

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**  
**Métodos matemáticos de la Física IV**  
**Primer Parcial. 17 de Febrero de 2006**

- *Entrega los ejercicios por separado*
- *Duración del examen: 3 horas y media. Puntuación máxima: 30*

1. Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^{2\pi} \{y'(x)^2 - 2y(x)^2 + y(x) \cos x\} dx, \quad y(0) = y(2\pi) = \frac{1}{2}.$$

[2] a) Determina la ecuación de Euler-Lagrange.

[6] b) Prueba que hay una única extremal que cumple las condiciones de contorno.

[2] c) Calcula  $\mathcal{F}[y]$  para la función constante  $y(x) \equiv \frac{1}{2}$ . ¿Se alcanza un mínimo en la extremal hallada en b)?

2. [4] a) Construye una ecuación diferencial lineal del tipo

$$(\star) \quad x''' + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$$

que admita las soluciones

$$\varphi_1(t) = \cos t, \quad \varphi_2(t) = \sin t, \quad \varphi_3(t) = e^t.$$

[4] b) Se efectúa el cambio

$$x = ty, \quad t \in ]0, \infty[.$$

Encuentra la ecuación transformada y comprueba que es del tipo

$$(\star\star) \quad y''' + b_2(t)y'' + b_1(t)y' + b_0(t)y = 0,$$

donde los coeficientes  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  son continuos en  $]0, \infty[$ .

[2] c) Encuentra las soluciones de  $(\star\star)$ .

3. Se aplica el cambio de variables

$$x = y + \frac{1}{y}$$

a la ecuación

$$x' = tx.$$

[6] a) Determina las zonas de validez de este cambio y los posibles dominios para la ecuación transportada al plano  $(t, y)$ .

[4] b) Resuelve la ecuación en  $y$ .