

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**  
**Métodos matemáticos de la Física IV**  
**Primer Parcial. 1 de Febrero de 1999**

- *Entrega los ejercicios en hojas separadas*
- *El examen dura tres horas*
- *La puntuación máxima es de 30 puntos*

1. Se considera la ecuación

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0, \quad t \in (0, \infty)$$

donde  $p \geq 0$  es un parámetro (Ecuación de Bessel).

[5] i) Demuestra que el cambio de incógnita  $\sqrt{t}x = y$  la transforma en

$$y'' + \left[1 + \frac{\frac{1}{4} - p^2}{t^2}\right]y = 0.$$

[2] ii) Encuentra un sistema fundamental para  $p = \frac{1}{2}$ .

[3] iii) Se supone de nuevo  $p = \frac{1}{2}$ . Dibuja la gráfica de las soluciones y explica el comportamiento para  $t \rightarrow 0^+$  y para  $t \rightarrow +\infty$ . ¿Se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad para condiciones iniciales en  $t_0 = 0$ ?

2. Se considera el sistema

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[5] i) Calcula una matriz fundamental.

[2] ii) Encuentra una matriz solución que no sea fundamental.

[3] iii) Calcula la solución que cumple  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$ .

3. Sean  $D_1$  y  $D_2$  las rectas

$$D_1 : y = x, \quad D_2 : y = -x.$$

Se buscan curvas en el plano que cumplan la siguiente propiedad en cada uno de sus puntos.

Propiedad: El punto  $A$  donde se cortan  $D_1$  y la tangente y el punto  $B$  donde se cortan  $D_2$  y la normal son simétricos respecto al eje  $y$ .

[8] i) Encuentra la ecuación de una curva que cumpla la propiedad anterior y pase por el punto  $(1, \sqrt{3})$ .

[2] ii) ¿Puedes dibujar la gráfica? ¿Sabes de qué curva se trata?

