

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV
Primer Parcial (Primera parte). 2 de Febrero de 2007

- *Entrega los ejercicios por separado*
- *Puntuación máxima: 30*

1. Se considera el espacio Z de soluciones de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} - x = 0$$

y el isomorfismo de espacios vectoriales

$$\Phi : Z \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix}.$$

Calcula una base de Z y describe Φ en coordenadas.

2. ¿Existe alguna serie de potencias del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-8)^n,$$

con radio de convergencia $R = \infty$, y tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-8)^n = \frac{1}{2+t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}?$$

3. Se sabe, por el Principio de Fermat, que la trayectoria de un rayo de luz en un medio óptico con velocidad $v = v(x, y)$ es una extremal del funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v(x, y(x))} dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 2.$$

¿Qué forma tiene este rayo en el caso $v(x, y) = c$? Justifica la respuesta usando el Cálculo de Variaciones.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV
Primer Parcial (Segunda parte). 2 de Febrero de 2007

- *Puntuación máxima: 20*

Se considera el problema de valores iniciales

$$(*) \quad x' = \frac{t - x + 5}{t - x + 1}, \quad x(2) = 1.$$

a) Determina el dominio de este problema.

b) Se considera el cambio de variables

$$y = t - x + a,$$

siendo a una constante por determinar.

b.1) Justifica que este cambio es admisible para cualquier elección de a .

b.2) Calcula, en función de a , la ecuación que resulta de considerar el cambio dado. Determina el dominio de la nueva ecuación.

c) Resuelve (*) haciendo la elección de a que consideres oportuna.