
c) *Si* $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ *es continua en* a.

Con respecto a la composición de funciones, la regla de la cadena sigue siendo cierta.

Proposición 9.33. *Sean* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continua en* $a \in A$ *y* $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *continua en* $b = f(a) \in f(A) \subset B$. *Entonces la composición* $g \circ f$ *es continua en* a.

Regla de la cadena

9.5 Extremos absolutos

Dado que no hemos hablado de orden en espacios euclídeos de dimesión dos o más, tampoco podemos hablar de funciones monótonas. Sí podemos hablar de acotación al igual que hemos hecho para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 9.34. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función *acotoda* si su imagen es un conjunto acotado o, lo que es lo mismo, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\left\| f(a) \right\| \leq M$ para cualquier $a \in A$.

Función acotada

De la misma forma podemos definir los extremos absolutos de una función como los extremos absolutos de su imagen. Eso sí, tenemos que poder hablar de extremos absolutos y para ello es necesario que la función tome valores escalares.

Definición 9.35. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alcanza su máximo (resp. mínimo) absoluto en $a \in A$ si $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) para todo $x \in A$.

Aunque en la definición de extremo absoluto no interviene para nada la continuidad de la función, en el caso de que la función lo sea, es más fácil probar la existencia de dichos extremos. El Teorema 4.33 tiene una extensión a funciones de varias variables. De hecho, la versión que enunciamos a continuación es algo más general que la correspondiente para una variable ya que no exigimos que el dominio sea un intervalo.

Teorema de Weierstrass

Teorema 9.36. *Sea A un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f alcanza su máximo y su mínimo absoluto.*

9.6 Ejercicios

9.6.1 El espacio euclídeo

Ejercicio 9.1. Describir el interior, la adherencia, la acumulación y la frontera de los siguientes subconjuntos de números reales.

a) $\mathbb{N}$,
b) $\mathbb{Z}$,
c) $\mathbb{Q}$,
d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
e) $A = [0,1] \cup \{2\}$, y
f) $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Solución 9.1.
a) $\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}' = \emptyset$ y $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.
b) $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}' = \emptyset$ y $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
c) $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$ y $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
d) $\overbrace{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}^{\circ} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$ y $\operatorname{Fr}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
e) $\mathring{A} =]0,1[$, $\overline{A} = A$, $A' = [0,1]$ y $\operatorname{Fr}(A) = \{0,1,2\}$.
f) $\mathring{A} = \emptyset$, $\overline{A} = A \cup \{0\}$, $A' = \{0\}$ y $\operatorname{Fr}(A) = A \cup \{0\}$.

Ejercicio 9.2. Dígase cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados o compactos:

a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$
b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\right\}$
c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 3\right\}$
d) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\right\}$
e) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\right\}$
f) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \cos(x)\right\}$
g) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\right\}$

Solución 9.2.
a) El conjunto es abierto.
b) El conjunto es cerrado.
c) El conjunto es compacto.
d) El conjunto es cerrado.
e) El conjunto es cerrado.
f) El conjunto es cerrado.
g) el conjunto es compacto.

Ejercicio 9.3. Describir el interior, la adherencia, la acumulación y la frontera de los siguientes conjuntos.

a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x,\ 1 \leq y\right\}$,

b) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ 0 < y < 1\right\}$,

c) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ ó } x = 2\right\}$,

d) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2 + 1\right\}$,

Solución 9.3.

a) $\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x,\ 1 < y\}$, $\overline{A} = A = A'$, $\operatorname{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x, y = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y, x = 1\}$.

b) $\mathring{A} = \emptyset$, $\overline{A} = A' = \operatorname{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

c) $\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$, $\overline{A} = A' = A$, $\operatorname{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ o } x = 1 \text{ o } x = 2\}$.

d) $A = \mathring{A}$, $\overline{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : , y \leq x^2 + 1\right\}$ y la frontera es $\operatorname{Fr}(A) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : , y = x^2 + 1\right\}$.

Ejercicio 9.4. Describir el interior, la adherencia, la acumulación y la frontera de los siguientes conjuntos.

a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0,\ 0 < x < 1\right\}$,

b) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Z}\right\}$,

c) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\right\}$, y

d) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\right\}$.

Solución 9.4.

a) $\mathring{A} = \emptyset$, $\overline{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0,\ 0 \leq x \leq 1\right\}$, y $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A}$.

b) $\mathring{A} = \emptyset$, $A = \overline{A} = \operatorname{Fr}(A)$.

c) $\mathring{A} = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2 = \operatorname{Fr}(A)$.

d) $\mathring{A} = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2 = \operatorname{Fr}(A)$.

9.6.2 Límites y continuidad

Ejercicio 9.5. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{x^2+y^2}$

Solución 9.5. Basta con calcular los límites según rectas para deducir que no existe el límite en $(0,0)$. En efecto,

$$L_m = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m)x^2} = \frac{m}{1+m^2}\,.$$

Los límites según rectas existen todos, pero son distintos ya que dependen de m.

Ejercicio 9.6. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

Solución 9.6. Los límites reiterados de esta función son iguales a cero, como se puede calcular fácilmente. Sin embargo, si calculamos los límites según rectas sucede lo siguiente:

$$\exists L_m = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{m^2x^4 + (1-m)^2x^2} = \frac{0}{(1-m)^2} = 0 \iff m \neq 1.$$

Si calculamos el límite según la recta $y = x$ tenemos que

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1.$$

Por tanto, no existe el límite doble de la función en $(0,0)$.

Ejercicio 9.7. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

Solución 9.7. Si calculamos los límites reiterados (como $f(x,y)=f(y,x)$ basta con hacer L_1, y entonces $L_2=L_1$ y los límites según rectas, todos existen y coinciden con el valor 0. Pero si calculamos los límites según parábolas:

$$L_k = \lim_{x\to 0} f(x,kx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k^2}$$

todos existen, pero son distintos. Por tanto, no existe el límite de la función en $(0,0)$.

Ejercicio 9.8. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$

Solución 9.8. En este caso sólo hay que tener en cuenta las siguientes acotaciones:

$$0 \le |f(x,y)| = |x| \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)\right| \le |x|\ , \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\neq 0.$$

De aquí se deduce que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Ejercicio 9.9. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$

Solución 9.9. Se razona igual que en el Ejercicio 9.8.

Ejercicio 9.10. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x+2y}$

Solución 9.10. Estudiamos los límites según rectas de la forma $y=\lambda x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda x}{x+2\lambda x} = \frac{\lambda}{1+2\lambda},$$

de lo que se deduce que no existe límite en el origen.

Ejercicio 9.11. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Solución 9.11. Teniendo en cuenta que los límites reiterados coinciden con el valor cero, vamos a concluir la existencia del límite doble acotando la función en valor absoluto. Esto es

$$0 \le \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|x^2}{x^2+y^2} + \frac{|y|y^2}{x^2+y^2} \le |x|+|y|,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Ejercicio 9.12. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$

Solución 9.12. Razonando igual que en el anterior:

$$0 \le \left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{2|x|y^2}{x^2+y^2} \le 2|x|,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Ejercicio 9.13. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

Solución 9.13. Análogo al Ejercicio 9.10.

Ejercicio 9.14. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

Solución 9.14. Calculemos los límites reiterados:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2+1)-1} \\ &= \lim_{y\to 0}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1) = \sqrt{x^2+1}+1. \end{aligned}$$

Por tanto $L_1 = L_2 = \lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+1}+1) = 2$. Repitiendo el mismo razonamiento obtenemos el mismo valor 2 para todos los límites según rectas y según parábolas. Por tanto, pasamos a coordenadas polares y la función que tenemos que estudiar es:

$$F(\rho,\theta) = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1}, \ \forall (\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi]$$

Esta función evidentemente sólo depende de ρ, luego si calculamos su límite cuando $\rho \to 0$, éste será independiente de θ. Para calcularlo volvemos a repetir el mismo razonamiento que en todos los pasos previos, esto es:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}{(\rho^2+1)+1} = 2.$$

De aquí concluimos que existe el límite doble y su valor es 2.

Ejercicio 9.15. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Solución 9.15. Los límites reiterados de esta función coinciden y valen 0. Podemos concluir acotando la función y utilizando $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. De esta forma

$$\left|f(x,y)\right| = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |y|.$$

Ejercicio 9.16. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x+y}$

Solución 9.16. Llegamos a los límites según parábolas sin ningún contratiempo (los límites reiterados y según rectas son cero):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x+kx^2} = 0,$$

pero si calculamos el límite según la parábola $y = x^2 - x$ tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x + (x^2 - x)} = 1.$$

Por tanto, no existe el límite en el $(0,0)$.

Ejercicio 9.17. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\, y \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Solución 9.17. En esta función basta acotar para llegar a la existencia de límite en el $(0,0)$, siendo $L = 0$.

$$\left|f(x,y)\right| = |x\, y| \frac{\left|x^2 - y^2\right|}{x^2 + y^2} \leq 2|x\, y|.$$

Ejercicio 9.18. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$

Solución 9.18. Sin más que acotar de la forma $|f(x,y)| = |x|\, |\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)| \leq |x|$ se llega a que el límite doble existe y vale 0.

Ejercicio 9.19. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Solución 9.19. El primer límite reiterado es cero, pero el segundo no existe puesto que:

$$f_2(y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{|y|}.$$

Esta última función presenta problemas en el cero, ya que los límites laterales son distintos. Se concluye entonces que no existe el límite doble en el $(0,0)$.

Ejercicio 9.20. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x+2y}$

Solución 9.20. Si estudiamos los límites según las rectas $y = mx$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx}{x + 2mx} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{(2m+1)x} = \frac{m}{2m+1}.$$

Por tanto, el límite no existe.

Ejercicio 9.21. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+2x^2y^2+3xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

Solución 9.21. Los límites reiterados son distintos ($L_1 = 1, L_2 = 0$), por tanto no existe el límite doble.

Ejercicio 9.22. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Solución 9.22. Se razona análogamente al Ejercicio 9.14.

Ejercicio 9.23. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}(xy)\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución 9.23. La componente f^2 de la función f es continua en todo $\mathbb{R}^2$, al ser composición de funciones continuas. Estudiemos ahora la continuidad de f^1. En los puntos distintos del $(0,0)$ es continua por ser racional con denominador distinto de cero. Veamos qué ocurre en el $(0,0)$. Acotamos de la siguiente forma.

$$|f^1(x,y)| = \left|\frac{x^2\, y}{x^2+y^2}\right| \leq |y|.$$

De aquí se deduce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f^1(x,y) = 0 = f^1(0,0)$ y por tanto f^1 es continua en $\mathbb{R}^2$. De todo esto se tiene que la función f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

9.6.3 Ejercicios complementarios

Ejercicio 9.1. Describir el interior, la adherencia, la acumulación y la frontera de los siguientes conjuntos.

a) $\left\{(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2 : \; x_n = \frac{20}{n},\; y_n = 0,\; \forall\, n\in\mathbb{N}\right\}$,

b) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; y = \lambda x\right\}$, (con $\lambda\in\mathbb{R}$),

c) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$, (con $a<b$),

Ejercicio 9.2. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right)$,

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x+y|}$

Ejercicio 9.3. Estudiar la continuidad de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Ejercicio 9.4. Estudiar la continuidad de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+2x^2y^2+3xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Ejercicio 9.5. Estudiar la continuidad de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Ejercicio 9.6. Sea $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Demostrar que:

a) Existe $M\in\mathbb{R}^+$ tal que $\|f(x)\|\leq M\,\|x\|$, $\forall x\in\mathbb{R}^k$.

b) f es continua en 0.

c) f es continua en $\mathbb{R}^k$.

Diferenciabilidad

10

El concepto de función derivable o diferenciable es una extensión natural de la derivabilidad de funciones de una variable. Este nos permitirá resolver problemas de optimización con o sin restricciones. Antes de eso se hace un breve repaso de las técnicas básicas del cálculo de derivadas de funciones con valores reales o vectoriales.

10.1 Derivadas parciales

La definición de función diferenciable (leáse derivable) en un punto para funciones de varias variables reales no es una extensión inmediata de este concepto en una variable. Un primer paso es reducir el problema a una única variable. Para ello podemos considerar una variable como tal y el resto como constantes.

Derivada parcial

Definición 10.1. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se define la *derivada parcial* de f en el punto $a \in \mathbb{A}$ respecto a la variable i-ésima como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

donde e_i denota el i-ésimo elemento de la base canónica. A veces, también usaremos la notación $D_i f(a)$ para denotar la derivada parcial i-ésima.

La definición de derivada parcial se basa en el conocimiento que poseemos de la derivada de funciones de una variable. Por tanto, para el cálculo práctico de las derivadas parciales podemos utilizar todas las reglas que sabíamos. Dicho de otra manera, el cálculo de derivadas parciales se realiza utilizando las reglas de derivación para funciones de una variable (la que proceda). Veamos un ejemplo.

Ejemplo 10.2. Calcular las derivadas parciales de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y, z) = x^3 + 3xyz - yz^2,\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x^2 + 3yz,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3xz - z^2, \text{ y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3xy - 2yz. \triangleleft$$

Gradiente

Definición 10.3. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales en $a \in A$. El *vector gradiente* de f en el punto a es el vector

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Las derivadas parciales se corresponden con derivadas en la dirección de los elementos de la base canónica. ¿Por qué no considerar otras direcciones? Una dirección en $\mathbb{R}^n$ viene dado por un vector no nulo que tomaremos normalizado: evidentemente v y $\frac{v}{\|v\|}$ señalan en la misma dirección.

Derivada direccional

Definición 10.4. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en un abierto A y v un vector unitario de $\mathbb{R}^n$. Se define la *derivada direccional* de f en la dirección del vector v en el punto $a \in A$ como

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Obsérvese que tenemos tres notaciones para indicar derivada parcial i-ésima:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a) = D_{e_i} f(a).$$

¿Puede la existencia de derivadas parciales o de derivadas direccionales ser suficiente para hablar de derivabilidad? La respuesta es no si queremos que se cumplan algunas de las propiedades más elementales que verifican las funciones de una variable. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{y}, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el origen (y valen 0, compruébalo) pero ni siquiera es continua.

10.2 Función diferenciable

Función diferenciable

Definición 10.5. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathring{A}$, y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función. Se dice que f es *derivable* (en el sentido de Fréchet) o *diferenciable* en el punto a si existe una aplicación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ verificando

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

Diferencial

En tal caso la aplicación T, que es única, se denomina la *derivada* o *diferencial de f en a* y se nota $Df(a)$. Se dice que f es derivable en un subconjunto $B \subset A$ si es derivable en cada punto de B.

Sea $A_1 \subset A$ el conjunto de puntos donde f es derivable. La aplicación $x \mapsto Df(x)$ de A_1 en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se denomina la *aplicación derivada* de f y se nota Df. A la matriz asociada se la suele llamar *matriz jacobiana* de f y la notaremos Jf.

Matriz jacobiana

Jacobiano

En el caso particular $n = m$, la matriz jacobiana es cuadrada y llamaremos *jacobiano* a su determinante.

Observación 10.6. La definición de función diferenciable es una extensión de la definición de función derivable en una variable. Cuando tomamos $n = m = 1$ obtenemos la definición ya conocida.

Proposición 10.7. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en $a \in A$, entonces f es continua en a.*

El recíproco no es cierto como ya sabíamos incluso en dimensión uno. La función valor absoluto o la norma en dimesiones superiores es una función continua que no es diferenciable en el origen.

En el estudio de la diferenciabilidad de una función vectorial, el primer paso es el mismo que dimos para estudiar la continuidad: nos podemos reducir a funciones con valores escalares.

Proposición 10.8. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y $a \in A$. Entonces, f es diferenciable en a si, y sólo si, todas las funciones componentes f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ son diferenciables en a.*

El siguiente resultado es la primera condición que debe verificar una función diferenciable: si es diferenciable podemos hablar de gradiente.

Condición necesaria de diferenciabilidad

Proposición 10.9. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in A$. Si f es diferenciable en a, entonces existen todas las derivadas parciales en dicho punto y*

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Ejemplo 10.10. *Las funciones lineales son diferenciables.*
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función lineal ¿Qué función va a ser su derivada? Si tomamos $T = f$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x - a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = \lim_{x \to a} \frac{0}{\|x - a\|} = 0.$$

Por tanto f es derivable y $Df(a) = f$ para cualquier a en $\mathbb{R}^n$.
Veamos un ejemplo concreto. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = 2x + 3y$ o, lo que es lo mismo,

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Entonces $Jf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$. ◁

Ejemplo 10.11. La existencia de derivadas parciales no es suficiente para garantizar que la función sea diferenciable. Compruébalo con la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$ ◁

Observación 10.12. El mayor inconveniente que tiene la definición de función diferenciable es que para demostrar que una función lo es, debemos conocer de partida cuál va a ser su derivada. Sí es fácil calcular las derivadas parciales. Pues bien, el único candidato posible y, por tanto, la derivada en caso de serlo es

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}(a).$$

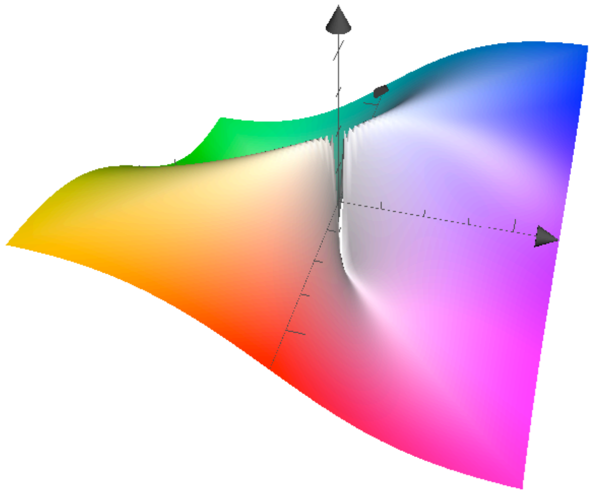


Figura 10.1 Gráfica de la función f

Condición suficiente de diferenciabilidad

Proposición 10.13. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in \mathring{A}$. Si existen todas las parciales en un entorno de a y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a.*

Utilizaremos la misma denominación que utilizábamos para funciones de una variable: si existen todas las derivadas parciales y son continuas en un abierto A, diremos que la función es de clase C^1 en A.

Función de clase C^1

Proposición 10.14. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferenciable en $a \in A$. La derivada en la dirección de un vector v es*

$$Df(a)(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n.$$

Sabemos que el producto escalar es máximo cuando los vectores son proporcionales. Por tanto, la derivada será máxima en la dirección que indica el gradiente De hecho, el valor máximo de la derivada es

$$Df(a)\left(\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}\right) = \left\langle \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \right\rangle = \|\nabla f(a)\|.$$

Corolario 10.15. *La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente, o sea,*

$$\max\{D_v f(a) : \ v \in \mathbb{R}^n, \ \|v\| = 1\} = Df(a)\left(\frac{\nabla f(a)}{\left\|\nabla f(a)\right\|}\right) = \left\|\nabla f(a)\right\|.$$

10.2.1 Plano tangente

La derivada de una función de una variable tiene una clara interpretación geométrica: es la pendiente de la recta tangente. En dimensiones superiores, la derivada es una aplicación lineal. Las entradas de la matriz asociada en la base canónica son las derivadas parciales de dicha función. Estos valores son la pendiente de la función en las direcciones paralelas a los ejes. Vamos a verlo con funciones de dos variables.

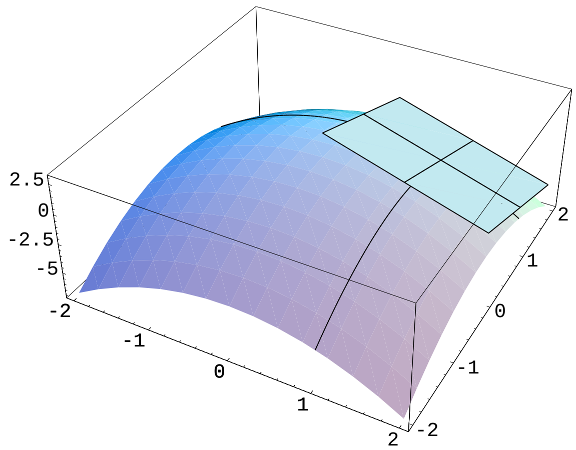


Figura 10.2 Plano tangente

Definición 10.16. Se llama *plano tangente* a f en el punto $(a,b) \in A$ al plano que tiene como ecuación

Plano tangente

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b),$$

o, lo que es lo mismo, $z = f(a,b) + \langle \nabla f(a,b), (x-a, y-b) \rangle$.
El *vector normal* a la gráfica de f en (a,b) es perpendicular al plano tangente:

Vector normal

$$n\,(f,(a,b)) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a,b), 1 \right).$$

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in A$, el *hiperplano tangente* a f en a es

Hiperplano tangente

$$\begin{aligned} y &= f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle \\ &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n). \end{aligned}$$

10.3 Reglas de derivación

Las reglas para calcular la derivada de funciones de varias variables son muy similares a las de las funciones de una variable. Por ejemplo, la derivada de la suma o del producto se calculan de la misma forma.

Proposición 10.17.
a) *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones diferenciables en $a \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha f + \beta g$ es diferenciable en a y $D(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha Df(a) + \beta Dg(a)$.*
b) *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $a \in A$. Entonces el producto fg es diferenciable en a y $D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$.*

Proposición 10.18. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $a \in A$, y $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ diferenciable en $b = f(a)$ con $f(A) \subset B$. Entonces la composición $g \circ f$ es diferenciable en a y $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$.*

Regla de la cadena

Una de las formas más usuales en las que se aplica la regla de la cadena es la siguiente: supongamos que tenemos una función $z = z(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, donde $y_i = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si dichas funciones son diferenciables, la regla de la cadena nos dice que

$$Jz(x_1, x_2, \ldots x_n) = Jy(x_1, x_2, \ldots, x_n)Jz(y_1, y_2, \ldots y_m),$$

y, por tanto

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots \frac{\partial z}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}.$$

10.4 Teorema de la función inversa y Teorema de la función implícita

El Teorema de la función inversa y el Teorema de la función implícita nos permiten calcular la derivada de funciones de las que no tenemos una expresión explícita. Aunque aparentemente distintos, son dos resultados equivalentes.

10.4.1 Teorema de la función inversa

La derivada de funciones de una variable nos ha permitido, por ejemplo, estudiar la monotonía de una función. Para funciones definidas en un intervalo, la situación es todavía mejor. Sabemos que si la derivada no se anula, entonces dicha función es estrictamente monótona y, en particular, inyectiva. Tiene sentido, por tanto, hablar de su inversa. ¿Es cierto este resultado cuando pasamos a varias variables?

Teorema de la función inversa

Teorema 10.19. *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función definida en un conjunto abierto U y $a \in U$. Supongamos que F es de clase 1 en un entorno del punto a con $\det(JF(a)) \neq 0$. Entonces existe un entorno B de $F(a)$ en el que se puede definir la función F^{-1}, ésta es de clase 1 y*

$$JF^{-1}(y) = (JF(x))^{-1}, \ \forall y \in B.$$

Observación 10.20. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \operatorname{sen}(y))$$

es de clase infinito y su jacobiano

$$\det(Jf(x, y)) = \left| \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \operatorname{sen}(y) \\ e^x \operatorname{sen}(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix} \right| = e^x \neq 0$$

no se anula nunca. El Teorema de la función inversa nos dice que, al menos localmente, tiene inversa pero ¿tiene inversa común para todos los puntos? La respuesta es no. La función f no es inyectiva:

$$f(x, y) = f(x, y + 2\pi),$$

para cualesquiera $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

10.4.2 Teorema de la función implícita

La resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales es un problema que ya se le habrá presentado con anterioridad al lector. En función del rango de algunas matrices es posible decidir si dicho sistema tiene solución, si ésta es única o no, etc. La solución de ecuaciones no lineales es un problema mucho más difícil (piénsese en los ceros de un polinomio) en el que vamos a dar algunos pequeños pasos.

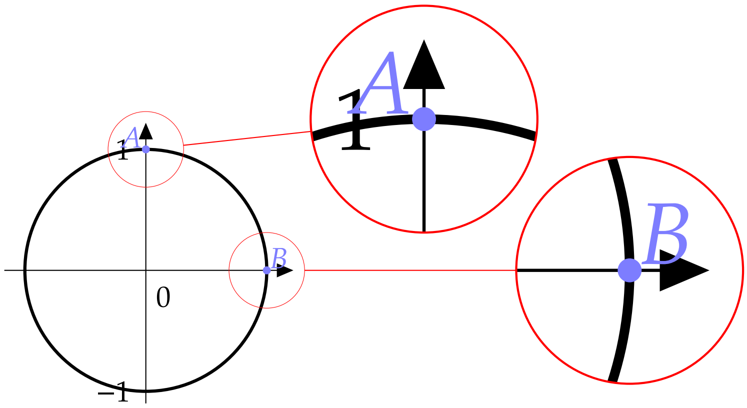


Figura 10.3 Función implícita

Veamos un ejemplo concreto. La ecuación $x^2+y^2=1$ describe los puntos de la circunferencia centrada en el origen y de radio uno. ¿Podemos despejar alguna de las dos variables? La respuesta más usual es que sí: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Esta respuesta no nos vale si cuando nos referimos a despejar nos estamos refiriendo a escribir una variable como *función* de la otra. La circunferencia no puede ser la gráfica de una función de una variable: un número no puede tener dos imágenes. Bueno, pidamos un poco menos, si no toda la circunferencia al menos una parte. Por ejemplo, para el punto $(0,1)$ sí es válido que $y=\sqrt{1-x^2}$. De hecho esto nos sirve para los puntos de la mitad superior de la circunferencia. ¿Qué pasa con el punto $(1,0)$? Ninguna de las dos expresiones $y=\sqrt{1-x^2}$ ni $y=-\sqrt{1-x^2}$ son ciertas para un entorno de ese punto. Lo que sí podemos hacer es despejar la variable x en función de y de la forma $x=\sqrt{1-y^2}$.

Obsérvese que la ecuación $x^2+y^2=1$ se puede ver como la curva de nivel 1 de la función $F(x,y)=x^2+y^2$. Despejar una variable en función de la otra es equivalente a preguntarse cuándo una curva de nivel se puede ver como la gráfica de una función.

Demos un paso más. Supongamos que sí se puede hacer. Supongamos que $y=f(x)$ en un entorno de un punto (a,b) de la circunferencia. Entonces se verifica que $x^2+f(x)^2=1$, para x en un entorno de a. Derivando obtenemos que $2x+2f(x)f'(x)=0$. Para poder despejar $f'(x)$ hace falta que $2f(x)\neq 0$. En ese caso $f'(x)=\frac{-2x}{2f(x)}$.

Las condiciones que hemos necesitado para poder calcular esta derivada son las hipótesis del Teorema de la función implícita. Vamos a recoger en una primera versión lo que hemos comentado hasta ahora.

Teorema 10.21. *Sea $U\subset\mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $F: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $(a,b)\in U$ verificando*

Teorema de la función implícita. Primera versión.

a) *F es de clase* C^1,
b) $F(a,b)=0$,
c) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$.
Entonces puede despejar $y=y(x)$ *en función de* x *en un entorno de* a *verificando que* $y(a)=b$ *en la ecuación* $F(x,y(x))=0$. *Además dicha función* $y(x)$ *es de clase* C^1 *y su derivada vale*

$$y'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x).$$

Si F es de clase C^n, *entonces la función* $y(x)$ *también es de clase* C^n.

La demostración de este resultado no entra en nuestros planes, aunque sí es fácil comprobar que la derivada de $y(x)$ viene dada por la fórmula anterior. Si $F(x,y(x))=0$, derivamos y despejamos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0 \implies \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Ejemplo 10.22. *Comprobar que la ecuación* $y^3+x^2y=10$ *define a* y *como función de* x *en un entorno del punto* $(3,1)$.
Consideremos la función $F(x,y)=y^3+x^2y-10$. Las condiciones que deben cumplirse son:
a) F es una función de clase C^1. De hecho es una función de clase C^∞ por ser un polinomio.
b) $F(3,1)=0$.
c) Como $JF(x,y)=\begin{pmatrix}2xy & 3y^2+x^2\end{pmatrix}$, se tiene que $JF(3,1)=\begin{pmatrix}6 & 12\end{pmatrix}$. En particular $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$.
Por tanto el Teorema de la función implícita nos dice que se puede despejar $y=y(x)$ como función de x en un entorno de $x=3$. Además $y(x)$ es de clase C^∞ (igual que F) y su derivada es

$$y'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{2xy}{3y^2+x^2}$$

en un entorno de $x=3$. No sabemos la expresión concreta de la función $y(x)$ pero sí podemos calcular su valor en 3. Sabemos que $y(3)=1$ y que $y'(3)=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$. ◃

¿Qué ocurre si tenemos una ecuación con tres variables? La ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ es similar a la que motivó la discusión del teorema anterior. En este caso podemos plantearnos si se puede despejar una variable en función de las otras dos. El desarrollo es muy parecido. Consideremos la función $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$. Si podemos escribir $z=z(x,y)$ entonces podemos derivar $F(x,y,z(x,y))$ o, lo que es lo mismo, $x^2+y^2+z(x,y)^2=1$ respecto a x o a y y obtener las derivadas parciales de z:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \implies \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \implies \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Este resultado se puede extender a n variables.

Teorema 10.23. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un subconjunto abierto, $F : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $(a,b) \in U$ con $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.*
a) $F(a,b) = 0$,
b) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.
Entonces existe una única función g de clase C^1 definida en un entorno de a verificando que $g(a) = b$ y que $F(x, g(x)) = 0$. Además

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Teorema de la función implícita. Segunda versión.

Ejemplo 10.24. Comprobemos que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ define a z como función de las variables x e y en un entorno del punto $(0,0,1)$. Para ello consideremos la función $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ que es de clase C^∞. Entonces
a) $F(0,0,1) = 0$,
b) $JF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$, con lo que $JF(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y, en particular, se cumple que $\frac{\partial F}{\partial Z}(0,0,1) = 2 \neq 0$.

Aplicando la segunda versión del Teorema de la función implícita, se puede despejar $z = z(x,y)$ de forma que $Z(0,0) = 1$ y $F(x,y,z(x,y)) = 0$ en un entorno del punto $(0,0,1)$. Además

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x,y) \implies \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -\frac{0}{2} = 0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x,y) \implies \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -\frac{0}{2} = 0. \triangleleft$$

Plano tangente a una superficie dada implícitamente

Este resultado nos puede ser de utilidad para calcular el plano tangente a una superficie dada en coordenadas implícitas. Supongamos que dicha superficie viene dada mediante una función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por la ecuación $f(x,y,z) = 0$. Si queremos calcular el plano tangente en un punto (a,b,c) de dicha superficie, esto es, verificando que $f(a,b,c) = 0$ y queremos aplicar la fórmula que conocemos para el plano tangente de una función de dos variables, necesitamos poder despejar alguna variable en función de las otras dos. Si $\nabla f(a,b,c) \neq 0$, alguna derivada parcial es distinta de cero. Por simplificar, supongamos que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0.$$

El teorema de la función implícita nos dice que se puede despejar z como función de x e y y que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(a,b,c)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(a,b,c)$$

Por tanto, el plano tangente en el punto (a,b,c) es

$$\begin{aligned} z &= z(a,b) + \frac{\partial z}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial z}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &= c - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(a,b,c)(x-a) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(a,b,c)(y-b). \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)$ y pasando a un sólo miembro nos queda

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0.$$

Resumiendo,

Corolario 10.25. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase uno y sea $(a,b,c) \in A$. Supongamos que*
a) $f(a,b,c) = 0$,
b) $\nabla f(a,b,c) \neq 0$.
Entonces, el plano tangente a la superficie $f(x,y,z) = 0$ en el punto (a,b,c) es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0.$$

Versión general del Teorema de la función implícita

Teorema de la función implícita

Teorema 10.26. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable y de clase uno en un punto (a,b) del interior de U. Supongamos que*
a) $f(a,b) = 0$,
b) $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \neq 0$.
Entonces existen un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ y un abierto $B \subset \mathbb{R}^m$ con $(a,b) \in A \times B$ y una única función $g : A \to B$ tal que
a) $g(a) = b$,
b) $f(x, g(x)) = 0$ *para todo* $x \in A$.
c) g *es de clase* C^1 *en* a.
Además, si f es de clase C^k en a, entonces g también es de clase C^k en a.

10.5 Polinomio de Taylor

10.5.1 Derivadas de orden superior

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, podemos plantearnos la diferenciabilidad de sus derivadas parciales. Si $D_i f$ es derivable respecto a la variable x_j, notaremos a dicha función

$$D_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

En general, podemos hablar de derivadas parciales de orden k

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2} \ldots \partial x_{i_r}^{k_r}}$$

donde $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = k$.

Definición 10.27. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : A\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Diremos que f es de clase C^k si existen todas las derivadas parciales de orden k y son continuas. Diremos que la función es de clase C^∞ si existen las derivadas parciales de cualquier orden.

El problema del orden respecto al que derivamos es nuevo. Para funciones de una variable, la derivada segunda es simplemente la derivada segunda, pero para funciones de varias variables a priori no tenemos ninguna razón para asegurar que $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ coincida con $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$. ¿Importa el orden de derivación? En general la respuesta es sí. El Teorema de Schwarz nos dice que para funciones suficientemente regulares la respuesta es no.

Teorema 10.28. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Entonces $D_{ij} f = D_{ji} f$.*

Teorema de Schwarz

En general, si la función es de clase C^k, las derivadas parciales de orden k cruzadas coinciden o, dicho de otra manera, no importa el orden en que se derive.

10.5.2 Polinomio de Taylor

En completa analogía con el polinomio de Taylor para funciones de una variable

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se define el polinomio de Taylor para funciones de varias variables. En ambos casos las exigencias son las mismas: buscamos un polinomio de un determinado grado y cuyo valor y el de sus derivadas parciales coincidan con el de la función dada.

Definición 10.29. El *polinomio de Taylor* de orden 1 de una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in U$ es

Polinomio de Taylor

$$P_1(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)$$

El polinomio de Taylor de orden 2 es

$$P_2(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

FALTA
Añadir el polinomio de Taylor de orden n.

10.6 Extremos relativos

Máximo relativo

Definición 10.30. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Diremos que la función f alcanza *un máximo relativo* (respectivamente, un *mínimo relativo*) en $a \in A$ si se verifica que
a) $a \in \mathring{A}$, y
b) existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ (resp., $f(x) \geq f(a)$), para cualquier $x \in B(a, r)$.

En la búsqueda de los extremos de una función juegan un papel fundamental aquellos puntos que anulan la derivada.

Punto crítico

Definición 10.31. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en un conjunto abierto A. Diremos que $a \in A$ es un *punto crítico* de la función f si existen todas las derivadas parciales de f en a y valen cero.

Proposición 10.32. *Sea A un conjunto abierto, $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable y $a \in A$ un extremo relativo de f. Entonces a es un punto crítico de f.*

Esta proposición nos indica que para encontrar los extremos relativos primero hemos de buscar los puntos críticos. Como en el caso de funciones de una variable, esta condición no es suficiente. Si queremos tener la certeza de que estamos ante un extremo relativo tenemos que estudiar la segunda derivada.

Hessiano

Definición 10.33. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales de segundo orden. El *hessiano* de f en $a \in A$ es la función cuadrática que tiene como matriz asociada

$$\operatorname{Hess}(f)(a) = \begin{pmatrix} D_{11}f(a) & D_{12}f(a) & \ldots & D_{1n}f(a) \\ D_{21}f(a) & D_{22}f(a) & \ldots & D_{2n}f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}f(a) & D_{n2}f(a) & \ldots & D_{nn}f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} (a)$$

Matriz hessiana

conocida usualmente como *matriz hessiana*.

Si la función f es de clase C^2, la matriz hessiana es simétrica y, por tanto, diagonizable. Diremos que es
a) *definida positiva* si sus valores propios son positivos,
b) *definida negativa* si sus valores propios son negativos,
c) *semidefinida positiva* si sus valores propios son mayores o iguales que cero y alguno de ellos es cero,
d) *semidefinida negativa* si sus valores propios son menores o iguales que cero y alguno de ellos es cero, e
e) *indefinida* si hay valores propios positivos y negativos.

Condición necesaria para la existencia de extremos relativos

Teorema 10.34. *Sea A un conjunto abierto y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Sea $a \in A$ un punto crítico de f.*
a) Si f tiene un mínimo relativo en a, entonces $\operatorname{Hess}(f)(a)$ es definido o semidefinido positivo.
b) Si f tiene un máximo relativo en a, entonces $\operatorname{Hess}(f)(a)$ es definido o semidefinido negativo.

Este resultado lo usaremos para demostrar que *no* hay extremo relativo. Por ejemplo, el origen es el único punto crítico la función $f(x, y) = x^2 - y^4$. Además la matriz hessiana en dicho punto es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que es una matriz semidefinida postiva. Por tanto, si en el origen hay un extremo relativo, sólo cabe la posibilidad de que sea un mínimo relativo. Esto no es posible porque sobre el eje OY la función tiene un máximo relativo: sobre dicho eje la función es $f(0, y) = -y^4$.

Teorema 10.35. *Sea A un conjunto abierto y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Sea $a \in A$ un punto crítico de f.*
a) Si $\operatorname{Hess}(f)(a)$ es definido positivo, f tiene un mínimo relativo en a,
b) si $\operatorname{Hess}(f)(a)$ es definido negativo, f tiene un máximo relativo en a, y
c) si $\operatorname{Hess}(f)(a)$ es indefinido, f no tiene un extremo relativo en a.

Condición suficiente para la existencia de extremos relativos

A los puntos críticos en los que no se alcanza un extremo relativo se les suele llamar *puntos de silla*. En la Figura 10.4 puedes ver el aspecto que tienen: el origen es un máximo o un mínimo según en que dirección nos movamos. En particular, en el origen la función aquí representada no tiene un extremo relativo.

Punto de silla

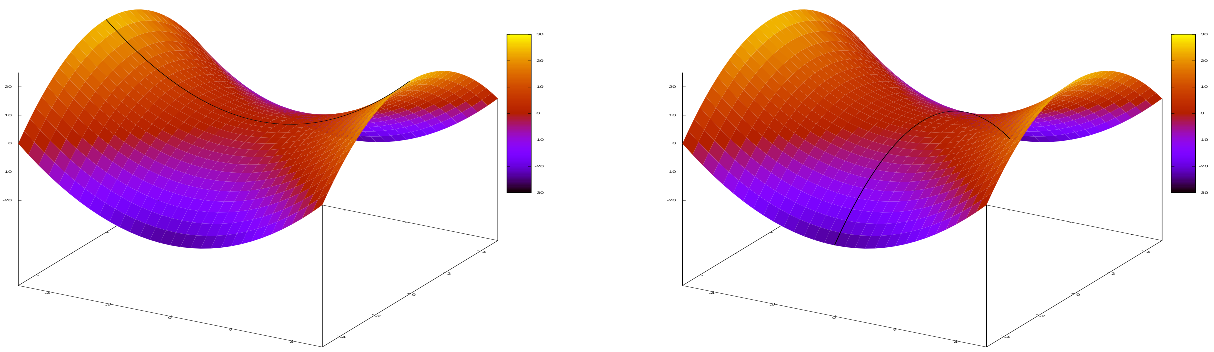


Figura 10.4 La función $f(x, y) = x^2 - y^2$ tiene un punto de silla en el origen

Extremos de funciones de dos variables

Como los valores propios de una matriz son las raíces de su polinomio característico, si la matriz es de orden alto puede ser difíciles de calcular. En realidad, sólo necesitamos saber el *signo* de dichos valores propios para estudiar extremos relativos. Por ejemplo, si f es una función de dos variables la matriz hessiana es una matrix 2×2. También sabemos que el determinante de una matriz es el producto de sus valores propios. Por tanto, en una matriz $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, se pueden presentar los siguientes casos.

a) Si $\det(H) = ac - b^2 < 0$, entonces sus dos valores propios tienen signos opuestos y, en particular, H es indefinida.
b) Si $\det(H) = 0$, entonces H es semidefinida.
c) Si $\det(H) = ac - b^2 > 0$, entonces los dos valores propios tienen el mismo signo y, por tanto, H es definida. Pero ¿definida positiva o definida negativa?. Veamos el signo de los valores propios

$$0 = \det(H - xI) = \det\begin{pmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{pmatrix} = x^2 - (a+c)x + ac - b^2. \tag{10.1}$$

i) Si $a > 0$, entonces $c > 0$ y las raíces del polinomio característico tienen que ser positivas y, por tanto, H es definida positiva.

ii) Si $a < 0$, entonces $c < 0$ y los valores propios son negativos y, en consecuencia, H es una matriz definida negativa.

Ejemplo 10.36. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = x^2 + (1-x)^3 y^2.$$

Calculemos, en primer lugar, los puntos críticos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - 3(1-x)^2y^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2(1-x)^3y = 0 \end{aligned}\right\} \iff (x,y) = (0,0).$$

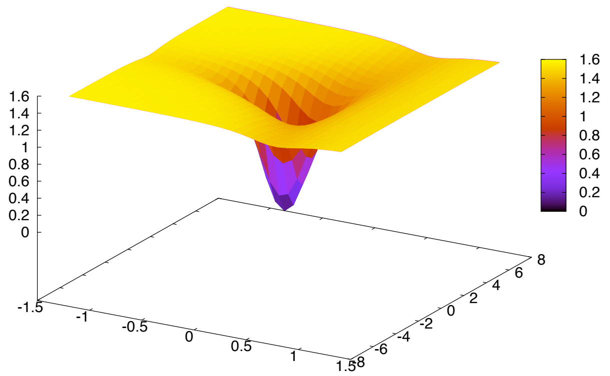


Figura 10.5 Representación de la función f escalada

El hessiano de la función f es

$$\operatorname{Hess}(f)(a) = \begin{pmatrix} 2 + 6(1-x)y^2 & -6(1-x)^2y \\ -6(1-x)^2y & 2(1-x)^3 \end{pmatrix},$$

En el origen vale $\operatorname{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, que es una matriz definida positiva y, por tanto, f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$.

Es fácil comprobar que la función f *no está acotada* superior ni inferiormente y que, en consecuencia, la función f no tiene máximo ni mínimo absolutos. Esto es un ejemplo de una situación que no se presenta en una variable: hemos encontrado una función con un único mínimo relativo que no es un mínimo absoluto. ◂

Extremos de funciones de varias variables

El cálculo exacto de las soluciones del polinomio característico cuando la función tiene más de dos variables no es práctico. Como hemos dicho antes sólo es necesario conocer el signo de los valores propios y no su valor concreto. Hay muchos métodos que permiten esto. Pasemos a comentar algunos de ellos.

Si A es una matriz cuadrada de orden n, notaremos Δ_k al determinante de la matriz obtenida al suprimir las últimas $n-k$ filas y columnas. Normalmente nos referiremos a ellos como *determinantes principales.*

Determinante principal

Proposición 10.37. *Sea A una matriz simétrica de orden n con determinante no nulo.*

Criterio de Sylvester

a) A es definida positiva si, y sólo si, $\Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.
b) A es definida negativa si, y sólo si, $(-1)^k \Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

En el caso $n = 2$, el criterio de Sylvester no es más que la observación anterior ya que los determinantes principales son $\Delta_1 = a$, $\Delta_2 = ac - b^2$.

Otra manera de averiguar si la matriz hessiana es definida positiva o negativa es discutir el signo de las soluciones del polinomio característico, o sea, de los valores propios. La siguiente regla puede ser muy útil en ocasiones.

Proposición 10.38. *Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ un polinomio con coeficientes y raíces reales. Entonces*

Regla de los signos de Descartes

a) El número de raíces positivas incluyendo multiplicidades es el número de cambios de signo de la sucesión a_0, a_1,..., a_n de los coeficientes de $p(x)$.
b) El número de raíces negativas incluyendo multiplicidades es el número de cambios de signo de la sucesión a_0, $-a_1$,...,$(-1)^n a_n$ de los coeficientes de $p(-x)$.

Ejemplo 10.39.

a) El número de raíces positivas de $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ es el número de cambios de signo de la sucesión 3, −1, −3, 1. Por tanto, tiene dos raíces positivas. Para contar raíces negativas, miramos los cambios de signo en la sucesión 3, 1, −3, −1. Hay un cambio de signo y, por tanto, sólo una raíz negativa. Este último paso nos lo podíamos haber ahorrado: un polinomio de grado tres con dos raíces positivas y, como cero no es solución, tiene forzosamente que tener una única raíz negativa.
b) Podemos aprovechar esta regla para calcular el signo de los valores propios. Por ejemplo, si H es la matriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix},$$

entonces su polinomio característico es $\det(H - xI) = -x^3 + 3x^2 + \frac{73x}{4} - \frac{137}{4}\Gamma$. Si miramos los coeficientes: $-\frac{137}{4}\Gamma$, $\frac{73}{4}$, 3, −1, vemos que hay dos cambios de signo. Esto quiere decir que hay dos valores propios positivos y el tercero tiene que ser necesariamente negativo. Por tanto, la forma cuadrática asociada a la matriz H es indefinida.

Con estas herramientas ya podemos resolver un problema de extremos relativos.

Ejemplo 10.40. Vamos a estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y, z) = -x^3 + 3x + 2y^2 + 4yz + 3y + 8z^2.$$

Comenzamos calculando los puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = & -3x^2 + 3 & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = & 4y + 4z + 3 & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = & 4y + 16z & = 0 \end{array}\right\} \iff (x, y, z) = \left(\pm 1, -1, \frac{1}{4}\right).$$

En segundo lugar, calculamos la matriz hessiana.

$$\operatorname{Hess}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -6x & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

Y por último comprobamos el signo de los los valores propios de la matriz hessiana en cada uno de los puntos críticos:

a) En el punto $\left(1,-1,\frac{1}{4}\right)$, la matriz hessiana es

$$\operatorname{Hess}(f)\left(1,-1,\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

y tiene como polinomio característico $-x^3+14x^2+72x-288$. Como cambia dos veces de signo, hay dos valores propios positivos y el tercero será negativo. Por tanto la matriz hessiana es indefinida y f no tiene un extremo en $\left(1,-1,\frac{1}{4}\right)$.

b) En el punto $\left(-1,-1,\frac{1}{4}\right)$, la matriz hessiana es

$$\operatorname{Hess}(f)\left(-1,-1,\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

que tiene como polinomio característico $-x^3 + 26x^2 - 168x + 288$. Ahora tenemos tres cambios de signo y, por tanto, tres valores propios positivos. En consecuencia, f tiene un mínimo absoluto en $\left(-1,-1,\frac{1}{4}\right)$.

Resumiendo la función f tiene un único extremo relativo: un mínimo relativo en $\left(-1,-1,\frac{1}{4}\right)$.
◁

10.7 Extremos condicionados

Algunas veces queremos encontrar los extremos de una función f pero no nos interesa todo el dominio sino sólo una parte. Por ejemplo, ¿cómo podríamos buscar el punto más cercano al origen de los puntos de la circunferencia centrada en (2,3) y de radio 1? En otras palabras, queremos encontrar los mínimos de la función distancia al origen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},$$

sometida a la restricción $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Normalmente las restricciones vienen dadas en términos de una o varias ecuaciones. Aquí tenemos $g(x,y) = (x-2)^2+(y-3)^2 = 1$. Es este tipo de extremos a los que llamaremos extremos condicionados.

Máximo condicionado

Definición 10.41. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}^m$ dos funciones definidas en un conjunto abierto A y $c \in \mathbb{R}$. Diremos que f alcanza un *máximo relativo condicionado* en $a \in A$ a $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}$ o, más brevemente, un máximo condicionado si existe un $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ para cualquier $x \in B(a,r) \cap S$. De forma análoga se define *mínimo relativo condicionado*.

Los extremos condicionados no son más que los extremos relativos de la función f restringida al conjunto S. En el caso de que dicho extremo se encuentre en el interior de A podemos aplicar las técnicas ya descritas para el cálculo de extremos relativos. El método de los multiplicadores de Lagrange nos va a permitir estudiar el caso de que dichos extremos se encuentren en la frontera de A.

10.7.1 Método de los multiplicadores de Lagrange

Una condición necesaria para la existencia de extremos condicionados en un punto es que dicho punto sea un punto crítico, aunque no para la función original sino para una función que pasamos a construir.

Teorema 10.42. *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : A \subset R^n \to \mathbb{R}^m$ con $m < n$ funciones de clase C^1 en un abierto A y $c \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que f tiene un extremo condicionado a la variedad $S = \{x \in A : \ g(x) = c\}$ en $a \in S$ y que el rango de $g'(a)$ es m. Entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que la función $F(x) = f(x) + \lambda_1 g^1(x) + \ldots \lambda_m g^m(x)$ tiene un punto crítico en a.*

Condición necesaria para la existencia de extremos condicionados

La función auxiliar F recibe el nombre de *función de Lagrange* y a los números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ se les llama *multiplicadores de Lagrange.*

Función de Lagrange
Multiplicador de Lagrange

El teorema anterior es el análogo al hecho de que los extremos de una función sean puntos críticos, sólo que en este caso son puntos críticos de una función distinta. Si queremos una condición suficiente tenemos que mirar la "segunda derivada". Vamos a estudiar la matriz hessiana de la función de Lagrange.

Teorema 10.43. *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : A \subset R^n \to \mathbb{R}^m$ con $m < n$ funciones de clase C^2 en un abierto A y $c \in \mathbb{R}^m$. Sea $a \in S = \{x \in A : \ g(x) = c\}$ un punto crítico de la función de Lagrange F. Entonces,*

a) Si $\operatorname{Hess}(F)(a)_{|\ker(g'(a))}$ es definido positivo, f tiene un mínimo condicionado en a.
b) Si $\operatorname{Hess}(F)(a)_{|\ker(g'(a))}$ es definido negativo, f tiene un máximo condicionado en a.
c) Si $\operatorname{Hess}(F)(a)_{|\ker(g'(a))}$ es indefinido, f no alcanza un extremo condicionado en a.

Condición suficiente para la existencia de extremos condicionados

Ejemplo 10.44. Calcular los extremos condicionados de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ en el conjunto $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\}$.
Tomemos $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. La función auxiliar de Lagrange será

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Los puntos críticos deben verificar

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y + 2\lambda x &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x + 2\lambda y &= 0 \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son

$$\lambda = -\frac{1}{2},\ x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\lambda = -\frac{3}{2},\ x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tenemos, por tanto, cuatro puntos críticos. La matrix hessiana de la función de Lagrange es $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & -1 \\ -1 & 2+2\lambda \end{pmatrix}$. En los puntos $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, la matriz hessiana es $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, o sea, semidefinida. Para ver si f alcanza un extremos condicionado tenemos que restringir el hessiano de F al núcleo de la derivada. En el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\ker\left(g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (x,y)\right\rangle = 0\right\},$$

que está generado, por ejemplo, por el vector $(1,-1)$. Por tanto, la matriz hessiana restringida al núcleo tiene como matriz

$$(1,-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (4),$$

que es definida positiva y, por tanto, f tiene un mínimo condicionado en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

En el punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\ker\left(g'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \left\langle\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (x,y)\right\rangle = 0\right\},$$

está generado también por el vector $(1,-1)$. Por tanto, la matriz hessiana restringida al núcleo vuelve a ser

$$(1,-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (4),$$

y, en consecuencia, f tiene un mínimo condicionado en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

En los puntos $\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, la matriz hessiana es $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ es semidefinida.

En el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\ker\left(g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (x,y)\right\rangle = 0\right\},$$

que está generado, por ejemplo, por el vector $(1,1)$. Por tanto, la matriz hessiana restringida al núcleo tiene como matriz

$$(1,1)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-4),$$

que es definida negativa y, por tanto, f tiene un máximo condicionado en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

En el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ se comprueba de forma análoga que f tiene un mínimo condicionado en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ◁

10.8 Extremos absolutos

La única condición suficiente que conocemos que garantiza la existencia de extremos absolutos de una función es la propiedad de compacidad (Teorema 9.36). Dichos extremos deben ser extremos relativos, si están en el interior del dominio, o extremos relativos condicionados si se encuentran en la frontera. Si la frontera es sencilla podemos estudiarla directamente, en otro caso podemos utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para buscar candidatos a extremos absolutos. Veamos algún ejemplo de estas situaciones. Comenzemos con una frontera sencilla.

Ejemplo 10.45. Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - y^2 - x + y$ en el cuadrado $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x, y \le 1\right\}$.
La función f es continua y A es cerrado y acotado, por tanto, f tiene máximo y mínimo absolutos. Si se encuentran en el interior de A serán extremos relativos y, como f es diferenciable, puntos críticos. En consecuencia deben cumplir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2y + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \iff (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

La frontera del conjunto A está formada por los cuatro segmentos que unen los vértices. Vamos a estudiarlos por separado.

a) *Segmento* $\overline{(0,0)(1,0)}$ En este segmento $y = 0$, con lo que la función queda $f(x,0) = x^2 - x$ con $x \in [0,1]$. La derivada es $2x - 1$ que sólo se anula en $x = 1/2$. Por tanto los extremos absolutos se podrían alcanzar en $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(1,0)$.
b) *Segmento* $\overline{(1,0)(1,1)}$ En este segmento $x = 1$, con lo que la función queda $f(1,y) = -y^2 + y$ con $y \in [0,1]$. Procediendo de la misma forma que en el anterior apartado, los candidatos a extremo absoluto son $(1,0)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, y $(1,1)$.
c) *Segmento* $\overline{(1,1)(0,1)}$ En este segmento $y = 1$, con lo que la función queda $f(x,1) = x^2 - x$ con $x \in [0,1]$. Los posibles extremos se pueden alcanzar en $(1,1)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, y $(0,1)$.
d) *Segmento* $\overline{(0,1)(0,0)}$ En este segmento $x = 0$, con lo que la función queda $f(0,y) = -y^2 + y$ con $y \in [0,1]$. Los posibles extremos se pueden alcanzar en $(0,1)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, y $(0,0)$.

Recapitulemos: los extremos absolutos, que seguro que existen, sólo pueden alcanzarse en alguno de los puntos que hemos calculado. Vamos a evaluar la función y veamos cuál es el máximo y cuál es el mínimo: $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f(0,0) = f(1,1) = f(0,1) = f(1,0) = 0$, $f\left(1, \frac{1}{2}\right) = f\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ y $f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}$. Por tanto, el mínimo absoluto se alcanza en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, y el máximo absoluto se alcanza en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. ◁

En este segundo ejemplo, vamos a utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para buscar candidatos a extremos absolutos en la frontera del dominio.

Ejemplo 10.46. Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - x + y^2$ en el conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.
La función f es continua y A es un conjunto cerrado y acotado por lo que f alcanza su máximo y mínimo absolutos. Estudiemos por separado el interior y la frontera.
En $\mathring{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$, los puntos críticos son

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y = 0 \end{aligned}\right\} \iff (x,y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \in \mathring{A}.$$

Para la frontera, $\operatorname{Fr}(A) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$, podemos aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange y buscar puntos críticos de la función auxiliar de Lagrange $F(x,y) = x^2 - x + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 1$. Tenemos que resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= 2x - 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2}, \ x = 1, \ y = 0 \\ \lambda = -\dfrac{3}{2}, \ x = -1, \ y = 0. \end{cases}$$

En resumen, los únicos candidatos a extremos absolutos son los puntos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$. Si evaluamos $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2}$, $f(1,0) = 0$ y $f(-1,0) = 2$. Por tanto, el mínimo absoluto se alcanza en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y el máximo absoluto en $(-1,0)$. ◂

Ejemplo 10.47. Calcular el rectángulo con los lados paralelos a los ejes de mayor área que se puede inscribir entre las gráficas de las curvas $y = \frac{x^2}{2}$ e $y = \sqrt{2x}$.
FALTA ◂

10.9 Ejercicios

10.9.1 Diferenciabilidad.

Ejercicio 10.1. Calcular las derivadas parciales de:
a) $f(x,y,z) = x^{y+z}, \forall x \in \mathbb{R}^+, y, z \in \mathbb{R}$,
b) $f(x,y,z) = (x+y)^z, \forall x, y \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}$, y
c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Solución 10.1.
a) $\frac{\partial f}{\partial x} = (y+z)x^{y+z-1}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = x^{y+z}\ln(x), \ \frac{\partial f}{\partial z} = x^{y+z}\ln(x)$
b) $\frac{\partial f}{\partial x} = z(x+y)^{z-1}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = z(x+y)^{z-1}, \ \frac{\partial f}{\partial z} = (x+y)^z\ln(x+y)$
c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x\operatorname{sen}(y))\operatorname{sen}(y), \ \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(x\operatorname{sen}(y))\cos(y)$

Ejercicio 10.2. Determinar los gradientes en un punto cualquiera de $\mathbb{R}^3$ de las siguientes funciones:
a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$,
b) $f(x,y,z) = xyz$.

Solución 10.2.
a) $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$.
b) $\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.

Ejercicio 10.3. Encontrar la derivada direccional de f en a según la dirección de h en los siguientes casos:
a) $f(x,y) = xy^2$, $a = (2,1)$, $h = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$.
b) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$, $a = (1,1,0)$, $h = (0,0,1)$.

Solución 10.3.
a) Como $Df(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \end{pmatrix}$, se tiene que

$$D_h f(a) = Df(a)(h) = \left\langle (1,4), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

b) Dado que $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}$, se tiene que

$$D_h f(a) = Df(a)(h) = \langle (3,3,0), (0,0,1) \rangle = 0.$$

Ejercicio 10.4. Calcular el plano tangente de la función $f(x,y) = x^2y - xy^2 + y^5 - 3$ en el punto $(-1,1)$.

Solución 10.4. El plano tangente es

$$z = f(-1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)(x+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)(y-1) = 0 - 3(x+1) + 8(y-1),$$

o, lo que es lo mismo, $3x - 8y + z + 11 = 0$.

Ejercicio 10.5. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$.

Solución 10.5. El plano tangente en $(0,0)$ es $z = 0$ y en $(1,2)$ es $z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2)$.

Ejercicio 10.6. Calcular el plano tangente a la función $f(x,y) = x^2 + 3xy + 8y^2$ en el punto $(0,1)$.

Solución 10.6. La ecuación es $z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$. En nuestro caso: $z = 8 + (3,16) \cdot (x, y-1)$ quedando $z = 3x + 16y - 8$.
Otra forma de hacerlo es considerar la superficie dada $z = f(x,y)$ o, si se quiere, $f(x,y) - z = 0$ como el conjunto de nivel cero de la función $F(x,y,z) = f(x,y) - z$. Visto así,

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

será un vector normal a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) y podremos usarlo como vector normal al plano buscado, cuya ecuación será:

$$(3, 16, -1) \cdot (x, y - 1, z - 8) = 0.$$

Ejercicio 10.7. Determinar la dirección respecto de la cual, la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = xy^2 + yz + z^2x^2$ en el punto $(1, 2, -1)$, tenga un valor máximo.

Solución 10.7. La derivada siempre es máxima en la dirección del gradiente. El gradiente de f es $\nabla f(x, y, z) = (y^2 + 2xz^2, 2xy + z, y + 2x^2z)$, y en el punto $(1, 2, -1)$ nos queda $\nabla f(1, 2, -1) = (6, 3, 0)$.

Ejercicio 10.8. Dada la función $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, hallar en el punto $(2, 3)$ la derivada según la dirección definida por $y = \frac{2}{3}x$ y el valor máximo de la derivada direccional.

Solución 10.8. La diferencial de la función es $Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$ y, en el punto $(2, 3)$ queda $Df(2, 3) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{13^2} & -\frac{6}{13^2} \end{pmatrix}$. Un vector director de la recta $y = \frac{2}{3}x$ es, por ejemplo, $v = (1, \frac{2}{3})$ que tiene módulo $\sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Por tanto,

$$D_v f(2, 3) = \frac{3}{\sqrt{13}} \left\langle Df(2, 3), \left(1, \frac{2}{3}\right) \right\rangle = \frac{-24}{13^2\sqrt{13}}.$$

Por último, el valor máximo de la derivada direccional es $\left\| \nabla f(2, 3) \right\| = \frac{\sqrt{52}}{169}$.

Ejercicio 10.9. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, con $f(0, 0) = 0$ y derivadas direccionales en $(0, 0)$ en las direcciones $v_1 = (1, 2)$ y $v_2 = (1, -1)$ que valen 1 y -1 respectivamente, hallar el gradiente de f en el origen.

Solución 10.9. Sabemos que $Df(0, 0)(v_1) = 1$ y $Df(0, 0)(v_2) = -1$. Notemos $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Entonces $e_1 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2$, y $e_2 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2$. La linealidad de $Df(0, 0)$ nos da que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= Df(0, 0)(e_1) = Df(0, 0)\left(\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2\right) \\
&= \frac{1}{3}Df(0, 0)(v_1) + \frac{2}{3}Df(0, 0)(v_2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \text{ y que} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= Df(0, 0)(e_2) = Df(0, 0)\left(\frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2\right) \\
&= \frac{1}{3}Df(0, 0)(v_1) - \frac{1}{3}Df(0, 0)(v_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 10.10. Una función f definida en un abierto del plano se dice que es *armónica* si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

en todo punto de su dominio. ¿Son armónicas las siguientes funciones?
a) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$.

b) $g(x,y) = e^{-x}\cos(y) + e^{-y}\cos(x)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución 10.10.
a) Las derivadas parciales respecto a x son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Las derivadas parciales respecto a y son:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Por tanto, la función es armónica.
b) Las derivadas parciales respecto a x son:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -e^{-x}\cos(y) - e^{-y}\operatorname{sen}(x), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = e^{-x}\cos(y) - e^{-y}\cos(x).$$

Las derivadas parciales respecto a y son:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -e^{-x}\operatorname{sen}(y) - e^{-y}\cos(x), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -e^{-x}\cos(y) + e^{-y}\cos(x).$$

Por tanto, la función es armónica.

Ejercicio 10.11. Sea f la función definida como $f(x,y,z) = (3x-2y+z, x+3y-2z)$. Probar que f es diferenciable en cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ y obtener la diferencial en (1,1,1).

Solución 10.11. La función es lineal y, por tanto, es diferenciable. También es inmediato comprobar que todas las derivadas parciales existen y son constantes (en particular, continuas). La diferencial es $Df(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

10.9.2 Regla de la cadena

Ejercicio 10.12. Sean las funciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidas por

$$f(x,y,z) = \left(\operatorname{sen}(xy+z), (1+x^2)^{yz}\right), \ g(u,v) = (u+e^v, v+e^u).$$

a) Calcular $Df(1,-1,1)$,
b) Calcular $Dg\left(0,\frac{1}{2}\right)$, y
c) Calcúlese $D(g\circ f)(1,-1,1)$.

Solución 10.12.
a) La función f es diferenciable porque todas las derivadas parciales son continuas. La diferencial de f es

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(xy+z)y & \cos(xy+z)x & \cos(xy+z) \\ 2xyz(1+x^2)^{yz-1} & z(1+x^2)^{yz}\ln(1+x^2) & y(1+x^2)^{yz}\ln(1+x^2) \end{pmatrix},$$

y en el punto $(1,-1,1)$

$$Df(1,-1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\ln(2)}{2} & -\frac{\ln(2)}{2} \end{pmatrix}$$

b) La función g también es diferenciable por el mismo motivo. Su diferencial es $Dg(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & e^v \\ e^u & 1 \end{pmatrix}$. Sustituyendo en el punto $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ nos queda $Dg(0,\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{e} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Utilizando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} D(g\circ f)(1,-1,1) =& Dg(f(1,-1,1))\circ Df(1,-1,1) \\ =& \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{e} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\ln(2)}{2} & -\frac{\ln(2)}{2} \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -1-\frac{\sqrt{e}}{2} & \frac{2+\sqrt{e}\ln(2)}{2} & \frac{2-\sqrt{e}\ln(2)}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{2+\ln(2)}{2} & \frac{2-\ln(2)}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio 10.13. Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y) = \left(x^2, y^2, x-y\right)$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2+2y-z$. Definimos $h = g\circ f$. Calcular $Dh(1,-1)$.

Solución 10.13. Por la regla de la cadena, $D(h)(1,-1) = Dg(f(1,-1))\circ Df(1,-1)$. Calculemos en primer lugar la diferencial de f:

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$Df(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $f(1,-1) = (1,1,2)$, $Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y, por tanto, $Dg(1,1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Por último,

$$Dh(1,-1) = Dg(f(1,-1))\circ Df(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10.14. Sean las funciones $f(x,y,z) = \left(e^x+y^2, ke^z+y\right)$ (donde $k\in\mathbb{R}$ es un parámetro), $g(u,v) = v^2+\ln(u)$ si $u>0$. ¿Qué valor debe tomar k para que la derivada direccional máxima de $(g\circ f)$ en $(0,0,0)$ sea igual a 1?.

Solución 10.14. Utilizamos la regla de la cadena para calcular la derivada de la composición:

$$\begin{aligned} J(g\circ f)(0,0,0) &= Jg(f(0,0,0))\cdot Jf(0,0,0) = Jg(1,k)\cdot Jf(0,0,0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como el valor de la derivada direccional máxima es $\left\| \nabla(g\circ f)(0,0,0) \right\|$,

$$1 = \left\| \nabla(g \circ f)(0,0,0) \right\| = \left\| \left(1, 2k, 2k^2\right) \right\| \iff k = 0.$$

Ejercicio 10.15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $z = f\left(x^2 y\right)$, probar que $x\frac{\partial z}{\partial x} = 2y\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solución 10.15. Es inmediato usando que $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xyf'(x^2y)$ y que $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 f'(x^2y)$.

Ejercicio 10.16. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables. Se define la función de dos variables $z(x,y) = x^2yf(u) + xy^2g(v)$, con $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{x}$. Calcular $x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$.

Solución 10.16. Calculemos primero $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ utilizando la reglas de derivación de un producto y de la cadena.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) =& 2xyf(u) + x^2yf'(u)\frac{1}{y} + y^2g(v) - xy^2g'(v)\frac{y}{x^2} \\
=& 2xyf(u) + x^2f'(u) + y^2g(v) - \frac{y^3}{x}g'(v), \\
\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) =& x^2f(u) - x^2yf'(u)\frac{x}{y^2} + 2xyg(v) + xy^2g'(v)\frac{1}{x} \\
=& x^2f(u) - \frac{x^3}{y}f'(u) + 2xyg(v) + y^2g'(v).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) =& x\left(2xyf(u) + x^2f'(u) + y^2g(v) - \frac{y^3}{x}g'(v)\right) \\
&+ y\left(x^2f(u) - \frac{x^3}{y}f'(u) + 2xyg(v) + y^2g'(v)\right) \\
=& 3x^2yf(u) + 3xy^2g(v) \\
=& 3z(x,y).
\end{aligned}$$

Ejercicio 10.17. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Demostrar que

$$f(x,y) = x^2 g\left(\frac{x}{y}\right) + xyh\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right)$$

verifica la relación $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$.

Solución 10.17. Sólo hay que calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, el resto es simple comprobación. Si notamos u y v a las dos variables de la función h,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xg\left(\frac{x}{y}\right) + x^2g'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y} + yh(u,v) + xy\left[\frac{\partial h}{\partial u}\frac{y}{(x+y)^2} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{2x}{y^2}\right] \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{x^3}{y^2}g'\left(\frac{x}{y}\right) + xh(u,v) - xy\left[\frac{\partial h}{\partial u}\frac{x}{(x+y)^2} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{2x^2}{y^3}\right].
\end{aligned}$$

Ejercicio 10.18. Calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ siendo $F(u, v) = u^m v^n$ con $u = \cos(ax)$ y $v = \operatorname{sen}(ax)$.

Solución 10.18. $\frac{\partial F}{\partial x} = -mu^{m-1}\operatorname{sen}(ax)av^n + nv^{n-1}\cos(ax)au^m$.

Ejercicio 10.19. Sea $u = f\left(x^2 + 2yz, y^2 + 2xz\right)$ con f diferenciable. Probar que:

$$\left(y^2 - xz\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(x^2 - yz\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(z^2 - xy\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Solución 10.19. Denotando v y w a las variables de la función f, sólo hay que sustituir en la ecuación las siguientes derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial v} + 2z\frac{\partial f}{\partial w}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2z\frac{\partial f}{\partial v} + 2y\frac{\partial f}{\partial w}, \ \frac{\partial u}{\partial z} = 2y\frac{\partial f}{\partial v} + 2x\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Ejercicio 10.20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $v = f(x, y)$, donde $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\operatorname{sen}(\theta)$, probar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

Solución 10.20. Calculemos, en primer lugar, las derivadas parciales de v.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}(\theta),\\
\frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\rho\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos(\theta).
\end{aligned}$$

Calculemos ahora las derivadas parciales de segundo orden. Para ello volvemos a utilizar la regla de la cadena y la regla de la derivada de un producto.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} &= \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos(\theta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) + \operatorname{sen}(\theta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)\\
&= \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \operatorname{sen}^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} =& \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\rho\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos(\theta)\right)\\
=& -\rho\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\\
& -\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + \rho\cos(\theta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\\
=& -\rho\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\rho\,\mathrm{sen}(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\rho\cos(\theta)\right)\\
& -\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + \rho\cos(\theta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-\rho\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\rho\cos(\theta)\right)\\
=& -\rho\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + \rho^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\
& -2\rho^2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \rho^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

La comprobación de la fórmula $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}$ es, ahora, inmediata.

Ejercicio 10.21. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de F donde f es una función "suficientemente derivable" como para que las derivadas parciales de segundo orden de F existan y sean continuas.

a) $F(x,y) = f(ax+by)$
b) $F(x,y) = f(ax+by, cx+dy)$
c) $F(x,y) = xf(y,y) + yf(x,x)$
d) $F(x,y) = f(x, xy, x+y)$

Solución 10.21.
a)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(ax+by)a \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(ax+by)b$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''(ax+by)a^2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) = f''(ax+by)ab \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f''(ax+by)b^2$$

b) Denotemos u y v las variables de f. Las derivadas parciales de primer orden son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}a + \frac{\partial f}{\partial v}c,\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}b + \frac{\partial f}{\partial v}d,
\end{aligned}$$

y las derivadas parciales de segundo orden son

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}a + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}c\right) + c\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}a + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}b + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}d\right) + c\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}b + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}d\right)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = b\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}b + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}d\right) + d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}b + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}d\right)$$

c) Las derivadas parciales de primer orden son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(y,y) + y\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = x\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) + f(x,x),$$

y las derivadas de segundo orden son

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

d) FALTA

10.9.3 Función inversa. Función implícita

Ejercicio 10.22. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable de modo que $f(0,0) = (0,0)$ y la matriz jacobiana en $(0,0)$ vale $Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sean f_1, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de f. Determinar en cada caso, la matriz jacobiana de F en $(0,0)$.

a) $F(x,y) = (x, f_1(x,y))$
b) $F(x,y) = (x^2 f_1(x,y), y^2 f_2(x,y))$
c) $F(x,y) = f(f(x,y))$
d) $F(x,y) = (f_1(f_2(x,y), f_2(x,y)), f_2(f_1(x,y), f_1(x,y))$

Solución 10.22.
a) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (x, f_1(x,y))$; entonces

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

y, por tanto, $JF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Sea $F(x,y) = \left(x^2 f_1(x,y), y^2 f_2(x,y)\right)$; entonces

$$JF(x,y)=\begin{pmatrix} 2xf_1+x^2\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & x^2\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ y^2\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & 2yf_2+y^2\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

y, por tanto, JF(0,0) = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Utilizando la regla de la cadena se tiene que $JF(x,y) = Jf(f(x,y)) \cdot Jf(x,y)$ de donde $JF(0,0) = Jf(0,0) \cdot Jf(0,0)$. Por tanto,

$$JF(0,0)=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 27 & 10 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Para calcular la matriz jacobiana de F vamos a ir derivando parcialmente cada componente y así obtenemos cada una de las dos filas de la matriz pedida.
La primera componente es $F_1(x,y) = f_1(f_2(x,y), f_2(x,y)) = f_1(u,v)$ y aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f_1}{\partial u}(0,0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)+\frac{\partial f_1}{\partial v}(0,0)\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=5\cdot 1+2\cdot 1=7,$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f_1}{\partial u}(0,0)\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)+\frac{\partial f_1}{\partial v}(0,0)\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=5\cdot 0+2\cdot 0=0.$$

La segunda componente es $F_2(x,y) = f_2(f_1(x,y), f_1(x,y)) = f_2(u,v)$ y aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f_2}{\partial u}(0,0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)+\frac{\partial f_2}{\partial v}(0,0)\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=1\cdot 5+0\cdot 5=1,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f_2}{\partial u}(0,0)\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)+\frac{\partial f_2}{\partial v}(0,0)\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=1\cdot 2+0\cdot 2=2.$$

Por tanto, la matriz jacobiana pedida es $JF(0,0) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10.23. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y) = \left(e^{xy}, \operatorname{sen}(x^2+y^2)\right)$. Calcular la matriz jacobiana de la función inversa de F en el punto $F(0,1)$.

Solución 10.23. La derivada en $(0,1)$ es $JF(0,1) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 2\cos(2) \end{pmatrix}$ y la jacobiana de la función inversa en el punto $F(0,1)$ es

$$JF(0,1)=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 2\cos(2) \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\cos(2)} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10.24. Calcular la recta tangente a $xe^y + y - 2x = \ln(2)$ en el punto $(1, \ln(2))$.

Solución 10.24. La recta tangente es $0(x-1) + 3\,(y - \ln(2)) = 0$ o, lo que es lo mismo, $y = \ln(2)$.

E **Ejercicio 10.25.** Encontrar la recta tangente a la curva, dada en coordenadas implícitas,

$$x^2+y^2=4,\ x^2+y^2-z=0$$

en el punto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\right)$.

Solución 10.25. La recta tangente es la intersección de los planos tangentes de las dos superficies:

$$\left.\begin{aligned} 2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+2\sqrt{2}(y-\sqrt{2}) &= 0 \\ 2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+2\sqrt{2}(y-\sqrt{2})-(z-4) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 10.26. Comprobar que en las siguientes ecuaciones se verifican las condiciones del teorema de la función implícita en el punto indicado y obtener $y'(x)$ en los cuatro primeros casos y $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en los otros.

a) $x^y+3x^2-2y^2-2y=0,\ (1,1)$
b) $\operatorname{sen}(x)+\cos(y)+2y=\pi,\ \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
c) $y\ln\left(x^2+y^2\right)-2xy=0,\ (0,1)$
d) $x^y+y^x-2xy=0,\ (2,2)$
e) $z\arctan(1-z^2)+3x+5z-8y^3=0,\ (1,1,1)$
f) $xyze^z\ln(z)-3x+3y=0,\ (1,1,1)$

Solución 10.26.

a) Sea $g(x,y)=x^y+3x^2-2y^2-2y$. Entonces $g(1,1)=1+3-2-2=0$ y

$$Jg(x,y)=\left(\, yx^{y-1}+6x \quad x^y\ln(x)-4y-2 \,\right),$$

y por tanto $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)=-6\neq 0$. Aplicando el teorema de la función implícita se puede despejar y en función de x en un entorno del punto 1. Además

$$y'(x)=\frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}=-\frac{yx^{y-1}+6x}{x^y\ln(x)-4y-2}.$$

b) Sea $g(x,y)=\operatorname{sen}(x)+\cos(y)+2y-\pi$. Entonces
i) $g(0,\frac{\pi}{2})=0$,
ii) $Jg(x,y)=\left(\,\cos(x) \quad -\operatorname{sen}(y)+2\,\right)$ con lo que $\frac{\partial g}{\partial y}(0,\frac{\pi}{2})\neq 0$.
Entonces el teorema de la función implícita se puede despejar $y=y(x)$ en función de x en un entorno del 0 y

$$y'(x)=\frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}=\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(y)-2}.$$

c) Sea $g(x,y)=y\ln\left(x^2+y^2\right)-2xy$. Entonces
i) $g(0,1)=0$,
ii) $Jg(x,y)=\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}-2y \quad \ln(x^2+y^2)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}-2x\right)$ con lo que $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1)\neq 0$.
Aplicando el teorema de la función implícita, se puede despejar $y=y(x)$ en un entorno de 0 y

$$y'(x)=\frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}=-\frac{\frac{2xy}{x^2+y^2}-2y}{\ln(x^2+y^2)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}-2x}.$$

d) Sea $g(x,y) = x^y + y^x - 2xy$. Entonces
   i) $g(2,2) = 0$,
   ii) $Jg(x,y) = \left(yx^{y-1} + y^x \ln(y) - 2y \quad x^y \ln(x) + xy^{x-1} - 2x \right)$ y, por tanto, $\frac{\partial g}{\partial y}(2,2) \neq 0$.
   El teorema de la función implícita nos dice que se puede despejar $y = y(x)$ en un entorno de $x = 2$. Además
$$y'(x) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = -\frac{yx^{y-1} + y^x \ln(y) - 2y}{x^y \ln(x) + xy^{x-1} - 2x}.$$

e) Sea $g(x,y,z) = z \arctan\left(1 - z^2\right) + 3x + 5z - 8y^3$. Entonces
   i) $g(1,1,1) = 0$,
   ii) $Jg(x,y,z) = \left(3 \quad 24y \quad \arctan\left(1 - z^2\right) - \frac{2z^2}{1+(1-z^2)^2} + 5 \right)$, con lo que $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,1) \neq 0$.
   Como consecuencia del teorema de la función implícita se puede despejar $z = z(x,y)$ como función de x e y en un entorno del punto $(1,1)$ y
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{-3}{\arctan(1-z^2) - \frac{2z^2}{1+(1-z^2)^2} + 5},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{24y}{\arctan(1-z^2) - \frac{2z^2}{1+(1-z^2)^2} + 5}.$$

f) Sea $g(x,y,z) = xyze^z \ln(z) - 3x + 3y$. Entonces
   i) $g(1,1,1) = 0$,
   ii) $Jg(x,y,z) = \left(yze^z \ln(z) - 3 \quad xze^z \ln(z) + 3 \quad xye^z(\ln(z) + z\ln(z) + 1) \right)$, con lo que $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,1) \neq 0$.
   Aplicando el teorema de la función implícita se obtiene que se puede despejar $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(1,1)$ y que
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{yze^z \ln(z) - 3}{xye^z(\ln(z) + z\ln(z) + 1)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{xze^z \ln(z) + 3}{xye^z(\ln(z) + z\ln(z) + 1)}.$$

Ejercicio 10.27. Determinar la derivada de la función $z = f(x,y)$ definida implícitamente por la ecuación $x\tan(y) - ze^z = 0$ en el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}, 0\right)$ en la dirección del vector $(2,1)$.

Solución 10.27. Sea $F(x,y,z) = x\tan(y) - ze^z$. Es inmediato comprobar que F cumple las hipótesis del teorema de la función implícita:
a) $F\left(0, \frac{\pi}{4}, 0\right) = 0$,
b) $JF\left(0, \frac{\pi}{4}, 0\right) = \left(1 \quad 0 \quad -1 \right)$. Como $\frac{\partial F}{\partial z}\left(0, \frac{\pi}{4}, 0\right) \neq 0$ podemos despejar z como función de x e y en un entorno de $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.
Las derivadas parciales de $z(x,y)$ son

$$\nabla z\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\left(0,\frac{\pi}{4},0\right),-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\left(0,\frac{\pi}{4},0\right)\right)=(1,0)$$

y, en consecuencia, la derivada pedida es

$$Dz\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{(2,1)}{\|(2,1)\|}\right)=\left\langle(1,0),\frac{(2,1)}{\|(2,1)\|}\right\rangle=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

E **Ejercicio 10.28.** Probar que la ecuación $y^3+x^2y=10$ define implícitamente a y como función de x, $y=f(x)$, en un entorno del punto $(3,1)$ y calcúlese

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1+\frac{x-3}{2}}{(x-3)^2}$$

donde f es la función definida por la ecuación anterior.

Solución 10.28. Vamos a comprobar las hipótesis del teorema de la función implícita en el punto $(3,1)$.

$$\begin{aligned}
&g(3,1)=1+9-10=0\\
&\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=3y^2+x^2 \implies \frac{\partial g}{\partial y}(3,1)=12\neq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, existe la función implícita $y=f(x)$ en un entorno de $(3,1)$ verificando $f(3)=1$ y que $g(x,f(x))=0$.
Nos piden ahora

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1+\frac{x-3}{2}}{(x-3)^2}.$$

Vamos a calcularlo aplicando L'Hôpital. Y para ello necesitamos las derivadas de f. Derivando implítamente en la ecuación $g(x,y)=0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
3y^2y'+2xy+x^2y'=0 &\implies y'(3)=f'(3)=-\frac{1}{2}\\
6y(y')^2+3y^2y''+2y+4xy'+x^2y''=0 &\implies y''(3)=f''(3)=\frac{5}{24}.
\end{aligned}$$

Volvemos al límite que nos han pedido y aplicando dos veces L'Hôpital nos queda:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f''(x)}{2}=\frac{5}{48}.$$

10.9.4 Polinomio de Taylor

Ejercicio 10.29. Desarrollar en serie de Taylor hasta los términos de grados dos, la función $f(x,y)=\tan(xy)$ en un entorno del punto (0,0).

Solución 10.29. Recordemos que el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de f es

$$\begin{aligned}P_2(x,y) = f(0,0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right).\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\left(1+\tan^2(xy)\right) \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\left(1+\tan^2(xy)\right) \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2y^2\tan(xy)\left(1+\tan^2(xy)\right) \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2x^2\tan(xy)\left(1+\tan^2(xy)\right) \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= 1+\tan^2(xy) + 2xy\tan(xy)\left(1+\tan^2(xy)\right) \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1.\end{aligned}$$

Por tanto el polinomio de Taylor es $P(x,y) = xy$.

Ejercicio 10.30. Utilícese la fórmula de Taylor para desarrollar las siguientes funciones:
a) $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy^2$, en potencias de $(x-1)$ e $(y-2)$.
b) $h(x,y,z) = e^{a(x+y+z)}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, en un entorno de (0,0,0).

Solución 10.30.
a) Tenemos que calcular el desarrollo en un entorno del punto $(1,2)$ hasta el grado 3. En primer lugar vamos a calcular las derivadas parciales en dicho punto.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2+y^2 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 7,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y+2yx \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 8\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 6x \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 6,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= 2y \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2) = 4,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2+2x \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = 4,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 6,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) = 0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y) = 2,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = 0.$$

Las derivadas de orden 4 o más son todas cero. Por tanto

$$\begin{aligned}f(x,y) =& P_3(x,y) = 9 + 7(x-1) + 8(y-2) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2)\\ &+ 2(y-2)^2 + (x-1)^3 + \frac{1}{3}(x-1)(y-2)^2.\end{aligned}$$

b) Es inmediato comprobar que $D_{i_1\ldots i_k}h(x,y,z) = a^k e^{a(x+y+z)}$, y que, por tanto evaluando en el origen tenemos que $D_{i_1\ldots i_k}h(0,0,0) = a^k$ para cualquier k. Entonces el polinomio de Taylor de orden n es

$$P_n(x,y,z) = 1 + a(x+y+z) + \frac{a^2}{2}(x+y+z)^2 + \cdots + \frac{a^n}{n!}(x+y+z)^n .$$

10.9.5 Extremos relativos, condicionados y absolutos

Ejercicio 10.31. Consideremos las funciones reales f y g dadas por:
a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
b) $g(x,y) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \cos(x+y), \quad 0 < x < 2\pi, \ 0 < y < 2\pi$.
Se pide:
a) Calcular la matriz jacobiana de cada una de las funciones en sus respectivos dominios de definición.
b) Calcular la matriz hessiana en los puntos críticos.
c) Estudia la existencia de extremos relativos y puntos de silla.

Solución 10.31.
a) Calculamos la matriz jacobiana de f en cualquier punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y^2 - 15 & 6xy - 12 \end{pmatrix}$$

Si igualamos a cero las dos parciales de f obtenemos los puntos críticos de f: $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$ y $(-2,-1)$. Calculamos ahora la matriz hessiana en cualquier punto:

$$H(f,(x,y)) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

y si la evaluamos en cada uno de los puntos críticos obtenidos nos queda:
i) $H(f,(1,2)) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$, que define una forma cuadrática indefinida (su determinante es negativo), y por tanto en el punto $(1,2)$ no se alcanza extremo relativo.
ii) $H(f,(-1,-2)) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$, que define una forma cuadrática indefinida (su determinante es negativo), y por tanto en el punto $(-1,-2)$ tampoco se alcanza extremo relativo.
iii) $H(f,(2,1)) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, que define una forma cuadrática definida positiva (su determinante es positivo y el primer término $a_{11} = 12 > 0$), y por tanto en el punto $(2,1)$ se alcanza un mínimo relativo.
iv) $H(f,(-2,-1)) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$, que define una forma cuadrática definida negativa (su determinante es positivo y el primer término $a_{11} = -12 < 0$)), y por tanto en el punto $(-2,-1)$ se alcanza un máximo relativo.

b) La matriz jacobiana de g en un punto cualquiera de su dominio es:

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x - \operatorname{sen}(x+y) & \cos y - \operatorname{sen}(x+y) \end{pmatrix}$$

Del correspondiente sistema se deduce que $\cos(x) = \cos(y)$ y por tanto $x = y$ o $x + y = 2\pi$.
Si $x = y$, entonces $\cos(x) = \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, de donde se obtienen los puntos críticos $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.

Si $x + y = 2\pi$, se obtienen, además, los puntos $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
La matrix hessiana es

$$\operatorname{Hess}(g,(x,y)) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(x) - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\operatorname{sen}(y) - \cos(x+y) \end{pmatrix}.$$

Evaluamos en los puntos críticos:

i) $\operatorname{Hess}\left(g, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ es indefinida (no hay extremo),
ii) $\operatorname{Hess}\left(g, \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ es definida positiva (mínimo relativo),
iii) $\operatorname{Hess}\left(g, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ es indefinida (no hay extremo),
iv) $\operatorname{Hess}\left(g, \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ es indefinida (no hay extremo),
v) $\operatorname{Hess}\left(g, \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{smallmatrix}\right)$ es definida negativa (máximo relativo),
vi) $\operatorname{Hess}\left(g, \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ es indefinida (no hay extremo).

Ejercicio 10.32. Obtener los extremos relativos de las siguientes funciones. Estudia si son absolutos.
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3xy^2$.
c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$.
d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$.

Solución 10.32.
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.
Calculamos los puntos críticos de la f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 12 = 0$$

Las soluciones son $(1,2), (-1,2), (1,-2), (-1,-2)$. La matriz hessiana en un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es $\mathrm{H}(\mathrm{f},(\mathrm{x},\mathrm{y})) = \left(\begin{smallmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{smallmatrix}\right)$. Si evaluamos en los puntos críticos nos queda

i) $H(f,(-1,2)) = \left(\begin{smallmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{smallmatrix}\right)$ que determina una forma cuadrática indefinida, y por tanto en $(-1,2)$ no se alcanza extremo relativo.
ii) $H(f,(1,-2)) = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{smallmatrix}\right)$ que determina una forma cuadrática indefinida, y por tanto en $(1,-2)$ no se alcanza extremo relativo.
iii) $H(f,(-1,-2)) = \left(\begin{smallmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{smallmatrix}\right)$ que determina una forma cuadrática definida negativa, y por tanto en $(-1,-2)$ se alcanza un máximo relativo.

En cuanto a extremos absolutos, la función no está acotada inferior ni superiormente (es un polinomio de grado impar) y, por tanto, no tiene extremos absolutos.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3xy^2$.
Para calcular los puntos críticos de f planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x^3 - 3y^2 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 6xy = 0$$

de donde obtenemos como soluciones:$(0,0)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)$ y $\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)$. Calculamos ahora la matriz hessiana de f:

$$H(f,(x,y)) = \begin{pmatrix} 24x^2 & -6y \\ -6y & 2-6x \end{pmatrix} ,$$

Si evaluamos esta matriz en los dos últimos puntos críticos nos queda

$$H\left(f,\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{4\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{3} & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } H\left(f,\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que ambas matrices definen formas cuadráticas indefinidas, mientras que si consideramos la matriz hessiana de f en el $(0,0)$ nos queda $H(f,(0,0)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, que determina una forma cuadrática semidefinida positiva. Vamos entonces a estudiar la función para decidir si en $(0,0)$ hay extremo o no. Si escribimos la función de la forma

$$f(x,y) = 2x^4 + y^2(1-3x),$$

es fácil comprobar que siempre que $x \leq \frac{1}{3}$ la función es positiva, por lo que podemos asegurar que en el $(0,0)$ se tiene un mínimo relativo. Sin embargo, en este punto no se alcanza el mínimo absoluto de la función, puesto que si hacemos $x = 1$ tenemos que $f(1,y) = 2 - 2y^2$, y sobre esta recta la función se hace tan pequeña como queramos $(\lim_{y\to\infty} f(1,y) = -\infty)$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$.
Calculamos los puntos críticos de f, esto es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(x-1)^3 + 4(x-y)^3 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4(x-y)^3 = 0$$

La única solución es $(1,1)$. Calculemos la matriz hessiana de f en (x,y).

$$H(f,(x,y)) = \begin{pmatrix} 12(x-1)^2 + 12(x-y)^2 & -12(x-y)^2 \\ -12(x-y)^2 & 12(x-y)^2 \end{pmatrix},$$

y por tanto, la matriz hessiana en $(1,1)$ es $H(f,(1,1)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, que determina una forma cuadrática semidefinida. Estudiamos entonces la función y la comparamos con $f(1,1)$:

$$f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4 \geq 0 = f(1,1)\ , \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

de lo que se deduce que f alcanza en $(1,1)$ su mínimo absoluto.

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$.
Para calcular los puntos críticos de f consideramos el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy) = 0$$

de donde obtenemos las soluciones:$\{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Calculemos ahora la matriz hessiana de f:

$$H(f,(x,y)) = \begin{pmatrix} -y^2\operatorname{sen}(xy) & \cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy) \\ \cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy) & -x^2\operatorname{sen}(xy) \end{pmatrix},$$

y si vamos evaluando en los puntos críticos obtenidos obtenemos $H(f,(0,0)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, que determina una forma cuadrática indefinida. Para evaluar la matriz hessiana en el resto de los puntos críticos, hacemos dos grupos:

i) Si (x,y) verifica que $\operatorname{sen}(xy) = 1$, entonces $H(f,(x,y)) = \left(\begin{smallmatrix} -y^2 & -xy \\ -xy & -x^2 \end{smallmatrix}\right)$.

ii) Si (x,y) verifica que $\operatorname{sen}(xy) = -1$, entonces $H(f,(x,y)) = \left(\begin{smallmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{smallmatrix}\right)$.

En ambos casos se tienen formas cuadráticas semidefinidas, aunque el problema se resuelve fácilmente puesto que en esos puntos se alcanzan el máximo absoluto de f (cuando $\operatorname{sen}(xy) = 1$) y el mínimo absoluto de f (cuando $\operatorname{sen}(xy) = -1$).

Ejercicio 10.33.
a) Demuestra que la ecuación $(1+x^2+y^2)u^3 - u + xy = 0$ define implícitamente a u como función de clase C^∞ de (x,y) en un entorno de $(0,0)$ de tres formas diferentes.
b) Estudia si estas tres funciones alcanzan un extremo relativo en el punto $(0,0)$.

Solución 10.33. FALTA

E **Ejercicio 10.34.** Sean $a,b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$. Estudia la existencia de extremos relativos de f en función de los parámetros a y b.

Solución 10.34. Calculamos los puntos críticos de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2a = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2b = 0$$

Por tanto el único punto crítico que se tiene es (a,b). Si calculamos ahora la matriz hessiana en este punto nos queda $H(f,(a,b)) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ que determina una forma cuadrática definida positiva, por lo que en el punto (a,b) tenemos un mínimo relativo. Ahora bien, si escribimos la función de la forma siguiente:

$$f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - (a^2+b^2) \geq -(a^2+b^2) = f(a,b)\ ,\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ .$$

Por tanto, en el punto (a,b) se alcanza el mínimo absoluto de la función.

Ejercicio 10.35. Calcúlense los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en los dominios dados:
a) $D(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la placa triangular cerrada acotada por las rectas $x = 0$, $y = 4$, e $y = x$.
b) $g(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 3$ en el disco $\left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$.
c) $h(x,y) = x^2 - y^2$ en todo $\mathbb{R}^2$.

Solución 10.35.
a) $D(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la placa triangular cerrada acotada por las rectas $x = 0$, $y = 4$, $y = x$.

Calculamos los puntos críticos en el interior del dominio que notaremos por A. Para ello resolvemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\frac{\partial D}{\partial x}(x,y) = 2x - y = 0$$
$$\frac{\partial D}{\partial y}(x,y) = -x + 2y = 0$$

cuya única solución es el punto $(0,0)$ que no es punto interior de A. Por tanto, nos ocupamos de buscar los puntos de extremo en la frontera de A. Vamos a descomponer la frontera como sigue: $\operatorname{Fr}(A) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \{(0,0),(0,4),(4,4)\}$, donde

$$A_1 = \left\{(x,4) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 4\right\},$$
$$A_2 = \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 4\right\}, \text{ y}$$
$$A_3 = \left\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 4\right\}.$$

Si estudiamos la restricción de D a cada uno de los subconjuntos A_1, A_2 y A_3, sólo obtenemos un posible punto de extremo en A_1, pues en el resto de los casos la derivada de D no se anula nunca. Concretamente

$$D_1(x) = D(x,4) = x^2 - 4x + 17 \implies D_1'(x) = 2x - 4$$

y entonces tenemos un posible punto de extremo en $(2,4) \in A_1$. Finalmente, comparamos los valores de D en los candidatos que tenemos:

$$D(0,0) = 1,\ D(0,4) = 17,\ D(4,4) = 17, \text{ y } D(2,4) = 13.$$

Tenemos entonces que la función D alcanza su máximo absoluto en los puntos $(0,4)$ y $(4,4)$, y su mínimo absoluto en $(0,0)$.

b) $g(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 3$ en el disco $\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Llamamos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calculamos los puntos críticos de g en $\mathring{A}$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4x^2y = 0.$$

La única solución es $(0,0)$ que sí es un punto interior de A.
Ahora estudiamos la función g en la frontera de A por lo que se trata de un problema de extremos condicionados. Entonces llamamos $F(x,y) = g(x,y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ la función de Lagrange. Planteamos el sistema de Lagrange, esto es

$$\begin{aligned} 4x^3 + 4xy^2 + 2\lambda x &= 0 \\ 4y^3 + 4x^2y + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones de este sistema son todos los puntos de la circunferencia unidad con $\lambda = -2$. Por tanto, comparamos los valores de g en los puntos encontrados, teniendo en cuenta que si $(x,y) \in \operatorname{Fr}(A)$ entonces $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(0,0) &= -3 \\ f\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right) &= x^4 + \left(1-x^2\right)^2 + 2x^2\left(1-x^2\right) - 3 = -2. \end{aligned}$$

Concluimos que la función g alcanza en $(0,0)$ su mínimo absoluto y en la frontera de A su máximo absoluto.

c) $h(x,y) = x^2 - y^2$ en todo $\mathbb{R}^2$.
Si calculamos los puntos críticos de h obtenemos como única solución el $(0,0)$ ya que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= 2x = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= -2y = 0 \end{aligned}$$

Pero si construimos la matriz hessiana de h en el $(0,0)$ nos queda $H(h,(0,0)) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ y esta matriz determina una forma cuadrática indefinida, por lo que en el punto $(0,0)$ no se alcanza extremo relativo, de hecho en este punto se tiene un "punto de silla" de la función h.

E **Ejercicio 10.36.** Calcular el valor máximo de z en el conjunto $x^2+2y^2+3z^2 = 1$, $x+y+z = 0$.

Solución 10.36. Tenemos que calcular el máximo de la función $f(x,y,z) = z$ en el conjunto determinado por las ecuaciones (la intersección de un elipsoide con un plano)

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1, \quad x + y + z = 0.$$

Consideremos la función $F(x,y,z) = z + \lambda(x^2 + 2y^2 + 3z^2) + \mu(x + y + z)$. El sistema de Lagrange es

$$\begin{aligned} 2\lambda x + \mu &= 0 \\ 4\lambda y + \mu &= 0 \\ 6\lambda z + \mu + 1 &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Despejando μ en las dos primeras ecuaciones obtenemos $\lambda(x-2y) = 0$, de donde podemos hacer la siguiente discusión de casos:

a) Si $\lambda = 0$ entonces llegamos a un absurdo ($\mu = -1$ y $\mu = 0$).
b) Por tanto, $\lambda \neq 0$ y entonces $x = 2y$. Si sustituimos esta condición en las dos últimas ecuaciones del sistema de Lagrange obtenemos dos puntos solución:

$$P_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{33}}, \frac{1}{\sqrt{33}}, -\frac{3}{\sqrt{33}}\right) \quad \text{y} \quad P_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{33}}, -\frac{1}{\sqrt{33}}, \frac{3}{\sqrt{33}}\right).$$

Por tanto, la función f alcanza el máximo condicionado en P_2.

Ejercicio 10.37. Una placa circular plana tiene la forma del disco $x^2 + y^2 \leq 1$. La placa, incluyendo el borde, se calienta de manera que la temperatura en un punto (x,y) es

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

Determinar los puntos con mayor y menor temperatura de la placa, así como la temperatura en cada uno de ellos.

Solución 10.37. Notamos por $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ el dominio de la función $T : A \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Estudiamos en primer lugar la posibilidad de que los extremos se alcancen en el interior de A. Para ello calculamos los puntos críticos de la función:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}(x, y) &= 2x - 1 = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) &= 4y = 0. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces como único punto crítico de T el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Estudiemos ahora la función en la frontera de A, esto es, en el conjunto

$$\operatorname{Fr}(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Planteamos entonces un problema de extremos condicionados, donde la función de Lagrange es $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. El sistema de Lagrange que planteamos es

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= 2x - 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones son

$$\begin{aligned} \lambda = -2 &\implies \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \lambda = -\frac{1}{2} &\implies (1, 0) \\ \lambda = -\frac{3}{2} &\implies (-1, 0). \end{aligned}$$

Finalmente evaluamos la función T en cada uno de los puntos obtenidos: $T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$, $T(1, 0) = 0$, $T(-1, 0) = 2$, $T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$, y $T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Por tanto se alcanza la mínima temperatura $(-1/4)$ en el punto $(1/2, 0)$ y la máxima $(9/4)$ en los puntos $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ejercicio 10.38. Estudia los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2.$$

¿Son absolutos?

Solución 10.38. En primer lugar calculamos los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 2xy - y^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - x^2 - 2xy = 0\end{array}\right\} \iff (x, y) = (0,0), (3,0), (0,3), (1,1).$$

La matriz hessiana es

$$\begin{pmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Evaluamos en los puntos críticos:

a) $H(f(0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ es indefinida y, por tanto, en $(0,0)$ no hay un extremo relativo.

b) $H(f(3,0)) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ es indefinida y, por tanto, en $(3,0)$ no hay un extremo relativo.

c) $H(f(0,3)) = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ es indefinida y, por tanto, en $(0,3)$ no hay un extremo relativo.

d) $H(f(1,1)) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ es definida negativa y, por tanto, en $(1,1)$ hay un máximo relativo.

La función no está acotada inferior ni superiormente. Por ejemplo,

$$\lim_{y\to+\infty} f(1,y) = -\infty, \quad \lim_{y\to+\infty} f(-1,y) = +\infty.$$

y, en consecuencia, f no alcanza en $(1,1)$ un máximo absoluto.

Ejercicio 10.39. Determínese el punto $P(x,y,z)$ en el plano $2x+y-z=5$ que está más cerca del origen.

Solución 10.39. Consideremos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Si consideramos $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $g(x,y,z) = 2x+y-z-5$, la condición del problema, tendremos que calcular el punto del conjunto

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 2x+y-z-5 = 0\right\}$$

que está más próximo al origen, o lo que es lo mismo, que minimiza la función f. Aplicamos el método de Lagrange y consideramos la función

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+\lambda(2x+y-z-5)$$

con lo que el sistema de Lagrange que se tiene es

$$\begin{aligned} 2x+2\lambda &= 0 \\ 2y+\lambda &= 0 \\ 2z-\lambda &= 0 \\ 2x+y-z &= 5 \end{aligned}$$

La única solución es el punto $P = (5/3, 5/6, -5/6)$ para $\lambda = -5/3$. Vamos ahora a decidir si en este punto se alcanza extremo condicionado o no. Para ello consideramos la función de Lagrange con $\lambda = -5/3$, es decir $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-\frac{5}{3}(2x+y-z-5)$. La matriz hessiana de F en el punto P es:

$$H(F,P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Observemos que esta matriz determina una forma cuadrática definida positiva en todo $\mathbb{R}^3$, por lo que si la restringimos a $\ker(Dg(P))$ sigue siendo definida positiva. Por tanto, en el punto P se alcanza un mínimo relativo condicionado a M. Veamos además que es el punto donde se alcanza el mínimo absoluto de f en M. En efecto, al ser M un plano de $\mathbb{R}^3$ no es un conjunto compacto, pero podemos considerar el conjunto $K = M \cap \overline{B}\,((0,0,0),3)$ que sí es un compacto en $\mathbb{R}^3$ que contiene a P (ya que $f(P) = \frac{150}{36}$) y en donde todos los puntos de su frontera distan del origen una distancia igual a 3. Entonces, si restringimos f a K sabemos que alcanza el mínimo absoluto y lo alcanza en P. Ahora bien, si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash K$, se tiene que

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \geq 9 > \frac{150}{36} = f(P).$$

Por tanto, f alcanza en P su mínimo absoluto, o lo que es lo mismo, el punto del plano $2x + y - z = 5$ más próximo al origen es P.

Ejercicio 10.40. Calcúlese la distancia mínima del origen a la superficie $x^2 - z^2 - 1 = 0$.

Solución 10.40. Tenemos un problema de extremos condicionados donde los datos son

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, g(x,y,z) = x^2 - z^2 - 1$$

La función de Lagrange es $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 - z^2 - 1)$, y el sistema de Lagrange

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x &= 0 \\ 2y &= 0 \\ 2z - 2\lambda z &= 0 \\ x^2 - z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones son $(1,0,0)$ y $(-1,0,0)$ con $\lambda = -1$. Calculamos ahora la matriz hessiana de F para $\lambda = -1$ y tenemos

$$H = H(F,(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Consideramos el $\ker(Dg(1,0,0))$ y una base de este subespacio es $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$. Entonces si restringimos H a dicho subespacio nos queda $H_{|\ker(Dg(1,0,0))} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ que determina una forma cuadrática definida positiva, por lo que en $(1,0,0)$ se alcanza un mínimo relativo condicionado.
Si repetimos los cálculos con el punto $(-1,0,0)$ obtenemos la misma matriz restringida, y por tanto en este punto también se alcanza un mínimo relativo condicionado (además, $f(-1,0,0) = f(1,0,0) = 1$). Concluimos el ejercicio razonando de la misma forma que en el ejercicio anterior, luego estos dos puntos son los más próximos de la superficie $x^2 - z^2 = 1$ al origen.

Ejercicio 10.41. Hállense dos números reales cuya suma de cuadrados sea 18 y la suma de sus cubos sea máxima. Hágase lo mismo con tres números reales con suma de cuadrados 12.

Solución 10.41. En ambos casos se trata de sendos problemas de extremos condicionados donde el conjunto M en el que trabajamos es un compacto, así que basta con resolver el sistema de Lagrange y comparar los valores de f en los puntos obtenidos. Empezamos con el primero, es decir:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ f(x,y) = x^3 + y^3$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 18$$

La función de Lagrange es $F(x,y) = x^3 + y^3 + \lambda(x^2 + y^2 - 18)$ y el sistema de Lagrange

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2\lambda x &= 0 \\ 3y^2 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 18 \end{aligned}$$

Las soluciones son:

$$\begin{aligned} \lambda = -\frac{9}{2}\sqrt{2} &\implies (3\sqrt{2}, 0) \text{ y } (0, 3\sqrt{2}) \\ \lambda = \frac{9}{2}\sqrt{2} &\implies (-3\sqrt{2}, 0) \text{ y } (0, -3\sqrt{2}) \\ \lambda = -\frac{9}{2} &\implies (3, 3) \\ \lambda = \frac{9}{2} &\implies (-3, -3) \end{aligned}$$

Evaluando la función f en todos estos puntos obtenemos el máximo absoluto en $(3\sqrt{2}, 0)$ y $(0, 3\sqrt{2})$ y el mínimo absoluto en $(-3\sqrt{2}, 0)$ y $(0, -3\sqrt{2})$.
En el segundo caso planteado las funciones que tenemos son

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,,\ f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,,\ g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$$

La función de Lagrange ahora es $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 12)$ y el sistema de Lagrange

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2\lambda x &= 0 \\ 3y^2 + 2\lambda y &= 0 \\ 3z^2 + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 12 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} \lambda = -3/2\sqrt{6} &\implies (\sqrt{6}, \sqrt{6}, 0), (\sqrt{6}, 0, \sqrt{6}) \text{ y } (0, \sqrt{6}, \sqrt{6}) \\ \lambda = 3/2\sqrt{6} &\implies (-\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0, -\sqrt{6}) \text{ y } (0, -\sqrt{6}, -\sqrt{6}) \\ \lambda = -3\sqrt{3} &\implies (2\sqrt{3}, 0, 0), (0, 2\sqrt{3}, 0) \text{ y } (0, 0, 2\sqrt{3}) \\ \lambda = 3\sqrt{3} &\implies (-2\sqrt{3}, 0, 0), (0, -2\sqrt{3}, 0) \text{ y } (0, 0, -2\sqrt{3}) \\ \lambda = -3 &\implies (2, 2, 2) \\ \lambda = 3 &\implies (-2, -2, -2) \end{aligned}$$

Finalmente, evaluando f en estos puntos concluimos que el máximo absoluto se alcanza en $(2\sqrt{3}, 0, 0)$, $(0, 2\sqrt{3}, 0)$ y $(0, 0, 2\sqrt{3})$ y el mínimo absoluto en $(-2\sqrt{3}, 0, 0)$, $(0, -2\sqrt{3}, 0)$ y $(0, 0, -2\sqrt{3})$.

Ejercicio 10.42. Se trata de montar un radiotelescopio en un planeta recién descubierto. Para minimizar la interferencia se desea emplazarlo donde el campo magnético del planeta sea más débil (aunque por supuesto, en la superficie). El planeta es esférico, con un radio de 6 unidades; la fuerza del campo magnético viene dada por

$$M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$$

basado en un sistema coordenado cuyo origen está en el centro del planeta. ¿Dónde habrá de ser ubicado el radiotelescopio?.

Solución 10.42. Planteamos el siguiente problema de extremos condicionados:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , f(x, y, z) = M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$$

y la condición $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 36$. El dominio en el que se verifica la condición es un conjunto compacto, por lo que es suficiente con resolver el sistema de Lagrange: $F(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 36)$ y el sistema a resolver

$$\begin{aligned} 6 + z + 2\lambda x &= 0 \\ -2y + 2\lambda y &= 0 \\ x + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 36 \end{aligned}$$

Las soluciones son

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \ &\Longrightarrow (0, 0, -6) \\ \lambda = -\sqrt{3}/2 \ &\Longrightarrow (3\sqrt{3}, 0, 3) \\ \lambda = \sqrt{3}/2 \ &\Longrightarrow (-3\sqrt{3}, 0, 3) \\ \lambda = 1 \ &\Longrightarrow (-4, -4, 2) \text{ y } (-4, 4, 2) \end{aligned}$$

Finalmente, evaluando la función f en todos los puntos obtenidos, concluimos que el radiotelescopio debería ser ubicado en los puntos $(-4, -4, 2)$ o $(-4, 4, 2)$ para que la interferencia del campo magnético sea mínima.

Ejercicio 10.43. Encontrar el mínimo de la función $f(x, y) = 2y$ en el conjunto $3x^2 - 5y^5 = 0$. ¿Por qué no funciona el método de los multiplicadores de Lagrange?.

Solución 10.43. Si llamamos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 3x^2 - 5y^5$ a la condición del problema, observemos que en el punto $(0, 0)$ el rango de la matriz jacobiana de g es cero, y debería ser 1 para que se pudiera aplicar el teorema de Lagrange.

Ejercicio 10.44. Obtener los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$. Estudia si son absolutos o no.

Solución 10.44. En primer lugar calculamos los puntos críticos de f.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) =& 2x+2z-y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) =& 2y+z-x=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) =& 6z+y+2x=0\end{aligned}$$

La única solución de este sistema lineal homogéneo es la trivial ($\text{Det}(M) = 4 \neq 0$, siendo M la matriz de coeficientes del sistema), por tanto el único punto crítico de f es el $(0,0,0)$. Calculando ahora la matriz hessiana en este punto

$$H := H(f,(0,0,0)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix},$$

basta con estudiar el signo de los valores propios de esta matriz (por el método que se prefiera) y observar que todos son positivos, y por tanto la forma cuadrática asociada a H es definida positiva. Luego f en el $(0,0,0)$ alcanza un mínimo relativo.
Observemos además que en el $(0,0,0)$ alcanza también su mínimo absoluto. En efecto, si llamamos $Q_{(0,0,0)}$ a la forma cuadrática asociada a H, se tiene que

$$f(0,0,0) = 0 \leq Q_{(0,0,0)}(x,y,z) = 2x^2+2y^2+6z^2-2xy-8xz+2yz = 2f(x,y,z)\ ,\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

de lo que se deduce que $f(x,y,z) \geq f(0,0,0)\ ,\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 10.45. Obtener los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y,z) = xy + xz + yz$. Estudia si son absolutos o no.

Solución 10.45. Calculamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= y+z=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= x+z=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= x+y=0\end{aligned}$$

cuya única solución es $(0,0,0)$. Si calculamos ahora la matriz hessiana en dicho punto crítico, nos queda

$$H(f,(0,0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

matriz que determina una forma cuadrática indefinida. Por tanto, f no alcanza extremo en el $(0,0,0)$.

Ejercicio 10.46. Encontrar los puntos donde la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = x^2+y^2-xy-x-y$ alcanza sus extremos absolutos siendo $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0,\ x+y\leq 3\}$.

Solución 10.46. El conjunto A es el recinto comprendido por el triángulo rectángulo de vértices $(0,0),(0,3)$ y $(3,0)$, por lo que se trata de un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, y al ser f una función continua sabemos que los extremos absolutos se alcanzan, o en el interior de A, es decir $\mathring{A}$, o en la frontera de A. Por esta razón descomponemos el estudio en cada uno de estos conjuntos.
Si se alcanzan en $\mathring{A}$, entonces han de ser puntos críticos de la función, así que planteamos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y - 1 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x - 1 = 0$$

cuya única solución es $(1,1) \in \mathring{A}$.
Ahora descomponemos la frontera de A de la forma siguiente:

$$\operatorname{Fr}(A) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \{(0,0),(0,3),(3,0)\},$$

donde

$$A_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 3\}$$
$$A_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 3\}$$
$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 3,\ 0 < x < 3\}$$

Vamos a restringir f a cada lado de la frontera, esto es
a) En A_1, $f_1(x) := f_{|A_1}(x,0) = x^2 - x \implies f_1'(x) = 2x - 1$ entonces $f_1'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ y obtenemos el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
b) En A_2, razonando análogamente al paso anterior obtenemos el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
c) En A_3, $f_3(x) := f_{|A_3}(x, 3-x) = 3(x^2 - 3x + 2) \implies f_3'(x) = 3(2x-3)$. Entonces, obtenemos como posible punto de extremo el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Finalmente, evaluamos la función en todos los candidatos a punto de extremo $f(1,1) = -1$, $f(0,0) = 0$, $f(3,0) = 6$, $f(0,3) = 6$, $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$, $f\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, y $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$, de lo que deducimos que la función alcanza el mínimo absoluto en $(1,1)$ y el máximo absoluto en $(3,0)$ y en $(0,3)$.

Ejercicio 10.47. Encontrar los puntos del conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0\}$ donde la función $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ alcanza su máximo y mínimo absolutos.

Solución 10.47. En este caso el conjunto A es un semicírculo, concretamente el semicírculo con $y \ge 0$, de centro $(1,0)$ y radio 1:

$$x^2 + y^2 \le 2x \iff (x-1)^2 + y^2 \le 1$$

Por tanto se trata de un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ y $f(x,y) = (x-y)^2$ una función continua, por lo que razonaremos de manera análoga al ejercicio anterior.
En $\mathring{A}$ calculamos los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) = 0$$

así que la solución es: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y,\ 0 < x < 1\}$. Por otra parte la frontera la descomponemos de la forma $\operatorname{Fr}(A) = A_1 \cup A_2 \cup \{(0,0),(2,0)\}$ donde $A_1 = \{(x,0) : 0 < x < 2\}$ y $A_2 = \{(x, \sqrt{2x-x^2}) : 0 < x < 2\}$. Restringimos ahora la función a cada uno de estos dos subconjuntos:

a) En A_1, $f_1(x) = f_{|A_1}(x) = x^2$. Como $f_1'(x) = 2x$, el único punto crítico que obtenemos para f_1 es $(0,0)$ que no está en A_1.

b) En A_2, $f_2(x) = f_{|A_2}(x) = 2x - 2x\sqrt{2x-x^2} \implies f_2'(x) = \frac{2\left(2x^2-3x+\sqrt{2x-x^2}\right)}{\sqrt{2x-x^2}}$ y, por tanto, los puntos críticos de f_2 son

$$f_2'(x) = 0 \iff x = 1 \text{ o } x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces los posibles puntos de extremo en A_2 son $(1,1)$ y $(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
Finalmente evaluamos la función en estos puntos: $f(0,0) = 0$, $f(2,0) = 4$, $f(x,x) = 0$, $f(1,1) = 0$, y $f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 - 2\sqrt{2}$. Entonces el máximo absoluto se alcanza en $(2,0)$ y el mínimo absoluto en todos los puntos de la cuerda del semicírculo A que une $(0,0)$ con $(1,1)$.

Ejercicio 10.48. Estudia los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$.

Solución 10.48. El sistema de ecuaciones que nos da los puntos críticos es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 4xy - 2x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 6y = 0$$

cuyas soluciones son:$(0,0)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
Calculemos ahora la matriz hessiana en un punto genérico de $\mathbb{R}^2$:

$$H(f,(x,y)) = \begin{pmatrix} 12x^2+4y-2 & 4x \\ 4x & 6 \end{pmatrix},$$

y ahora evaluamos en cada uno de los puntos críticos.

$$H(f,(0,0)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

que determina una forma cuadrática indefinida, por lo que en $(0,0)$ no se alcanza extremo relativo.

$$H\left(f,(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{4})\right) = \begin{pmatrix} 6 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix},$$

que determina una forma definida positiva, y por tanto en el punto $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{4})$ se alcanza un mínimo relativo.

$$H\left(f, (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{4})\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix},$$

matriz que vuelve a determinar un punto de mínimo relativo en $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{4})$.

Ejercicio 10.49. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2 \left[= (x^2-y)(3x^2-y)\right]$.

a) Pruébese que, sobre toda recta de la forma $y = \lambda x$, la función f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$.

b) Descríbanse los conjuntos de puntos de $\mathbb{R}^2$ en los que f toma valores positivos y valores negativos. Dedúzcase que f no posee extremos relativos en $\mathbb{R}^2$.

Solución 10.49.

a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y consideremos $g(x) = f(x, \lambda x) = 3x^4 - 4\lambda x^3 + \lambda^2 x^2$. Como $g'(x) = 12x^3 - 12\lambda x^2 + 2\lambda^2 x$, entonces $g'(0) = 0$, y $g''(x) = 36x^2 - 24x + 2\lambda^2$ con lo que $g''(0) = 2\lambda^2$. Si $\lambda \neq 0$, $g''(0) > 0$ y, por tanto g tiene un mínimo relativo en 0. Si $\lambda = 0$, entonces la función g se simplifica bastante: $g(x) = 3x^4$ que, claramente, tiene un mínimo en 0.

b) Podemos descomponer $\mathbb{R}^2$ en los siguientes subconjuntos:

$$\mathbb{R}^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 3x^2\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\right\},$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 3x^2\} \\ A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 3x^2\} \\ A_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\} \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} f(x,y) > 0 &\iff (x,y) \in A_1 \cup A_3 \\ f(x,y) < 0 &\iff (x,y) \in A_2 \\ f(x,y) = 0 &\iff y = x^2 \text{ o } y = 3x^2 \end{aligned}$$

Por tanto, si consideramos cualquier bola B centrada en $(0,0)$ (que es el único punto crítico de f), siempre hay puntos dentro de esa bola que están en A_1 o en A_2 o en A_3. Luego en el $(0,0)$ no se alcanza extremo relativo.

Ejercicio 10.50. Estudia los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = xye^{x+2y}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $f(x,y) = (1+e^y)\cos(x) - ye^y$, $\forall (x,y) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3pxy$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, según los distintos valores de p.

Solución 10.50.

a) $f(x,y) = xye^{x+2y}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Calculamos los puntos críticos de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+2y}(y+xy) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+2y}(x+2xy) = 0$$

Sus soluciones son:$(0,0)$ y $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$. Calculamos ahora la matriz hessiana en un punto genérico de $\mathbb{R}^2$:

$$H(f,(x,y)) = \begin{pmatrix} e^{x+2y}(2y+xy) & e^{x+2y}(1+x+2y+2xy) \\ e^{x+2y}(1+x+2y+2xy) & e^{x+2y}(4x+4xy) \end{pmatrix}$$

Si evaluamos esta matriz en cada punto crítico nos queda:

$$H(f,(0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que determina una forma cuadrática indefinida, por lo que en el punto $(0,0)$ no se alcanza extremo relativo.

$$H(f,(-1,-1/2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2e^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$$

y esta matriz determina una forma cuadrática definida negativa, por lo que en el punto $(-1,-1/2)$ se alcanza un máximo relativo.

b) $f(x,y) = (1+e^y)\cos(x) - ye^y$, $\forall (x,y) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}$.
Calculamos los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -(1+e^y)\operatorname{sen}(x) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^y(\cos(x) - 1 - y) = \ = 0$$

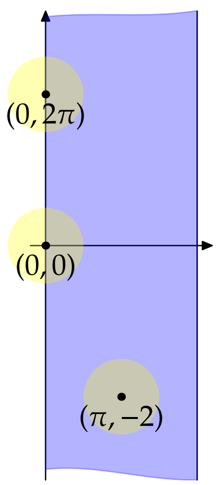


Figura 10.6 Dominio de f

Las soluciones del sistema de ecuaciones son los puntos $(0,0)$, $(2\pi,0)$ y $(\pi,-2)$. Como se puede ver en la Figura 10.6, los dos primeros no pertenecen al interior del dominio y, por tanto, no son extremos relativos independientemente del valor de la matriz hessiana.[4]
Para decidir si f tiene un extremo relativo en $(\pi,2)$, calculamos las derivadas de segundo orden de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -(1+e^y)\cos(x),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -e^y\operatorname{sen}(y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^y(\cos(x) - 2 - y),$$

[4] Puedes comprobar que si el dominio fuera todo $\mathbb{R}^2$, entonces f tendría un máximo relativo en cada uno de ellos.

y la matriz hessiana de f en $(\pi,-2)$:

$$\operatorname{Hess}(f)(\pi,-2)=\begin{pmatrix}1+e^{-2} & 0\\ 0 & -e^{-2}\end{pmatrix}.$$

Como la matriz hessiana es indefinida, la función no tiene extremos relativos.

c) $f(x,y)=x^3+y^3-3pxy,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, según los distintos valores de p.
Descomponemos el estudio en dos casos:
  i) Si $p=0$, el único punto critico de f es el $(0,0)$, pero en este punto no se alcanza extremo relativo ya que la función es $f(x,y)=x^3+y^3$.
  ii) Para $p\neq 0$, calculamos los puntos críticos resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-3py=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3px=0$$

cuyas soluciones son:$(0,0)$ y (p,p). Calculamos ahora la matriz hessiana:

$$H(f,(x,y))=\begin{pmatrix}6x & -3p\\ -3p & 6y\end{pmatrix}$$

y evaluándola en cada punto crítico nos queda

$$H(f,(0,0))=\begin{pmatrix}0 & -3p\\ -3p & 0\end{pmatrix}$$

que nos informa de que en el $(0,0)$ no se alcanza extremo relativo.

$$H(f,(p,p))=\begin{pmatrix}6p & -3p\\ -3p & 6p\end{pmatrix}$$

que nos dice que:
1) si $p>0$, entonces f alcanza un mínimo relativo en (p,p) y que
2) si $p<0$, entonces f alcanza un máximo relativo en (p,p).

Ejercicio 10.51. Calcular el mínimo relativo de $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ condicionado a que $2x+y+z=2$ y $x-y-3z=4$. Dar una interpretación geométrica del resultado.

Solución 10.51. La función de Lagrange es

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(2x+y+z-2)+\mu(x-y-3z-4)$$

y el sistema de Lagrange

$$\begin{aligned}2x+2\lambda+\mu&=0\\ 2y+\lambda-\mu&=0\\ 2z+\lambda-3\mu&=0\\ 2x+y+z&=2\\ x-y-3z&=4\end{aligned}$$

La única solución que obtenemos es $\lambda = -\frac{30}{31}$, $\mu = -\frac{28}{31} \implies P = \left(\frac{44}{31}, \frac{1}{31}, -\frac{27}{31}\right)$ y si calculamos la matriz hessiana de F para esos valores de λ y de μ observamos que es definida positiva, por lo que si la restringimos al $\ker(Dg(P))$ seguirá siendo definida positiva, y por tanto en el punto P se alcanza el mínimo relativo condicionado de f, o lo que es lo mismo, en el punto P se alcanza la mínima distancia desde el origen de coordenadas a la recta de ecuaciones $2x + y + z = 2$, $x - y - 3z = 4$.

Ejercicio 10.52. Estudia los extremos condicionados de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 4xy - 12z$ sometida a las condiciones: $x - y = 0$ y $x - z + 3 = 0$.

Solución 10.52. Sea la función de Lagrange:

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 4xy - 12z + \lambda(x - y) + \mu(x - z + 3)$$

y el sistema de Lagrange:

$$\begin{aligned} 2x - 4 + \lambda + \mu &= 0 \\ 4y - 4x - \lambda &= 0 \\ 12z - 12 - \mu &= 0 \\ x - y &= 0 \\ x - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

La solución es: $\lambda = 0$, $\mu = -\frac{24}{5}$, $P = \left(-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Consideramos la matriz hessiana de F para estos valores de los multiplicadores de Lagrange

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora una base del núcleo de $Dg(P)$ siendo g la función que da las condiciones del problema. Se tiene entonces que $Jg(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, y por tanto una base de $\ker(Dg(P))$ está formada por el vector $(1, 1, 1)$ y entonces, si restringimos H a este vector nos queda el valor

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 > 0,$$

luego, el punto P es el mínimo condicionado de f.

Ejercicio 10.53. El área de una caja rectangular sin tapa es de $108u^2$. Hallar que dimensiones debe tener para que conseguir el máximo volumen.

Solución 10.53. La función que hay maximizar es $f(x, y, z) = x\ y\ z\ ,\ \forall x, y, z > 0$, sujeta a la condición $g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy - 108$. La función de Lagrange es $F(x, y, z) = x\ y\ z + \lambda(2xz + 2yz + xy - 108)$ con lo que el sistema de Lagrange que tenemos es:

$$\begin{aligned} yz + 2\lambda z + \lambda y &= 0 \\ xz + 2\lambda z + \lambda x &= 0 \\ xy + 2\lambda x + 2\lambda y &= 0 \\ 2xz + 2yz + xy &= 108 \end{aligned}$$

cuya solución es $\lambda = -\frac{3}{2} \implies P = (6,6,3)$. Si ahora calculamos la matriz hessiana de F para $\lambda = -\frac{3}{2}$ en el punto P obtenemos

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

y si ésta la restringimos al $\ker(Dg(P))$ nos queda $H_{|\ker(Dg(P))} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -12 \end{pmatrix}$ (para ello hemos tomado como base del núcleo de $Dg(P)$ los vectores $(1,-1,0)$ y $(0,-2,1)$), matriz que determina una forma cuadrática definida negativa, por lo que en P se alcanza el máximo condicionado de f.

Ejercicio 10.54. Discutir si la función $f(x,y,z) = z^2 - 2xy$ alcanza en los puntos $(-1,-1,2)$, $(1,1,0)$ y $(0,0,\sqrt[3]{4})$ un extremo relativo condicionado a que $2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$.

Solución 10.54. Veamos si podemos aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello aparte de hipótesis sobre la diferenciabilidad de la función y de la función que determina la condición (se dan claramente ya que ambas tienen derivadas parciales infinitamente derivables) también es necesario que el rango de la matriz jacobiana de la función $g(x,y,z) = 2x^3 + 2y^3 + z^3 - 4$ sea 1 en $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; g(x,y,z) = 0\}$. Si observamos $g'(x,y,z) = (6x^2, 6y^2, 3z^2)$ y para que dicha matriz no tenga rango 1 (es decir, que tenga rango 0) tiene que verificarse que $x = y = z = 0$ pero evidentemente $(0,0,0) \notin M$ y entonces el rango de $g'(x,y,z)$ es 1 en todos los puntos de M.
Veamos que los puntos en cuestión verifican que son puntos críticos de la función

$$F(z,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = z^2 - 2xy + \lambda(2x^3 + 2y^3 + z^3 - 4)$$

que están en M; es decir verifican las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(z,y,z) &= -2y + 6\lambda x^2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(z,y,z) &= -2x + 6\lambda y^2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(z,y,z) &= 2z + 3\lambda z^2 = 0, \\ 2x^3 + 2y^3 + z^3 &= 4. \end{aligned}$$

Es claro que $P_1 = (-1,-1,2)$, $P_2 = (1,1,0)$ y $P_3 = (0,0,\sqrt[3]{4})$ todos ellos verifican la ecuación $2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$. Además si sustituimos P_1 en la primera (o segunda o tercera) ecuación obtenemos que es punto crítico para $\lambda_1 = \frac{-1}{3}$. Sustituyendo P_2 obtentemos que $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ y para P_3 obtenemos de la tercera ecuación que $\lambda_3 = \frac{-2}{3\sqrt[3]{4}}$. Ya tenemos que los puntos son puntos críticos de F que están en M y hemos obtenido los correspondientes λ's que nos permitirán decidir si son extremos relativos o no. Para esto último tenemos que estudiar la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de F en cada uno de los puntos. Veamos, en general la matriz hessiana de F queda

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12\lambda x & -2 & 0 \\ -2 & 12\lambda y & 0 \\ 0 & 0 & 2 + 6\lambda z \end{pmatrix}.$$

En el punto P_1 tenemos que

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para estudiar cómo es la forma cuadrática asociada a la matriz $H(P_1)$ hay varios métodos. En clase hemos utilizado el de los cambios de signo de los coeficientes del polinomio característico de la matriz, o mejor aún, sus raices.

$$P(\alpha) = \left| \begin{pmatrix} 4-\alpha & -2 & 0 \\ -2 & 4-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2-\alpha \end{pmatrix} \right| = -(2+\alpha)(\alpha^2 - 8\alpha + 12)$$

y este polinomio tiene como raices $\alpha = -2$, $\alpha = 2$ y $\alpha = 6$ y por tanto la forma cuadrática que induce $H(P_1)$ es indefinida. En este caso tenemos que estudiar la forma cuadrática pero restringida al núcleo de la diferencial de g en P_1.

$$\ker(Dg(P_1)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (6,6,12).(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$$

y entonces $\ker(Dg(P_1)) = \langle (1,-1,0), (2,0,-1) \rangle$. Si ahora hacemos

$$(1,-1,0) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 12,$$

$$(1,-1,0) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 12$$

$$(2,0,-1) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 14$$

y la forma cuadrática que induce la matriz $\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$ es definida positiva. Por tanto en el punto P_1 se alcanza un mínimo relativo.
Para P_2 se tiene

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Razonando de forma similar a lo hecho en el punto P_1 obtenemos que la forma cuadrática asociada a $H(P_2)$ es definida positiva. En este caso no hay que continuar como antes ya que se obtiene directamente otro mínimo relativo.
Para el punto P_3 obtenemos

$$H(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculando los valores propios de esta matriz obtenemos que $\alpha = 2$ es un valor propio simple y que $\alpha = -2$ es un valor propio doble. Por tanto la forma cuadrática inducida es indefinida.

$$\ker(Dg(P_3)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (0,0,3(\sqrt[3]{4})^2).(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ z = 0\}$$

y entonces $\ker(Dg(P_3)) = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$.

$$(1,0,0)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$
$$(1,0,0)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$
$$(0,1,0)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

La matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ induce una forma cuadrática que sigue siendo indefinida y entonces en el punto no se alcanza ningún extremo relativo.

Ejercicio 10.55. Se considera $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + yz$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
a) Calcular y clasificar los puntos críticos de f en $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.
b) Calcular los extremos absolutos en $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Solución 10.55.
a) Vamos a buscar los puntos críticos de esta función que, evidentemente, es diferenciable. Calculamos las derivadas parciales de f e igualamos a cero.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y$$

El sistema de puntos críticos que nos queda es:

$$2x = 0,$$
$$z = 0$$
$$y = 0$$

La única solución es $(0,0,0)$ que pertenece al dominio dado (es precisamente el centro de la bola abierta unidad). Para decidir si es punto de extremo o no, clasificamos la matriz hessiana:

$$H(f,(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como se trata de una matriz constante, al evaluarla en el punto crítico $(0,0,0)$ obtenemos la misma matriz que llamaremos H. Para clasificarla, calculamos el polinomio característico de H.

$$\begin{aligned} \det(H-\lambda I) = {} & \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ & = (2-\lambda)\lambda^2 - (2-\lambda) \\ & = (2-\lambda)(\lambda^2-1) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1). \end{aligned}$$

Por tanto, los valores propios de esta matriz son $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = 2$. Como hay positivos y negativos, la forma cuadrática asociada a H es indefinida y, por tanto, el punto $(0,0,0)$ es un punto de silla, es decir, no se alcanza extremo en dicho punto.

b) Se trata ahora de calcular los extremos absolutos de f en un conjunto compacto (el recinto ahora es A, la bola cerrada unidad) y, por la propiedad de compacidad, estamos seguros de que dichos extremos se alcanzan . Éstos se pueden alcanzar, o bien en el interior de A, o bien en la frontera.
   i) Si se alcanzan en el interior de A, han de estar entre los extremos relativos que acabamos de ver en el apartado anterior, que no existen. Así que nos quedamos sólo con la frontera de A como recinto donde buscar los extremos absolutos.
   ii) En cuanto a la frontera:

$$Fr(A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

   planteamos un problema de extremos condicionados y hacemos uso del método de los multiplicadores de Lagrange. La función de Lagrange es:

$$F(x,y,z) = x^2 + yz + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

   El sistema de Lagrange que nos queda es:

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x &= 0 \\ z + 2\lambda y &= 0 \\ y + 2\lambda z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{aligned}$$

   Factorizamos la primera ecuación: $x(1+\lambda) = 0$. Y ahora hacemos una discusión de casos:
   1) Si $x = 0$, como y y z no se pueden anular simultáneamente, podemos despejar λ en las dos ecuaciones intermedias e igualar:

$$\frac{-z}{2y} = \frac{-y}{2z}$$

De donde se deduce que $y^2 = z^2 \iff |y| = |z|$ y, sustituyendo en la condición del problema, tenemos que $2y^2 = 1$. Por tanto, $y = \pm 1/\sqrt{2}$ y los puntos candidatos a extremos que tenemos por ahora son: $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ y $(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

2) Supongamos ahora que $x \neq 0$, por lo que $\lambda = -1$ y, sustituyendo en las ecuaciones intermedias, obtenemos

$$\begin{aligned} z - 2y &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

que admite únicamente la solución $y = z = 0$. Sustituimos ahora estos valores en la condición del problema y obtenemos dos nuevos puntos candidatos a extremos: $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

Para concluir el ejercicio sólo nos queda evaluar la función en los seis candidatos obtenidos:

$$\begin{aligned} f(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = f(0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) &= 1/2 \\ f(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = f(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) &= -1/2 \\ f(1, 0, 0) = f(-1, 0, 0) &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto, el máximo absoluto se alcanza en $(1, 0, 0)$ y en $(-1, 0, 0)$ y vale 1; y el mínimo absoluto se alcanza en $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y en $(0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ y vale $-1/2$.

Ejercicio 10.56. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y, z) = x^2 + 4x + yz$

a) Estudia los extremos relativos de la función f sujetos a la condición $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

b) ¿Alcanza f algún extremo absoluto en A?

Solución 10.56. El problema, al menos la primera parte, está bajo las condiciones del teorema de los multiplicadores de Lagrange: claramente la función $f(x, y, z) = x^2 + 4x + yz$ y $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ son derivables de cualquier orden, además llamando $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ g(x, y, z) = 0\}$, se tiene que $A \neq \emptyset$ (por ejemplo $(1, 0, 0) \in A$)y $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$ que para que no tenga rango 1 tienen que ser x, y, y z todos 0 que es un punto que no está en A. Podemos entonces, para calcular los extremos condicionados de f a A aplicar el citado método de los multiplicadores de Lagrange. Si $F(x, y, z) = x^2 + 4x + yz + \lambda(x^2 + y^2 - z^2 - 1)$ se tiene que los extremos condicionados tienen que estar entre los puntos que verifiquen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x + 4 + 2\lambda x = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = z + 2\lambda y = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = y - 2\lambda z = 0, \\ &x^2 + y^2 - z^2 = 1. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por y, la tercera por z y sumándolas se tiene que $z^2 + y^2 = 0$ cuya solución debe ser $y = 0$ y $z = 0$. Sustituyendo en la última ecuación tenemos que $x^2 = 1$ que tiene dos soluciones, $x = 1$ y $x = -1$. Por último, sustituyendo en la primera ecuación obtenemos que, para $x = 1$, $\lambda = -3$ y para $x = 1$ $\lambda = -1$. Así los dos puntos críticos son $(1, 0, 0)$ con $\lambda = -3$ y $(-1, 0, 0)$ con $\lambda = 1$.
Para ver si en estos puntos se alcanza algún tipo hay que estudiar la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana en los puntos. La matriz hessiana es la siguiente

$$HF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

Evaluando en el primer punto tenemos

$$HF(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es

$$P(t) = \begin{vmatrix} -4-t & 0 & 0 \\ 0 & -6-t & 1 \\ 0 & 1 & 6-t \end{vmatrix} = -(t+4)(t^2-37)$$

que tiene como raices -4, $\sqrt{37}$ y $-\sqrt{37}$. Así que la forma cuadrática es indefinida.
En el otro punto se tiene

$$HF(-1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es

$$P(t) = \begin{vmatrix} 4-t & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & -2-t \end{vmatrix} = (4-t)(t^2-5)$$

que tiene como raices 4, $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$. También en este punto la forma cuadrática es indefinida. En ambos casos entonces tenemos que restringir la forma cuadratica asociada a F al núcleo de la diferencial de g.

$$\begin{aligned} \ker(g)(1, 0, 0) &= \{(x, y, z) : \ (2, 0, 0) \cdot (x, y, z) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) : \ 2x = 0\} = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Calculamos las entradas de la forma cuadrática restringida al núcleo

$$(0,1,0)\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6$$
$$(0,1,0)\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$
$$(0,0,1)\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

y la matriz $\left(\begin{smallmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ induce una forma cuadrática indefinida. En este caso la función no alcanza en $(1,0,0)$ ningún extremo relativo.
Haciendo unos cálculos muy similares obtenemos que

$$\begin{aligned} \ker(g)(-1,0,0) &= \{(x,y,z) : \ (-2,0,0)\cdot(x,y,z) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) : \ -2x = 0\} = \langle (0,1,0),(0,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

De nuevo, calculamos las entradas de la forma cuadrática restringida al núcleo

$$(0,1,0)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$
$$(0,1,0)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$
$$(0,0,1)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2.$$

También la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ induce una forma cuadrática indefinida y la función tampoco alcanza en este punto ningún extremo relativo. Para la segunda parte si la función no alcanza ningún extremo relativo tampoco lo alcanzará absoluto.

Ejercicio 10.57. Calcular la distancia mínima entre la recta $x-y=2$ y la parábola $y=x^2$.

Solución 10.57. La función a minimizar es $f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$, sujeta a las condiciones $x-y-2=0$, $v-u^2=0$. Por tanto la función de Lagrange es:

$$F(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + \lambda(x-y-2) + \mu(v-u^2)$$

y el sistema de Lagrange que hay que resolver es:

$$\begin{aligned}
2(x-u)+\lambda &= 0\\
2(y-v)-\lambda &= 0\\
-2(x-u)-2\mu u &= 0\\
-2(y-v)+\mu &= 0\\
x-y &= 2\\
v &= u^2
\end{aligned}$$

cuya única solución es $\lambda = \mu = -\frac{7}{4} \implies \left(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, y en este punto es donde se alcanza la mínima distancia entre la recta y la parábola, cuyo valor es $f\left(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{49}{32}$.

10.9.6 Ejercicios complementarios

Ejercicio 10.1. Dada $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = (1-x^2)^{yz}\ \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, con $|x| < 1$, se pide:
a) Calcular las derivadas parciales de g.
b) Demostrar que g es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 10.2. Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de las siguientes funciones:
a) $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$,
b) $f(x,y) = x\,y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
c) $f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}(xy)\right), & \text{(x,y)} \neq \text{(0,0)}\\ (0,0), & \text{(x,y)} = \text{(0,0)}. \end{cases}$

Ejercicio 10.3. Estúdiese la diferenciabilidad en el origen de las funciones siguientes y calcúlese la diferencial en el origen en el caso de que dicha diferencial exista.
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(e^{x+y}, \operatorname{sen}(x-y), x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right), & \text{si } x \neq 0\\ (e^y, \operatorname{sen}(-y), 0), & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida como

$$g(x,y,z) = \begin{cases} \left(\cos(yz), xyz, \frac{1}{z}\right), & \text{si } z \neq 0\\ (1,0,0), & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 10.4. Dada la función $f(x,y,z) = xyz$, hallar la derivada según la trisectriz del primer octante en un punto arbitrario.

Ejercicio 10.5. La distribución de la temperatura en una placa metálica viene dada por $T(x,y) = K(x^2e^y + y^2e^x)$ donde K en una constante positiva. Calcular la dirección en la que la temperatura aumenta más rapidamente en el punto $(1,0)$.

Ejercicio 10.6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$f(x,y,z) = kze^{x+y} + \int_0^z e^{x+y} t\, dt$$

¿Para qué valores de k la ecuación $f(x,y,z)=0$ define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(0,0,0)$?. Para dichos valores, hallar $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Ejercicio 10.7. Sea $f:\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Se pide:
a) Calcúlese el gradiente de f en todo punto así como la matriz hessiana.
b) Pruébese que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ejercicio 10.8. Comprobar que en las siguientes ecuaciones se verifican las condiciones del Teorema de la función implícita en el punto indicado y obtener $y'(x)$ en los casos cuatro primeros casos y $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ en los otros.
a) $x^y + 3x^2 - 2y^2 - 2y = 0,\ (1,1)$
b) $\operatorname{sen}(x) + \cos(y) + 2y - \pi = 0, \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
c) $y \ln\left(x^2+y^2\right) - 2xy = 0, (0,1)$
d) $x^y + y^x - 2xy = 0, (2,2)$
e) $z \arctan(1-z^2) + 3x + 5z - 8y^3 = 0, (1,1,1)$
f) $xyze^z \ln(z) - 3x + 3y = 0, (1,1,1)$

Ejercicio 10.9. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable de modo que $f(0,0)=(0,0)$ y la matriz jacobiana en $(0,0)$ vale $Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de f. Determinar en cada caso, la matriz jacobiana de F en $(0,0)$.
a) $F(x,y) = \operatorname{sen}(f_1(x,y)) + \cos(f_2(x,y))$
b) $F(x,y) = \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} g(t)\, dt$, donde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua y $g(0)=5$.
c) $F(x,y) = \left(3f_1(x,y) + \int_0^{f_2(x,y)} g(t)dt, 7\int_{f_1(x,y)}^{3} g(t)dt, \int_{2f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} g(t)dt\right)$ donde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua y $g(0)=5$.

Ejercicio 10.10. Comprobar que las ecuaciones

$$3x = u+v+w,\ x^2+y^2 = u^2+v^2,\ x^3+y^3+z^3 = 3u^3$$

definen implícitamente a u, v y w como funciones de x, y y z o, si se quiere a x, y y z como funciones de u, v y w en el punto $(1,1,1,1,1,1)$. Calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ en el primer caso y $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ en el segundo.

Ejercicio 10.11. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de F donde f y g son, en cada caso, funciones "suficientemente derivables" como para que las derivadas parciales de segundo orden de F existan y sean continuas
a) $F(x,y) = \int_x^{f(x,y)} g(t)dt$
b) $F(x,y) = \int_{xy}^{f(x+y,x-y)} g(t)dt$
c) $F(x,y) = \int_{f(\operatorname{sen}(x),\cos(y),xy)}^{x} g(t)dt$
d) $F(x,y) = f(f(x,y,z),y,z)$

Ejercicio 10.12. Estudiar, en cada caso, si en los alrededores del punto que se indica, es posible ver la gráfica de la ecuación que se da como la gráfica de una función diferenciable del tipo a) $u = u(x, y, z)$, b) $z = z(x, y, u)$, c) $y = y(x, z, u)$, y/o d) $x = x(y, z, u)$.
a) $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 4 = 0$, $(1, 1, 1, 1)$
b) $xyzu + x^3 + 5yz^2 + 8u - 8z = 0$, $(0, 0, 1, 1)$
c) $x \operatorname{sen}(x) + y \operatorname{sen}(y) + z \operatorname{sen}(z) + u \operatorname{sen}(u) = 0$, $(0, 0, 0, 0)$

Ejercicio 10.13. Estudia si en los alrededores del punto que se indica, es posible ver la gráfica de la ecuación que se da como la gráfica de una función diferenciable del tipo $u = u(x, y, z)$, $z = z(x, y, u)$, $y = y(x, z, u)$, y/o $x = x(y, z, u)$.
a) $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 4$, $(1, 1, 1, 1)$
b) $xyzu + x^3 + 5yz^2 + 8u - 8z = 0$, $(0, 0, 1, 1)$
c) $x \operatorname{sen}(x) + y \operatorname{sen}(y) + z \operatorname{sen}(z) + u \operatorname{sen}(u) = 0$, $(0, 0, 0, 0)$

Ejercicio 10.14. Determinar la derivada de la función $z = f(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación $x \tan(y) - ze^z = 0$ en el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}, 0\right)$ en la dirección del vector $(2, 1)$.

Ejercicio 10.15. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función real de dos variables reales, dada por

$$g(x, y) = e^{ax+y^2} + b \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right), \ \forall (x, y).$$

Discutir los valores de a y b para que g tenga un extremo relativo en $(0, 0)$.

Ejercicio 10.16. Supongamos que la ecuación

$$\int_{xz}^{y+z} g(t)dt + \int_{3x+y}^{z^2} h(t)dt = 0, \tag{10.2}$$

donde g y h son funciones de clase uno, define implícitamente una función diferenciable $z = z(x, y)$. Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Ejercicio 10.17.
a) Demostrar que la ecuación $x^2 + y^2 + z^3 - 2x + yz = 0$ define $z = f(x, y)$ en un entorno del punto $(1, 0, 1)$.
b) Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $(1, 0)$.

Ejercicio 10.18. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^2 cuyos polinomios de Taylor de orden 2 centrados en el origen son, respectivamente,

$$P_f(x) = 3 + 4x + x^2, \ P_g(x) = 1 + 2x - 3x^2, \ P_h(x) = -1 - 3x + 4x^2.$$

Se define $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $F(x, y) = f\left(g(x) + h(y)\right)$. Calcular
a) la ecuación del plano tangente de F en el origen y
b) el hessiano de F en el origen.

Ejercicio 10.19. Calcular los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 9x^3 + \frac{y^3}{3} - 4xy$. Razonar si los extremos relativos obtenidos son absolutos.

Ejercicio 10.20.
a) Calcular los extremos de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ en la curva de ecuaciones
$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = z = 0 \\ g_2(x, y, z) = z^2 - (y-1)^3 = 0 \end{cases}$$
b) Probar que no existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que las soluciones de a) sean puntos críticos de $\phi = f + \lambda g_1 + \mu g_2$. ¿Contradice esto el teorema de los multiplicadores de Lagrange?.

Ejercicio 10.21. Estudiar los extremos de la función $f : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = \ln(x) + \ln(y) + \ln(z)$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5\pi$.

Ejercicio 10.22. Hallar la mínima distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) al plano $ax + by + cz + d = 0$.

Ejercicio 10.23. Hallar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, u, v) = x^2 + y^2$ con las condiciones $x^2 + u^2 + v^2 - 4 = 0$ y $y^2 + 2u^2 + 3v^2 - 9 = 0$.

Ejercicio 10.24. Consideremos el hiperboloide de ecuación $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$.
a) Comprobar que el plano tangente al hiperboloide en el punto $(1, -1, 4)$ tiene la ecuación $x - y - 2z + 6 = 0$.
b) Calcular el punto más cercano al origen de la intersección del anterior plano tangente y la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$.

Ejercicio 10.25. Discutir si la función $f(x, y, z) = z^2 - 2xy$ alcanza en los puntos $(-1, -1, 2)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, \sqrt[3]{4})$ un extremo relativo condicionado a que $2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$.

Ejercicio 10.26. Estúdiese si la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = \left(x + z^2\right) e^{x(y^2+z^2+1)}$ tiene mínimo absoluto en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 10.27. Hallar los extremos condicionados de la función $f(x, y) = x^3 + xy^2$ donde $xy - a^2 = 0$, $(a > 0)$.

Ejercicio 10.28. Determínese el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde a, b son reales positivos.

Ejercicio 10.29. Calcula los extremos absolutos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x, y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - \int_0^x \frac{2t}{1 + t^4}\, dt$$
en el conjunto $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

Ejercicio 10.30. Hallar la mínima distancia entre la recta $x + y = 4$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Ejercicio 10.31. Estudia los extremos absolutos de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$.

Ejercicio 10.32. Estudiar los extremos absolutos de la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z - (1 + x^2 + y^2)e^z$ siendo
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ x + z = 1\}.$$

Integrales múltiples

11

11.1 Integrales dobles

La construcción de la integral para funciones de varias variables se hace de forma análoga a el caso de una variable. Vamos a verlo con funciones de dos variables.
Sea $f : [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Consideremos particiones de cada uno de los intervalos, esto es, conjuntos de la forma

$$\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\},$$
$$\{c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < x_m = d\}.$$

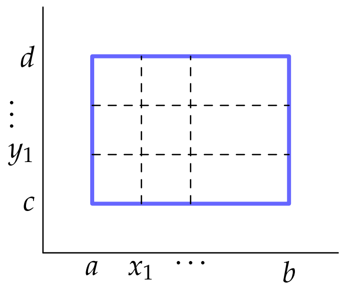


Figura 11.1 Partición

Estas nos dividen el dominio $[a,b]\times[c,d]$ en $n\times m$ rectángulos más pequeños como puedes ver la Figura 11.1. El "volumen" bajo la función f lo vamos a aproximar por la suma de los volúmenes de los paralelepípedos como los de la Figura 11.2. La altura de estos la elegimos fijando un punto arbitrario de la base y calculando su imagen. Más concretamente, , elegimos (u_i, v_j) verificando que

$$(u_i, v_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Entonces, una suma de Riemann de la función f es

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) f(u_i, v_j).$$

La integral de la función f se define como el límite de las sumas anteriores cuándo la longitud de los intervalos de las particiones tiende a cero.

11.1.1 Propiedades de la integral

Linealidad de la integral

Proposición 11.1. *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones integrables y sean λ y μ dos números reales, entonces la función $\lambda f + \mu g$ es integrable y se cumple que*

$$\int_A \lambda f + \mu g = \lambda \int_A + \mu \int_A g.$$

Monotonía de la integral

Proposición 11.2. *Sean $f, g : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones integrables que verifican que $f(x) \le g(x)$, para todo $x \in A$. Entonces $\int_A f \le \int_A g$.*

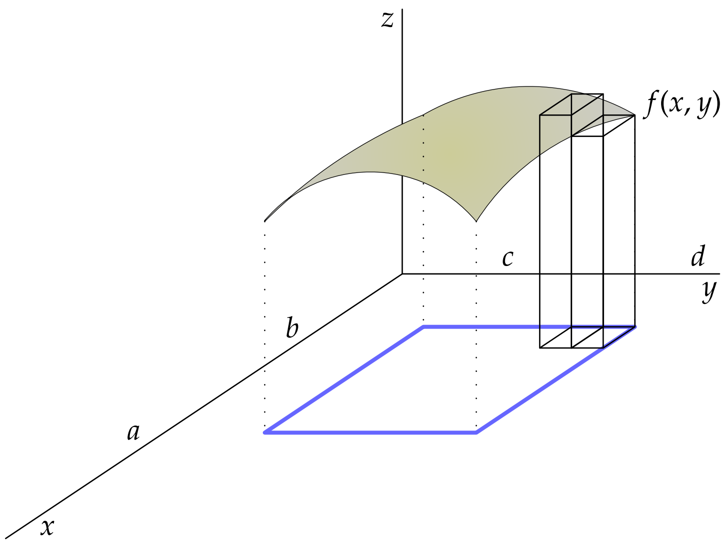


Figura 11.2 Sumas de Riemann

En particular, si $f(x) \geq 0$ *para cualquier* x *se cumple que* $\int_A f \geq 0$.

Aditividad respecto del dominio

Proposición 11.3. *Sean* A *y* B *dos subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *con* $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset$ *y sea* f *una función integrable en* $A \cup B$*, entonces se cumple que*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

11.1.2 Integrales iteradas

La definición de la integral es útil para demostrar propiedades genéricas pero no es práctica cuando pretendemos calcular el valor de la integral de una función concreta. El siguiente resultado nos permite reducirnos al caso de integrales de una variable.

Proposición 11.4. *Sea* $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *integrable. Entonces*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

Ejemplo 11.5. La integral de la función $f(x, y) = xy$ en $[0, 1] \times [-1, 3]$ vale

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[-1,3]} f(x, y)\, d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^3 xy\, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \bigg]_{-1}^3 dx \\ &= \int_0^1 4x\, dx = 2. \end{aligned}$$

Prueba tú a resolver la integral en orden inverso, primero integrando respecto de x y luego respecto de y, y comprueba que el resultado no varía. ◂

Observación 11.6. Para funciones como la del ejemplo anterior, el cálculo de integrales iteradas se puede simplificar un poco teniendo en cuenta que las variables están “separadas”. Es inmediato comprobar que si la función que integramos es producto de una función de x y una función de y, se cumple que

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)\,d(x,y) = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right).$$

Compruébalo en el ejemplo anterior.

11.2 Integración en dominios acotados

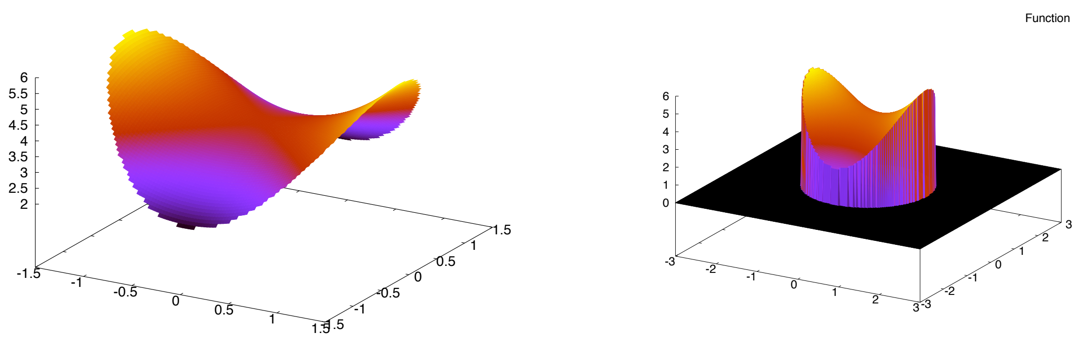
El siguiente paso que vamos a dar es extender la definición de integral para abarcar la integración de funciones definidas en dominios que no sean producto de intervalos. Para ello lo que vamos a hacer es extender la función por cero e integrar la correspondiente función extendida.

Más concretamente, consideremos una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto acotado A. Entonces podemos encontrar un rectángulo en que incluir el conjunto A. Si $A \subset [a,b]\times[c,d]$, definimos una extensión de la función f a dicho rectángulo como

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y)\in A,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Como hemos extendido la función por cero, el nuevo dominio no añade volumen y esto permite definir la integral de f como la integral de su extensión a un dominio rectangular:

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{f}(x,y)\,d(x,y).$$



La función $x^2 - y^2$ en el conjunto $x^2 + y^2 < 2$

La misma función extendida a todo el plano como cero

Figura 11.3 Extensión de la integral a conjuntos acotados

Esta extensión de la definición de integral a conjuntos acotados cualesquiera tiene un sólo inconveniente potencial: ¿cuándo es integrable la función extendida $\tilde{f}$? Si recuerdas la integral de funciones de una variable, la continuidad es una condición suficiente para asegurar la integrabilidad. En este caso, al extender la función de esta forma estamos añadiendo muchos puntos (toda la frontera de A) donde podemnos tener problemas de continuidad (échale un vistazo a la Figura 11.3). En general, hay que ser muy cuidadoso con este tipo de extensiones. En la próxima sección vamos a ver cómo podemos calcular integrales en algunos conjuntos de este tipo.

11.2.1 Recintos de tipo 1 o 2

Definición 11.7.

a) Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es de *de tipo 1* si existen funciones $f,\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\right\}$$

b) Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es de *de tipo 2* si existen funciones $f,\, g : [c,d] \to \mathbb{R}$ tales que
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ c \le y \le d,\ f(y) \le x \le g(y)\right\}$$

Las siguientes figuras son ejemplos de conjuntos de este tipo.

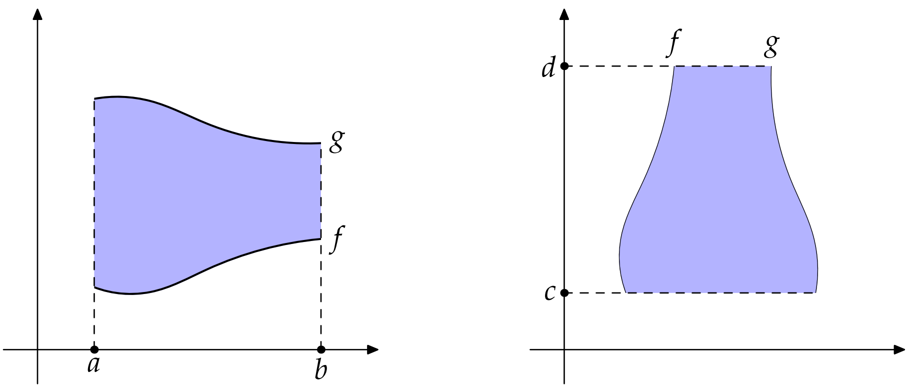


Figura 11.4 Recintos de tipo 1 y 2

Vamos a calcular cuánto vale la integral de una función F en un conjunto del primer tipo. Comencemos con una función $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\right\}.$$

Nos hace falta incluir A en un producto de intervalos. Para ello, elegimos c y d verificando que
$$c \le \min\{f(x) :\ x \in [a,b]\} \le \max\{g(x) :\ x \in [a,b]\} \le d$$
y definimos la función
$$\tilde{F}(x,y) = \begin{cases} F(x,y), & \text{si } (x,y) \in A, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Según la definición
$$\int_A F(x,y)\, d(x,y) = \int_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{F}(x,y)\, d(x,y).$$

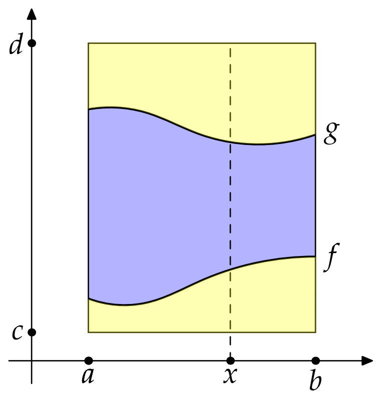


Figura 11.5 Integración en recintos de tipo 1

Esta última integral podemos resolverla, teóricamente, como dos integrales iteradas. Más concretamente, podríamos plantear la integral como

$$\int_A F(x,y)\,d(x,y) = \int_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{F}(x,y)\,d(x,y) = \int_c^d \left(\int_a^b \tilde{F}(x,y)\,dx \right) dy,$$

pero no sabemos resolver la primera integral. Para conocer el valor de $\tilde{F}(x,y)$ nos hace falta saber, para cada valor de x, en cuál de los tres tramos que puedes ver en la Figura 11.5 se encuentra la variable y. Si planteamos la integral en el orden cambiado ya sí que podemos:

$$\begin{aligned}\int_A F(x,y)\,d(x,y) &= \int_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{F}(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{F}(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{f(x)} \tilde{F}(x,y)\,dy + \int_{f(x)}^{g(x)} \tilde{F}(x,y)\,dy + \int_{g(x)}^d \tilde{F}(x,y)\,dy \right) dx\end{aligned}$$

y, usando que en la parte superior y en la parte inferior del dominio la función $\tilde{F}$ se anula,

$$= \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \tilde{F}(x,y)\,dy \right) dx.$$

Resumiendo, tenemos una forma de resolver las integrales en recintos de tipo 1, pero hemos perdido la libertad de elegir el orden en que calculamos la integrales iteradas. Sólo uno de los órdenes es posible.

Proposición 11.8. *Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Consideremos el conjunto*

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x) \right\}.$$

Si $F : A \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces

$$\int_A F(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)\,dy \right) dx.$$

La integración en recintos de tipo 2 se resuelve de manera similar intercambiando los papeles de las variables.

Proposición 11.9. *Sean $f,g : [c,d] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Consideremos el conjunto*

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ c \le y \le d,\ f(y) \le x \le g(y) \right\}.$$

Si $F : A \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces $\int_A F(x,y)\,d(x,y) = \int_c^d \left(\int_{f(y)}^{g(y)} F(x,y)\,dx \right) dy.$

11.3 Integrales en dimensiones superiores

Integrales triples, teorema de Fubini con tres integrales...
FALTA

11.4 Cambio de variable

Enunciamos a continuación la fórmula del cambio de variable.

Teorema 11.10. *Consideramos un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y una aplicación $g : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que verifica las siguientes condiciones:*

i) g *es inyectiva,*

ii) $g \in C^1(\Omega)$, *y*

iii) $\det Jg(x) \neq 0\,,\ \forall x \in \Omega$.

Es decir, g es un difeomorfismo de clase C^1 en Ω. Sea ahora $A \subset g(\Omega)$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces se verifica

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(A)} f(g(t))\,|\det Jg(t)|\,dt\,.$$

Teorema de cambio de variable

11.4.1 Cambio de variable a coordenadas polares en el plano

En este caso el abierto $\Omega =]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}^+$ y la aplicación $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}(\theta))$. Obsérvese que el jacobiano $\det Jg(\rho,\theta) = \rho > 0$. Entonces, si $A \subset g(\Omega)$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua, se tiene que

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{g^{-1}(A)} f\left(\rho\cos(\theta), \rho\operatorname{sen}(\theta)\right)\,\rho\,d(\rho,\theta)\,.$$

Observación 11.11. El intervalo $]-\pi,\pi[$ se puede cambiar por cualquier otro intervalo abierto de longitud 2π. Por ejemplo, algunas veces utilizaremos el intervalo $]0,2\pi[$ sin entrar en más detalles.

Ejemplo 11.12. El área de un círculo de radio R se calcula integrando la función constatemente 1 en

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le R^2\right\}.$$

En coordenadas polares, $A = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[:\ \rho \le R\}$. Por tanto

$$\int_A 1\,d(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^R \rho\,d\rho\right)d\theta = \pi R^2\,. \triangleleft$$

11.4.2 Cambio de variable por traslaciones y dilataciones (homotecias) en el plano

Consideramos ahora funciones de la forma $g(x,y) = (ax+c, by+d)$ que, en el plano, representan movimientos que se llaman homotecias. Consideramos $a,b > 0$ y $c,d \in \mathbb{R}$. En este tipo de movimientos, el jacobiano es $\det Jg(x,y) = a\,b$; por lo que a la hora de calcular una integral donde se efectúa este cambio, la fórmula que utilizamos es:

$$\int_A f(u,v)\,d(u,v) = \int_{g^{-1}(A)} f(ax+c, by+d)\,a\,b\,d(x,y)\,.$$

Ejemplo 11.13. Calcular, por medio de una integral doble, el área del recinto limitado por una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Consideramos el cambio de variable $g(u, v) = (au, bv)$; es decir, las variables clásicas (x, y) se transforman en $x = au$, $y = bv$ y así el recinto que nos daban, el limitado por la elipse, se transforma en un círculo. En efecto,

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} \implies g^{-1}(A) = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\right\}.$$

Por tanto, Área$(A) = \int_A 1\, d(x, y) = \int_{g^{-1}(A)} 1ab\, d(u, v) = \pi\, a\, b$. ◂

11.4.3 Cambio de variable por traslaciones y dilataciones (homotecias) en el espacio

Análogamente a como hemos hecho en el plano, consideramos el cambio de variable que nos va a permitir, o bien trasladar el sistema de referencia con el que trabajamos (traslaciones), o bien dilatar o contraer el recinto de integración (dilataciones); si bien, se pueden componer los dos movimientos (homotecias). Concretamente, si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, se considera la siguiente aplicación

$$g(u, v, w) = (au + \alpha, bv + \beta, cw + \gamma)\ , \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 .$$

De esta forma, las variables cartesianas x, y, z se escribirían como

$$\begin{aligned} x &= au + \alpha \\ y &= bv + \beta \\ z &= cw + \gamma \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que $\det Jg(u, v, w) = a\, b\, c$, una integral triple a la que le aplicaramos este cambio de variable quedaría como sigue:

$$\int_A f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_{g^{-1}(A)} f(au + \alpha, bv + \beta, cw + \gamma)\, a\, b\, c\, d(u, v, w) .$$

Como ejemplo, calculamos el volumen del recinto acotado por un elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Por tanto, el recinto con el que vamos a trabajar es

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

Entonces, aplicamos el siguiente cambio de variable para transformar el elipsoide en una esfera. Es decir $x = au$, $y = bv$, $z = cw$, y así $g^{-1}(A) = \left\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\right\}$. Como consecuencia, el volumen que nos piden es

$$V(A) = \int_A 1\, d(x, y, z) = \int_{g^{-1}(A)} abc\, d(u, v, w) = \frac{4}{3}\pi abc .$$

11.4.4 Cambio de variable a coordenadas cilíndricas en el espacio

En esta sección y en la siguiente vamos a presentar dos maneras de representar los puntos en el espacio, además de en coordenadas cartesianas (x, y, z). Estos sistemas de coordenadas alternativos son particularmente adecuados para ciertos tipos de problemas como, por ejemplo, el cálculo de integrales múltiples.

Comenzamos entonces con el cambio a *coordenadas cilíndricas*. En este caso, dado un punto del espacio (x, y, z) lo vamos a representar como sigue

$$x = \rho\ \cos(\theta),\ y = \rho\ \mathrm{sen}(\theta),\ z = z$$

donde $(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$ y la función $g(\rho, \theta, z) = (x, y, z)$ tiene jacobiano ρ. En otras palabras, para cada punto (x, y, z), se representa la primer y segunda coordenadas en términos de coordenadas polares y no se altera al tercera.

Para comprender por qué se usa el término coordenadas cilíndricas, obsérvese que el lugar geométrico formado por los puntos (ρ, θ, z) cuando ρ permanece constantemente igual a r es un cilindro de radio r.

Aplicando este cambio de variable al cálculo de una integral triple, la fórmula del cambio de variable nos dice que

$$\int_A f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_{g^{-1}(A)} f(\rho \cos(\theta), \rho\, \mathrm{sen}(\theta), z)\, \rho\, d(\rho, \theta, z)\ .$$

Ejemplo 11.14. El volumen del cilindro $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le 1,\ |z| \le 1\right\}$ es

$$\int_A 1\, d(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 \rho\, dz d\rho d\theta = 2\pi. \ \triangleleft$$

Ejemplo 11.15. La integral $\int_A x^2 + y^2\, d(x, y)$, con $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le 2z,\ z \le 2\right\}$ se puede resolver mediante un cambio a coordenadas cilíndricas. El conjunto A en coordenadas polares es

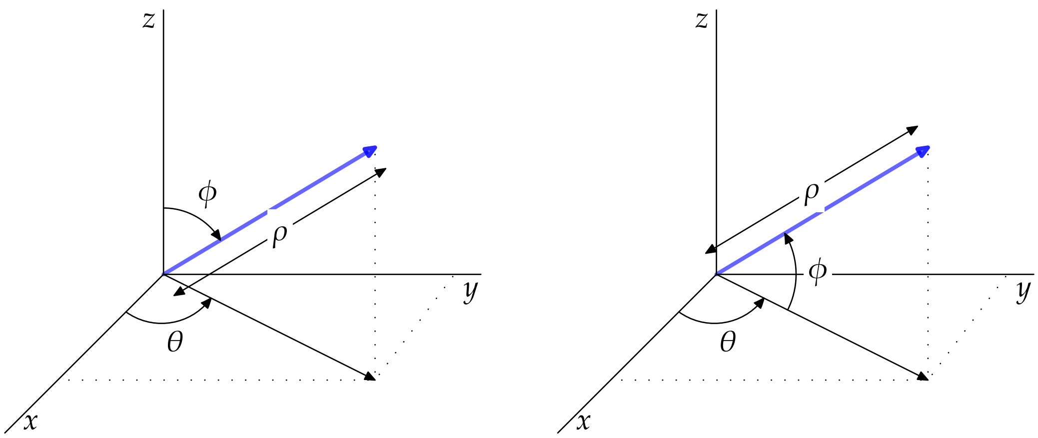
$$x^2 + y^2 \le 2z,\ z \le 2 \iff \rho^2 \le 2z \le 4.$$

Por tanto $\int_A x^2 + y^2\, d(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_{\rho^2/2}^2 \rho^3\, dz\right) d\rho\right) d\theta = \frac{80}{9}\pi. \ \triangleleft$

11.4.5 Cambio de variable a coordenadas esféricas en el espacio

Las coordenadas esféricas se basan en la misma idea de las coordeandas polares: para fijar un vector en el espacio es necesario y suficiente con saber su longitud (módulo) y hacia dónde apunta. Para esto último, ahora necesitamos dos valores: azimut y elevación. En otras palabras necesitamos indicar el ángulo con respecto a la horizontal y a la vertical. Con respecto al primero de dichos ángulos, la convención es la estándar: medimos a partir de la parte positiva del eje OX. Con respecto a la elevación, no hay acuerdo entre los diversos autores, pero las más usuales son las llamadas geográficas y las que nosotros llamaremos simplemente coordenadas esféricas. En las geográficas, la elevación se mide a partir de la horizontal y, en las esféricas lo comenzamos a medir desde “el polo norte” (observa la Figura 11.6). Por lo demás, no hay mayor diferencia entre unas y otras.

En coordenadas esféricas,



Coordenadas esféricas Coordenadas esféricas geográficas

Figura 11.6 Coordenadas esféricas

a) ρ es la distancia desde (x,y,z) hasta el origen, esto es, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
b) θ es la coordenada cilíndrica, es decir, el ángulo comprendido desde la parte positiva del eje OX hasta el segmento que une el origen con el punto (x,y). Por tanto, $\theta \in]-\pi,\pi[$.
c) ϕ es el ángulo comprendido desde el eje OZ al vector de posición del punto (x,y,z), hasta este vector. Es decir, $\phi \in]0,\pi[$.

Un punto del espacio (x,y,z) lo representamos como representar como sigue

$$x = \rho\ \mathrm{sen}(\phi)\ \cos(\theta),$$
$$y = \rho\ \mathrm{sen}(\phi)\ \mathrm{sen}(\theta),$$
$$z = \rho\ \cos(\phi),$$

donde $(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[\times \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ y la función $g(\rho,\theta,\phi) = (x,y,z)$ tiene jacobiano (en valor absoluto) $\rho^2\ \mathrm{sen}(\phi) > 0$.

Por otro lado, las coordenadas esféricas geográficas en el espacio son (ρ,θ,ϕ) donde:
a) ρ es la distancia desde (x,y,z) hasta el origen, esto es, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
b) θ es la coordenada cilíndrica, es decir, el ángulo comprendido desde la parte positiva del eje OX hasta el segmento que une el origen con el punto (x,y). Por tanto, $\theta \in]-\pi,\pi[$[5].
c) ϕ es el ángulo comprendido desde la proyección del vector de posición del punto (x,y,z) en el plano $z = 0$, hasta este vector. Es decir, $\phi \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

De esta forma, dado un punto del espacio (x,y,z) lo vamos a representar como sigue

$$x = \rho\ \cos(\phi)\ \cos(\theta),$$
$$y = \rho\ \cos(\phi)\ \mathrm{sen}(\theta),$$
$$z = \rho\ \mathrm{sen}(\phi),$$

donde $(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[\times \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ y la función $g(\rho,\theta,\phi) = (x,y,z)$ tiene jacobiano $\rho^2\ \cos(\phi) > 0$.

[5] Al igual que en el cambio a coordenadas polares, se puede elegir cualquier otro intervalo de longitud 2π

Ejemplo 11.16. *Calcular el volumen de la esfera* $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + x^2 \leq R^2\right\}$.
En coordenadas esféricas nos queda

$$\int_A 1\, d(x, y, z) = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 \cos(\phi)\, d\theta d\phi d\rho = \frac{4}{3}\pi R^3. \triangleleft$$

11.5 Aplicaciones

FALTA

11.6 Ejercicios

Ejercicio 11.1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{[0,2]\times[0,1]} (x^2 + 2y) d(x, y)$

b) $\int_{[3,4]\times[1,2]} \frac{d(x,y)}{(x+y)^2}$

c) $\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x^2}{1+y^2} d(x, y)$

d) $\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{d(x,y)}{(1+x+y)^2}$

e) $\int_{[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} \operatorname{sen}(x + y) d(x, y)$

f) $\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \frac{d(x,y,z)}{(1+x+y+z)^3}$

g) $\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \frac{d(x,y,z)}{\sqrt{1+x+y+z}}$

Solución 11.1.

a) La integral vale

$$\int_{[0,2]\times[0,1]} (x^2 + 2y) d(x, y) = \int_0^2 \left(\int_0^1 x^2 + 2y\, dy \right) dx = \int_0^2 x^2 + 1\, dx = \frac{4}{3}.$$

b) La integral es

$$\int_{[3,4]\times[1,2]} \frac{d(x, y)}{(x + y)^2} = \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{dx}{(x + y)^2} \right) dy = \ln\left(\frac{25}{24}\right).$$

c) La integral es

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x^2}{1 + y^2} d(x, y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2}{1 + y^2}\, dx \right) dy = \frac{\pi}{12}.$$

d) La integral es $\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{d(x,y)}{(1+x+y)^2} = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

e) La integral es $\int_{[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} \operatorname{sen}(x + y) d(x, y) = 2$.

f) La integral es $\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \frac{d(x,y,z)}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{32}{27}\right)$.

g) La integral es $\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \frac{d(x,y,z)}{\sqrt{1+x+y+z}} = \frac{8}{15}\left(31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3}\right)$

Ejercicio 11.2. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^2 \left(\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx$

b) $\int_1^2 \left(\int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx$

c) $\int_{-3}^{3} \left(\int_{y^2-4}^{5} (x + 2y) dx \right) dy$

d) $\int_0^{2\pi} \left(\int_{\operatorname{sen}(\rho)}^{1} r dr \right) d\rho$

e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{3\cos(\rho)} r^2\operatorname{sen}^2(\rho)dr\right)d\rho$

f) $\int_0^4\left(\int_0^{10-y} xdx\right)dy$

g) $\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} xyzdz\right)dy\right)dx$

h) $\int_0^2\left(\int_0^{2\sqrt{x}}\left(\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} xdz\right)dy\right)dx$

Solución 11.2.

a) $\int_0^2\left(\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}\right)dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

b) $\int_1^2\left(\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2}dy\right)dx = \frac{9}{4}$.

c) $\int_{-3}^3\left(\int_{y^2-4}^5 (x+2y)dx\right)dy = \frac{252}{5}$.

d) $\int_0^{2\pi}\left(\int_{\operatorname{sen}(\rho)}^1 rdr\right)d\rho = \frac{\pi}{2}$.

e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{3\cos(\rho)} r^2\operatorname{sen}^2(\rho)dr\right)d\rho = \frac{12}{5}$.

f) $\int_0^4\left(\int_0^{10-y} xdx\right)dy = \frac{392}{3}$.

g) $\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} xyzdz\right)dy\right)dx = \frac{1}{720}$.

h) $\int_0^2\left(\int_0^{2\sqrt{x}}\left(\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} xdz\right)dy\right)dx = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$.

Ejercicio 11.3. Calcular las siguientes integrales.

a) $\int_0^2\left(\int_x^{\pi x} \frac{1}{y^2+1}\,dy\right)dx$

b) $\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\,dx\right)dy$

c) $\int_0^1\left(\int_{2y}^2 \cos\left(x^2\right)\,dx\right)dy$

d) $\int_0^8\left(\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,dy\right)dx$

e) $\int_0^2\left(\int_1^{e^x}\,dy\right)dx$

Solución 11.3.

a)

$$\int_0^2\int_x^{\pi x}\frac{1}{y^2+1}\,dy\,dx = \int_0^2\Big[\arctan(y)\Big]_{y=x}^{y=\pi x}\,dx = \int_0^2\Big(\arctan(\pi x)-\arctan(x)\Big)dx$$
$$= \int_0^2 \arctan(\pi x)\,dx - \int_0^2 \arctan(x)\,dx.$$

Vamos a calcular, por partes, cada una de las integrales por separado.

$$\int_0^2 \arctan(x)\,dx = \Big[x\arctan(x)\Big]_0^2 - \int_0^2\frac{x}{1+x^2}\,dx = 2\arctan(2) - \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^2$$
$$= 2\arctan(2) - \frac{1}{2}\log(5),$$

$$\int_0^2 \arctan(\pi x)\,dx = \Big[x\arctan(\pi x)\Big]_0^2 - \pi\int_0^2\frac{x}{1+(\pi x)^2}\,dx$$

$$\begin{aligned} &= 2\arctan(2\pi) - \left[\frac{1}{2}\log(1+(\pi x)^2)\right]_0^2 \\ &= 2\arctan(2\pi) - \frac{\log(1+4\pi^2)}{2\pi}. \end{aligned}$$

Entonces el resultado final es:

$$\int_0^2 \int_x^{\pi x} \frac{1}{y^2+1}\, dy\, dx = 2\arctan(2\pi) - 2\arctan(2) + \frac{1}{2}\log(5) - \frac{\log(1+4\pi^2)}{2\pi}.$$

b) La integral vale

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{2}} 2y\sqrt{4-2y^2}\, dy = -\frac{1}{3}\left[(4-2y^2)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{3}.$$

c) Para poder calcular una primitiva de $f(x,y) = \cos(x^2)$ vamos a cambiar el punto de vista a la hora de describir el recinto de integración:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1\ ,\ 2y \le x \le 2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2\ , 0 \le y \le x/2\right\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{2y}^2 \cos(x^2)\, dxdy &= \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} \cos(x^2)\, dy\right) dx \\ &= \int_0^2 \frac{x}{2}\cos(x^2)\, dx = \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen}(x^2)\right]_0^2 = \frac{\operatorname{sen}(4)}{4}. \end{aligned}$$

d) Igual que en el apartado anterior, invertimos el orden de integración:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 8\ ,\ \sqrt[3]{x} \le y \le 2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2\ , 0 \le x \le y^3\right\}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^8 \left(\int_0^{\sqrt[3]{x}} \frac{1}{y^4+1}\, dy\right) dx &= \int_0^2 \left(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dx\right) dy \\ &= \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\, dy = \frac{1}{4}\left[\log(y^4+1)\right]_0^2 = \frac{\log(17)}{4}. \end{aligned}$$

e) $\int_0^2 \left(\int_1^{e^x} dy\right) dx = \int_0^2 (e^x - 1)\, dx = \left[e^x - x\right]_0^2 = e^2 - 3.$

Ejercicio 11.4. Calcular las integrales

a) $\int_0^2 \left(\int_x^2 y^2 \operatorname{sen}(xy)\, dy\right) dx,$

b) $\int_0^\pi \left(\int_x^\pi \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\, dy\right) dx,$

c) $\int_0^1 \left(\int_y^1 x^2 e^{xy}\, dx\right) dy,$

d) $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\, dx\right) dy.$

Solución 11.4.

a) Para calcular la integral permutamos el orden de integración:

$$\begin{aligned}\int_0^2\left(\int_x^2 y^2\,\mathrm{sen}(xy)\,dy\right)dx &= \int_0^2\left(\int_0^y y^2\,\mathrm{sen}(xy)\,dx\right)dy\\ &= \int_0^2 y\left(\int_0^y y\,\mathrm{sen}(xy)\,dx\right)dy\\ &=e\int_0^2 y\Big[-\cos(xy)\Big]_{x=0}^{x=y}\,dy\\ &= \int_0^2 y\left[1-\cos(y^2)\right]\,dy = \left[\frac{y^2}{2}-\frac{\mathrm{sen}(y^2)}{2}\right]_0^2 = 2-\frac{\mathrm{sen}(4)}{2}.\end{aligned}$$

b) Cambiamos el orden de integración:

$$\int_0^\pi\left(\int_x^\pi \frac{\mathrm{sen}(y)}{y}\,dy\right)dx = \int_0^\pi\left(\int_0^y \frac{\mathrm{sen}(y)}{y}\,dx\right)dy = \int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}(y)}{y}\,y\,dy = \int_0^\pi \mathrm{sen}(y)\,dy = 2.$$

c) Invertimos el orden de integración para poder resolver la integral,

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\right)dy &= \int_0^1\left(\int_0^x x^2 e^{xy}\,dy\right)dx = \int_0^1 x\left(\int_0^x x\,e^{xy}\,dy\right)dx\\ &= \int_0^1 x\,[e^{xy}]_{y=0}^{y=x}\,dx = \int_0^1 x(e^{x^2}-1)\,dx\\ &= \int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx - \frac{1}{2} = \frac{e}{2}-1.\end{aligned}$$

d) El recinto de integración es

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\ ,\ x\ge 0\ , y\ge 0\right\};$$

por tanto aplicamos el cambio de variable a coordenadas polares, teniendo en cuenta que el recinto A cambiado a polares es

$$g^{-1}(A)=\left\{(\rho,\theta):\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\le\rho\le 1\right\}$$

Aplicando el teorema del cambio de variable:

$$\int_A (x^2+y^2)\,d(x,y) = \int_{g^{-1}(A)} \rho^3\,d(\rho,\theta) = \int_0^{\pi/2} d\theta\ \int_0^1 \rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

Ejercicio 11.5. Sea $f: A\to\mathbb{R}$, calcula su integral en los siguientes casos:

a) $f(x,y)=1$ siendo A la región limitada por $y^2=x^3$, $y=x$.

b) $f(x,y)=x^2$ siendo A la región limitada por $xy=16$, $y=x$, $y=0$, $x=8$.

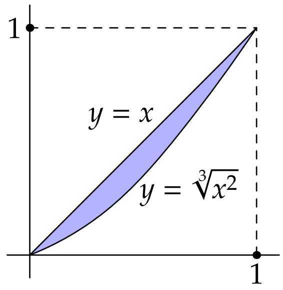
c) $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ siendo A la región limitada por $y^2=x$, $x=0$, $y=1$.

d) $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ siendo A la región limitada por $y=\frac{x^2}{2}$, $y=x$.

Solución 11.5.

a) El recinto de integración A se puede escribir así:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ , \ x^{3/2} \leq y \leq x\right\}$$



Entonces la integral nos queda

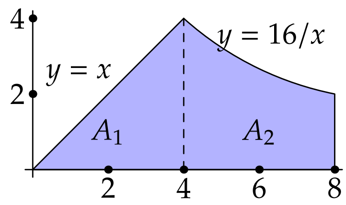
$$\int_A f(x, y)\, d(x, y) = \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x} 1\, dy\, dx =$$

$$\int_0^1 (x - x^{3/2})\, dx = \frac{1}{10}\,.$$

b) El recinto donde integramos es unión de otros dos: $A = A_1 \cup A_2$, donde

$$A_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4 \ , \ 0 \leq y \leq x\right\},$$

$$A_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x \leq 8 \ , \ 0 \leq y \leq \frac{16}{x}\right\}.$$

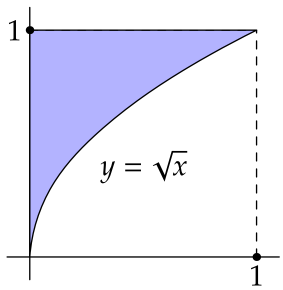


Por tanto la integral es suma de otras dos, esto es

$$\begin{aligned}\int_A f(x, y)\, d(x, y) &= \int_{A_1} f(x, y)\, d(x, y) + \int_{A_2} f(x, y)\, d(x, y)\\ &= \int_0^4 \int_0^x x^2\, dy\, dx + \int_4^8 \int_0^{\frac{16}{x}} x^2\, dy\, dx\\ &= \int_0^4 x^3\, dx + \int_4^8 16x\, dx = 448.\end{aligned}$$

c) El recinto donde integramos es:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \ , \ 0 \leq x \leq y^2\}$$

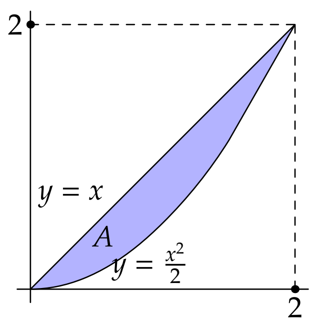


Por tanto la integral es

$$\begin{aligned}\int_A f(x, y)\, d(x, y) &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\, dx\\ &= \int_0^1 (ye^y - y)\, dy = \tfrac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

d) El recinto donde integramos es:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \ , \ \frac{x^2}{2} \leq y \leq x\right\}.$$



Por tanto la integral es

$$\begin{aligned}
\int_A f(x,y)\,d(x,y) &= \int_0^1 \int_{x^2/2}^{x} \frac{x}{x^2+y^2}\,dydx \\
&= \int_0^1 \int_{x^2/2}^{x} \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dydx \\
&= \int_0^1 \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{x^2/2}^{x} dy \\
&= \int_0^1 \arctan(1) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right).
\end{aligned}$$

Ejercicio 11.6. Calcula los siguientes volúmenes:

a) Volumen del sólido limitado superiormente por $z = x + y$ e inferiormente por el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

b) Volumen del sólido comprendido por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ e inferiormente por el disco unidad.

Solución 11.6.

a) El recinto A en donde integramos está definido por las condiciones $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$, $0 \le z \le x + y$. Por tanto el volumen es $V(A) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} dz = \frac{1}{3}$.

b) El recinto donde integramos es el siguiente:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le x^2 + y^2\right\}.$$

El volumen es $V(A) = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 11.7. Sea D el conjunto delimitado por $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$ en el primer cuadrante. Utilizar el cambio de variable $u = x^2 - y^2$, $v = x^2 + y^2$ para calcular $\int_D xy\,d(x,y)$.

Solución 11.7. Consideramos el recinto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 - y^2 \le 4,\ 9 \le x^2 + y^2 \le 9,\ x,\ y \ge 0\right\}.$$

El cambio de variable propuesto es $g(u,v) = \left(\sqrt{\frac{v+u}{2}}, \sqrt{\frac{v-u}{2}}\right)$, y el determinante de su matriz jacobiana es $\frac{1}{4\sqrt{v^2-u^2}}$. Entonces, aplicando el teorema del cambio de variable

$$\int_D xyd(x,y) = \int_{g^{-1}(D)} \frac{\sqrt{v^2-u^2}}{2} \frac{1}{4\sqrt{v^2-u^2}}\,d(u,v)$$

El recinto donde integramos ahora es $g^{-1}(D) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le u \le 4,\ 9 \le v \le 16\right\}$. Y la integral es

$$\int_{g^{-1}(D)} \frac{1}{8}\, d(u,v) = \int_1^4 \left(\int_9^{16} \frac{1}{8}\, dv \right) du = \frac{21}{8}.$$

Ejercicio 11.8. Utilizar el cambio a coordenadas polares para calcular las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:

a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $A = \overline{B}\left((0,0),1\right)$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $A = [0,1] \times [0,1]$

c) $f(x,y) = y$, $A = \left\{(x,y) \in B\left((\frac{1}{2},0), \frac{1}{2}\right) :\ y \geq 0\right\}$

d) $f(x,y) = x^2+y^2$, $A = \overline{B}((1,0),1)$

e) $f(x,y) = x^2+y^2$, $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\right\}$

Solución 11.8.

a) Si cambiamos a coordenadas polares el recinto A nos queda:

$$x^2+y^2 \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

La integral entonces es:

$$\int_A \sqrt{1-x^2-y^2}\, d(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho\, d\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

b) Trasladamos las condiciones del recinto A a coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 0 \leq \rho\cos(\theta) \leq 1 \\ 0 \leq \rho\,\text{sen}(\theta) \leq 1 \end{array}\right.$$

De lo anterior se deduce que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, y que la acotación de ρ depende de si $\theta \leq \frac{\pi}{4}$ o si $\theta \geq \frac{\pi}{4}$, es decir:

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} &\implies 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos(\theta)} \\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} &\implies 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\text{sen}(\theta)}. \end{aligned}$$

Por tanto, a la hora de calcular la integral, como el recinto ha quedado descompuesto en la unión de otros dos, obtenemos una suma de integrales. En efecto:

$$\begin{aligned} \int_A \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y) = &\int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos(\theta)} \rho^2\, d\rho\, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/\text{sen}(\theta)} \rho^2\, d\rho\, d\theta \\ =&\frac{1}{6}\left[2\sqrt{2} + \ln\left(\cos(\frac{\pi}{8})\right) + \ln\left(1 + \frac{\cos(\pi/8)}{\text{sen}(\pi/8)}\right)\right] \\ -&\frac{1}{6}\left[\ln\left(\cos(\frac{\pi}{8}) - \text{sen}(\frac{\pi}{8})\right)\right] \approx 0.765196. \end{aligned}$$

c) En primer lugar hacemos una traslación de los ejes de la forma: $x - 1/2 = u$, $y = v$. Llamemos B al conjunto que se obtiene al hacer este primer cambio de variable, es decir

$$B = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ u^2+v^2 \leq \frac{1}{4},\ v \geq 0\right\}$$

Ahora aplicamos el cambio a coordenadas polares y nos queda que

$$(u,v)=(\rho\cos(\theta),\rho\,\mathrm{sen}(\theta))\in B \iff \left\{\begin{array}{l} 0\le\rho\le\frac{1}{2} \\ 0\le\theta\le\pi \end{array}\right\}$$

con lo que la integral se resuelve así:

$$\int_A y\,d(x,y)=\int_B v\,d(u,v)=\int_0^{\pi}\int_0^{1/2}\rho^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\rho\,d\theta=\frac{1}{12}.$$

d) Cambiamos a coordenadas polares:

$$(x-1)^2+y^2\le 1 \iff x^2+y^2\le 2x \iff \left\{\begin{array}{l} 0\le\rho\le 2\cos(\theta) \\ -\pi/2\le\theta\le\pi/2 \end{array}\right.$$

Calculamos la integral:

$$\int_A (x^2+y^2)\,d(x,y)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)}\rho^3\,d\rho\,d\theta=\frac{3\pi}{2}.$$

e) Cambiando a coordenadas polares:

$$4\le x^2+y^2\le 9 \iff \left\{\begin{array}{l} 2\le\rho\le 3 \\ -\pi\le\theta\le\pi \end{array}\right.$$

La integral nos queda $\int_A (x^2+y^2)\,d(x,y)=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_2^3\rho^3\,d\rho=\frac{65\pi}{2}$.

Ejercicio 11.9. Calcula la integral de $f:A\to\mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x,y)=x\sqrt{1-x^2-y^2}$, $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1,\ x,y\ge 0\right\}$

b) $f(x,y)=e^{x/y}$, $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y^3\le x\le y^2\right\}$

c) $f(x,y)=x^2+y^2$, $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 2y,\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\right\}$

d) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$, $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\le y,\ x+y\ge 1,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

e) $f(x,y)=x^2+y^2$, $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x^2+y^2)^2\le 4(x^2-y^2),\ x\ge 0\right\}$

Solución 11.9.

a) Utilizando el cambio a coordenadas polares

$$\begin{aligned}\int_A x\sqrt{1-x^2-y^2}\,d(x,y)&=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1\rho^2\cos(\theta)\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\right)d\theta\\&=\left(\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\right)=\frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

b) La integral es

$$\int_A e^{x/y}\,d(x,y)=\int_0^1\left(\int_{y^3}^{y^2}e^{x/y}\,dx\right)dy=\frac{3-e}{2}.$$

c) Aplicamos el cambio a coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2\leq 2y \\ x^2+y^2\leq 1 \\ x\geq 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} 0\leq \rho\leq 2\,\mathrm{sen}(\theta) \\ 0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Por tanto, debe verificarse a la vez que $\rho\leq 1$ y $\rho\leq 2\,\mathrm{sen}(\theta)$ o, lo que es lo mismo, que $\rho\leq\min\{1,2\,\mathrm{sen}(\theta)\}$. Usando que $\mathrm{sen}(\theta)=\frac{1}{2}$ para $\theta=\frac{\pi}{6}$, es inmediato comprobar que

$$\min\{1,2\,\mathrm{sen}(\theta)\}=\begin{cases} 2\,\mathrm{sen}(\theta), & \text{si } \theta\leq\frac{\pi}{6} \\ 1, & \text{si } \theta\geq\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\int_A (x^2+y^2)\,d(x,y)=\int_0^{\pi/6}\left(\int_0^{2\,\mathrm{sen}(\theta)}\rho^3\,d\rho\right)d\theta+\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\int_0^1\rho^3\,d\rho\right)d\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{7\sqrt{3}}{16}.$$

d) Pasamos a coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{c} x\leq y \\ x+y\geq 1 \\ x^2+y^2\leq 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} \rho\cos(\theta)\leq\rho\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \rho(\cos(\theta)+\mathrm{sen}(\theta))\geq 1 \\ 0\leq\rho\leq 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} \frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{\cos(\theta)+\mathrm{sen}(\theta)}\leq\rho\leq 1 \end{array}\right.$$

La integral queda

$$\int_A (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,d(x,y)=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_{\frac{1}{\cos(\theta)+\mathrm{sen}(\theta)}}^1\rho^{-2}\,d\rho\right)d\theta=1-\frac{\pi}{4}.$$

e) Cambiamos el recinto a coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{c} \rho^4\leq 4\rho^2\left(\cos^2(\theta)-\mathrm{sen}^2(\theta)\right) \\ \rho\ \cos(\theta)\geq 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} \rho^2\leq 4\left(\cos^2(\theta)-\mathrm{sen}^2(\theta)\right) \\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

De la primera acotación se deduce que $\cos(2\theta)\geq 0$ y por tanto las coordenadas polares quedan acotadas así: $-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$, $0\leq\rho\leq 2\sqrt{\cos(2\theta)}$. Por tanto la integral es:

$$\begin{aligned} \int_A (x^2+y^2)\,d(x,y) &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}}\rho^3\,d\rho\right)d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2(2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos(4\theta)}{2}\,d\theta=\frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Ejercicio 11.10. Calcular el volumen del conjunto A en cada uno de los siguientes casos:

a) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq z\leq 4-y^2,\ 0\leq x\leq 6\right\}$

b) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x}\leq y\leq 2\sqrt{x},\ 0\leq z\leq 9-x\right\}$

c) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leq z^2,\ x^2+y^2+z^2\leq 2z\right\}$

Solución 11.10.

a) La integral es $\int_A 1\, d(x,y,z) = \int_0^6 \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} 1\, dzdydx = 96.$

b) La integral es

$$\int_0^9 \int_0^{9-x} \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} 1\, dydzdx = \int_0^9 \int_0^{9-x} \sqrt{x}\, dzdx = \int_0^9 (9-x)\sqrt{x}\, dx = \frac{324}{5}.$$

c) Cambiando a coordenadas cilíndricas, el dominio se transforma en

$$x^2+y^2 \le z^2,\ x^2+y^2+z^2 \le 2z \iff \rho^2 \le \min\left\{z^2,\ 2z-z^2\right\},$$

con lo que $z \in [0,2]$ y es fácil comprobar que

$$\min\left\{z, \sqrt{2z-z^2}\right\} = \begin{cases} z, & \text{si } 0 \le z \le 1, \\ \sqrt{2z-z^2}, & \text{si } 1 \le z \le 2. \end{cases}$$

Por tanto, la integral es

$$\begin{aligned} \int_A 1\, d(x,y,z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\min\left\{z,\ \sqrt{2z-z^2}\right\}} \rho\, d\rho dz d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \int_0^z \rho\, d\rho dz + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} \rho\, d\rho dz \right) d\theta = 2\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ejercicio 11.11. Calcula la integral de $f : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x,y,z) = z$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1, z \ge 0\right\}$,

b) $f(x,y,z) = z$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le z^2, 0 \le z \le 1\right\}$,

c) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 1, x^2+y^2+z^2 \le 2z\right\}$,

d) $f(x,y,z) = zy\sqrt{x^2+y^2}$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le x^2+y^2,\ 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}\right\}$,

e) $f(x,y,z) = z$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x^2+y^2 \le z\right\}$,

f) $f(x,y,z) = 2z(x^2+y^2)$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z,\ z^2 \le x^2+y^2 \le 1\right\}$.

Solución 11.11.

a) Hacemos el cambio de variable $X = x$, $Y = \frac{y}{2}$, $Z = \frac{z}{3}$ y obtenemos que

$$\int_A z\, d(x,y,z) = \int_B 6\, Z\, d(X,Y,Z),$$

donde $B = \left\{(X,Y,Z) :\ X^2+Y^2+Z^2 \le 1,\ Z \ge 0\right\}$. Ahora podemos aplicar un cambio a coordenadas esféricas:

$$X = \rho\, \cos(\phi)\, \cos(\theta),\ Y = \rho\, \cos(\phi)\, \operatorname{sen}(\theta),\ Z = \rho\, \operatorname{sen}(\phi),$$

y, por tanto, $6\int_B Z\, d(X,Y,Z) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen}\left(\phi\right) \cos\left(\phi\right)\, d\phi d\rho d\theta = \frac{3\pi}{2}.$

b) En coordenadas polares, $\int_A z\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z z\rho\, d\rho dz d\theta = \frac{\pi}{4}.$

c) Cambiamos a coordenadas cilíndricas, aunque se puede resolver también mediante un cambio a coordenadas esféricas. El dominio se transforma en

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \le 1, \\ x^2+y^2+z^2 \le 2z \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \rho^2 \le 1-z^2, \\ \rho^2 \le 2z-z^2 \end{array}\right\} \iff \rho^2 \le \min\left\{1-z^2, 2z-z^2\right\}.$$

De aquí se deduce que $z \in [0,1]$ y es fácil comprobar que

$$\min\left\{\sqrt{1-z^2},\ \sqrt{2z-z^2}\right\} = \begin{cases} \sqrt{2z-z^2}, & \text{si } 0 \le z \le \frac{1}{2}, \\ \sqrt{1-z^2}, & \text{si } \frac{1}{2} \le z \le 1. \end{cases} \tag{11.1}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\min\left\{\sqrt{1-z^2},\ \sqrt{2z-z^2}\right\}} \rho\left(\rho\left(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)\right)+z\right)^2\,d\rho dz d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1/2}\int_0^{\sqrt{2z-z^2}} \rho\left(\rho(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)+z\right)^2\,d\rho dz\right. \\ &\qquad \left. + \int_{1/2}^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho\left(\rho(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)+z\right)^2\,d\rho dz\right) d\theta.\end{aligned}$$

Aunque larga, no quedan integrales excesivamente difíciles. ¿Cómo quedaría en coordenadas esféricas?

d) Cambiando a coordenadas cilíndricas, las condiciones que definen el dominio son

$$\left.\begin{array}{c} 0 \le z \le x^2+y^2, \\ 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} 0 \le z \le x^2+y^2, \\ 0 \le x^2+y^2 \le 2x, \\ 0 \le y \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} 0 \le z \le \rho^2, \\ 0 \le \rho \le 2\cos(\theta), \\ 0 \le \operatorname{sen}(\theta) \end{array}\right.$$

La integral es $\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)}\int_0^{\rho^2} z\rho^3\operatorname{sen}(\theta)\,dz d\rho d\theta = \frac{16}{21}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)}\int_0^{\rho^2} z\rho^3\operatorname{sen}(\theta)\,dz d\rho d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)} \rho^5\operatorname{sen}(\theta)\,d\rho d\theta \\ &= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(\theta)\cos^6(\theta)\,d\theta = \frac{16}{21}.\end{aligned}$$

e) En coordenadas cilíndricas el conjunto A se escribe de la forma

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2 \le 2, \\ x^2+y^2 \le z \end{array}\right\} \iff \rho^2 \le \min\left\{z,\ 2-z^2\right\}.$$

De donde se deduce que $z \in [0,\sqrt{2}]$ y, en ese intervalo

$$\min\left\{\sqrt{z},\ \sqrt{2-z^2}\right\} = \begin{cases} \sqrt{z}, & \text{si } 0 \le z1, \\ \sqrt{2-z^2}, & \text{si } 1 \le z\sqrt{2}. \end{cases}$$

Por tanto, la integral nos queda

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\min\left\{\sqrt{z},\ \sqrt{2-z^2}\right\}} z\rho\,dz d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}} z\rho\,d\rho dz d\theta\right. \\ &\qquad \left. + \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-z^2}} \rho z\,d\rho dz\right) d\theta \\ &= \frac{10+8\sqrt{2}}{24}.\end{aligned}$$

f) Cambiando a coordenadas cilíndricas, el conjunto A se escribe de la forma

$$A = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\, \times \mathbb{R} : \ 0 \leq z \leq \rho \leq 1\}.$$

Podemos, por tanto, escribir ρ en función de z o z en función de ρ. De la primera forma nos queda la siguiente integral

$$\begin{aligned}\int_A 2z(x^2 + y^2)\, d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_z^1 2z\rho^3\, d\rho dz d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2}\left(z - z^5\right) dz d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}\, d\theta = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Comprueba tú el resultado calculando la integral de la segunda forma.

Ejercicio 11.12. Calcular el volumen del conjunto A en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$

b) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \ 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right\}$

c) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z \leq x^2 + y^2, \ x + y \leq 1, \ x, y \geq 0\right\}$

d) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \ x^2 + y^2 \leq 2y\right\}$

Solución 11.12.

a) Cambiando a coordenadas cilíndricas, las integral es

$$\int_A 1\, d(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\rho^2}^{\rho} \rho\, dz d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\rho^2 - \rho^3\right) d\rho d\theta = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

b) En primer lugar, realizamos el cambio de variable $X = \frac{x}{a}$, $Y = \frac{y}{b}$, $Z = z$, con lo que

$$\int_A 1\, d(x, y, z) = \int_B ab\, d(X, Y, Z),$$

donde $B = \left\{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : \ X^2 + Y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq \sqrt{X^2 + Y^2}\right\}$. Ahora, un cambio a coordenadas cilíndricas nos permite resolver está integral:

$$\int_A 1\, d(x, y, z) = ab \int_B 1\, d(X, Y, Z) = ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\rho} \rho\, dz d\rho d\theta = \frac{2\pi}{3} ab.$$

c) La integral es

$$\int_A 1\, d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2+y^2} 1\, dz dy dx = \frac{1}{6}.$$

d) Si escribimos el dominio en coordenadas cilíndricas tenemos que

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x^2 + y^2 \leq 2y \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} z \leq \rho, \\ \rho \leq 2\,\mathrm{sen}(\theta) \end{array}\right.$$

y, por tanto, la integral que nos queda es

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\,\mathrm{sen}(\theta)}\int_0^{\rho}\rho\,dz d\rho d\theta=\frac{32}{9}.$$

11.6.1 Ejercicios complementarios

Ejercicio 11.1. Sea $f: A \to \mathbb{R}$, calcular su integral en los siguientes casos:
a) $f(x,y)=x$ siendo A el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$.
b) $f(x,y)=x$ siendo A la región limitada por la recta que pasa por $(0,2)$ y $(2,0)$ y la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1.

Ejercicio 11.2. Sea $f: A \to \mathbb{R}$, calcular su integral en los siguientes casos:
a) $f(x,y)=xy^2$ siendo A la región limitada por $y^2=2x$, $x=1$.
b) $f(x,y)=xy$ siendo A la región limitada por la semicircunferencia superior $(x-2)^2+y^2=1$ y el eje OX.
c) $f(x,y)=4-y^2$ siendo A la región limitada por $y^2=2x$ y $y^2=8-2x$.
d) $f(x,y)=e^{x^2}$ siendo el conjunto A el triángulo formado por las rectas $2y=x$, $x=2$ y el eje x.

Ejercicio 11.3. Calcular los siguientes volúmenes:
a) Volumen del sólido limitado superiormente por $z=2x+1$ e inferiormente por el conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+(y-1)^2\leq 1\}$
b) Volumen del sólido limitado superiormente por $z=4-y^2-\frac{1}{4}x^2$ e inferiormente por el disco $A=\left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+(y-1)^2\leq 1\right\}$.

Ejercicio 11.4. Calcúlese la integral de $f: A\to\mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:
a) $f(x,y)=\mathrm{E}(x+y)$, $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 2-x\right\}$
b) $f(x,y)=e^{\frac{y-x}{y+x}}$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x,\ y\geq 0,\ x+y\leq 2\}$
c) $f(x,y)=x$, $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 2x\right\}$

Ejercicio 11.5. Calcúlese la integral de $f: A\to\mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:
a) $f(x,y,z)=z^2$, $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq R^2,\ x^2+y^2+z^2\leq 2Rz\right\}$
b) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 3\right\}$

Ejercicio 11.6. Usando coordenadas esféricas, determina el volumen común al interior de una esfera de radio a y al interior de un cono con vértice en el centro de la esfera y ángulo α, esto es,

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq a^2,\ z\geq\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{cotan}(\alpha)\right\}.$$

Ejercicio 11.7. Calcular el volumen del conjunto

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leq 4z^2,\ x^2+y^2+z^2\leq 5,\ 0\leq z\}.$$

Funciones

A

La idea de función aparece por todas partes: cada persona tiene una edad o un número de hijos o una cantidad de dinero en el bolsillo. No necesariamente tenemos que referirnos a números, podemos decir que cada persona tiene, o tuvo, un color de pelo, una marca de coche, etc. El formalismo de las funciones nos permite tratar todas estas situaciones de la misma forma.

A.1 Definiciones

A.1.1 Dominio, rango e imagen

Definición A.1. Una función $f : A \to B$ es una regla que a cada elemento a de A le asocia un único elemento de B. Al conjunto A se la llama *dominio* de la función y a B se le suele llamar *codominio*. No hay que confundir el codominio con la *imagen* de la función que es conjunto

$$f(A) = \{b \in B : \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}.$$

La *preimagen* de un elemento b de B son aquellos elementos de A cuya imagen es B. Utilizaremos la siguiente notación

$$f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}.$$

Por extensión, también se puede hablar de la preimagen de un conjunto. Si $B_0 \subset B$, la preimagen de B_0 es

$$f^{-1}(B_0) = \{a \in A : f(a) \in B_0\}.$$

La *gráfica* de la función es el conjunto $\mathrm{Gr}(f) = \{(a,b) \in A \times B : f(a) = b\}$.

Observación A.2. La definición de función incluye tres cosas obligatoriamente: el dominio, el codominio y la regla que a cada elemento del dominio le asocia uno del codominio. En ocasiones abusaremos del lenguaje y hablaremos, por ejemplo, de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$. ¿Qué queremos decir? Sólo tenemos la regla que define la función. ¿Cuáles son su dominio y su codominio? Su *dominio natural* es el mayor conjunto donde la definición tiene sentido. En nuestro caso sería $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$ y el codominio es simplemente la imagen de la función. En general y salvo que se diga lo contrario, en ausencia de un dominio explícito nos referiremos al conjunto donde tiene sentido la definición de la función.

Ejemplo A.3. Consideremos la función $f : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \cos(x)$.

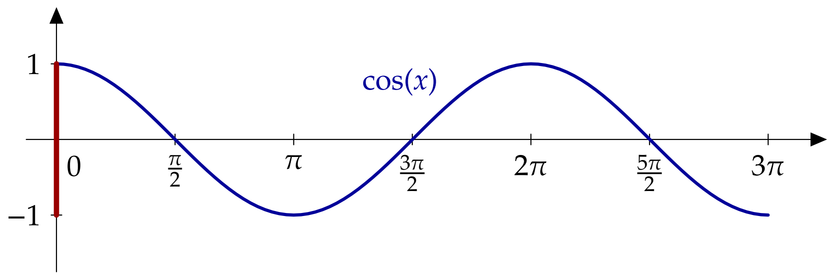


Figura A.1 Gráfica e imagen de la función coseno

a) Su dominio es el intervalo $[0, 3\pi]$
b) Su codominio es todo el conjunto de los números reales aunque podríamos haber puesto cualquier conjunto más grande que el intervalo $[-1, 1]$ (su imagen).
c) En la Figura A.1 hemos representado en azul la gráfica de la función, esto es, el siguiente subconjunto del plano

$$\{(x, \cos(x)) : x \in [0, 3\pi]\}.$$

d) La imagen de la función son los valores que toma. En este caso, la función coseno toma todos los valores entre -1 y 1 (en rojo en la figura anterior).
e) La preimagen de un valor puedes ser única, pueden ser varios elementos o vacía. En nuestro caso, al ser la función periódica, la preimagen nunca es única. Por ejemplo,

$$f^{-1}(1) = \{x \in [0, 3\pi] : \cos(x) = 1\} = \{0, 2\pi\},$$

en cambio, $f^{-1}(2) = \emptyset$, ya que la función coseno nunca vale 2.
f) ¿Cuando es la función positiva? Por definición, cuando el valor de la función es mayor estrictamente que cero:

$$f^{-1}\left(]0, +\infty[\right) = \{x \in [0, 3\pi] : \cos(x) > 0\} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[.$$

Observa que en este caso $f^{-1}\left(]0, +\infty[\right) = f^{-1}\left(]0, 1]\right)$. ◁

Ejemplo A.4. Uno de los ejemplos más frecuentes de funciones con los que nos encontramos son las *sucesiones*. En el Capítulo 3 ya hemos hablado de ellas. Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Si el codominio es el conjunto de los números reales, tenemos una sucesión de números reales; si el codominio es el conjunto de los alumnos de la clase, tendremos una sucesión de estudiantes, etc. Es importante resaltar que el hecho de que el dominio sea $\mathbb{N}$ lo que nos da es una *lista ordenada* de elementos. Por ejemplo, la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad & f(n) = 2n \\ 1 & \mapsto 2 \\ 2 & \mapsto 4 \\ & \ldots \end{aligned}$$

nos enumera el conjunto de los pares: el primer número par es el 2, el segundo el 4, etc. ◁

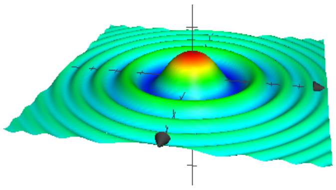


Figura A.2 Gráfica de una función de dos variables

Ejemplo A.5. Todos los ejemplos hasta ahora han tenido subconjuntos de $\mathbb{R}$ como dominio y codominio. Es por eso que todas las representaciones las hemos hecho en el plano $\mathbb{R}^2$. La representación de funciones con más variables en salida o en llegada requiere más dimensiones para la representación de su gráfica. En la Figura A.2 tienes la representación de la función definida en el plano como

$$f(x,y) = \frac{\cos\left(x^2+y^2\right)}{1+x^2+y^2}.$$

No es sencillo visualizar en el papel funciones de más variables ya que habría que representar espacios con cuatro dimensiones o más en el plano.

A.1.2 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición A.6.

a) Una función $f: A \to B$ es *inyectiva* si se cumple que no hay dos elementos distintos con la misma imagen, esto es, si $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$.
b) Una función $f: A \to B$ es *sobreyectiva* si todo elemento tiene una preimagen, esto es, dado $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
c) Una función $f: A \to B$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Función inyectiva

Función sobreyectiva

Función biyectiva

Ejemplo A.7.

a) La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva. Su imagen es $\mathbb{R}_0^+$. Por tanto, la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ es sobreyectiva. Ninguna de las dos versiones es inyectiva: $f(x) = f(-x)$. Si restringimos a los positivos o a los negativos, sí. Por ejemplo, $f: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es inyectiva.
b) Las funciones periódicas no son inyectivas: el valor de la función se repite cuando avanzamos el periodo, más concretamente, si la función es T-periódica, entonces $f(x) = f(x+T)$.
c) La función exponencial y el logaritmo son inyectivas.
d) La función $\operatorname{sen}: \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ es biyectiva. ◃

Función inversa

Si $f: A \to B$ es una función inyectiva, la función inversa de f, a la que denotaremos f^{-1}, es la función $f^{-1}: f(A) \to A$ definida por $f^{-1}(f(a)) = a$. En otras palabras, si la función f envia a en $f(a)$, su inversa deshace el camino y envia a $f(a)$ de nuevo a a.

Conocemos muchas funciones inyectivas y, para algunas de ellas, también conocemos su inversa. Por ejemplo, sabemos que la función exponencial y el logaritmo neperiano son inversas una de la otra. ¿Qué quiere decir esto? Simplemente que se cumplen las dos siguientes igualdades:

$$\ln(e^a) = a \;\text{ y }\; e^{\ln(b)} = b.$$

Esto tiene una consecuencia en las gráficas de las funciones. Mira la Figura A.4. Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

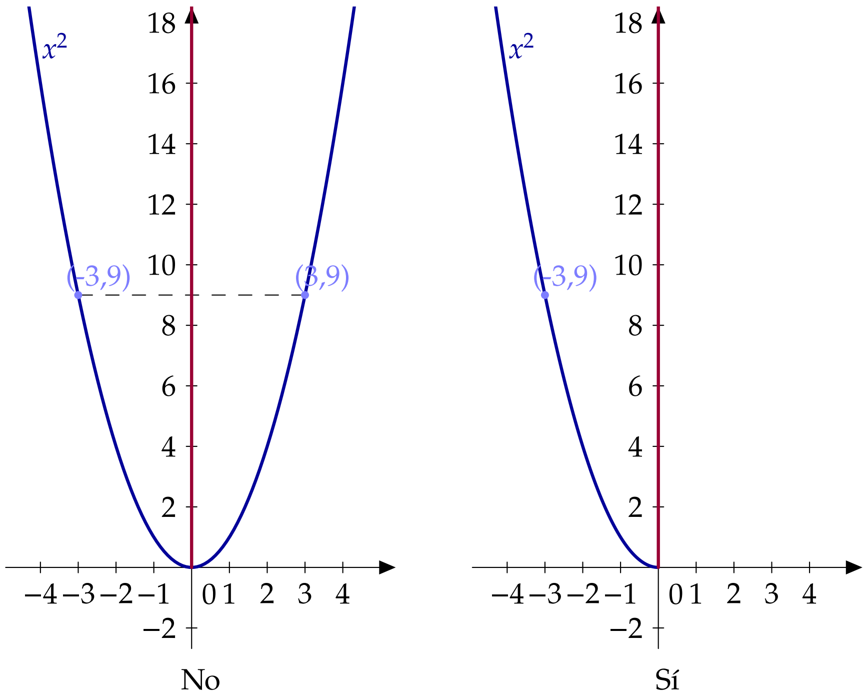


Figura A.3 ¿La función x^2 es inyectiva?

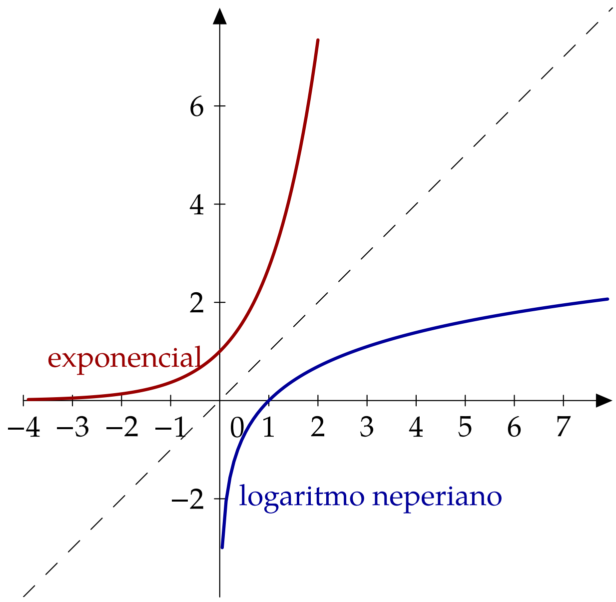


Figura A.4 La función exponencial y el logaritmo son inversas

¿Cómo calculamos la inversa de una función? En teoría es sencillo: si $y = f(x)$ es la función, sólo tenemos que cambiar los papeles de x e y. Tenemos que despejar x como función de y. Esto es la teoría. Dependiendo de la función podemos estar ante un problema fácil o uno imposible. Veamos un ejemplo.

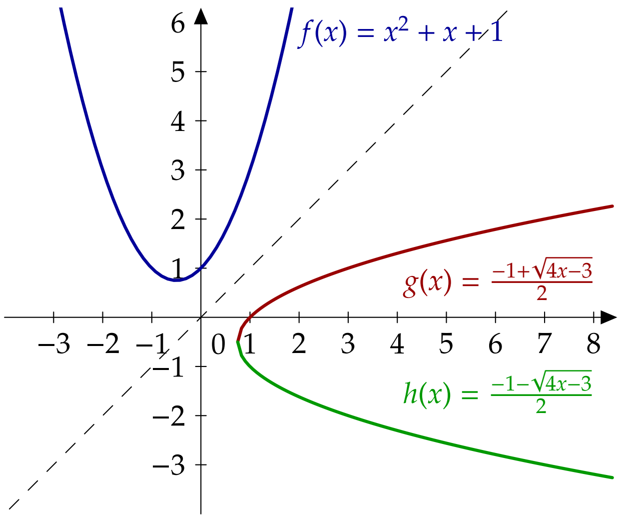


Figura A.5 La función $x^2 + x + 1$ y sus inversas

Ejemplo A.8. Consideremos la función $f(x) = x^2 + x + 1$, ¿cuál es su inversa? Como hemos dicho, tenemos que resolver la ecuación

$$y = x^2 + x + 1$$

considerando como incógnita x. Las soluciones del polinomio $x^2+x+1-y = 0$ son

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1-y)}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{4y-3}}{2}. \end{aligned}$$

Las dos soluciones provienen del hecho de que la función $y = x^2+x+1$ no es inyectiva. Sí es inyectiva en cualquiera de los intervalos $]-\infty, -½]$ y $[-½, +\infty[$. En la Figura A.5 tienes las gráficas de la función y su inversa en cada uno de dicho es intervalos. ◃

A.1.3 Funciones pares e impares

Definición A.9.
a) Una función $f : A \to B$ es *par* si $f(a) = f(-a)$ para cualquier a en A. **Función par**
b) Una función $f : A \to B$ es *impar* si $f(a) = -f(-a)$ para cualquier a en A. **Función impar**

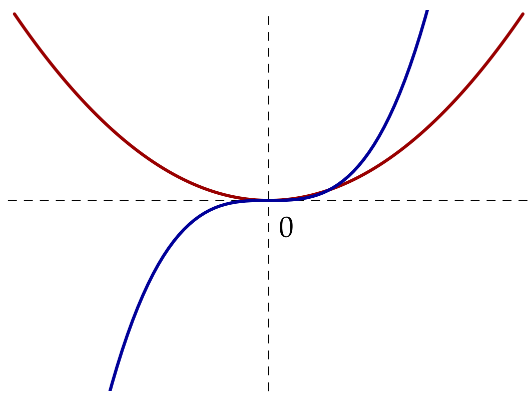


Figura A.6 Funciones pares e impares

Las funciones pares son aquellas cuya gráfica es simétrica respecto del eje OY. En otras palabras, si doblamos la hora por el eje vertical, ambos mitades coinciden. Para conseguir el mismo efecto con una función impar tienes que doblar primero respecto por eje vertical y, en segundo lugar, por el eje horizontal.

Ejemplo A.10.

a) Las funciones $f(x) = x^2$ o $\cos(x)$ son pares.
b) La función $f(x) = x^3$ o $\operatorname{sen}(x)$ son impares. ◂

A.1.4 Funciones periódicas

Función periódica

Definición A.11. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *periódica* si existe algún número real T tal que $f(x) = f(x + T)$ para cualquier x real. A cualquiera de esos valores se le llama un *periodo* de la función. El *periodo fundamental*, ω, es el menor de todos ellos, o sea,

$$\omega = \inf\{T : \ f(x) = f(x + T), \ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

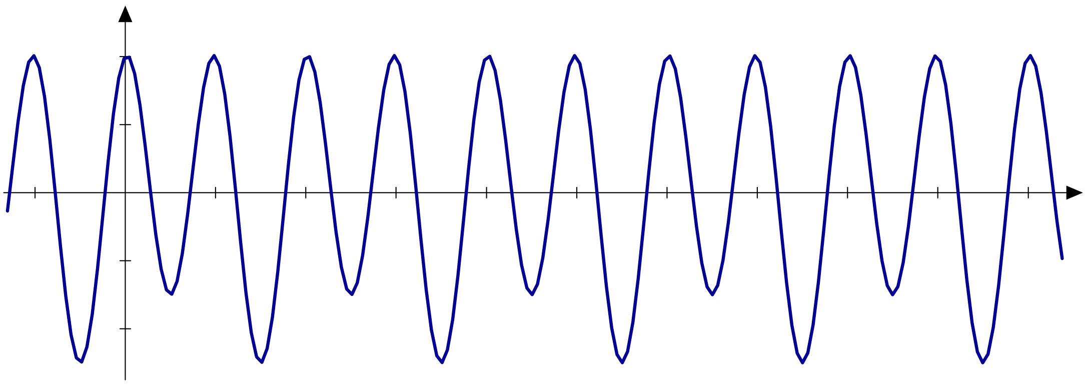


Figura A.7 Función periódica

Ejemplo A.12. Las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π (o cualquier múltiplo entero de 2π). El periodo fundamental de la tangente es π. El caso trivial son las funciones constantes: son periódicas con cualquier periodo. Por tanto, su periodo fundamental es cero. ◂

A.1.5 Acotación

Para las nociones de acotación, necesitamos hablar de cuándo una función vale más o menos. Para eso necesitamos tener un orden en el rango de la función y este es el motivo de que hablemos de funciones con valores reales.

Todas las definiciones que siguen trasladan una propiedad de conjuntos a la imagen de la función.

Definición A.13. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función.

a) Diremos que la función f está *acotada superiormente* si su imagen, $f(A)$, lo está. En otras palabras, f está acotada superiormente si existe un número M tal que $f(a) \leq M$ para cualquier elemento a de A.
b) Diremos que la función f está *acotada inferiormente* si su imagen, $f(A)$, lo está. En otras palabras, f está acotada superiormente si existe un número m tal que $f(a) \geq m$ para cualquier elemento a de A.
c) Diremos que la función está acotada si lo está superior e inferiormente.

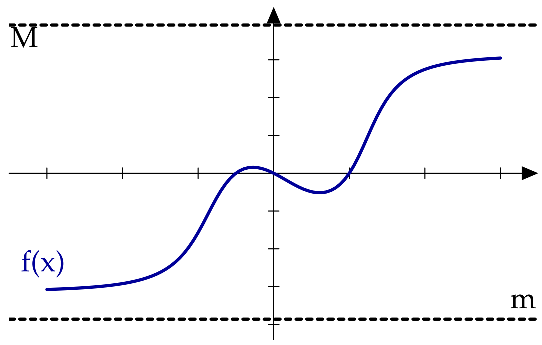


Figura A.8 Función acotada

Ejemplo A.14. Las funciones seno o coseno están acotadas. En cambio ningún polinomio, salvo los constantes, es una función acotada en $\mathbb{R}$. ◁

Una vez que tenemos un conjunto acotado, podemos hablar de máximo y supremo.

Definición A.15. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función.

a) Diremos que la función f tiene máximo si su imagen, $f(A)$ lo tiene. Diremos que f alcanza su máximo en $a_0 \in A$ si $f(a) \leq f(a_0)$ para cualquier $a \in A$.
b) Diremos que la función f tiene mínimo si su imagen, $f(A)$ lo tiene. Diremos que f alcanza su mínimo en $a_0 \in A$ si $f(a) \geq f(a_0)$ para cualquier $a \in A$.

Observación A.16. Ya sabemos que un conjunto acotado superiormente tiene supremo. No podemos decir lo mismo con respecto al máximo. Hay conjuntos que tienen supremo pero este no se alcanza. Piensa, por ejemplo, en los intervalos abiertos. La misma situación se puede dar con funciones. Por ejemplo, la función $f :]0,1[\to]0,1[$, $f(x) = x$ está acotada, pero no tiene máximo ni mínimo.

A.1.6 Funciones monótonas

Definición A.17.

a) Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *creciente* (resp. *decreciente*) si **Función creciente**

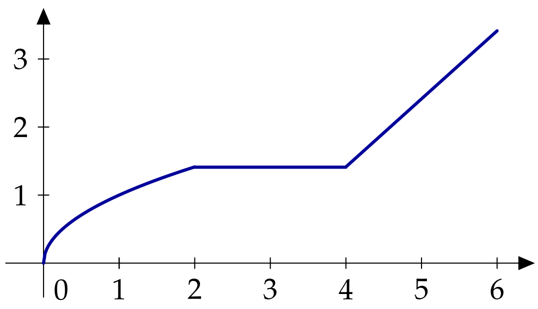
$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \;\; (\text{resp.} f(x) \geq f(y)).$$

b) Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *estrictamente creciente* (resp. *estrictamente decreciente*) si **Función estrictamente creciente**

$$x < y \implies f(x) < f(y) \;\; (\text{resp.} f(x). > f(y))$$

En general, diremos que una función es *monótona* si es creciente o decreciente y diremos que es *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Observación A.18.



Hay veces que los nombres nos pueden inducir a error y este es uno de esos casos. La idea intuitiva que tenemos todos es que una función creciente es aquella que tiene una gráfica ascendente. En realidad eso es una función estrictamente creciente. Una función constante es creciente (y decreciente). La expresión correcta debería ser que una función creciente es aquella cuya gráfica "no baja".

Monotonía e inyectividad

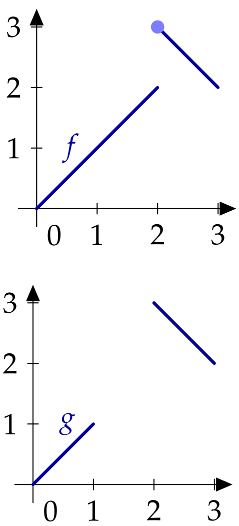


Figura A.9 Monotonía e inyectividad

Se deduce directamente de la definición de función estrictamente monótona que puntos del dominio distintos tienen imágenes distintas. En particular, *las funciones estrictamente monótonas son inyectivas.* ¿Es cierto el recíproco? Es fácil encontrar ejemplos de que no es cierto en general. Por ejemplo, la función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ 5 - x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

no es creciente ni decreciente. La función f no es continua y podría pensarse que este fenómeno no se presentaría en funciones continuas, pero no es difícil conseguir un ejemplo con funciones continuas. ¿Dónde presenta problemas de continuidad la función f? Pues eliminemos esos puntos. Considera la función $g : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 5 - x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

Como puedes ver, para la inyectividad no es una condición suficiente para probar monotonía si consideramos funciones que no sean continuas o que no estén definidas en intervalos. En otro caso, el resultado es cierto.

A.2 Funciones elementales

A.2.1 Funciones potenciales

La función potencial $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^b$ tiene sentido para cualquier exponente b real. En el caso particular de potencias naturales, se puede extender la definición a toda la recta real.

a) f es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$, continua y derivable con $f'(x) = bx^{b-1}$.
b) $(xy)^b = x^b y^b$.
c) Si $b > 0$, f es estrictamente creciente y verifica $\lim_{x\to 0} x^b = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty$.
d) Si $b < 0$, f es estrictamente decreciente y verifica $\lim_{x\to 0} x^b = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} x^b = 0$.

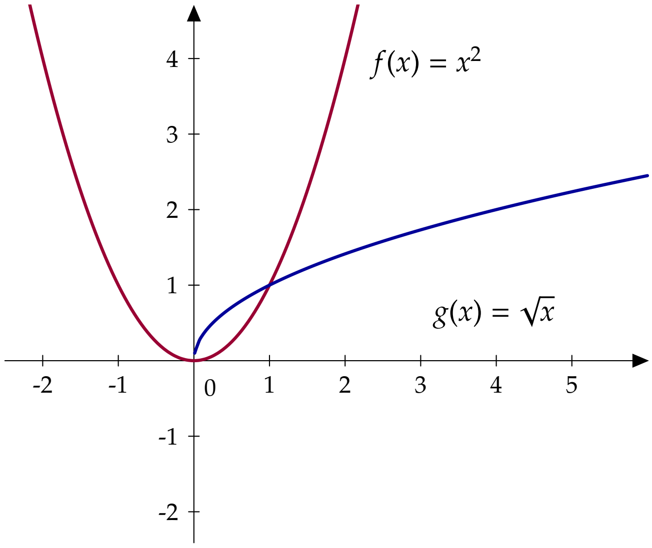


Figura A.10 Función potencial

Como consecuencia se obtiene que los polinomios, suma de funciones potenciales con exponente natural, son derivables en todo $\mathbb{R}$. Más concretamente, si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, entonces $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

A.2.2 Función exponencial

La función exponencial de base e, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como $f(x) = e^x$. A veces usaremos la notación $\exp(x)$ para indicar e^x.

a) f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = e^x$.
b) f es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ y estrictamente creciente.
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
d) $e^{x+y} = e^x e^y$.

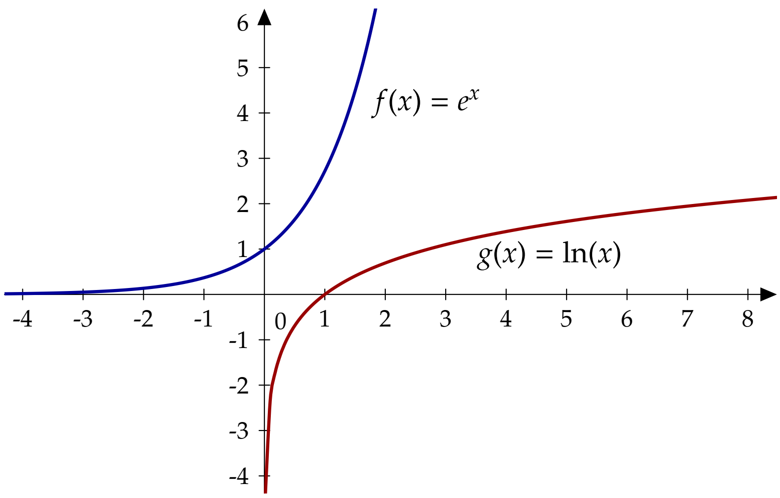


Figura A.11 Funciones exponencial y logaritmo neperiano

A.2.3 Función logaritmo neperiano

La función logaritmo neperiano, $g(x) = \ln(x)$ para x positivo, es la inversa de la función exponencial.

a) g es derivable y $g'(x) = \frac{1}{x}$.
b) g es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y estrictamente creciente.
c) $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
d) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.
e) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.
f) $\ln(x^y) = y\ln(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}$.
g) $\ln(1) = 0, \ln(e) = 1$.

Haciendo uso de la siguiente fórmula se deducen las demás funciones elementales, excepto las trigonométricas

$$a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b\ln(a)},\quad \forall a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}.$$

A.2.4 Función exponencial de base $a \neq 1$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = a^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

a) f es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, continua y verifica $a^{x+y} = a^x a^y$.
b) Si $a > 1$, f es estrictamente creciente y verifica $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
c) Si $a < 1$, f es estrictamente decreciente y verifica $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$.
d) f es derivable y $f'(x) = a^x \ln(a)$.

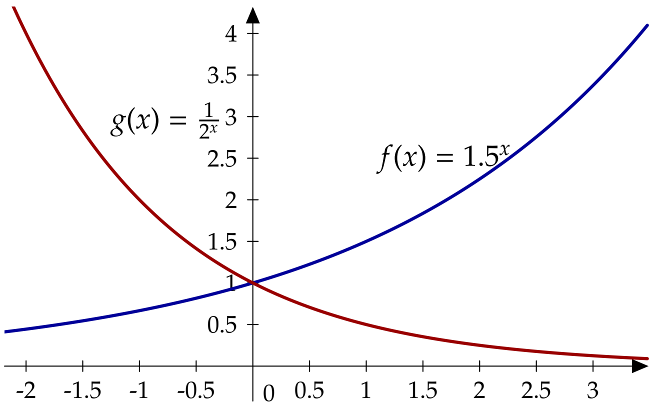


Figura A.12 Función exponencial

A.2.5 Funciones logarítmicas de base $a \neq 1$

La inversa de la función exponencial es la función logaritmo. Su comportamiento depende de la base de la expoencial que hayamos considerado. Es por esto que en algunos casos tengamos que distinguir entre base mayor o menor que uno.

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\quad g(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}\quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

a) g es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y continua. Además g es la inversa de la función exponencial de base a. Verifica también que

$$\begin{aligned}\log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y),\\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y),\\ \log_a(x^z) &= z\log_a(x)\end{aligned}$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{R}$.

b) Si $a > 1$, g es estrictamente creciente y

$$\lim_{x\to 0}\log_a(x) = -\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty}\log_a(x) = +\infty.$$

c) Si $a < 1$, g es estrictamente decreciente y

$$\lim_{x\to 0}\log_a(x) = +\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty}\log_a(x) = -\infty.$$

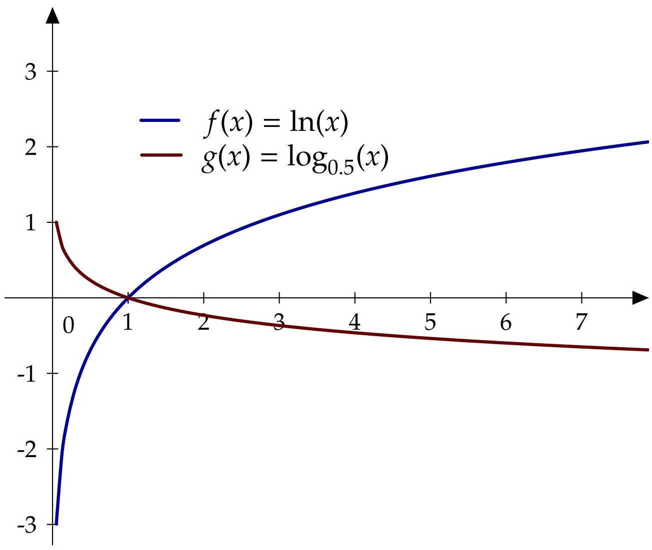


Figura A.13 Función logaritmo

Funciones trigonométricas

A.2.6 Las funciones seno y coseno

a) Son derivables en todo $\mathbb{R}$ y $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

b) Son funciones periódicas de periodo 2π

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x), \ \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

c) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **Fórmula fundamental de trigonometría**

d) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ es una biyección estrictamente decreciente con $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos(\pi) = -1$.

e) sen : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ es una biyección estrictamente creciente con $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\operatorname{sen}(0) = 0$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
f) La imagen, tanto de la función seno como de la función coseno, es el intervalo $[-1, 1]$.
g) La función coseno es par: $\cos(-x) = \cos(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
h) La función seno es impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
i) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
j) Las funciones seno y coseno no tienen límite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

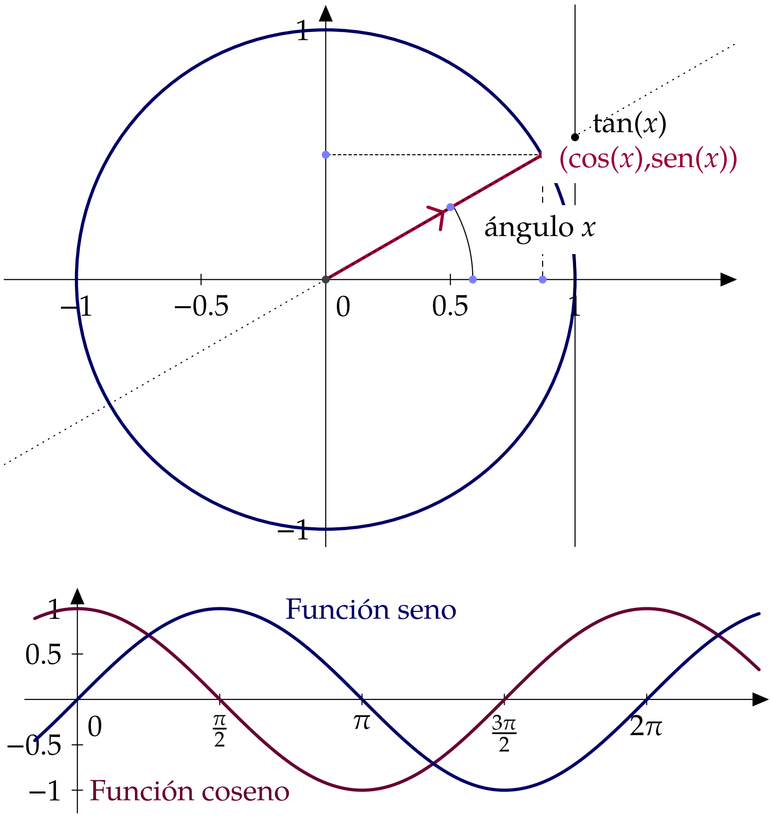


Figura A.14 Las funciones seno y coseno

Algunos valores destacados de seno y coseno

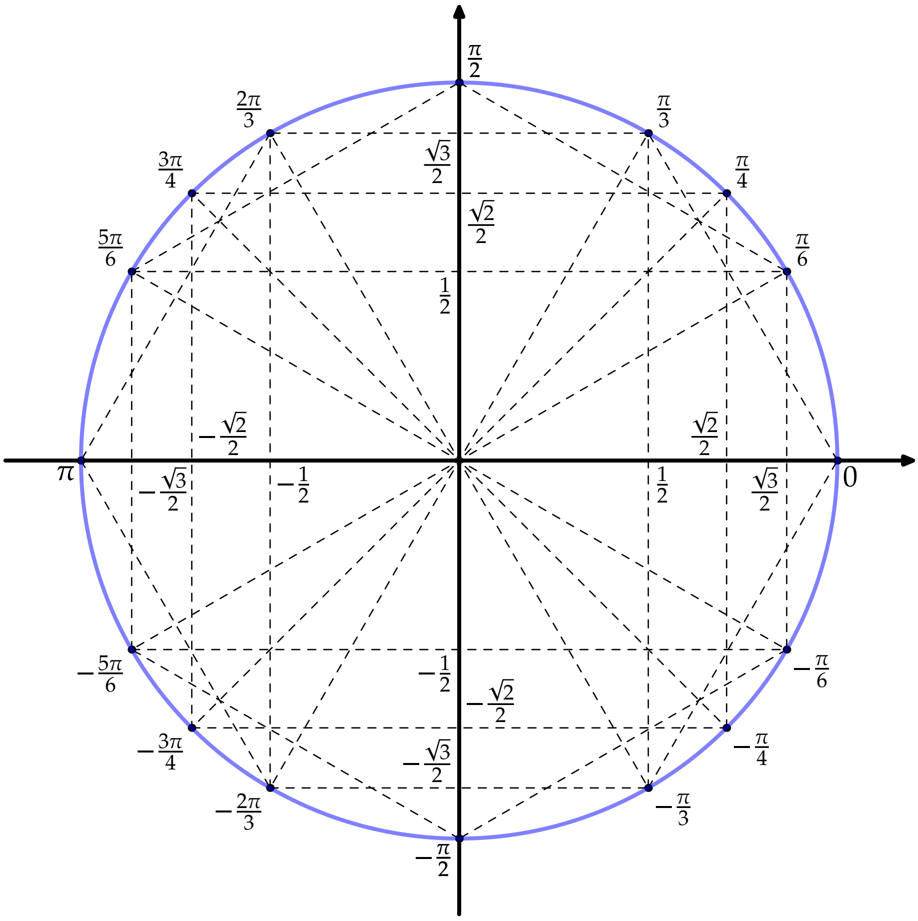


Figura A.15 Círculo trigonométrico

Teorema del coseno

$h = a\,\mathrm{sen}(\theta)$

Área=$\frac{1}{2}bh$

Teorema del coseno: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$

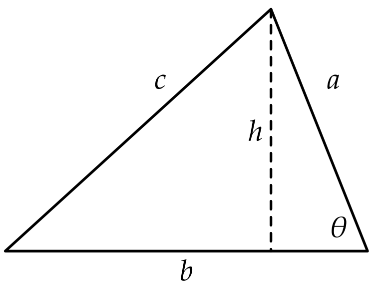


Figura A.16 Triángulo

A.2.7 La función tangente

Como se verifica que $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, podemos definir la función tangente como

$$\tan : A \to \mathbb{R}, \quad A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

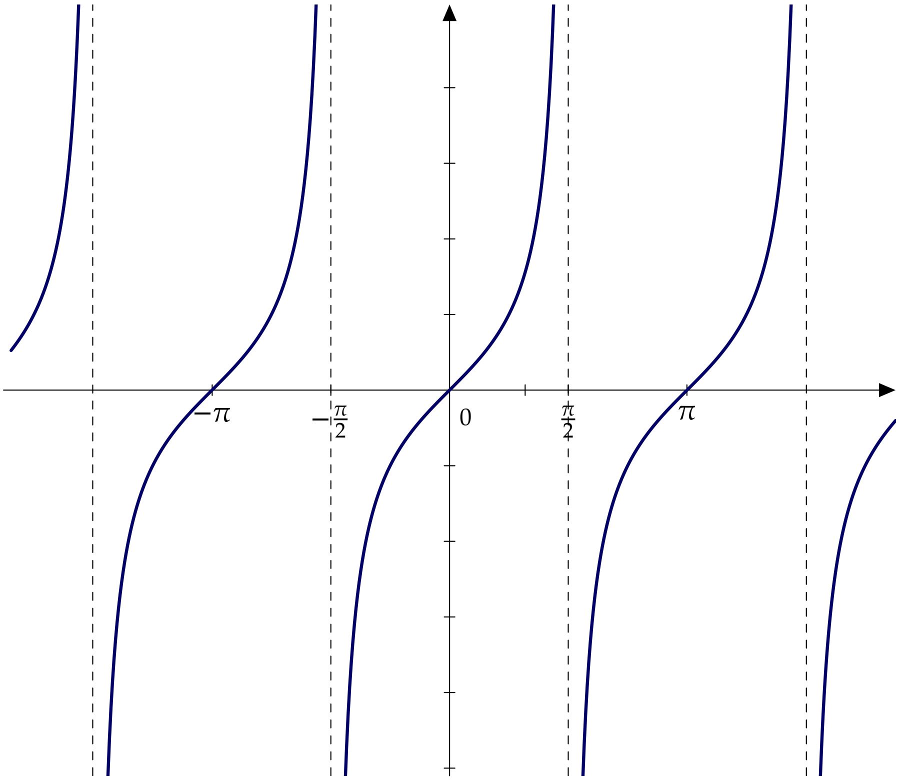


Figura A.17 Función tangente

a) $\tan(x + \pi) = \tan(x), \ \forall x \in A$.
b) $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente y además verifica que $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$.
c) La función tangente es derivable y

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

A.2.8 Secante, cosecante, cotangente

Siempre que los respectivos denominadores no se anulen, se pueden definir las siguientes funciones

$$\text{cosec} : B \to \mathbb{R},\ \text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)},\ \forall\, x \in B$$
$$\sec : A \to \mathbb{R},\ \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)},\ \forall\, x \in A$$
$$\text{cotan} : B \to \mathbb{R},\ \text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)},\ \forall\, x \in B,$$

donde $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Dichas funciones son continuas y derivables en su correspondiente dominio y

$$\begin{aligned} \sec'(x) &= \tan(x)\sec(x), \\ \text{cosec}'(x) &= -\,\text{cotan}(x)\,\text{cosec}(x), \\ \text{cotan}'(x) &= \frac{-1}{\text{sen}^2(x)} = -\,\text{cosec}^2(x) = -(1 + \text{cotan}^2(x)). \end{aligned}$$

A.2.9 Inversas de funciones trigonométricas

Función arcoseno

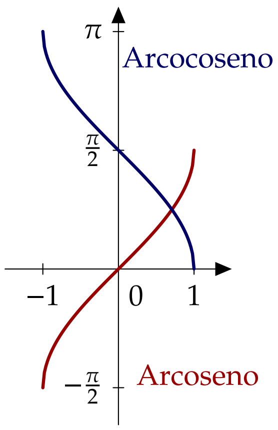


Figura A.18 Arcoseno y arcocoseno

Esta función es la inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y por tanto $\text{arcsen} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ verifica que $\text{sen}(\text{arcsen}(x)) = x$, $\forall x \in [-1,1]$.

Además, es una función biyectiva, continua y estrictamente creciente con

$$\text{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2},\ \ \text{arcsen}(0) = 0,\ \ \text{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Por último, es derivable en el intervalo abierto $]-1,1[$ con derivada

$$\text{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Función arcocoseno

Es la función inversa de la restricción de la función coseno al intervalo $[0,\pi]$, y por tanto $\cos(\arccos(x)) = x$, $\forall x \in [-1,1]$.

Esta función es biyectiva, continua y estrictamente decreciente con

$$\arccos(-1) = \pi,\ \ \arccos(0) = \frac{\pi}{2},\ \arccos(1) = 0$$

Es derivable en el intervalo abierto $]-1,1[$ con derivada

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Función arcotangente

Es la inversa de la restricción de la función tangente al intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ y, por tanto,

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

verifica que $\tan(\arctan(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Esta función es biyectiva, continua y estrictamente creciente con

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \ \arctan(0) = 0, \ \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Es derivable en $\mathbb{R}$ y $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

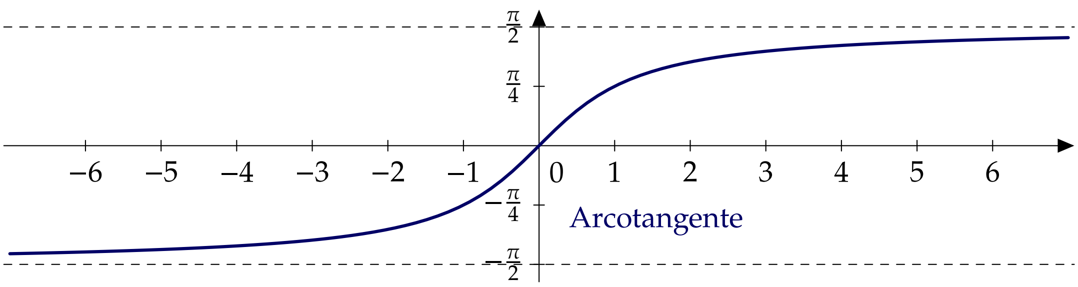


Figura A.19 Función arcotangente

A.2.10 Identidades trigonométricas

a) Identidades pitagóricas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \tan^2(x) + 1 &= \sec^2(x) \\ \operatorname{cotan}^2(x) + 1 &= \operatorname{cosec}^2(x) \end{aligned}$$

b) Suma y diferencia de ángulos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x \pm y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y) \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)} \end{aligned}$$

c) Angulo doble

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x),$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)$$

d) Angulo mitad

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$
$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \cos(x)}$$

e) Producto

$$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$
$$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\right)$$

A.2.11 Funciones hiperbólicas

De forma análoga a como están definidas las funciones seno y coseno, podemos interpretar geométricamente las funciones hiperbólicas. El papel que juega la circunferencia unidad $x^2+y^2=1$ lo pasa a representar la hipérbola $x^2-y^2=1$. En este caso, relacionamos el punto (x,y) con el área α que aparece sombreada en la figura A.20.

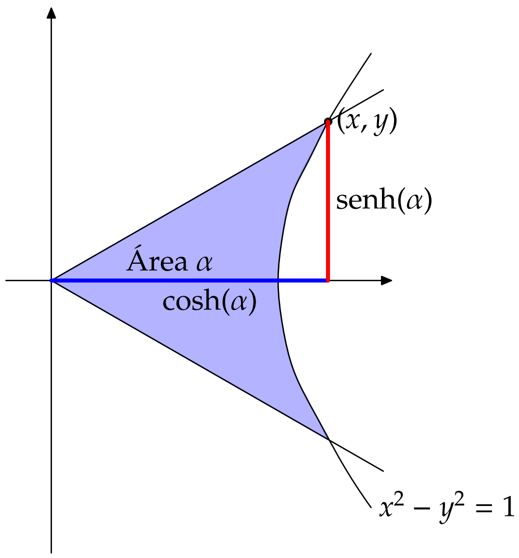


Figura A.20 Seno y coseno hiperbólicos

Las funciones hiperbólicas están definidas como:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$$

Por analogía con las funciones trigonométricas hablaremos también de tangente, secante y cosecante hiperbólica.

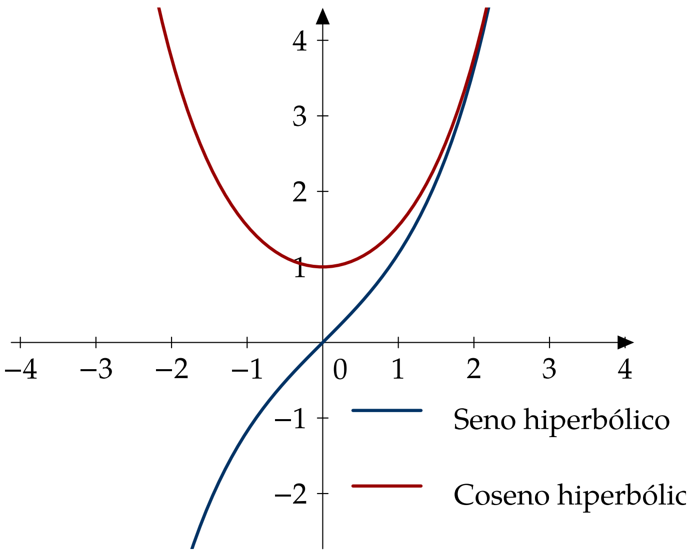


Figura A.21 Funciones hiperbólicas

A.2.12 Identidades hiperbólicas

a) Identidades "pitagóricas"

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1,$$
$$\tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1$$
$$\operatorname{cotanh}^2(x) - \operatorname{cosech}^2(x) = 1$$

b) Sumas y diferencias de ángulos.

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y),\\
\operatorname{senh}(x-y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) - \cosh(x)\operatorname{senh}(y),\\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y),\\
\operatorname{senh}(x-y) &= \cosh(x)\cosh(y) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y).
\end{aligned}$$

c) Ángulo doble

$$\operatorname{senh}^2(x) = \frac{-1+\cosh(2x)}{2}, \qquad \cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}.$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsenh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\\
\operatorname{arccosh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\\
\operatorname{arctanh}(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

Geometría

B

B.1 Parábolas, elipses e hipérbolas

Además de las curvas asociadas a lineas rectas, funciones trigonométricas o a cualquier otra función elemental, hay tres curvas que tienen una destacada importancia: las *secciones cónicas*. Los griegos ya conocían que el corte de un cono por un plano producía sólo tres tipos de curvas: parábolas, elipses e hipérbolas. Vamos a comentarlas con más detalle.

B.1.1 Parábola

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=ax^2+bx+c\right\}$$

Una parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto dado, llamado *foco*, y de una recta llamada *directriz*. La recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco se llama *eje* de la parábola. La intersección del eje y de la directriz se llama *vértice*.

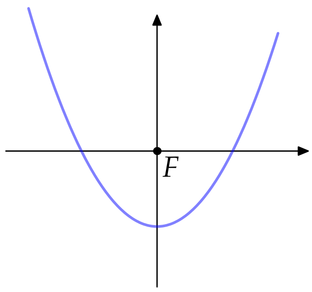


Figura B.1 Parábola

B.1.2 Elipse

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$

$$\text{Área}=\pi ab$$

Una elipse es el conjunto de puntos verificando que la suma de las distancias a dos puntos fijos (F y F'), llamados *focos*, es una constante mayor que la distancia entre los focos. El punto medio del segmento que une los focos se llama *centro*. El segmento que pasa por los dos focos y acaba en la elipse se llama *eje mayor*. El segmento perpendicular al eje mayor y que acaba en la elipse es el *eje menor*. Las intersecciones de los ejes con la elipse se llaman *vértices* de la elipse. Los focos son los puntos $(c,0)$ y $(-c,0)$ que verifican $a^2=b^2+c^2$. El caso particular $a=b$ es conocido: la *circunferencia.*

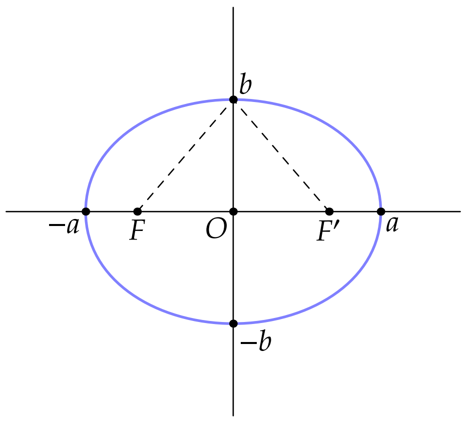


Figura B.2 Elipse

Las ecuaciones que hemos escrito describen elipses o, en el caso particular de que los semiejes coincidan, circuferencias centradas en el origen de coordenadas. Si el centro está en el punto (h,k) la ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Es inmediato comprobar que la circunferencia de radio r centrado en el punto (h, k) es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

y su longitud es

$$\text{Longitud de una circunferencia de radio } r = 2\pi r$$

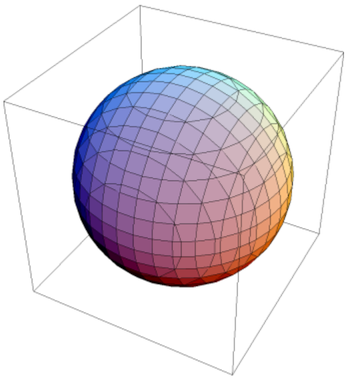
B.1.3 Hipérbola

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

Una hipérbola es el conjunto de puntos que verifican que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es una constante positiva menor que la distancia entre los focos (F y F').

B.2 Superficies cuadráticas

a) **Esfera:** $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$



Secciones paralelas al plano xy: circunferencias.

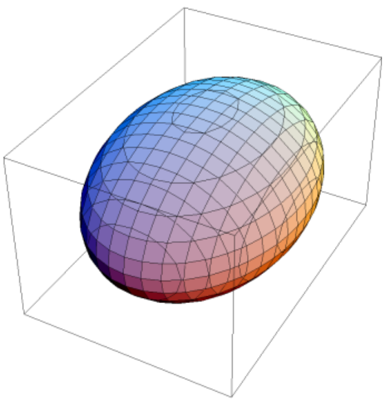
Secciones paralelas al plano xz: circunferencias.

Secciones paralelas al plano yz: circunferencias.

Volumen = $\frac{4}{3}\pi R^3$

Área = $4\pi R^2$

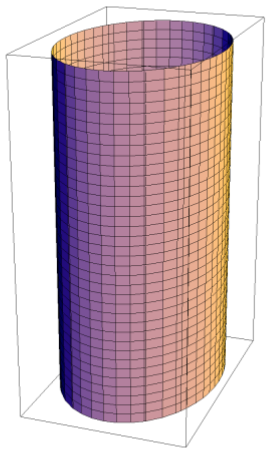
b) **Elipsoide:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Secciones paralelas al plano xy: Elipses.

Secciones paralelas al plano xz: Elipses.

Secciones paralelas al plano yz: Elipses.



c) **Cilindro elíptico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

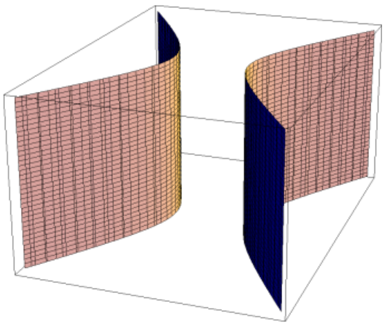
Secciones paralelas al plano xy: elipses.

Secciones paralelas al plano xz: rectas.

Secciones paralelas al plano yz: rectas.

Volumen = $\pi ab \times$altura

d) **Cilindro hiperbólico:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

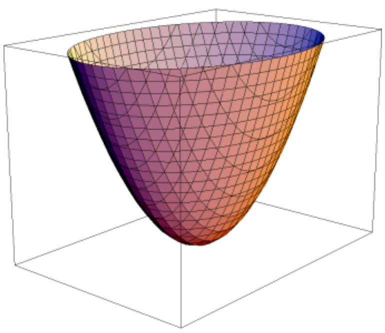


Secciones paralelas al plano xy: hipérbolas.

Secciones paralelas al plano xz: rectas.

Secciones paralelas al plano yz: rectas.

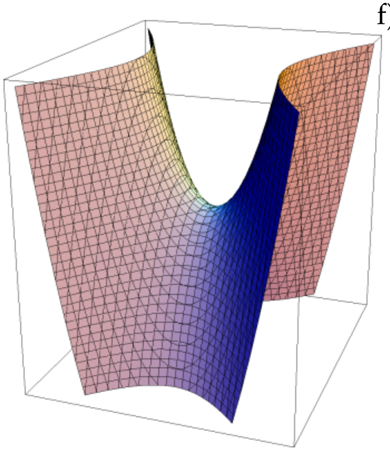
e) **Paraboloide elíptico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$



Secciones paralelas al plano xy: Elipses.

Secciones paralelas al plano xz: Parábolas.

Secciones paralelas al plano yz: Parábolas.

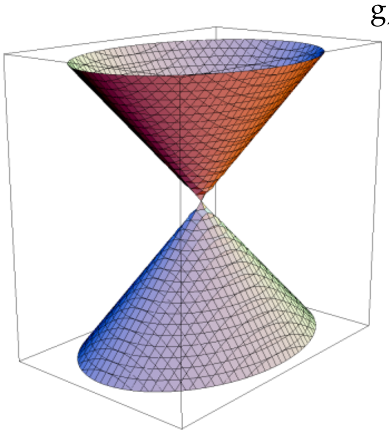


f) **Paraboloide hiperbólico:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$

Secciones paralelas al plano xy: Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano xz: Parábolas.

Secciones paralelas al plano yz: Parábolas.

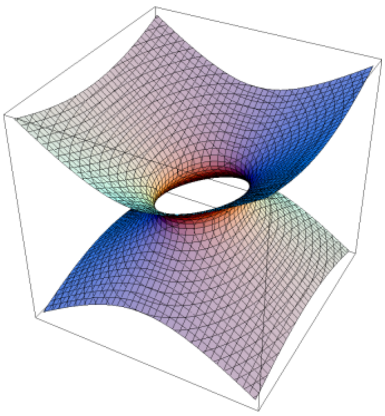


g) **Cono elíptico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Secciones paralelas al plano xy: Elipses.

Secciones paralelas al plano xz: Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz: Hipérbolas.

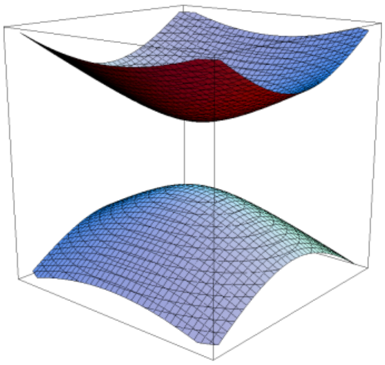


h) **Hiperboloide elíptico de una hoja:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Secciones paralelas al plano xy: Elipses.

Secciones paralelas al plano xz: Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz: Hipérbolas.



i) **Hiperboloide elíptico de dos hojas:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

Secciones paralelas al plano xy: Elipses.

Secciones paralelas al plano xz: Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz: Hipérbolas.

Algunas tablas

C

C.1 Derivadas

A la lista de derivadas de funciones habrá que añadir las reglas que permiten derivar funciones compuestas a partir de éstas como la regla de la cadena.

Función	**Derivada**
$f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$	$f'(x) = 1/x$
$f(x) = \log_a(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $a > 0$, $a \neq 1$	$f'(x) = \log_a(e)/x$
$f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$,	$f'(x) = e^x$
$f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \neq 0$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$
$f(x) = \tan(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$f(x) = \operatorname{cotan}(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)}$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x)\tan(x)$
$f(x) = \operatorname{cosec}(x)$	$f'(x) = -\operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotan}(x)$
$f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, $x \in]-1, 1[$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos(x)$, $x \in]-1, 1[$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arccotan}(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arcosec}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arcocosec}(x)$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{senh}(x)$	$f'(x) = \cosh(x)$
$f(x) = \cosh(x)$	$f'(x) = \operatorname{senh}(x)$

Función	Derivada
$f(x) = \tanh(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$
$f(x) = \operatorname{cotanh}(x)$, $x \neq 0$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\operatorname{senh}^2(x)}$
$f(x) = \operatorname{arcsenh}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x) = \operatorname{arccosh}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \operatorname{arctanh}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
$f(x) = \operatorname{arccotanh}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
$f(x) = \operatorname{arcsech}(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arccosech}(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\lvert x \rvert \sqrt{1+x^2}}$

C.2 Desarrollo de Taylor

Los desarrollos de Taylor que recogemos a continuación han aparecido con anterioridad o se pueden calcular por métodos similares.

C.3 Primitivas

La lista de primitivas de las funciones elementales no es la más completa que se puede encontrar. Hay textos con listas mucho más amplias. Sin ir más lejos, la lista de derivadas que acabamos de leer es mucho más extensa. En este caso no se trata de que la lista sea exhaustiva sino de tener una base sobre la que comenzar a calcular una primitiva de funciones más generales.

Función	Desarrollo de Taylor
$\dfrac{1}{1-x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
e^x	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
$\ln(1+x)$	$\displaystyle x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$
$\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$	$\displaystyle x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\displaystyle x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos(x)$	$\displaystyle 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$\arctan(x)$	$\displaystyle x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$
$(1+x)^k$	$\displaystyle 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$
$\operatorname{senh}(x)$	$\displaystyle x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cosh(x)$	$\displaystyle 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1)$	$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$
$\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x$	$\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$
$\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)$	$\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)$
$\displaystyle\int \tan(x) = -\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\displaystyle\int \operatorname{cotan}(x) = \ln\lvert\operatorname{sen}(x)\rvert$
$\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = -\operatorname{cotan}(x)$	$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x)$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x)$	$\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x)$
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$	$\displaystyle\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arccotan}(x)$
$\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x)$	$\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x)$
$\displaystyle\int \tanh(x)\,dx = \ln\lvert\cosh(x)\rvert$	$\displaystyle\int \operatorname{cotanh}(x)\,dx = \ln\lvert\operatorname{senh}(x)\rvert$
$\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \tanh(x)$	$\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2(x)}\,dx = -\operatorname{cotanh}(x)$

Progresiones aritméticas y geométricas

D

D.1 Progresiones aritméticas

Cuando una sucesión de números verifica que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante decimos que la dicha sucesión es una *progresión aritmética*. Por ejemplo

a) 0, 5, 10, 15,... es una progresión aritmética donde la diferencia entre términos consecutivos es 5,

b) $a, a+d, a+2d, a+3d$,... es una progresión aritmética cuya diferencia es d.

Es fácil calcular cualquier término de una progresión aritmética conociendo el primer término y *diferencia* común. El término n-ésimo de una progresión aritmética cuyo primer término es a y la diferencia es d es

$$\boxed{\text{término } n\text{-ésimo} = \boldsymbol{a + (n-1)d}}$$

Suma de una progresión aritmética

¿Cuánto vale la suma de los términos de una progresión aritmética? Parece natural que la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética con término inicial a y diferencia d sólo dependa de estos dos parámetros, pero ¿tenemos una fórmula? Para sumar

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots (a+(n-1)d)$$

fijemonos en que si sumamos el primer término y el último, el segundo y el penúltimo y así sucesivamente siempre obtenemos el mismo resultado. Quizá es más fácil verlo de la siguiente forma, sumemos los términos de la progresión con los mismos términos, pero escritos en orden inverso:

$$\begin{array}{ccccc}
a & + & a+(n-1)d & = & 2a+(n-1)d \\
a+d & + & a+(n-2)d & = & 2a+(n-1)d \\
a+2d & + & a+(n-3)d & = & 2a+(n-1)d \\
\cdots & + & \cdots & = & 2a+(n-1)d \\
a+(n-3)d & + & a+2d & = & 2a+(n-1)d \\
a+(n-2)d & + & a+d & = & 2a+(n-1)d \\
a+(n-1)d & + & a & = & 2a+(n-1)d \\
\hline
 & & & & n(2a+(n-1)d)
\end{array}$$

Así obtenemos que

$$2\left[a + (a+d) + (a+2d) + \cdots (a+(n-1)d)\right] = n(2a+(n-1)d),$$

y por tanto

$$\boxed{\boldsymbol{a + (a+d) + (a+2d) + \cdots (a+(n-1)d) = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2}}\,.}$$

La fórmula anterior permite calcular la suma de los términos de una progresión geométrica en función del primer término, la diferencia y el número de términos. También se puede escribir la suma en función de la diferencia, el primer término y el último. Si notamos

$$a_1 = a,\ a_2 = a+d,\ a_3 = a+2d, \ldots,\ a_n = a+(n-1)d,$$

entonces

$$\boxed{\boldsymbol{a_1 + a_2 + \cdots a_n = \frac{n\,(a_1+a_n)}{2}}\,.}$$

D.2 Progresiones geométricas

Cuando una sucesión de números verifica que la razón entre dos términos consecutivos es constante decimos que la dicha sucesión es una *progresión geométrica*. Por ejemplo

a) 2, 4, 8, 16,... es una progresión geométrica donde la razón entre términos consecutivos es 2,

b) $a, a\cdot r, a\cdot r^2, a\cdot r^3$,... es una progresión geométrica de razón r.

Como en las progresiones aritméticas, es fácil calcular el término n-ésimo de la progresión cuyo término inicial es a y la razón es r. Dicho término es

$$\boxed{\text{término } n\text{-ésimo} \;=\; \boldsymbol{a\cdot r^{n-1}}}$$

Suma de una progresión geométrica

En el Ejemplo 7.3 ya vimos cómo calcular su suma. Para calcular la suma de los n primeros términos,

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1},$$

fijémonos que

$$(1-r)\left(a + ar + ar^2 + ar^{n-1}\right) = a - ar^n$$

de donde se deduce que

$$\boxed{\boldsymbol{a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a-ar^n}{1-r}}\,.}$$

Utilizando la notación

$$a_1 = a,\ a_2 = ar,\ a_3 = ar^2, \ldots,\ a_n = ar^{n-1},$$

podemos expresar la suma en función del primer término, el último y la razón:

$$\boxed{\boldsymbol{a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}}\,.}$$

Algunos ejemplos y contraejemplos

E

a) Una función continua en un único punto

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

b) Una función continua pero no derivable
La función valor absoluto es continua en toda la recta real pero no es derivable en el origen.

c) Una función derivable pero no de clase C^1
La función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

vale como ejemplo. Es derivable pero la derivada no es continua en el origen.

d) Una función de clase C^n pero no de clase C^{n+1}
Véase el Ejemplo 5.32

e) Una función integrable que no admite primitiva
La función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 0$ para $x \neq 0,1,2,3$ y $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 1$.

f) Una función con primitiva pero que no es integrable (Riemann)
La función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si } x = \pm 1 \end{cases}$$

no está acotada y, por tanto, no es integrable Riemann. Su primitiva ya la conoces.

g) Una serie convergente pero no absolutamente convergente
Cualquier sucesión decreciente (pero no demasiado rápidamente) y unos cambios de signo son suficientes para construir un ejemplo: $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ nos vale.

h) Una serie con sumas parciales acotadas pero que no es convergente
Las sumas parciales de la serie $\sum(-1)^n$ están acotadas pero la serie no es convergente (su término general no tiende a cero).

i) Una sucesión que no es convergente ni divergente
Por ejemplo $\{(-1)^n\}$

j) Una sucesión que diverge positivamente pero no es creciente
La sucesión $\{x_n\}$, donde $x_n = n$ si n es par y $x_n = n^2$ si n es impar.

k) Un conjunto que no es abierto ni cerrado
Cualquier intervalo semiabierto (o semicerrado, según se mire): $[0,1[$, por ejemplo.

Glosario