UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV
Primer Parcial. 14 de febrero de 2008.

- *Duración de la primera parte: 2 horas. Puntuación máxima: 60*

1. Se considera el problema de valores iniciales

$$x' + \frac{1}{\sqrt{t}}x = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad t \in]0, \infty[, \qquad x(1) = 2.$$

[15] (i) Efectúa el cambio de la variable independiente

$$t = s^2, \quad x = x(s)$$

y comprueba que el problema se transforma en uno del tipo

$$\frac{dx}{ds} + a(s)x = b(s), \quad x(1) = 2.$$

[5] (ii) ¿Qué dominio $\mathcal{D}$ en el plano (s, x) es el apropiado para el problema transportado?

[10] (iii) Encuentra la solución del problema original.

2. Decide de forma razonada la validez de cada una de las siguientes afirmaciones:

[10] (i) La ecuación

$$x^9 + x + t = 0$$

define una función implícita $x = x(t)$ que cumple $x(2) = -1$.

[10] (ii) Las funciones $\varphi_1(t) = 2t^2$, $\varphi_2(t) = |t|t$, $t \in \mathbb{R}$, son linealmente independientes.

[10] (iii) Todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$t^2x'' + (t^2 + t^3)x' + x = 0$$

están acotadas en el intervalo $]0, 1]$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV
Primer Parcial. 14 de Febrero de 2008

- *Duración de la segunda parte: 1 hora y media. Puntuación máxima: 40*

El objetivo de este ejercicio es obtener la ecuación de Euler-Lagrange para una clase de funcionales que dependen de la derivada **segunda**.

Sea $F : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y,p) \mapsto F(x,y,p)$ una función de clase C^3. Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b F(x, y(x), y''(x))dx, \ \ y(a) = A,\ y'(a) = \alpha,\ y(b) = B,\ y'(b) = \beta$$

y se entiende que el dominio es

$$\mathcal{D} = \{y \in C^2[a,b] :\ y(a) = A,\ y'(a) = \alpha,\ y(b) = B,\ y'(b) = \beta\}.$$

[20] (i) Demuestra que si $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo en $y = y(x)$, función en la clase $\mathcal{D} \cap C^4[a,b]$, entonces y cumple la ecuación diferencial

$$F_y(x,y,y'') + \frac{d^2}{dx^2}\{F_p(x,y,y'')\} = 0.$$

Indicación: se empleará la clase de funciones test

$$C_0^2[a,b] = \{\varphi \in C^2[a,b] :\ \varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi(b) = \varphi'(b) = 0\}.$$

[20] (ii) Calcula las extremales del funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^\pi \{y''(x)^2 - y(x)^2\}dx, \ \ y(0) = y'(0) = y(\pi) = y'(\pi) = 0.$$