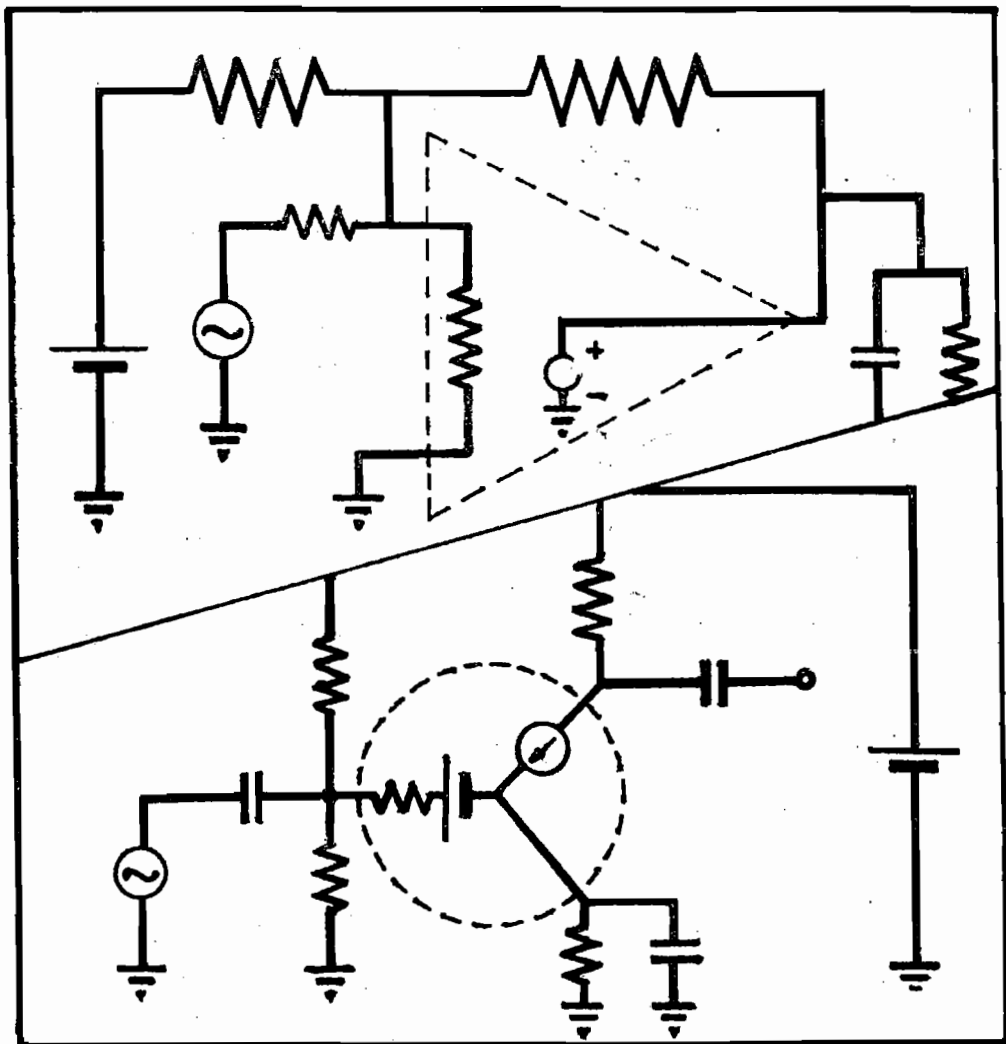


FUNDAMENTOS DE TEORIA DE CIRCUITOS PARA ELECTRONICA



Juan A. López Villanueva
Juan A. Jiménez Tejada

FUNDAMENTOS DE TEORÍA DE CIRCUITOS PARA ELECTRÓNICA

Juan Antonio López Villanueva, Juan Antonio Jiménez Tejada

Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores.

Facultad de Ciencias

Universidad de Granada

Granada

España

ISBN: 978-84-691-4087-1

Dep. Legal: GR-1412-2008

PROLOGO

Este libro ha surgido de la experiencia de los autores en la docencia de la asignatura "Electrónica General" de los estudios de Informática de la Universidad de Granada. En realidad se ha escrito para proporcionar unas bases mínimas de Teoría de Circuitos a dicha asignatura, por lo que su temario se ha adaptado a ella.

El programa de la asignatura Electrónica General se divide en dos partes: La primera de ellas hace un estudio descriptivo y funcional de los Dispositivos Electrónicos, trata el problema de la polarización de dispositivos en circuitos externos, estudia la conmutación de diodos y transistores para finalizar con un análisis de los circuitos básicos de las familias lógicas. La segunda parte se ocupa de la Electrónica Analógica, en concreto de los circuitos amplificadores, generadores de funciones analógicas, filtros activos, generadores de señal, etc, así como de los reguladores de tensión y potencia, terminando con un estudio de los convertidores D/A y A/D. Atendiendo a esta división, en este libro también se distinguen dos partes diseñada cada una de ellas para ser estudiada antes de la parte correspondiente del temario de Electrónica.

Manifestamos nuestro agradecimiento a todos los compañeros del Departamento de Electrónica y Sistemas Informáticos de la Universidad de Granada que han ayudado y animado para sacar adelante esta obra, así como al Director de dicho Departamento, D. Pedro Cartujo Estébanez y al director de los estudios de Informática D. Alberto Prieto Espinosa, por su incondicional apoyo.



INDICE

PARTE 1: CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y ELEMENTOS DE TEORIA DE CIRCUITOS EN CONDICIONES DE CORRIENTE CONTINUA.

A.1	Introducción	1
A.2	Definiciones previas	2
A.3	Leyes de Kirchhoff	3
A.4	Elementos lineales de dos terminales	5
	A.4-1 Elementos lineales pasivos	5
	A.4-2 Elementos lineales activos	10
	A.4-3 Asociaciones de elementos	11
	A.4-4 Elementos reales	13
A.5	Sistemas lineales. Principio de superposición ..	22
A.6	Circuitos en corriente continua	23
A.7	Análisis de circuitos en condiciones DC. Métodos	29
	A.7-1 Método de las corrientes en las mallas ...	29
	A.7-2 Método de las tensiones en los nudos	30
A.8	Teoremas de Thèvenin y Norton	32
	A.8-1 Teorema de Thèvenin	32
	A.8-2 Equivalencia entre fuentes de tensión y de corriente	34
	A.8-3 Teorema de Norton	35
A.9	Resolución de circuitos con elementos no lineales	36
A.10	Régimen transitorio	38
A.11	Problemas	42

PARTE B: ANALISIS GENERAL DE CIRCUITOS CON SEÑALES VARIABLES EN EL TIEMPO.

B.1	Introducción	51
B.2	Análisis de circuitos en condiciones de corriente alterna	54
	B.2-1 Relación entre la tensión y la corriente para los elementos pasivos en corriente alterna	54
	B.2-2 Impedancias	56
	B.2-3 Teoremas. Ejemplos	57
B.3	Análisis de Fourier	67
	B.3-1 Concepto de filtro	71
B.4	Valores medios y eficaces. Potencia	72
B.5	Formalismo basado en la transformada de Laplace.	75
	B.5-1 Método basado en la transformada de la ecuación del circuito	75
	B.5-2 Método basado en la transformada del circuito. Impedancias	82
B.6	Función de transferencia	85
	B.6-1 Definición. Ejemplos	85
	B.6-2 Información que se obtiene a partir de la función de transferencia	88
	B.6-3 Diagrama de Bode	96
B.7	Problemas	106
	Apéndice 1: Números complejos	116
	Apéndice 2: Transformada de Laplace	122

PARTE A: CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y ELEMENTOS DE TEORIA DE CIRCUITOS EN CONDICIONES DE CORRIENTE CONTINUA.

A.1 Introducción:

Este libro se ha escrito para facilitar el estudio de la asignatura "Electrónica General" incluida en el Plan de Estudios de Informática. Por tanto, no debe contemplarse como una Teoría de Circuitos para ser estudiada de forma secuencial e independiente, sino como un apéndice al conjunto de los temas que tratan el temario de Electrónica propiamente dicho.

Nuestra idea es que este libro sea consultado en el momento en que su estudio sea indispensable para seguir la marcha de la asignatura, en consecuencia, la elección tanto del contenido como del orden de la exposición se ha hecho de forma que se adapte al resto. En concreto, se ha dividido en dos partes de manera que con solo estudiar la primera se tengan las herramientas de teoría de circuitos necesarias para abordar el tema de los Dispositivos Electrónicos, los problemas de polarización de dispositivos en circuitos externos y el análisis de las configuraciones elementales utilizadas en los circuitos lógicos.

Para ello se ha incluido en esta Parte A, además de las definiciones necesarias y los teoremas y métodos fundamentales para el análisis de redes, la teoría de circuitos en condiciones de corriente continua, algunos ejemplos de análisis de circuitos en los que aparecen elementos no lineales y ejemplos simples de respuestas transitorias que permitan estimar después los retardos producidos cuando un circuito lógico realice una transición entre dos estados estáticos diferentes. En la Parte B se incluirá la parte de teoría de circuitos cuyo conocimiento es previo al estudio de los temas de Electrónica Analógica.

A.2 Definiciones previas:

Llamaremos elementos a ciertas unidades físicas consideradas simples, que disponen de unos terminales externos para interconectarse entre sí dando lugar a sistemas complejos conocidos como circuitos o redes eléctricas.

Nos limitaremos a un tipo concreto de elementos caracterizados por tener un número pequeño de terminales externos (entre dos y cuatro), por permanecer invariantes en el tiempo y por estar localizados en el espacio.

Les asociaremos unos parámetros físicos (resistencia, capacidad, autoinducción, etc) independientes de la posición espacial y del tiempo.

Estos elementos pueden ser activos si son capaces de suministrar energía al resto del circuito o pasivos si son capaces de disipar o almacenar energía pero no de generarla.¹

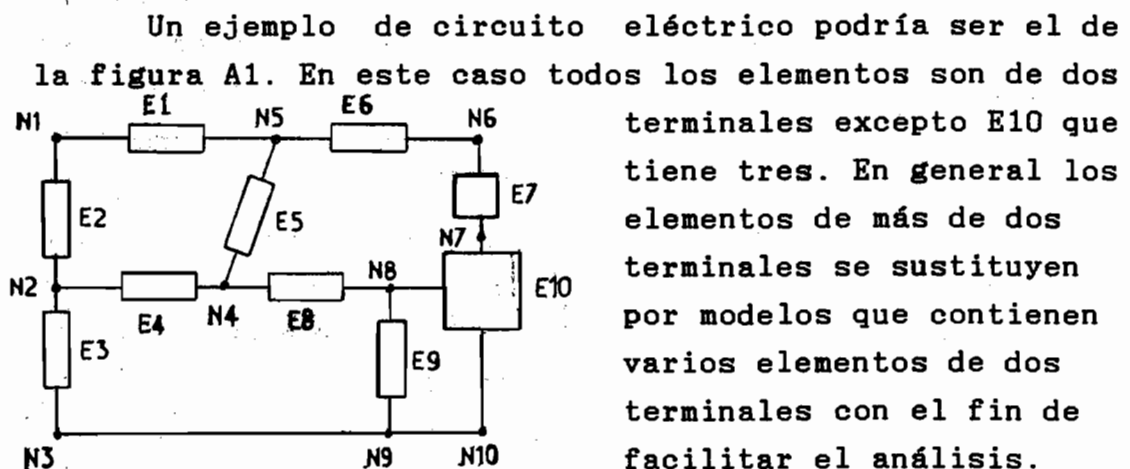


Figura A1

Llamaremos nudos a aquellos puntos del circuito comunes a dos o más elementos. Si en un nudo confluyen más de dos elementos se le llama nudo principal o de conjunción. En la mayor parte de los casos sólo serán de interés los nudos principales por lo que nos referiremos a ellos simplemente como nudos

¹.- Por supuesto ningún sistema físico es capaz de generar energía a partir de la nada. Una pila, por ejemplo, suministra energía al circuito a partir de su propia energía química.

ignorando los demás, a no ser que nos interese el valor de la tensión eléctrica justo en uno de ellos. En el circuito de la figura A1 N2, N3, N4, N5, N8, son nudos principales, mientras que N1, N6 y N7 son simplemente nudos. Obsérvese que N3, N9 y N10 son el mismo nudo.

Llamaremos rama a la parte del circuito comprendida entre dos nudos consecutivos. Un ejemplo en el circuito de la figura A1 puede ser el camino N5-N1-N2.

Un conjunto de ramas que constituye un camino cerrado dentro de un circuito sin pasar dos veces por el mismo nudo se conoce como una malla. En el circuito de la figura A1 los caminos N2-N1-N5-N4-N2, N5-N6-N7-N8-N4-N5 son ejemplos de mallas.

En general, las ramas, los nudos y las mallas de una red son las características topológicas que determinan el número de ecuaciones independientes necesarias para hallar la solución completa de las corrientes y tensiones en la red.

A.3 Leyes de Kirchhoff:

Las leyes de Kirchhoff son consecuencia directa de las leyes básicas del Electromagnetismo (Leyes de Maxwell). Son válidas en cualquier instante de tiempo y pueden enunciarse en la forma siguiente:

1.- Ley de Kirchhoff de las tensiones: " En un circuito cerrado o malla, la suma algebraica de las diferencias de

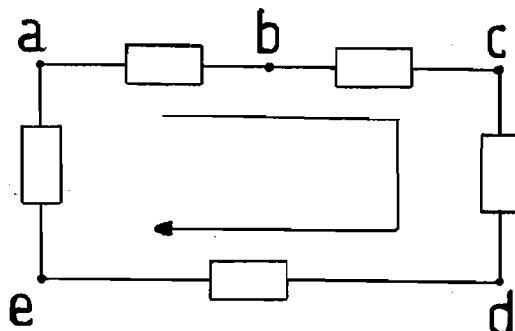


Figura A2

potencial entre los extremos de los diferentes elementos, tomadas todas en el mismo sentido, es cero."

Ejemplo: La aplicación de esta ley a la malla de la figura A2 puede expresarse

matemáticamente en la forma siguiente:

$$(v_a - v_b) + (v_b - v_c) + (v_c - v_d) + (v_d - v_e) + (v_e - v_a) = 0$$

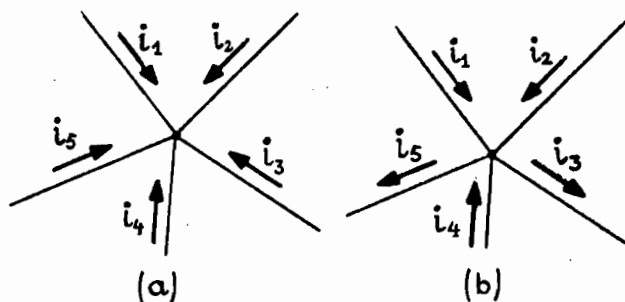
donde las diferencias de potencial se han tomado en el sentido indicado por la flecha en la figura.

Esta ley se puede expresar simbólicamente como:

$$\sum_{\text{malla}} v_i = 0 \quad (\text{A.1})$$

siendo v_i la diferencia de potencial entre los extremos del elemento i -ésimo.

2.- Ley de Kirchhoff de las corrientes: "La suma algebraica de las corrientes que inciden en un nudo,



consideradas todas ellas entrantes o todas ellas salientes, es cero."

Ejemplo: La aplicación de esta ley al nudo de la figura A3-(a) puede expresarse en la forma

Figura A3

expresarse en la forma

$$i_1+i_2+i_3+i_4+i_5=0$$

La consideración de que una corriente es entrante o saliente se hace en principio de una forma totalmente arbitraria, ya que si una corriente i es entrante, se puede sustituir por una corriente $-i$ saliente y viceversa. El sentido real de la corriente dependerá de cual de los dos signos sea numéricamente el correcto. En el nudo de la figura A3-(b) las corrientes i_3 e i_5 se han supuesto salientes, por lo que $-i_3$ y $-i_5$ serían entrantes. La ley que discutimos nos proporciona en este caso la siguiente expresión:

$$i_1+i_2+(-i_3)+i_4+(-i_5)=0$$

o bien

$$i_1+i_2+i_4=i_3+i_5$$

Por tanto, esta ley se podría enunciar en la forma equivalente: "En un nudo, la suma de las corrientes entrantes ha de ser igual a la suma de las salientes."

De forma análoga a la ley anterior, podremos expresar simbólicamente

$$\sum_{\text{nudo}} i_j = 0 \quad (\text{A.2})$$

donde i_j es la corriente que entra por la rama j -ésima.

A.4 Elementos lineales de dos terminales:

Diremos que un elemento es lineal si existe una relación lineal entre la tensión eléctrica que soporta y la corriente que lo atraviesa, es decir, si se verifica la siguiente propiedad:

Sea i_1 la corriente que atraviesa el elemento cuando la diferencia de potencial entre sus terminales es v_1 , y sea i_2 la corriente que lo atraviesa cuando la diferencia de potencial es v_2 . Entonces si la tensión eléctrica aplicada o diferencia de potencial entre sus terminales fuese una combinación lineal de las anteriores, por ejemplo $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2$ con α_1 y α_2 constantes arbitrarias, la corriente que circularía por él sería la combinación lineal $\alpha_1 \cdot i_1 + \alpha_2 \cdot i_2$.

Matemáticamente la condición anterior se cumple siempre que la relación entre v e i sea una relación proporcional, diferencial, integral o una combinación de ellas.

Veamos unos elementos que verifican la condición de linealidad.

A.4-1 Elementos lineales pasivos:

i) Resistencia (llamado a veces resistor):

Una resistencia es un elemento tal que al aplicar una diferencia de potencial entre sus terminales deja

pasar una corriente de intensidad proporcional a la diferencia de potencial aplicada. Su símbolo se representa en la

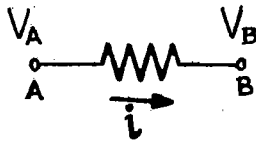


Figura A4

figura A4. Matemáticamente:

$$v_A - v_B = i \cdot R \quad (A.3)$$

donde el factor de proporcionalidad R es una constante del elemento llamada resistencia del mismo. Su unidad en el S.I. es el ohmio (Ω) relacionado con las unidades eléctricas de potencial y corriente del Sistema Inter-

nacional según la relación:

$$1 \Omega = (1 \text{ Voltio}) / (1 \text{ Amperio}) \quad (\text{A.4})$$

La resistencia es, pues, un elemento lineal por definición y a dicha definición de linealidad se le conoce como "Ley de Ohm".

Así como la resistencia R es una medida de la dificultad que ofrece el elemento al paso de la corriente, se emplea la magnitud inversa, la conductancia G , como medida de la facilidad que ofrece el elemento al paso de la corriente. Por definición

$$G = 1 / R \quad (\text{A.5})$$

y su unidad es el Siemens (S) llamado anteriormente mho (\mathcal{U}).

ii) Condensador:

Un condensador ideal consiste en un par de armaduras perfectamente conductoras, muy próximas entre sí y separadas por un aislante perfecto. Los electrodos o armaduras conductoras se ejercen mutuamente una influencia eléctrica de forma que pueden almacenar cargas de signo contrario e iguales en módulo manteniéndose neutro el elemento en su conjunto. Su símbolo se representa en la figura A5.

Las cargas almacenadas no se pueden neutralizar a través del aislante, si éste es perfecto, de manera que

un condensador ideal cargado y aislado podría mantener su carga indefinidamente.

Debido a este almacenamiento de carga existe una diferencia de potencial entre los terminales

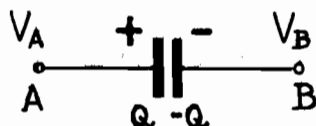


Figura A5

del elemento de manera que la armadura que contiene la carga positiva está a un potencial superior al de la armadura opuesta (signos + y - en la figura A5). Una propiedad de los condensadores que puede adoptarse como

definición es el hecho de que la carga almacenada en cualquiera de las armaduras es, en valor absoluto, proporcional a la diferencia de potencial entre ellas, es decir,

$$Q = C \cdot (v_A - v_B) \quad (\text{A.6})$$

De nuevo, el factor de proporcionalidad C es una constante del elemento y se denomina capacidad del mismo. Su unidad en el S.I. es el Faradio (F) relacionado con otras unidades según

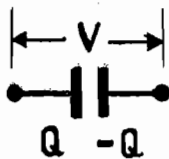
$$1 F = (1 \text{ Culombio}) / (1 \text{ Voltio}) \quad (\text{A.7})$$

o bien, ya que $1 C = 1 A \cdot 1 s$ y $1 \Omega = 1 V / 1 A$, substituyendo

$$1 F = (1 \text{ segundo}) / (1 \text{ ohmio}) \quad (\text{A.8})$$

Aunque no puede haber flujo de partículas cargadas móviles a través del aislante, pueden existir mecanismos de variación de la carga almacenada en las armaduras que dan lugar a una corriente eléctrica. Veamos esto con detalle:

Supongamos que el condensador de la figura A6-(a) soporta una diferencia de potencial v y tiene almacenada una carga $q = C \cdot v$.



(a)



(b)

Figura A6

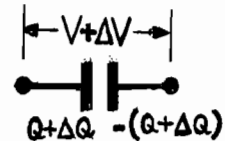


Figura A7

Si se fuerza a que la diferencia de potencial entre sus extremos cambie a un nuevo valor $v + \Delta v$, será necesario que cambie también la carga almacenada (figura A6-(b)):

$$q + \Delta q = C \cdot (v + \Delta v) \Rightarrow \Delta q = C \cdot \Delta v$$

Para pasar de la situación (a) a la (b) es necesaria la afluencia de cargas opuestas Δq y $-\Delta q$ hacia las

armaduras, iguales en módulo para preservar la neutralidad eléctrica tal como se muestra en la figura A7. Este movimiento de cargas da lugar a la misma corriente y en el mismo sentido a ambos lados de las armaduras (ya que la corriente tiene el sentido de desplazamiento de las cargas positivas y sentido opuesto al del desplazamiento de las cargas negativas). Un observador que vea el elemento desde sus terminales externos, por ejemplo, un instrumento de medida, no podrá discernir si la corriente ha atravesado realmente o no el aislante. Por tanto, desde el punto de vista de la teoría de circuitos, podemos afirmar que por un condensador circula una corriente eléctrica siempre que se produzca una variación temporal de la tensión eléctrica entre sus terminales:

$$i = \Delta q / \Delta t = C \cdot \Delta v / \Delta t$$

En el límite:

$$i = C \cdot dv/dt \quad (A.9)$$

relación lineal entre la tensión y la intensidad.

Una consecuencia del razonamiento anterior es que la tensión entre las armaduras del condensador no puede variar de forma discontinua. En efecto, si se produjera un salto de tensión Δv no nulo en un tiempo infinitamente pequeño sería necesaria una afluencia de cargas Δq no nula de forma instantánea para lo cual es necesaria una corriente infinita. Como una corriente infinita no puede ser suministrada por sistemas físicos prácticos, la tensión del condensador solo puede variar suavemente. En otras palabras, como la corriente se obtiene a partir de la derivada de la tensión, para que i sea finita es necesario que v sea continua.

iii) Bobina (llamada a veces inductor):

Una bobina consiste en un conjunto de espiras paralelas y próximas entre sí de manera que, cuando es atravesada por una corriente eléctrica, se produce en su interior un campo magnético proporcional a la corriente que lo genera. Su símbolo se representa en la figura A8.

El flujo de campo magnético a través del interior

de la bobina será también proporcional a la corriente eléctrica:

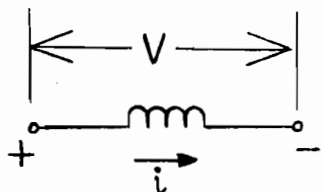


Figura A8

$$\Phi = L \cdot i \quad (\text{A.10})$$

donde el factor de proporcionalidad L es una constante del elemento

llamada autoinducción del mismo. Su unidad es el Henrio (H).

Este elemento es cada vez menos utilizado debido entre otras razones a su dificultad para incluirlo en circuitos integrados y a que puede ser sustituido en muchas aplicaciones por otros dispositivos con prestaciones considerablemente superiores. No obstante lo incluiremos aquí por razones de interés académico aunque le prestaremos menos atención que a los otros.

Si la corriente que atraviesa la bobina varía con el tiempo, también variará el flujo del campo magnético a través de ella dando lugar, según la ley de Faraday, a una fuerza electromotriz que se opone al aumento de la intensidad. Esta fuerza electromotriz se comporta, por tanto, como una caída de tensión de valor $v = d\Phi/dt$.

Como $\Phi = L \cdot i$, podemos sustituir obteniendo

$$v = L \cdot di/dt \quad (\text{A.11})$$

De esta expresión podemos extraer la relación entre el Henrio y otras unidades del S.I.

$$1 \text{ H} = 1 \Omega \cdot 1 \text{ s} \quad (\text{A.12})$$

Una consecuencia que se puede extraer de la expresión A.11, análoga a la que se obtuvo en el caso del condensador, es que para que v sea finita i ha de ser continua, esto es, la corriente que atraviesa una bobina no puede variar de forma discontinua.

A.4-2 Elementos lineales activos:

Se suelen incluir como tales las fuentes de tensión y corriente, tanto dependientes como independientes.

i) Fuente de tensión ideal: Es un elemento de dos terminales que genera una tensión v entre ellos independiente de la corriente que circula por él. Su símbolo se representa en la figura A9-(a).

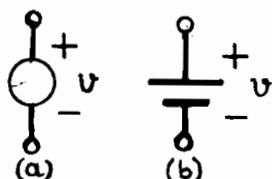


Figura A9

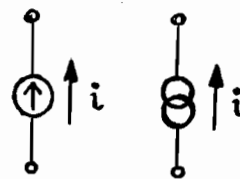


Figura A10

El símbolo de la figura A9-(b) se utiliza para representar una fuente de tensión constante.

ii) Fuente de corriente ideal: Es un elemento de dos terminales que genera una intensidad i a través de él independientemente de la tensión que haya entre sus terminales. Se suele representar por cualquiera de los símbolos de la figura A10.

iii) Fuentes dependientes: Las fuentes de tensión e intensidad son dependientes si el valor de la tensión o intensidad que generan, respectivamente, está condicionado por definición por el valor de la tensión o la corriente en otro u otros puntos del circuito. Estas fuentes están representadas en la figura A11.

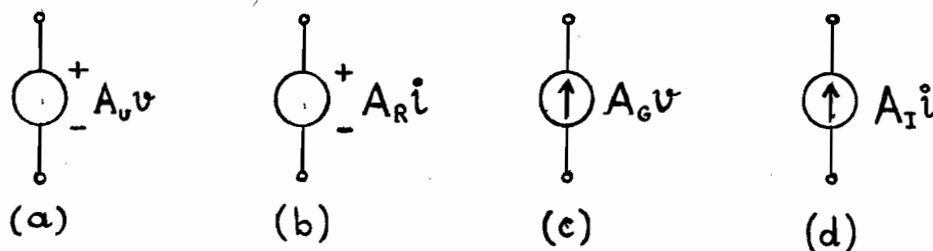


Figura A11

Los cuatro casos considerados son:

- Fuente de tensión dependiente de tensión.
- Fuente de tensión dependiente de corriente.
- Fuente de corriente dependiente de tensión.
- Fuente de corriente dependiente de corriente.

te.

En todos los casos, v e i son tensiones e intensidades en otros elementos del circuito y A_v , A_R , A_G y A_I son factores de proporcionalidad.

A.4-3 Asociaciones de elementos:

Las asociaciones en serie o paralelo de un mismo tipo de cualquiera de los elementos descritos en los apartados anteriores pueden ser sustituidas por un solo elemento del mismo tipo. El valor de la constante física (resistencia, capacidad, ...) asociada al elemento equivalente se puede obtener sin más que aplicar las leyes de Kirchhoff y las relaciones entre corrientes y tensiones estudiadas.

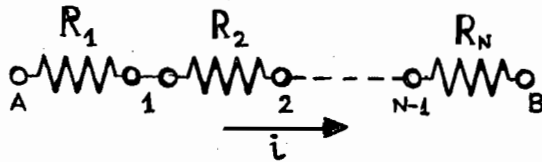


Figura A14

relación $i-v$ para resistencias en el circuito de la figura A14:

$$v_A - v_1 = i \cdot R_1 ; v_1 - v_2 = i \cdot R_2 ; \dots v_{N-1} - v_B = i \cdot R_N$$

Sumando las igualdades anteriores:

$$v_A - v_B = i \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_N)$$

El elemento equivalente, al ser sustituido por la asociación, debería verificar:

$$v_A - v_B = i \cdot R_{eq}$$

Por tanto:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N \tag{A.13}$$

b) En paralelo : En este caso, según la figura A13

$$v_A - v_B = i_1 \cdot R_1 = i_2 \cdot R_2 = i_3 \cdot R_3 = \dots = i_N \cdot R_N$$

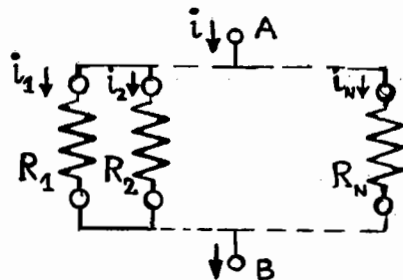


Figura A13

de donde

$$i_1 = (v_A - v_B) / R_1$$

$$i_2 = (v_A - v_B) / R_2$$

⋮

$$i_N = (v_A - v_B) / R_N$$

Aplicando la ley de Kirchhoff de

las corrientes:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_N$$

Sustituyendo:

$$i = (v_A - v_B) \cdot (1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_N)$$

La resistencia equivalente cumplirá, pues, la identidad:

$$1/R_{eq} = (1/R_1) + (1/R_2) + \dots + (1/R_N) \quad (A.14)$$

ii) Condensadores: Al ser también elementos lineales, la capacidad equivalente se obtiene de forma similar al caso de las resistencias.

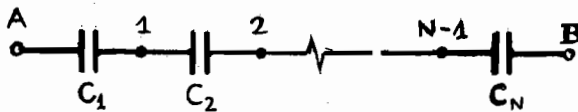


Figura A14

capacidades y sumando:

$$i \cdot (1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_N) = d(v_A - v_B)/dt$$

La capacidad equivalente ha de verificar

$$i = C_{eq} \cdot d(v_A - v_B)/dt \Rightarrow i/C_{eq} = d(v_A - v_B)/dt$$

por tanto:

$$1/C_{eq} = (1/C_1) + (1/C_2) + \dots + (1/C_N) \quad (A.15)$$

b) En paralelo:

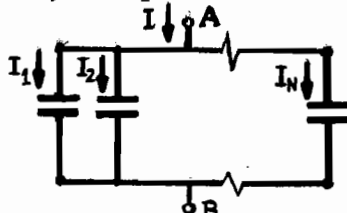


Figura A15

$$i_1 = C_1 \cdot d(v_A - v_B)/dt$$

$$i_2 = C_2 \cdot d(v_A - v_B)/dt$$

:

$$i_N = C_N \cdot d(v_A - v_B)/dt$$

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_N$$

Sustituyendo:

$$i = (C_1 + C_2 + \dots + C_N) \cdot d(v_A - v_B)/dt$$

En consecuencia

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N \quad (A.16)$$

iii) Bobinas:

a) En serie: El análisis de la asociación se

hace de forma análoga a la de los elementos anteriores. El resultado es el siguiente:

a) En serie :

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N \quad (A.17)$$

b) En paralelo :

$$1/L_{eq} = (1/L_1) + (1/L_2) + \dots + (1/L_N) \quad (A.18)$$

iv) Fuentes: Comentaremos las asociaciones de fuentes de tensión en serie y de fuentes de corriente en paralelo. Las asociaciones de fuentes ideales de tensión en paralelo y de fuentes ideales de corriente en serie no tienen sentido y en la práctica deben ser evitadas; no obstante, más adelante propondremos algún problema sobre estas asociaciones para fuentes reales de forma que quede ilustrada su improcedencia.

a) Fuentes de tensión en serie:

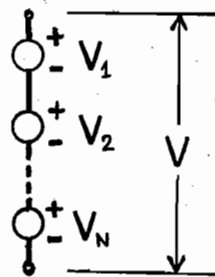


Figura A18

La tensión o f.e.m. generada por la asociación es la suma de las generadas por cada una de las fuentes individuales:

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_N \quad (A.19)$$

b) Fuentes de corriente en paralelo:

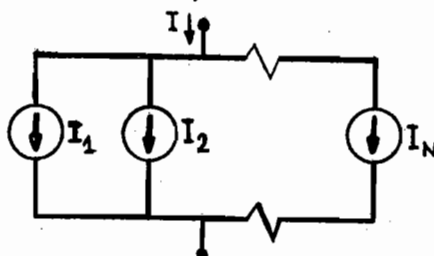


Figura A19

La corriente inyectada por la asociación es la suma de las corrientes inyectadas por cada una de las fuentes individuales:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_N \quad (A.20)$$

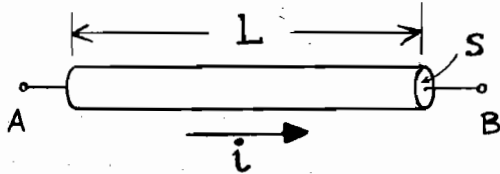
A.4-4 Elementos reales:

Las definiciones dadas en el apartado A.4-2 se referían a elementos ideales, pero en la práctica el diseñador de circuitos ha de utilizar dispositivos comerciales reales que, aunque tienen un comportamiento muy

próximo al ideal, presentan algunas diferencias respecto al mismo que comentaremos a continuación.

a) Resistencias:

En realidad todos los materiales presentan una cierta oposición al paso de la corriente a través de ellos. La resistencia de un trozo homogéneo de sección



constante de cualquier material, tal como el de la figura A19, será mayor cuanto mayor sea su longitud y cuanto menor

Figura A19
 sea su sección, y además dependerá del tipo de material concreto de que se trate. Matemáticamente podemos expresar:

$$R = \rho \cdot L/S \quad (A.21)$$

donde ρ es una constante que representa las propiedades resistivas del material y se llama resistividad, mientras que la longitud L y la sección S únicamente dependen de la geometría del elemento. A veces se utiliza la magnitud inversa de la resistividad a la que se llama conductividad $\sigma = 1/\rho$, con la cual la resistencia se expresa según:

$$R = (1/\sigma) \cdot (L/S) \quad (A.22)$$

Se pueden conseguir elementos comerciales utilizando materiales con baja conductividad o bien láminas muy finas y largas de metal. En la tabla A1 se resumen los tipos de resistencias más usuales, sus propiedades, métodos de fabricación y coeficiente de temperatura α . Este último dato nos proporciona la variación de la resistencia del elemento al variar la temperatura de acuerdo con la siguiente expresión:

$$R_H = R_L \cdot [1 + \alpha \cdot (T_H - T_L)] \quad (A.23)$$

donde R_H es el valor de la resistencia a la temperatura T_H y R_L el valor de la resistencia a la temperatura T_L .

<u>Clase</u>	<u>Características</u>	<u>Método de fabricación</u>	<u>Rango de temperaturas</u>	<u>Coefficiente de temperatura α</u>
Resistencias de capa de carbón.	Poca deriva, pequeña tasa de fallos.	Descomposición térmica de hidrocarburos.	-55 a 155°C	-200 a 1200 p.p.m./K
Resistencias de capa metálica (CrNi).	Coefficiente de temperatura pequeño.	Vaporización en alto vacío.	-65 a 175°C	± 50 p.p.m./K
Resistencias de capa de metal fino (Au/Pt).	Baja resistencia óhmica, coeficiente de temperatura definido, buen comportamiento antihumedad.	Reducción de sales de metales finos en horno.	-65 a 155°C	+200 a +350 p.p.m./K.
Resistencias de hilo.	Soportan fuertes corrientes (0.25 a 200 W), poca deriva, coeficiente de temperatura pequeño, intervalo de temperatura pequeño, inductancia.	Técnica de arrollado.	no crítico	CrNi: <250 p.p.m./K Constantán: <100 p.p.m./K

TABLA A1

El valor de la resistencia de un elemento comercial se suele dar a temperatura ambiente y se expresa mediante un valor nominal seguido de un error relativo máximo o tolerancia, por ejemplo:

$$4.7 \text{ k}\Omega \pm 5\%$$

Las tolerancias comerciales comunes son $\pm 10\%$ y $\pm 5\%$ para resistencias que ocupen posiciones no críticas en un circuito y $\pm 1\%$, $\pm 0.5\%$ para las resistencias de precisión. Las resistencias de precisión suelen tener además los coeficientes más bajos de temperatura.

Los fabricantes expresan el valor de la resistencia mediante un código de colores que da información tanto del valor nominal como de la tolerancia. En la figura A21 puede verse un ejemplo de resistencia con una tolerancia del 5%. Las dos primeras barras a la izquierda representan dos dígitos significativos, la tercera nos dice la potencia de 10 por la que hay que multiplicar y la barra de la derecha nos indica la tolerancia. Todo ello según el código de colores de la tabla A2. La resistencia de la figura A21 tendría un valor:

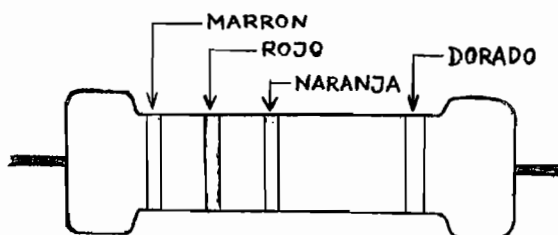


Figura A21

es decir, $R = 12 \text{ k}\Omega \pm 5\%$.

Marrón	Rojo	Naranja	Dorado
1	2	$\cdot 10$	5%

es decir, $R = 12 \text{ k}\Omega \pm 5\%$.

Las resistencias del 1% contienen una franja más para proporcionar tres dígitos significativos.

En la práctica no todos los valores son disponibles comercialmente. El número de valores diferentes de resistencia es mayor cuanto menor es la tolerancia. Por ejemplo, para una tolerancia del 5% los valores nominales comerciales son los de la tabla A3.

b) Condensadores:

Igual que en el caso de las resistencias, la capacidad de un condensador también depende de su geometría y del material aislante que se sitúe entre las

	Negro	0		Marrón	1%
DIGITOS	Marrón	1	TOLERANCIAS	Dorado	5%
	Rojo	2		Plateado	10%
	Naranja	3		Sin color	20%
	Amarillo	4			
	Verde	5			
	Azul	6			
	Violeta	7			
	Gris	8			
	Blanco	9			

TABLA A2

	<u>Ω</u>			<u>kΩ</u>			<u>MΩ</u>	
1	10	100	1	10	100	1	10	
1.1	11	110	1.1	11	110	1.1	11	
1.2	12	120	1.2	12	120	1.2	12	
1.3	13	130	1.3	13	130	1.3	13	
1.5	15	150	1.5	15	150	1.5	15	
1.6	16	160	1.6	16	160	1.6	16	
1.8	18	180	1.8	18	180	1.8	18	
2	20	200	2	20	200	2	20	
2.2	22	220	2.2	22	220	2.2	22	
2.4	24	240	2.4	24	240	2.4		
2.7	27	270	2.7	27	270	2.7		
3	30	300	3	30	300	3		
3.3	33	330	3.3	33	330	3.3		
3.6	36	360	3.6	36	360	3.6		
3.9	39	390	3.9	39	390	3.9		
4.3	43	430	4.3	43	430	4.3		
4.7	47	470	4.7	47	470	4.7		
5.1	51	510	5.1	51	510	5.1		
5.6	56	560	5.6	56	560	5.6		
6.2	62	620	6.2	62	620	6.2		
6.8	68	680	6.8	68	680	6.8		
7.5	75	750	7.5	75	750	7.5		
8.2	82	820	8.2	82	820	8.2		
9.1	91	910	9.1	91	910	9.1		

TABLA A3

armaduras. Es obvio que la cantidad de carga que puede almacenar el elemento, para una tensión dada entre sus placas, será tanto mayor cuanto mayor sea el área de las armaduras y cuanto mayor sea la influencia eléctrica entre ellas, es decir, cuanto más próximas estén. Además será mayor cuanto mayor sea la rigidez dieléctrica del

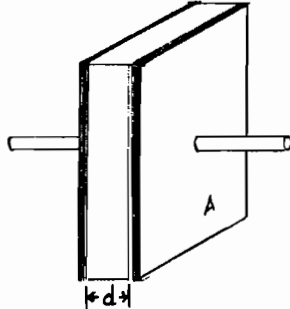


Figura A22

aislante. Para un condensador plano, como el de la figura A22, tendremos:

Para un condensador plano, como el de la figura A22, tendremos:

$$C = \epsilon \cdot A/d \quad (A.24)$$

siendo A el área de las armaduras, d la distancia entre ellas y ϵ la constante dieléctrica del aislante.

Si el condensador no es plano, la expresión matemática de la capacidad es diferente a (A.24), sin embargo cualitativamente se conserva la dependencia de los factores mencionados.

En la tabla A4 se resumen los tipos más usuales de condensadores, la tensión máxima nominal a la que pueden operar, el intervalo de capacidades en el que se pueden encontrar comercialmente y el intervalo de temperaturas de operación. (Estos datos corresponden a la información proporcionada por la empresa SIEMENS AG sobre sus productos. No tienen porqué coincidir exactamente con los datos suministrados por otro fabricante, sin embargo pueden servir como ejemplo de la disponibilidad comercial de condensadores). En la tabla A4 también se da como dato el coeficiente de pérdidas, que se introduce para indicar la perfección del aislamiento entre las armaduras: Se define como la relación entre la conductancia del elemento y su capacidad, por tanto, en un condensador ideal el valor de este coeficiente sería cero.²

2.- El coeficiente de pérdidas nos da la relación entre las conductancias debida a pérdidas y debida a la capacidad, ambas a una determinada frecuencia. Para entender bien el sentido de esta nota será necesario estudiar el concepto de impedancia definido en la Parte B de este libro.

El valor nominal de la capacidad de un condensador puede venir expresado numéricamente de forma explícita o bien según el código de colores. En este caso se suele incluir una franja más para indicar la tensión máxima que puede soportar el elemento.

c) Fuentes:

Las fuentes de tensión e intensidad reales son sistemas complejos que se estudiarán con más detalle en otros temas correspondientes al temario de Electrónica. En este apartado trataremos las fuentes reales mediante un modelo simple que consiste en una fuente ideal y una resistencia. En concreto:

- Una fuente real de tensión se puede representar mediante una fuente ideal de tensión en serie con una resistencia, llamada a veces resistencia interna de la fuente (Figura A23-a). Cuanto menor sea el valor de dicha resistencia más próxima estará la fuente real a una ideal. Una limitación importante en las fuentes reales de tensión es la corriente máxima que pueden suministrar, por tanto, la tensión que genera una fuente real dependerá poco de la corriente que circule por ella, siempre que dicha corriente sea inferior a la máxima especificada.

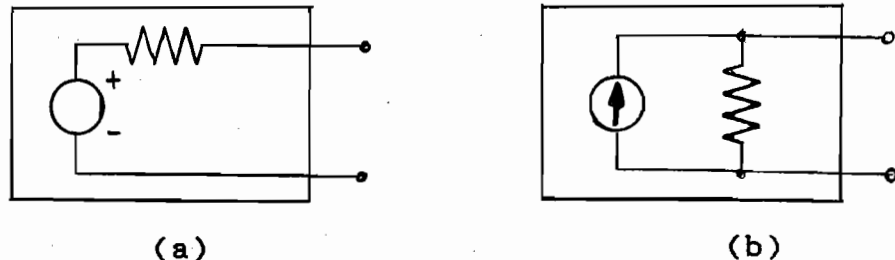


Figura A23

- Una fuente real de intensidad se puede representar mediante una fuente ideal de intensidad en paralelo con una resistencia, llamada a veces también resistencia interna de la fuente. (Figura A23-b). Cuanto mayor sea el valor de esta resistencia más próxima estará la fuente a una fuente de corriente ideal.

En consecuencia, las resistencias internas de las fuentes ideales son:

<u>Tipo de condensador</u>	<u>Tensión nominal</u>	<u>Intervalo de capacidad.</u>
*De corriente continua	250 V a 1000 V	0.1 μ F a 64 μ F
*De plástico metalizado (metal vaporizado). Dieléctrico de:		
-Acetato de celulosa	25 V a 630 V	0.033 μ F a 100 μ F
-HOSTAPHAN, MYLAR (tereftalato de propileno)	50 V a 12500 V	680 pF a 10 μ F
-Policarbonato (MAKROFOL)	100 V a 250 V	0.001 μ F a 1 μ F
-Propileno	250 V a 40 kV	1500 pF a 4.7 μ F
- " (autorregenerativos)	250 V	0.1 μ F a 10 μ F
*De bajas pérdidas. Dieléctrico de:		
-STYROFLEX	25 V a 630 V	2 pF a 330 nF
-Polipropileno	63 V a 630 V	2 pF a 100 nF
-Mica		
-Vidrio		
*De cerámica		
-Multicapa	50 V y 100 V	1 pF a 47 nF
-Multicapa pequeños (gran constante dieléctrica)	50 V y 100 V	220 pF a 2.2 μ F
-SIBATIT 50000	63 V	22 μ F a .22 μ F
*Electrolíticos (!Tienen polaridad!)		
-De aluminio		0.47 μ F a 390000 μ F
-De tántalo	4 V a 125 V	0.1 μ F a 1200 μ F
*De potencia		
-De continua. (Autorregene- rativos de pa- pel impregnado)	450 V a 2800 V 640 V	32 μ F a 4800 μ F 1 μ F a 50 μ F
-De alterna. (Autorregenera- tivos con láminas de plástico impregnado).	330 V, 660 V 550 V 320 V a 3000 V	1.5 μ F a 60 μ F 0.1 μ F a 4.7 μ F 0.1 μ F a 330 μ F

TABLA A4

<u>Tolerancias</u>	<u>Intervalo de temperaturas.</u>	<u>Coefficiente de pérdidas (en 10⁻³)</u>
±10 %, ±20%	-55 a +85 °C	6 a 10 (1 kHz)
±10% a ±20%	-55 a +85 °C	12 a 15 (")
±5% a ±20%	-55/40 a 100°C	5 a 7 (")
±5% a ±20%	-55 a 100 °C	1 a 3 (")
±5% a ±20%	-40 a 70/85 °C	0.25 (")
±1% a ±5%	-55 a +85 °C	0.5 (")
±0.5% a ±5%	-55/-10 a 70 °C	0.1 a 0.3 (")
±1% a ±5%	-55/40 a 85 °C	0.1 a 0.5 (")
±0.5 pF, ±5%, ±10%	-55 a 125 °C	(>50 pF) <1.5 (")
±10%, ±20%	-55/-25 a +85/	25 a 30 (")
+50%/-2%	-40/-25 a +85 °C	50 a 60 (")
±20%, (+30,-10)% (+50,-10)%	-55/-25 a 70/125°C	60 a 150 (100 Hz)
±5% a ±20%	-55 a +85/125 °C	<50 a 80 (120 Hz)
±10%	-40 a +70 °C	6 (50 Hz)
"	-25 a +70 °C	0.3 (")
"	-25 a +85 °C	0.5 (")
±10%, 20%	-25 a +70 °C	0.2 (")
±10%, 20%	-10 a +40 °C	0.2 (")

- Cero para una fuente ideal de tensión.
- Infinito para una fuente ideal de intensidad.

Al final de esta parte se harán algunos ejercicios que ilustren e insistan sobre estos conceptos.

A.5 Sistemas lineales:

En general, un circuito puede tratarse como un sistema sobre el que actúan ciertas variables de entrada $x_1(t)$ obteniéndose como respuesta un conjunto de variables de salida $y_j(t)$. (Figura A24).

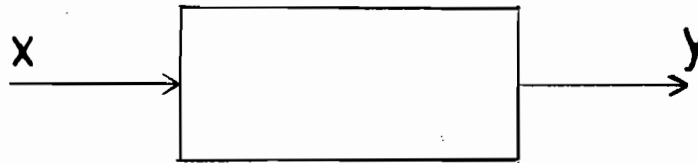


Figura A24

Todos los sistemas que estudiaremos serán causales. En estos sistemas las variables de salida dependerán de las variables de entrada, es decir,

$$y_j = F[x_1] \quad (A.25)$$

donde la forma concreta de la dependencia F será impuesta por el tipo de sistema.

Diremos que un sistema es lineal, estrictamente, si la función F es lineal, esto es, verifica la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \text{si } y_1 = F(x_1) \text{ e } y_2 = F(x_2) \text{ entonces} \\ F(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2) = a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 \end{aligned} \quad (A.26)$$

siendo a_1 y a_2 constantes arbitrarias.

Por tanto, la respuesta ante una combinación lineal de entradas es la misma combinación lineal de las salidas que se obtendrían como respuesta a las entradas individuales.

La forma general de F para que el sistema sea lineal es una relación proporcional, integral, diferencial o una combinación de ambas:

$$F(x) = k_1 \cdot x + k_2 \cdot dx/dt + k_3 \cdot \int x \cdot dt \quad (A.27)$$

En teoría de circuitos entendemos la linealidad en un sentido más amplio: Serán sistemas lineales aquellos que cumplan el principio de superposición.

Principio de superposición: Si sobre un sistema actúa simultáneamente un conjunto de entradas, la salida que se obtiene es la suma de las salidas que se obtendrían si cada una de las entradas actuase por separado siendo nulas las demás. En la figura A25 se representa esquemáticamente el enunciado del principio.

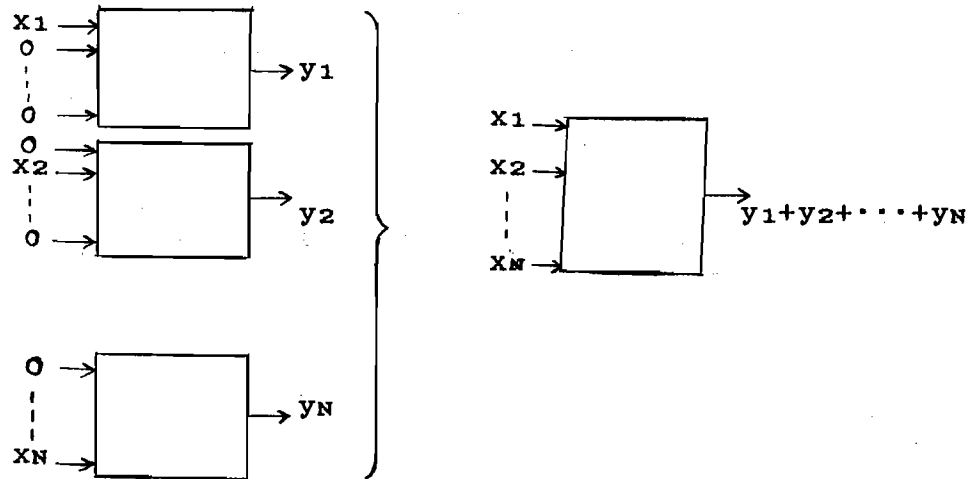


Figura A25

El sistema es, además, lineal para cada una de las entradas.

Debido a la linealidad de las leyes de Kirchhoff, las redes constituidas por elementos lineales son sistemas lineales.

A.6 Circuitos en corriente continua:

Un circuito opera en condiciones de corriente continua o condiciones DC cuando todas las tensiones y corrientes eléctricas en sus elementos son constantes en el tiempo. Si el circuito es causal, es necesario que las entradas o excitaciones externas sean también constantes en el tiempo.

Bajo estas condiciones, la relación entre las corrientes a través de los elementos pasivos y la tensión

entre sus terminales es:

* Resistencia: $V = I \cdot R$

* Condensador: $I = C \cdot dV/dt$ Como $V = \text{cte.} \Rightarrow I = 0$ (A.28)

* Bobina: $V = L \cdot dI/dt$ Como $I = \text{cte.} \Rightarrow V = 0$

Como en un condensador $I=0$, este elemento se sustituye por un circuito abierto, es decir, por un elemento de resistencia infinita, mientras que una bobina, al ser $V=0$, se sustituye por un elemento de resistencia nula, esto es, por un cortocircuito. Estas equivalencias se representan en la figura A26.

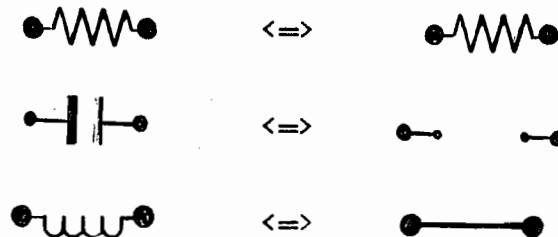


Figura A26

Ejemplo: El circuito de la figura A27-a está en condiciones de corriente continua ya que la única fuente externa que actúa sobre él es una fuente de tensión continua o constante. Para analizarlo sustituimos sus elementos según las equivalencias anteriores obteniendo el circuito A27-b:

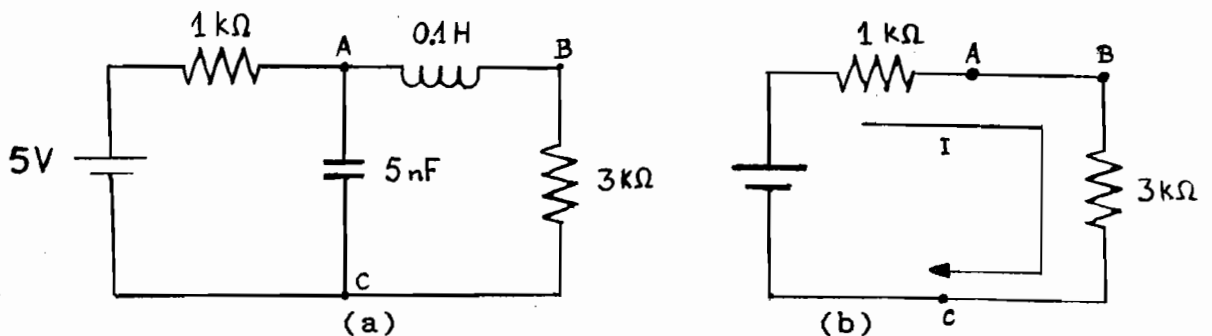


Figura A27

Por las resistencias y la bobina circulará una corriente

$$I = 5 \text{ V} / (3000 \Omega + 1000 \Omega) = 1.25 \text{ mA}$$

mientras que por el condensador circulará una corriente $I=0$. Aunque no circule corriente por el condensador, existirá una diferencia de potencial entre sus armaduras, igual a la que soporta la resistencia de $3\text{ k}\Omega$:

$$V_A - V_C = I \cdot 3\text{ k}\Omega = 3.75\text{ V}$$

y la carga almacenada en cada una de sus armaduras será, en valor absoluto:

$$Q = C \cdot (V_A - V_B) = 5 \cdot 10^{-9}\text{ F} \cdot 3.75\text{ V} = 18.75 \cdot 10^{-9}\text{ C}$$

Ejemplo: Divisor de tensión.

a) Con una fuente de tensión: Un divisor de tensión consiste en dos resistencias en serie conectadas a una fuente de tensión externa, tal como se muestra en la figura A28-a, de forma que se toma como tensión de salida V_o la tensión que cae en una de ellas, en este caso R_2 .

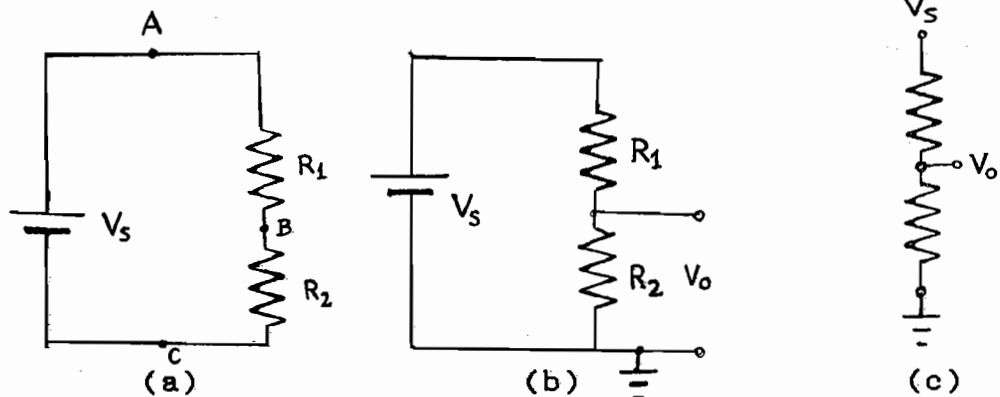


Figura A28

La tensión en tre A y C será la de la fuente V_s y también la que cae en las resistencias R_1 y R_2

$$V_A - V_C = V_s \quad \text{y} \quad V_A - V_C = I \cdot (R_1 + R_2)$$

mientras que la tensión de salida, tomada esta entre B y C, será la que cae en R_2

$$V_B - V_C = I \cdot R_2$$

Por tanto

$$I = (V_A - V_C) / (R_1 + R_2)$$

y sustituyendo

$$V_o = V_B - V_C = (V_A - V_C) \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = V_s \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$$

Generalmente en el análisis de circuitos se suele elegir un punto como origen de potenciales y se le llama "toma a tierra" o "toma a masa" del circuito, ya que en muchos casos este punto se conecta al chasis del equipo electrónico o a la toma de tierra del edificio, en definitiva, a un punto de potencial muy estable. En el análisis del circuito a este punto se le asigna un potencial cero y todos los demás potenciales se expresan referidos a él. Su símbolo es:



En el circuito que estamos estudiando se ha elegido el punto C como toma a tierra, tal como se ve en la figura A28 b, y por tanto $V_C = 0$. En consecuencia:

$$V_s = V_A \quad \text{y} \quad V_o = V_B$$

Muchas veces, al representar un circuito, se omiten todas las fuentes de tensión continua que estén referidas al punto de tierra para simplificar los esquemas. Como éstas, por definición, fijan el valor del potencial en un punto, para saber que hay una fuente de tensión aplicada a dicho punto se especifica el valor de la tensión del mismo. Por ejemplo, el circuito de la figura A28-b se representa por el de la figura A28-c, en el cual se sabe que hay una fuente de tensión aplicada entre el punto superior y tierra por la tensión V_s que aparece explícitamente.

b) Con dos fuentes de tensión: Supongamos ahora que ninguno de los extremos del divisor de tensión está conectado directamente a tierra, sino que ambos están conectados directamente a sendas fuentes de tensión tal como se representa en la figura A29-a. Si omitimos las fuentes de tensión continua obtenemos el circuito de la figura A29-b.

Para analizar el circuito tenemos en cuenta que el punto superior está a un potencial V_1 y el punto inferior

a $-V_2$, ya que el terminal positivo de la fuente está conectado al punto de potencial cero. Por tanto, la corriente que circula por las resistencias es:

$$I = [V_1 - (-V_2)] / (R_1 + R_2) = (V_1 + V_2) / (R_1 + R_2)$$

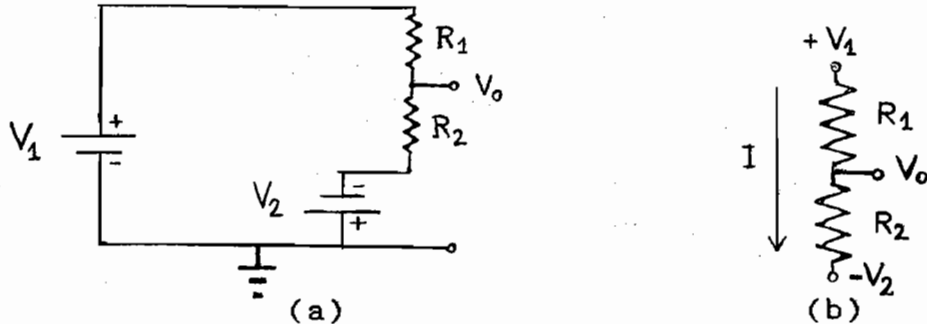


Figura A29

El punto intermedio estará a una tensión V_o . Para calcularla tenemos en cuenta que

$$V_o - (-V_2) = I \cdot R_2 = (V_1 + V_2) / (R_1 + R_2) \cdot R_2$$

$$\Rightarrow V_o = -V_2 + (V_1 + V_2) \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow V_o = \frac{V_1 \cdot R_2 - V_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2}$$

Otra forma de analizar el circuito puede ser utilizando el principio de superposición: La salida V_o del circuito se puede obtener como la suma $V_o = V_{o1} + V_{o2}$, siendo V_{o1} la salida que se obtendría cuando solo actúa V_1 y V_{o2} la salida que se obtendría si solo actuase V_2 . Si solo actúa V_1 , para anular V_2 la sustituimos por un cortocircuito ya que es una fuente de tensión y debe sustituirse por un elemento que tenga una tensión nula entre sus terminales. Como la fuente estaba entre R_2 y tierra, nos quedará R_2 conectada directamente a tierra, tal como se representa en la figura A30-a.

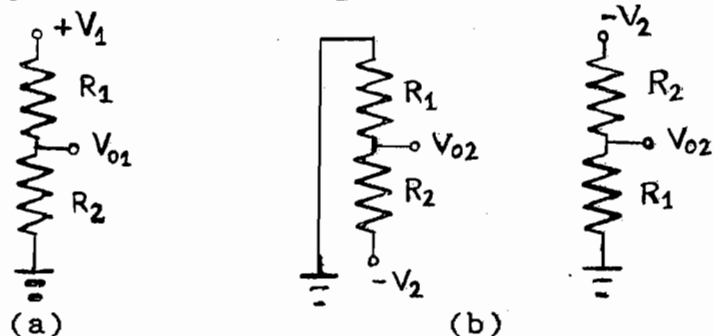


Figura A30

Si solo actúa V_2 , el circuito resultante es el de la figura A30-b. (Los dos circuitos de la figura A30-b son idénticos). Aplicando a estos circuitos el resultado del apartado (a) de este mismo ejemplo obtenemos:

$$V_{o1} = V_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) \quad ; \quad V_{o2} = -V_2 \cdot R_1 / (R_1 + R_2)$$

Sumando:

$$V_o = V_{o1} + V_{o2} = \frac{V_1 \cdot R_2 - V_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2}$$

El resultado obtenido cuando las dos fuentes actúan a la vez coincide con el obtenido anteriormente.

c) Divisor de tensión con resistencia de carga:

Un divisor de tensión puede utilizarse para obtener un valor de tensión cualquiera, inferior al de la fuente de tensión disponible, para ello basta con elegir convenientemente los valores de R_1 y R_2 . Supongamos ahora que se desea dicho valor intermedio para aplicarlo a una resistencia R_3 . Al aplicar la salida a la resistencia R_3 , llamada aquí de carga, el valor de dicha tensión de salida se modificará respecto al valor que había cuando R_3 estaba desconectada. El circuito resultante es el de la figura A31.

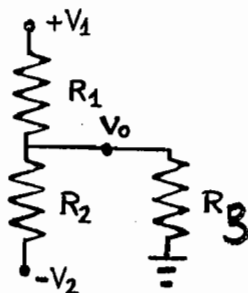


Figura A31

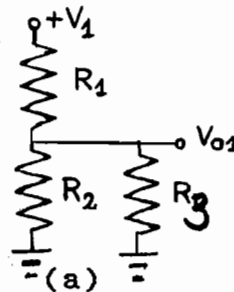
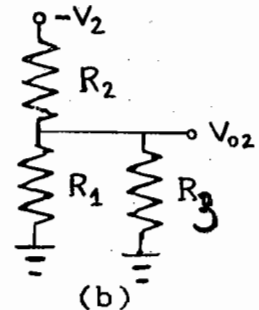


Figura A32



Para obtener la nueva tensión de salida aplicamos el principio de superposición: Cuando sólo actúa V_1 nos quedará el circuito de la figura A32-a, y cuando sólo actúa V_2 el de la figura A32-b. En ambos circuitos la resistencia R_3 queda en paralelo con una de las del divisor. El resultado es:

- Figura A32-a:

$$V_{o1} = \frac{V_1 \cdot (R_2 \parallel R_3)}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} = \frac{V_1 \cdot R_2 \cdot R_3 / (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 \cdot R_3 / (R_2 + R_3)}$$

- Figura A32-b:

$$V_{o2} = \frac{-V_2 \cdot (R_1 \parallel R_3)}{R_2 + (R_1 \parallel R_3)} = \frac{-V_2 \cdot R_1 \cdot R_3 / (R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 \cdot R_3 / (R_1 + R_3)}$$

Cuando las dos fuentes actúan simultáneamente, obtenemos:

$$V_o = V_{o1} + V_{o2} = \frac{V_1 \cdot R_2 \cdot R_3 - V_2 \cdot R_1 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$$

A.7 Análisis de circuitos en condiciones DC. Métodos:

A.7-1 Método de las corrientes en las mallas:

Este método consiste en suponer una corriente para cada malla independiente planteando un sistema de ecuaciones lineales con tantas ecuaciones e incógnitas como mallas independientes. Veamos un ejemplo:

Analizaremos el circuito de la figura A33. Este circuito tiene dos mallas independientes, por las cuales suponemos que circulan las corrientes I_1 e I_2

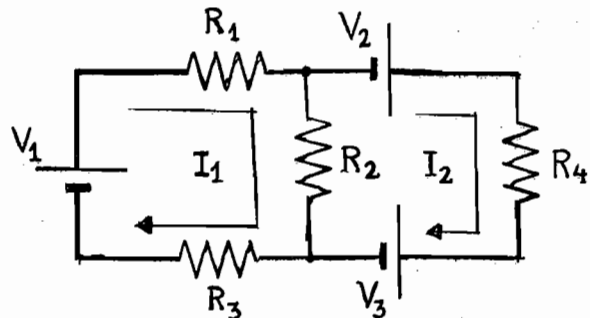


Figura A33

en el sentido de las agujas del reloj tal como se indica en la figura. Por el elemento R_2 circularán tanto I_1 como I_2 en sentidos contrarios, por tanto la corriente real que circula por él es la superposición de ambas: $I_1 - I_2$.

La primera ecuación la obtendremos aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones a la primera malla:

$$V_1 = I_1 \cdot R_1 + (I_1 - I_2) \cdot R_2 + I_1 \cdot R_3$$

La segunda ecuación se obtendrá aplicando la misma ley a la segunda malla:

$$V_2 - V_3 = I_2 \cdot R_4 + (I_2 - I_1) \cdot R_2$$

Reagrupando términos:

$$V_1 = I_1 \cdot (R_1 + R_2 + R_3) - I_2 \cdot R_2$$

$$V_2 - V_3 = -I_1 \cdot R_2 + I_2 \cdot (R_2 + R_4)$$

A la vista del resultado anterior, el planteamiento del sistema se puede sistematizar en la forma siguiente:

* Se plantean tantas ecuaciones como mallas

independientes.

* El término independiente correspondiente a la ecuación de una malla es la suma de las fuentes de tensión de dicha malla, tomando como positivas las que favorezcan a la corriente y negativas las que se opongan a ella.

* Los coeficientes de las incógnitas se obtienen de la forma siguiente:

- El coeficiente de una incógnita en la ecuación de su propia malla es la suma de resistencias de la malla.

- El coeficiente de una incógnita en la ecuación de otra malla es la suma de resistencias de la rama que comparte dicha malla con la de la incógnita, con signo negativo.

Finalmente, resolviendo el sistema se obtendrían las corrientes incógnita.

Supongamos por ejemplo que los elementos del circuito anterior tienen los siguientes valores:

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega \quad R_2 = 2 \text{ k}\Omega \quad R_3 = 3 \text{ k}\Omega \quad R_4 = 4 \text{ k}\Omega$$

$$V_1 = 1 \text{ V} \quad V_2 = 2 \text{ V} \quad V_3 = 3 \text{ V}.$$

Sustituyendo, el sistema de ecuaciones es:

$$6000 \cdot I_1 - 2000 \cdot I_2 = 1$$

$$-2000 \cdot I_1 + 6000 \cdot I_2 = -1$$

con I_1 e I_2 en amperios, o bien

$$6 \cdot I_1 - 2 \cdot I_2 = 1$$

$$-2 \cdot I_1 + 6 \cdot I_2 = -1$$

con I_1 e I_2 en miliamperios.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}} = 0.125 \text{ mA}, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}} = -0.125 \text{ mA}$$

I_2 resulta negativa \Rightarrow El sentido real de I_2 es contrario al representado en la figura.

A.7-2 Método de las tensiones en los nudos:

Consiste en elegir como incógnitas las tensiones en los nudos del circuito y aplicar la ley de Kirchhoff de las corrientes para cada uno de ellos. Para

ilustrar el método analizaremos el circuito tipo puente de la figura A34 imponiendo que la suma de las corrientes que entra en cada nudo sea nula.

La tensión del nudo d se elige cero (toma a tierra), por lo que el número de incógnitas es igual al número de nudos menos uno.

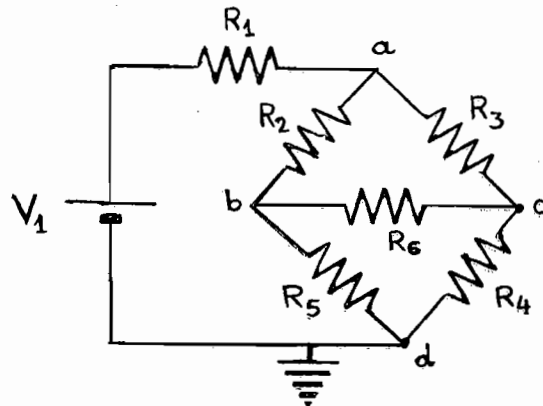


Figura A34

Para el nudo a:

$$(V_1 - V_a)/R_1 + (V_b - V_a)/R_2 + (V_c - V_a)/R_3 = 0$$

Para el nudo b:

$$(V_a - V_b)/R_2 + (V_c - V_b)/R_6 + (0 - V_b)/R_5 = 0$$

Y para el nudo c:

$$(V_a - V_c)/R_3 + (V_b - V_c)/R_6 + (0 - V_c)/R_4 = 0$$

Reagrupando términos:

$$V_1/R_1 = V_a \cdot (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) - V_b \cdot 1/R_2 - V_c \cdot 1/R_3$$

$$0 = -V_a/R_2 + V_b \cdot (1/R_2 + 1/R_5 + 1/R_6) - V_c \cdot 1/R_6$$

$$0 = -V_a/R_3 - V_b \cdot 1/R_6 + V_c \cdot (1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_6)$$

En este caso también podemos sistematizar el planteamiento del problema:

* El número de ecuaciones será igual al número de nudos menos uno.

* El término independiente correspondiente a la ecuación de un nudo es la suma de las fuentes de corriente que inciden en el nudo y de las fuentes de tensión multiplicadas por la conductancia de las ramas que las contienen, si dichas ramas también inciden en el nudo.

* Los coeficientes de las incógnitas se obtienen como sigue:

- El coeficiente de una tensión incógnita en la ecuación de su propio nudo es la suma de las conductancias de las ramas que inciden en dicho nudo.

- El coeficiente de una incógnita en la ecuación de otro nudo es la conductancia de la rama que une

dicho nudo con el de la incógnita, cambiada de signo.

En general conviene usar el método de las corrientes en las mallas cuando las fuentes externas que actúan sobre el circuito son de tensión, y el método de las tensiones en los nudos cuando las fuentes externas son de corriente. Esto no supone ninguna limitación ya que, como veremos en el apartado siguiente, desde el punto de vista del análisis podremos convertir una fuente real de tensión en una de corriente y viceversa.

8

A.8 Teoremas de Thèvenin y Norton:

Veremos seguidamente unos teoremas muy útiles para el análisis de circuitos. No veremos la demostración de los mismos, en cambio, comprobaremos su validez con algún ejemplo.

8-1

A.8-1 Teorema de Thèvenin: Cualquier circuito lineal activo con dos terminales de salida puede sustituirse por una fuente de tensión ideal V_t en serie con una resistencia R_t .

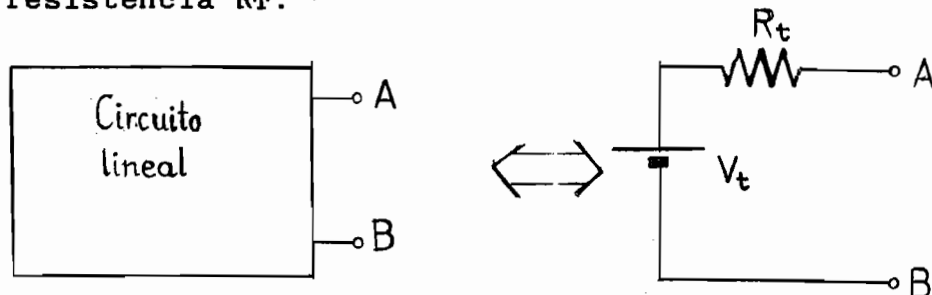
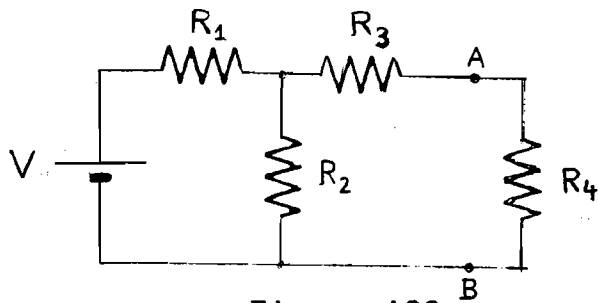


Figura A35

La tensión equivalente de Thèvenin V_t es la tensión medida entre los terminales de salida cuando éstos están en circuito abierto, y la resistencia equivalente R_t es la resistencia vista desde los terminales de salida con todas las fuentes internas anuladas. Como sabemos, para anular una fuente de tensión se cortocircuitan sus terminales, y para anular una fuente de intensidad se dejan sus terminales en circuito abierto.

Ejemplo: Analizaremos el circuito de la figura A36 en primer lugar sin utilizar el teorema de Thèvenin y después utilizándolo, comprobando la coincidencia de los resultados.



$$R_1 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 5 \text{ k}\Omega$$

$$V = 10 \text{ V.}$$

Figura A36

Sin utilizar el teorema de Thévenin podemos obtener la tensión entre A y B por ejemplo mediante el método de las corrientes en las mallas:

$$V = I_1 \cdot (R_1 + R_2) - I_2 \cdot R_2 \quad 10 = I_1 \cdot 6 - I_2 \cdot 5$$

$$0 = -I_1 \cdot R_2 + I_2 \cdot (R_2 + R_3 + R_4) \quad 0 = -I_1 \cdot 5 + I_2 \cdot (6 + R_4)$$

La tensión entre A y B será $V_A - V_B = I_2 \cdot R_4$

con

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 + R_4 \end{vmatrix}} = \frac{50}{6 \cdot (6 + R_4) - 25} = \frac{50}{11 + 6 \cdot R_4}$$

$$V_A - V_B = 50 \cdot R_4 / (11 + 6 \cdot R_4)$$

que dependerá, por supuesto, del valor de R_4 .

Veamos el resultado que se obtiene aplicando el teorema de Thévenin:

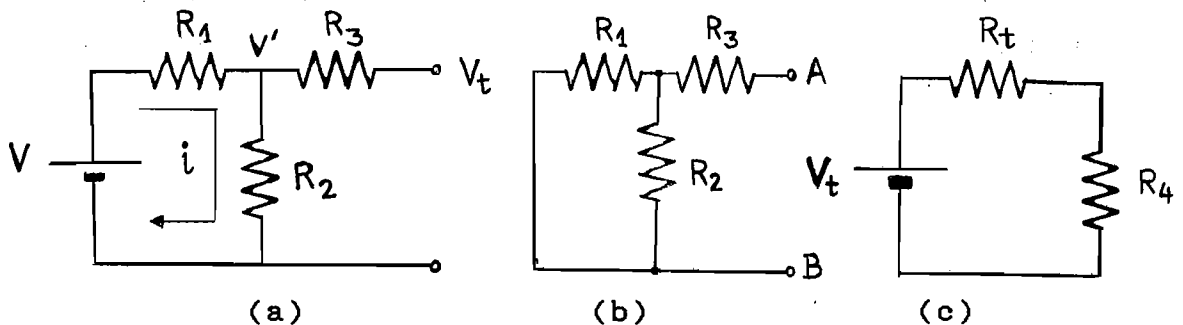


Figura A37

Para obtener la tensión equivalente de Thévenin los terminales de salida han de estar en circuito abierto, tal como se muestra en la figura A37-a. En este caso no habrá corriente hacia la salida, es decir, la corriente que circula por R_3 es nula y por tanto la caída de tensión en ella también será cero, por tanto $V' = V_A$. Como no circula corriente por R_3 , la tensión V' será

$$V' = V \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 50/6 \text{ V.}$$

Por tanto $V_T = V_A - V_B = V' = 50/6 \text{ V.}$

Para obtener la resistencia equivalente hemos de

anular la fuente independiente de tensión, con lo que el circuito resultante es el de la figura A37-b. La resistencia vista desde A y B será R_3 en serie con la combinación en paralelo de R_1 y R_2 :

$$R_T = R_3 + R_1 \parallel R_2 = R_3 + R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 11/6 \text{ k}\Omega$$

Sustituyendo la parte de circuito vista desde A y B hacia la izquierda por su equivalente de Thèvenin obtenemos el circuito de la figura A37-c. Con este circuito:

$$V_A - V_B = \frac{V_T R_4}{R_T + R_4} = \frac{50}{6} \frac{R_4}{11/6 + R_4} = \frac{50 \cdot R_4}{11 + 6 \cdot R_4}$$

El resultado es el mismo independientemente del valor de R_4 , es decir, el circuito equivalente de Thèvenin actúa igual que el circuito original sobre cualquier circuito al que se conecte.

A.3-2 Equivalencia entre fuentes de tensión y corriente:

Una fuente de tensión con una resistencia en serie es equivalente a una fuente de intensidad con una resistencia en paralelo.

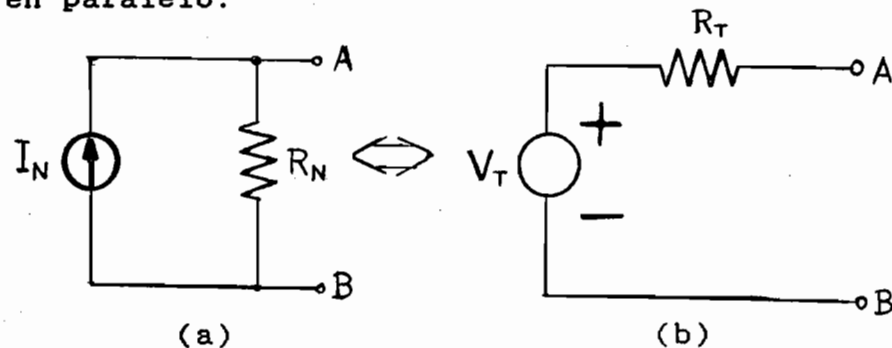


Figura A38

En efecto, este resultado se puede obtener sin más que aplicar el Teorema de Thèvenin al circuito de la figura A38-a. Para obtener V_T calculamos la tensión entre A y B. En circuito abierto, toda la corriente I_N de la fuente circulará por R_N , por tanto

$$V_T = I_N \cdot R_N \tag{A.29}$$

Para calcular R_T anulamos la fuente independiente de intensidad, por lo que la resistencia vista desde A y B es precisamente R_N :

$$R_T = R_N \quad (\text{A.30})$$

Una consecuencia de la equivalencia entre fuentes de tensión y fuentes de corriente es el teorema de Norton.

A.3-3 Teorema de Norton:

Cualquier circuito lineal activo con dos terminales de salida puede sustituirse por una fuente de intensidad I_N en paralelo con una resistencia R_N .

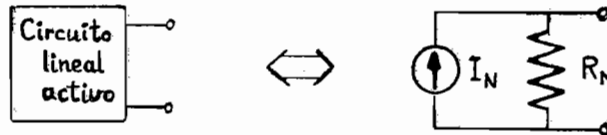


Figura A39

La corriente de la fuente equivalente de Norton es la corriente que circularía entre A y B en cortocircuito y la resistencia equivalente es la resistencia vista desde los terminales A y B cuando se anulan todas las fuentes independientes.

Como ejemplo de aplicación, vamos a resolver el circuito de la figura A36 utilizando este teorema.

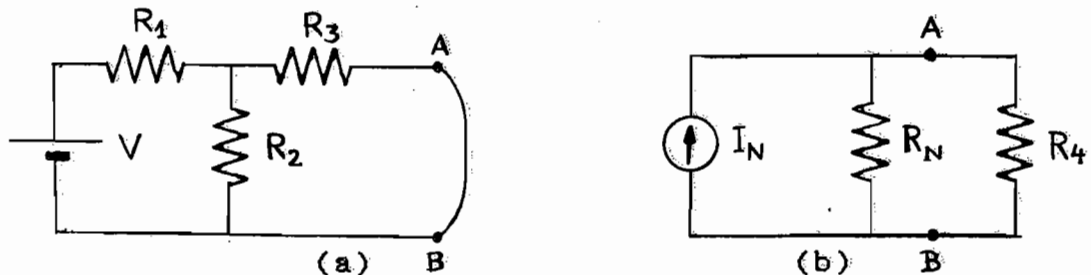


Figura A40

Para calcular la fuente equivalente de Norton los terminales de salida han de estar en cortocircuito, tal como se muestra en la figura A40-a. La corriente que circula entre ellos en estas condiciones es:

$$I_N = V'/R_3 \quad \text{con} \quad V' = V \cdot (R_2 \parallel R_3) / [R_1 + (R_2 \parallel R_3)] = 50/11 \text{ V}$$

por tanto, $I_N = 50/11 \text{ mA}$.

La resistencia equivalente se obtiene igual que con el Teorema de Thèvenin, por tanto hemos de obtener el mismo resultado: $R_N = 11/6 \text{ k}\Omega$

El circuito resultante es el de la figura A40-b. La tensión entre los terminales de salida será:

$$V_A - V_B = I_N \cdot (R_N \parallel R_4) = 50 \cdot R_4 / (11 + 6 \cdot R_4)$$

9 A.7 Resolución de circuitos con elementos no lineales:

Hasta ahora hemos utilizado las leyes de Kirchhoff y la relación $V=I \cdot R$ en la resolución de circuitos. Como los elementos eran lineales y las leyes de Kirchhoff también lo son, el resultado era un sistema de ecuaciones lineales. Si un elemento no es lineal la relación $I=f(V)$ ya no será de proporcionalidad, y si además tiene más de dos terminales necesitaremos más de una relación entre tensiones y corrientes para describirlo.

Para analizar circuitos en los que aparezcan elementos no lineales se utilizan los siguientes métodos:

a) Analíticos o numéricos: Se plantean las ecuaciones del circuito incluyendo las relaciones $I=f(V)$ de los elementos no lineales. El resultado es un sistema de ecuaciones no lineales que generalmente ha de resolverse por métodos numéricos.

b) Gráficos: Si se dispone de curvas que representen la relación $I=f(V)$ del elemento se representan sobre ellas las rectas que se obtienen al aplicar las leyes de Kirchhoff al circuito y se obtiene la solución gráficamente, es decir, a partir de la intersección de ambas curvas.

c) Modelado lineal: Se sustituye el elemento no lineal por un modelo que consiste en uno o varios elementos lineales y que tiene un comportamiento aproximado al del elemento no lineal.

Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 1: Supongamos que el elemento E de la figura A41 es un elemento no lineal de dos terminales con una relación $I = k \cdot V^2$ con $k = 0.1 \text{ A} \cdot \text{V}^{-2}$

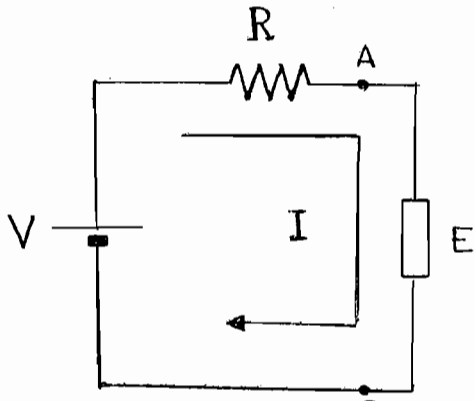


Figura A41

Sea $V = 10 \text{ V}$ y $R = 100 \Omega$.

Queremos calcular la tensión entre A y B.

Según la ley de Kirchhoff de las tensiones, y ya que R es un elemento lineal:

$$V = I \cdot R + V_{AB}$$

$$I = k \cdot V_{AB}^2$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones, la segunda de ellas no lineal. Sustituyendo I en la primera:

$$V = k \cdot V_{AB}^2 \cdot R + V_{AB}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$10 \cdot V_{AB}^2 + V_{AB} - 10 = 0$$

cuya solución es $V = 0.95 \text{ V}$.

El ejemplo anterior se podría resolver gráficamente en la forma siguiente:

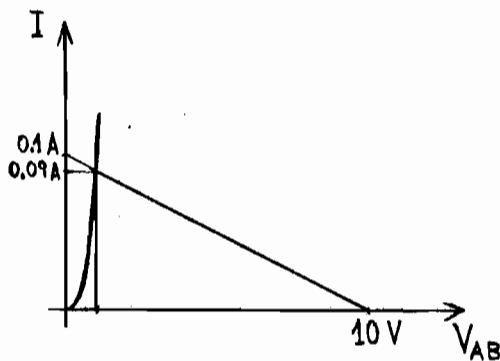


Figura A42

La solución común a las dos ecuaciones:

$$V = I \cdot R + V_{AB}$$

$$I = k \cdot V_{AB}^2$$

será el punto de intersección de las dos curvas representadas por ambas ecuaciones:

- Una recta para la ecuación de la ley de Kirchhoff incluyendo los elementos lineales:

$$I = -1/R \cdot V_{AB} + V/R$$

A esta recta se le suele llamar recta de carga y su pendiente es $-1/R$ (Véase la figura A42).

- La curva que representa la ecuación del elemento no lineal.

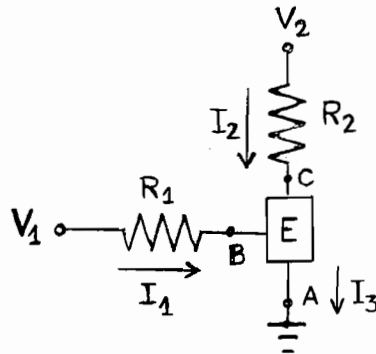
El punto de intersección ($V=0.95 \text{ V}$, $I=0.09 \text{ A}$) es la solución del sistema.

Ejemplo 2: En la figura A43 se representa un elemento de tres terminales, no lineal. Para analizar el circuito es necesario disponer de dos relaciones entre las tensiones y corrientes, ya que de las seis magnitudes

desconocidas : $I_1, I_2, I_3, V_C-V_A, V_C-V_B, V_B-V_A$, dos de ellas se pueden relacionar con las otras sin más que aplicar las leyes de Kirchhoff:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

$$V_C-V_A = V_C-V_B + V_B-V_A$$



$$V_1 = 6 \text{ V. } V_2 = 12 \text{ V.}$$

$$R_1 = 100 \ \Omega$$

$$R_2 = 500 \ \Omega$$

Figura A43

Las dos relaciones necesitadas podrían ser:

$$I_1 = k_1 \cdot V_{BA}^2 \quad \text{con} \quad k_1 = 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{V}^{-2}$$

$$I_2 = k_2 \cdot V_{CA}^2 \quad \text{con} \quad k_2 = 10^{-3} \text{ A} \cdot \text{V}^{-2}$$

Además necesitamos dos ecuaciones adicionales para poder determinar las cuatro incógnitas. Estas ecuaciones nos las proporciona la aplicación de las leyes de Kirchhoff a las mallas de entrada y salida del circuito:

$$V_1 = I_1 \cdot R_1 + V_{BA}$$

$$V_2 = I_2 \cdot R_2 + V_{CA}$$

Con las cuatro ecuaciones podemos obtener I_1, I_2, V_{BA}, V_{CA} . El resultado es:

$$I_1 = 40 \text{ mA} \quad V_{BA} = 2 \text{ V.} \quad I_2 = 16 \text{ mA} \quad V_{CA} = 4 \text{ V.}$$

10 A.6 Régimen transitorio:

Aunque el análisis de los circuitos cuando las señales eléctricas son variables en el tiempo se hará en la parte siguiente, incluimos en esta parte los casos simples de la carga y descarga de condensadores por considerarlos de utilidad para el estudio de las familias lógicas.

Cuando la tensión continua de las fuentes independientes cambia de nivel, las tensiones y corrientes a través de los elementos del circuito evolucionarán hacia los nuevos valores que les correspondan. Esta evolución

se producirá durante un cierto tiempo que depende de los valores concretos de los parámetros del circuito. Veamos unos ejemplos:

a) Descarga de un condensador:

Supongamos que, en el circuito de la figura A44, la red RC está conectada a la fuente de tensión. Como por el condensador no puede circular corriente, $v_c = V$. Supongamos que en $t=0$ el interruptor cambia de posición, con lo cual la tensión externa que alimenta el circuito es cero. Aunque dicha tensión cambie bruscamente, la tensión a través del condensador, como ya sabemos, no puede hacerlo. En consecuencia:

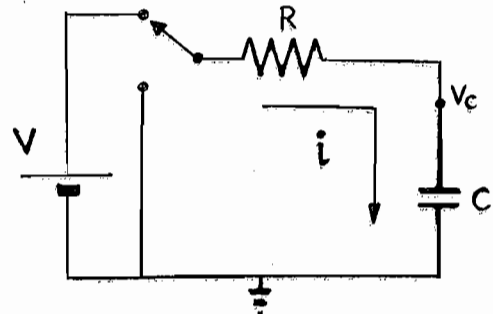


Figura A44

$$v_c(0) = V$$

A partir de ese instante, para $t > 0$:

$$0 = i \cdot R + v_c$$

$$i = C \cdot dv_c/dt$$

Sustituyendo: $C \cdot R \cdot dv_c/dt + v_c = 0$

El producto RC tiene dimensiones de tiempo. Lo llamaremos constante de tiempo del circuito: $\tau \equiv R \cdot C$

$$\tau \cdot dv_c/dt + v_c = 0$$

Vamos a resolver la ecuación anterior:

$$\tau \cdot dv_c/dt = -v_c \Rightarrow dv_c/v_c = -dt/\tau$$

Integrando entre $t=0$ y cualquier t :

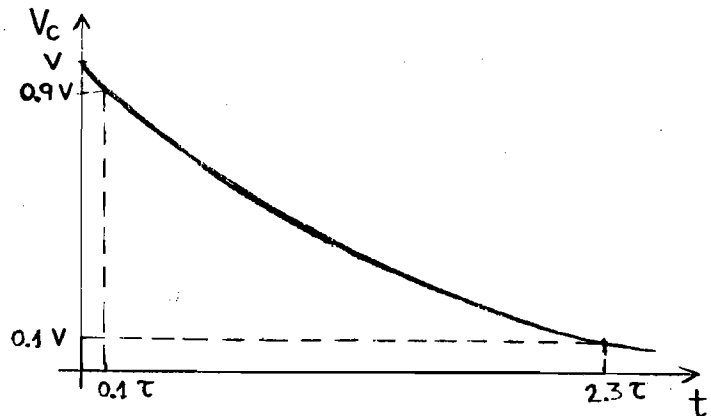
$$\int_{v_c(0)}^{v_c(t)} \frac{dv_c}{v_c} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{v_c(t)}{v_c(0)} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow v_c(t) = v_c(0) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$v_c(t) = v_c(0) \cdot e^{-t/\tau}$$

La tensión en el condensador evoluciona hacia su valor cero exponencialmente. El tiempo característico de

la descarga es la constante de tiempo τ e indica la velocidad con la que se produce la descarga del condensador.



Se define

el tiempo de

Figura A45

bajada como el tiempo que transcurre desde que la tensión pasa del 90% del valor máximo al 10% del valor máximo tal como se representa en la figura A45. El primer punto se alcanza cuando

$$\exp(-t/\tau) = 0.9 \quad \Rightarrow \quad t = 0.1 \cdot \tau$$

y el segundo cuando

$$\exp(-t/\tau) = 0.1 \quad \Rightarrow \quad t = 2.3 \cdot \tau$$

El tiempo de bajada es:

$$t_f = 2.3 \cdot \tau - 0.1 \cdot \tau = 2.2 \cdot \tau$$

b) Carga de un condensador:

Supongamos ahora que inicialmente el interruptor de la figura A44 está en la posición que conecta la red RC con el punto de tierra, es decir, supongamos que el condensador está inicialmente descargado: Si $t < 0 \Rightarrow v_c = 0$

En el instante $t=0$ el interruptor cambia de posición conectando la fuente V a la red, con lo cual el condensador tenderá a cargarse hasta que $v_c = V$.

Aunque la tensión externa cambie bruscamente, la tensión a través del condensador no puede hacerlo y por tanto:

$$v_c(0) = 0$$

A partir de ese instante, para $t > 0$:

$$V = i \cdot R + v_c$$

$$i = C \cdot dv_c/dt$$

Sustituyendo: $C \cdot R \cdot dv_c/dt + v_c = V$

Haciendo de nuevo la definición $\tau \equiv R \cdot C$

$$\tau \cdot dv_c/dt + v_c = V$$

Resolvemos la ecuación de forma análoga al caso anterior:

$$\tau \cdot dvc/dt = V - vc \Rightarrow dvc/(vc-V) = - dt/\tau$$

Integrando entre $t=0$ y cualquier t :

$$\int_{vc(0)}^{vc(t)} \frac{dvc}{(vc-V)} = - \frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{vc(t)-V}{vc(0)-V} = - \frac{t}{\tau} \Rightarrow vc(t)-V = -V \cdot \exp\left(- \frac{t}{\tau}\right)$$

$$vc(t) = V \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

En este caso, la tensión en el condensador evoluciona hacia su valor final V también exponencialmente. El tiempo característico de la carga es de nuevo la

constante de tiempo τ e indica la velocidad con la que se produce la carga del condensador.

Se define

el tiempo de

subida como el tiempo que transcurre desde que la tensión pasa del 10% del valor máximo al 90% del valor máximo tal como se representa en la figura A46. El primer punto se alcanza cuando

$$1 - \exp(-t/\tau) = 0.1 \Rightarrow t = 0.1 \cdot \tau$$

y el segundo cuando

$$1 - \exp(-t/\tau) = 0.9 \Rightarrow t = 2.3 \cdot \tau$$

El tiempo de subida es: $t_r = 2.3 \cdot \tau - 0.1 \cdot \tau = 2.2 \cdot \tau$

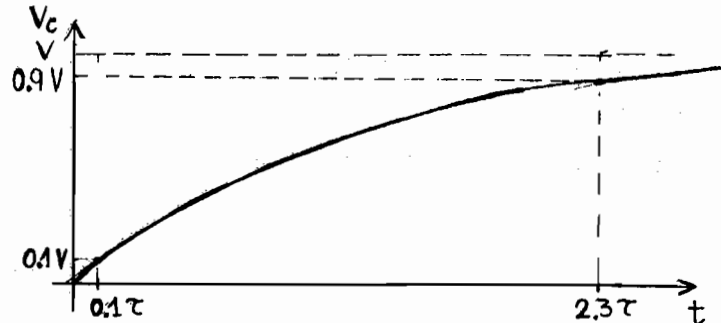


Figura A46

Problemas:

1.- Halle la resistencia equivalente entre los puntos A y B del circuito de la figura A47.

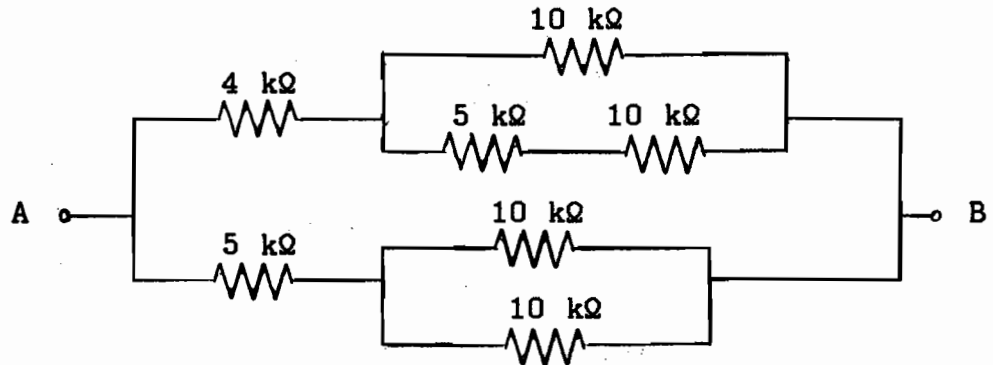


Figura A47

Solución: 5 kΩ

2.- Calcule la diferencia de potencial entre los puntos A y B del circuito de la figura A48 y la corriente que circula por cada resistencia.

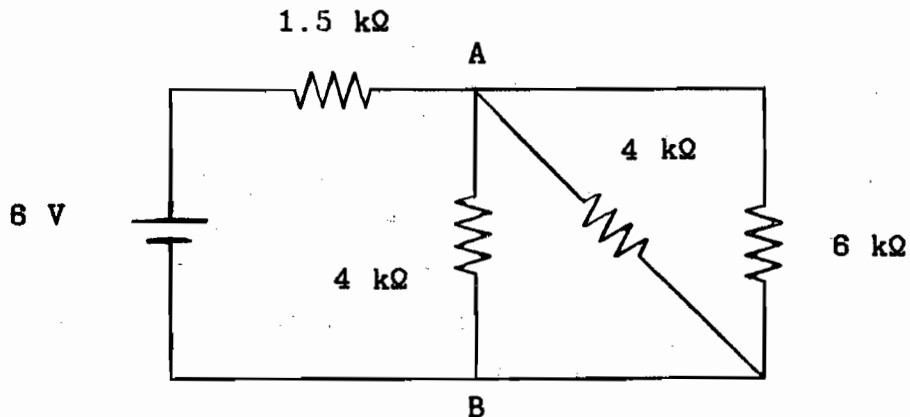


Figura A48

Solución: $V_{AB} = 3 \text{ V}$. Corrientes: 2 mA, 0.75 mA, 0.75 mA, 0.5 mA.

3.- Calcule la condición que deben cumplir las resistencias del circuito de la figura A50 para que la corriente que pase por R5 sea nula.

Solución : $R_2 \cdot R_6 = R_3 \cdot R_4$

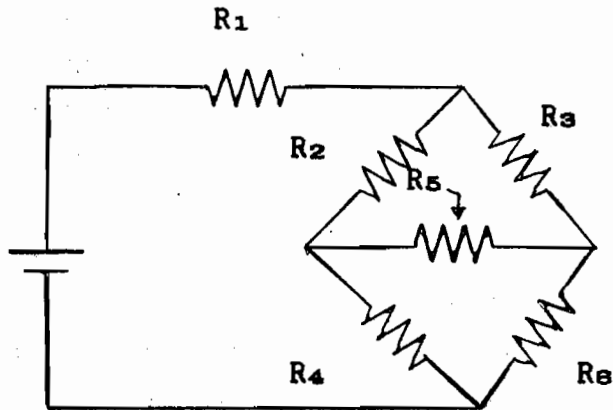


Figura A49

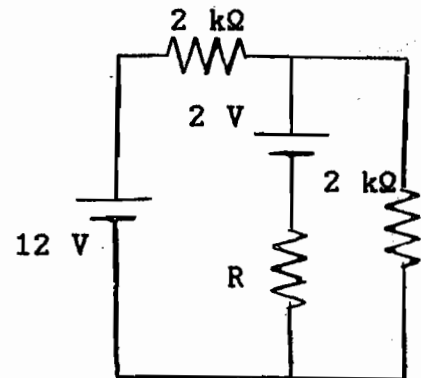


Figura A50

4.- Calcule la corriente que circula a través de la resistencia R del circuito de la figura A50 si $R = 2\text{k}\Omega$.

Solución: $4/3\text{ mA}$

5.- Calcule la corriente que circula a través de la resistencia R_1 en el circuito de la figura A51.

Solución: -2 mA

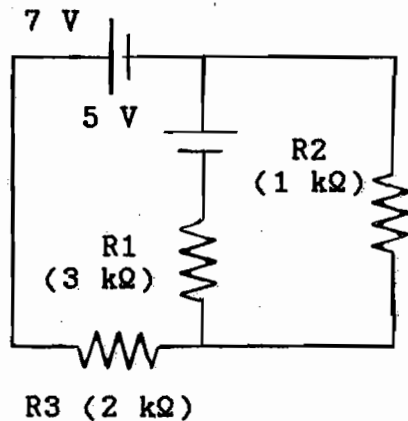


Figura A51

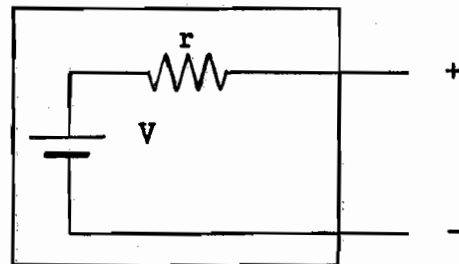


Figura A52

6.- El circuito de la figura A52 representa una fuente real de tensión de valor $V = 15\text{ V}$. en circuito abierto y resistencia interna $r = 10\ \Omega$. Calcule la resistencia mínima que se puede conectar a sus terminales de salida para que la tensión entre ellos no difiera en más de un 1% de su valor en circuito abierto. ¿Cual es la intensidad máxima que proporciona la fuente en estas condiciones? (Solución: $R_{\min} = 990\ \Omega$, $I_{\max} = 15\text{ mA}$)

7.- Se quiere transformar la fuente de tensión del problema anterior en una fuente de intensidad conectándole en serie una resistencia R_s , tal como muestra la figura A53, de forma que proporcione 1 mA en cortocircuito. Calcule:

- R_s
- El circuito equivalente de Norton.
- La resistencia máxima que puede colocarse entre los terminales de salida para que la intensidad a través de ellos no difiera en más de un 1% de su valor en cortocircuito.

Solución: $R_s=14990 \Omega$, $I_N=1 \text{ mA}$ y $R_N=15 \text{ k}\Omega$, $R_{\text{max}}=151.5 \Omega$

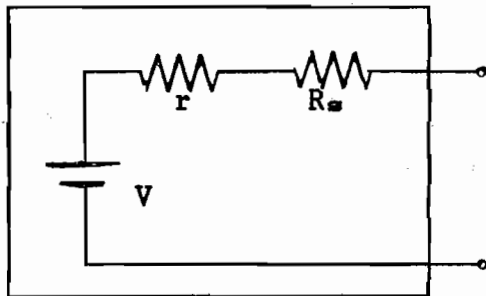


Figura A53

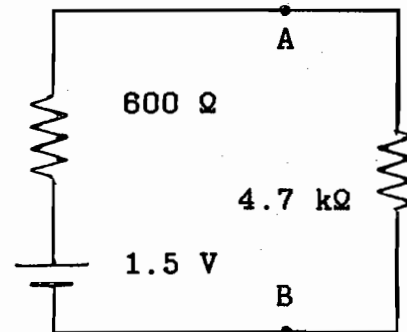


Figura A54

8.- En el circuito de la figura A54 se representa una fuente de tensión con resistencia interna DE 600Ω que actúa sobre una resistencia de $4.7 \text{ k}\Omega$.

a) Se utiliza un amperímetro con resistencia interna de 10Ω para medir la corriente que circula por la malla. ¿Cual será la lectura del amperímetro y en qué porcentaje variará la corriente por la presencia del amperímetro?.

b) Se retira el amperímetro y se coloca un voltímetro con $100 \text{ k}\Omega$ de resistencia de entrada para medir la tensión entre A y B. ¿Cual será la lectura del voltímetro y en qué porcentaje variará la diferencia de potencial entre A y B por la presencia del voltímetro?.

Solución : a) 0.2825 mA , 1.77% . b) 1.323 V , 0.53%

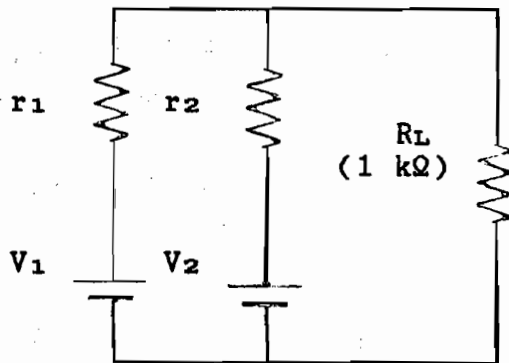


Figura A55

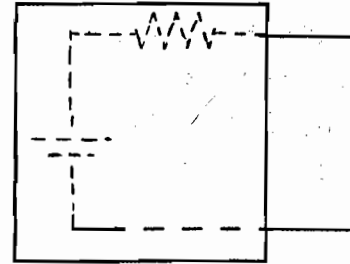


Figura A56

9.- Se conectan dos fuentes de tensión con resistencias internas $r_1 = r_2 = 1\Omega$, y valores nominales $V_1 = 1\text{ V}$ y $V_2 = 2\text{ V}$. respectivamente, tal como muestra la figura A55.

a) Obtenga la corriente que circula por cada fuente y por R_L .

b) Suponiendo que las fuentes del circuito son baterías con carga suficiente para proporcionar 1 mA durante 100 h , calcule el tiempo que tardaría en descargarse V_2 manteniendo constante la corriente anterior.

Solución: a) -0.499 A , 0.501 A , 1.499 mA . b) 12 min .

10.- Se conecta a los terminales de salida de un circuito lineal una resistencia de $100\text{ k}\Omega$ obteniendo una tensión de salida de 14 V . Si se conecta una resistencia de $1\text{ k}\Omega$ la salida es de 10 V . Calcule el circuito equivalente de Thévenin representado a trazos en la figura A56.

Solución: $V_T = 14.06\text{ V}$, $R_T = 406\ \Omega$.

11.- La resistencia longitudinal de una cinta de Aluminio de 3 mm de ancha y 0.5 mm de grosor es $0.1\ \Omega$ a $20\text{ }^\circ\text{C}$. Calcule la longitud de la cinta y la resistencia a $60\text{ }^\circ\text{C}$ si la resistividad del Aluminio es $2.826 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{cm}$ y su coeficiente de temperatura $0.0039\ \Omega/^\circ\text{C}$.

Solución: $L = 5.31\text{ m}$. y $R(60^\circ\text{C}) = 0.1156\ \Omega$

12.- Calcule el espesor del aislante de un condensador plano con dieléctrico cerámico (titanato de bario--estroncio) con constante dieléctrica relativa $\epsilon_r=7500$, para que su capacidad sea $C = 10 \text{ nF}$ si las armaduras son circulares de 1 cm de diámetro.

(Constante dieléctrica del vacío = $8.854 \cdot 10^{-14} \text{ F/cm}$)

Solución: 0.522 mm

13.- Calcule la corriente eléctrica que circula por R_5 en el circuito de la figura A57.

Solución : $I=0.883 \text{ mA}$

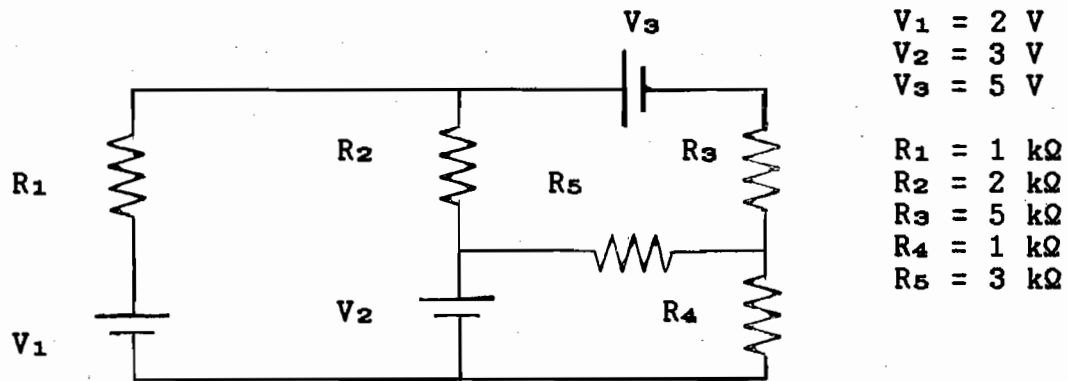


Figura A57

14.- Calcule el valor de la tensión V_2 en el circuito de la figura A58.

Solución: 0.476 V

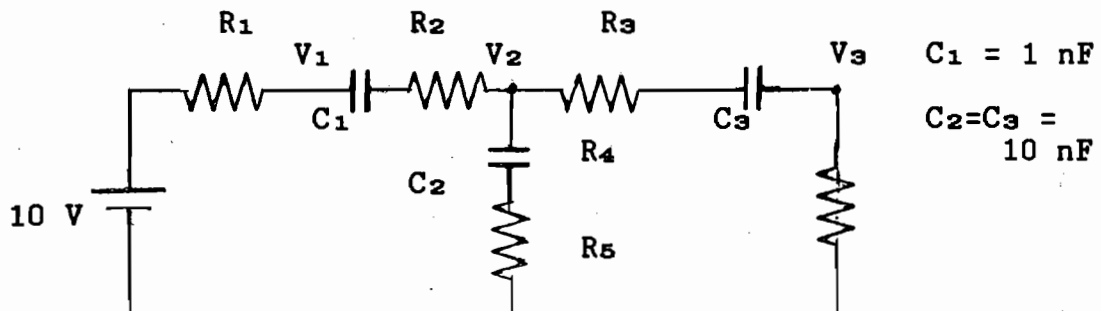
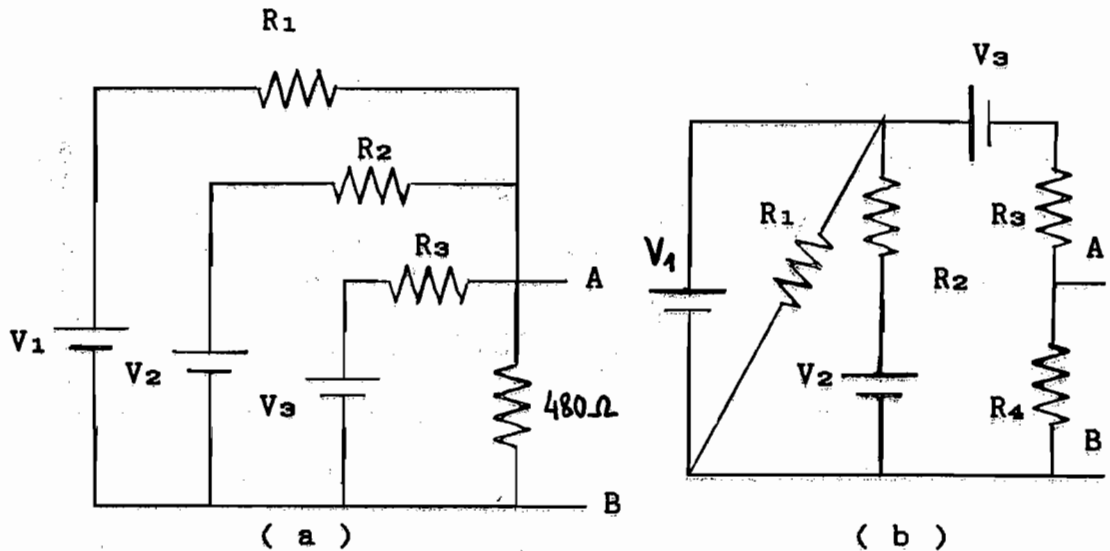


Figura A58

15.- Obtenga los circuitos equivalentes de Thèvenin y Norton de los circuitos de la figura A59.

Solución : a) $V_T = 0.766 \text{ V}$, $R_T = 255 \Omega$, $I_N = 3 \text{ mA}$

b) $V_T = -1.143 \text{ V}$, $R_T = 1714 \Omega$, $I_N = -0.667 \text{ mA}$.



$V_1=1\text{ V}$, $V_2=2\text{ V}$, $V_3=3\text{ V}$, $R_1=1\text{ k}\Omega$, $R_2=2\text{ k}\Omega$, $R_3=3\text{ k}\Omega$, $R_4=4\text{ k}\Omega$

Figura A59

16.- Calcule la modificación de V_o si la resistencia R_2 del circuito de la figura A60 cambia de $100\ \Omega$ a $10\text{ k}\Omega$

a) Con $R_1 = 1\text{ k}\Omega$

b) Con $R_1 = 0$

Solución: a) 2.032 V , b) No cambia

17.- Calcule la modificación de V_o si la resistencia R_2 del circuito de la figura A61 cambia de $100\ \Omega$ a $10\text{ k}\Omega$

a) Con $R_1 = 10\text{ k}\Omega$

b) Con $R_1 = \infty$

Solución: a) 3.71 V , b) No cambia

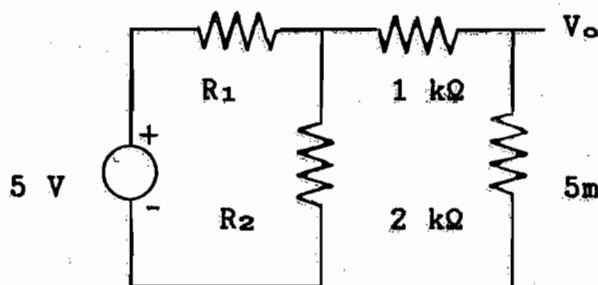


Figura A60

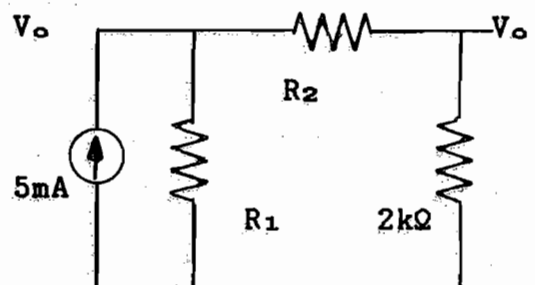


Figura A61

18.- Calcule el valor de V' en el circuito de la figura A62. (Solución: ~~0.000 V~~)

$V' = 1\text{ V}$

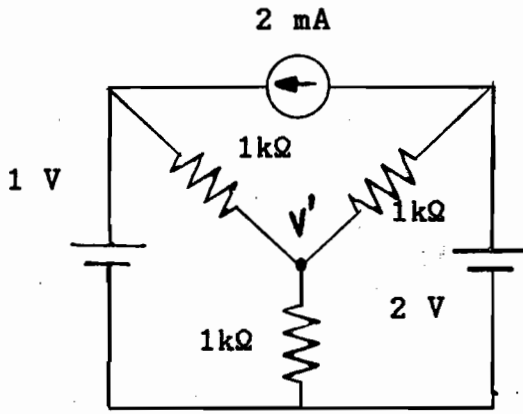


Figura A62

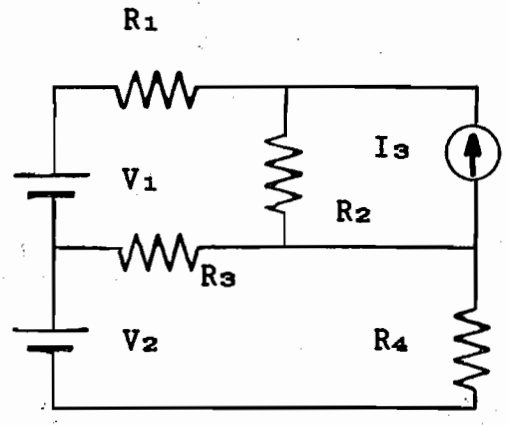


Figura A63

19.- En el circuito de la figura A63, calcule el valor de la corriente que circula por R_3 pasando todas las fuentes a fuentes de tensión y resolviendo por el método de las corrientes en las mallas.

$R_1=R_2=1 \text{ k}\Omega$, $R_3=R_4=2 \text{ k}\Omega$, $V_1=1 \text{ V}$, $V_2=3 \text{ V}$, $I_3=1 \text{ mA}$

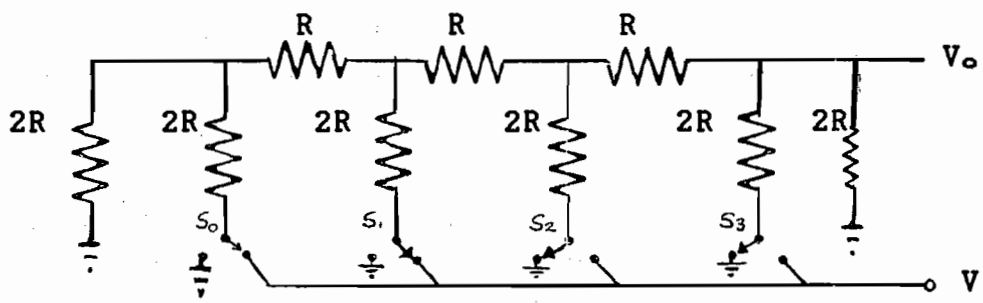
Solución: 0.5 mA

20.- Resuelva el problema anterior pasando todas las fuentes a fuentes de tensión y resolviendo por el método de las tensiones en los nudos.

21.- En el circuito de la figura A64 las entradas pueden estar conectadas a $V=5 \text{ V}$. o a 0 V . según la posición de los conmutadores. Si éstos están controlados por las variables lógicas S_0, S_1, S_2, S_3 de manera que cuando $S=0$ la entrada está a la referencia y cuando $S=1$ está a 5 V ,

- a) Obtenga el circuito equivalente de Thèvenin excluyendo la resistencia $2R$ de salida.
- b) Calcule la máxima tensión de salida.

Solución: b) 3.125 V.



22.- En el circuito de la figura A65 aparece una fuente de corriente dependiente de corriente. Obtenga el valor de la tensión V_o .

Solución: $V_o = 5.92 \text{ V}$

23.- En el circuito de la figura A66 existe una fuente de tensión dependiente de tensión. Sea $R_1=1 \text{ k}\Omega$ y $R_f=10 \text{ k}\Omega$

a) Si $A_v = 200000$, $R_{in}=1 \text{ M}\Omega$ y $R_o=10 \Omega$, obtenga la relación entre las tensiones de entrada y salida.

b) Repita el cálculo en el límite $R_o \rightarrow 0$

c) Calcule de nuevo la relación entre las tensiones de entrada y salida si, además $R_{in} \rightarrow \infty$ y $A_v \rightarrow \infty$.

Solución: a) -10.001 . b) -10.00055 , c) -10

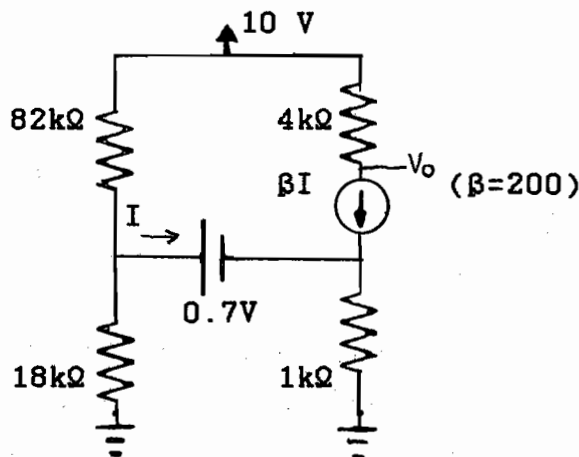


Figura A65

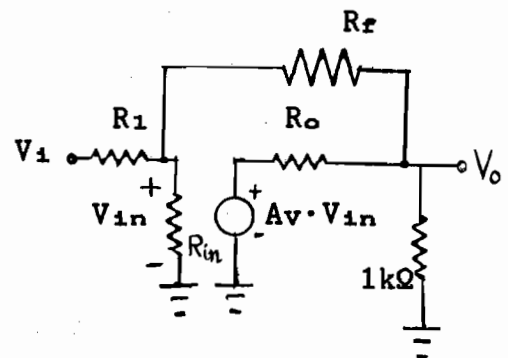


Figura A66

24.- En el circuito de la figura A67 aparece un elemento no lineal cuya relación $I(V)$ se representa en la figura A67-b. Sustituimos el elemento por un modelo lineal a tramos tal como se muestra en la misma figura, aproximando la curva $I(V)$ por tramos rectos. Obtenga la tensión V en los extremos del elemento en función de V_s (para cada valor de V_s) suponiendo que la tensión externa siempre es positiva.

Solución: Si $V_s \leq 2\text{V}$, $V=V_s/2$. Si $V_s > 2\text{V}$, $V = V_s - 1$

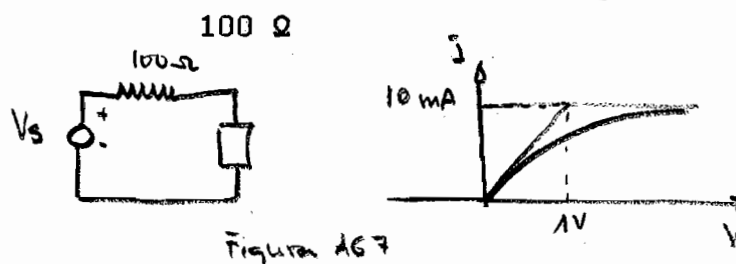


Figura A67

25.- Sobre el circuito de la figura A68 actúan dos fuentes externas, una de ellas constante y la otra que presenta un escalón en $t=0$ tal como se muestra en la misma figura. Obtenga la tensión en los extremos del condensador:

- Para $t < 0$.
- Cuando $t \rightarrow \infty$
- Justo en el instante inicial después de la aplicación del escalón de tensión. Obtenga también I_C
- Obtenga la constante de tiempo del circuito. (Tomando como magnitud de salida la tensión a través del condensador.)

Solución: a) 0.25 V, b) 1.25 V, c) 0.25 V, 2 mA, d) 5 μ s

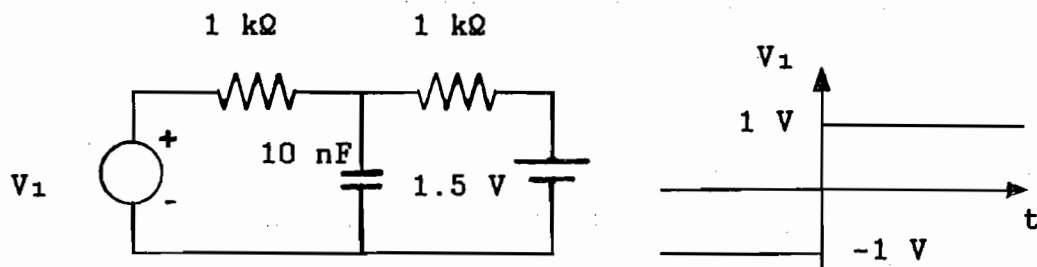


Figura A68

26.- En la fuente de tensión de la figura A69 se produce un escalón en $t=0$ que hace que la tensión de entrada al circuito pase de 2 V a 4 V tal como se representa en la misma figura. Calcule:

- Los valores estacionarios de v_o antes y después del salto de tensión.
- El tiempo de transición entre ellos (tiempo de subida).

Solución: a) 1.5 V, 3 V. b) 55 μ s.

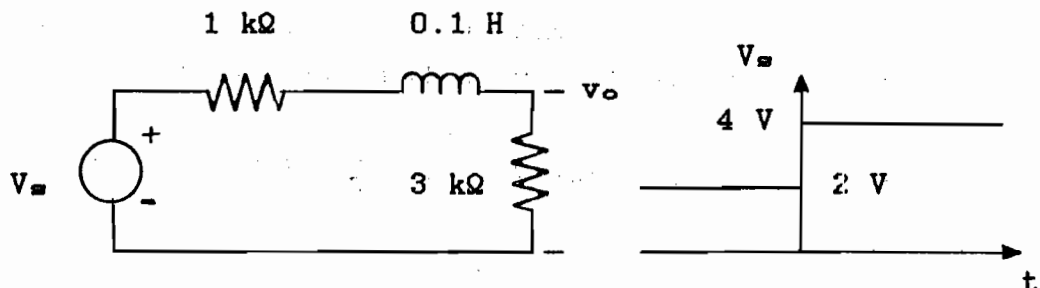


Figura A69

PARTE B : ANALISIS GENERAL DE CIRCUITOS CON SEÑALES VARIABLES EN EL TIEMPO.

B.1 Introducción:

En esta parte veremos algunos conceptos y herramientas fundamentales para el análisis de circuitos cuando las señales o excitaciones externas son variables en el tiempo. En primer lugar desarrollaremos un formalismo par el estudio de circuitos en condiciones de corriente alterna (condiciones AC) suponiendo que las fuentes externas son armónicas. Dedicaremos gran atención a este tipo de señales, no porque sean muy frecuentes en la práctica (recordemos que esta teoría de circuitos se ha escrito para un curso de Electrónica) sino porque cualquier señal se puede descomponer como superposición de señales armónicas. Esto se verá con detalle en la sección B.4.

Más adelante, desarrollaremos un formalismo general, formalmente válido para cualquier tipo de señal de entrada, basado en la transformada de Laplace. Este formalismo nos permitirá obtener tanto la respuesta transitoria como estacionaria de un circuito, y además, en el caso de una entrada armónica estacionaria, engloba como caso particular al formalismo de fasores en condiciones AC.

Finalmente veremos un método gráfico para la representación de la respuesta en frecuencia de un circuito: el diagrama de Bode. En lugar de desarrollar un método general para la obtención de este diagrama hemos preferido introducirlo a través de ejemplos simples, componiendo a partir de ellos diagramas más complejos.

Como ya hemos dicho en otras ocasiones, esta parte ha de ser estudiada antes de abordar los temas de Electrónica Analógica del temario de Electrónica General.

B.2 Análisis de circuitos en condiciones de corriente alterna.

Estudiaremos la respuesta de sistemas lineales ante entradas alternas, es decir, variables con el tiempo. El tipo de entradas que se van a considerar serán del tipo seno o coseno.

$$\text{Ejemplo: } x(t) = X_M \cdot \cos(\omega t + \Phi)$$

Como las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π , la función $x(t)$ es periódica con periodo T , de tal forma que cada T segundos repite todos sus valores. Por tanto $\omega T = 2\pi$; $\omega = 2\pi/T$.

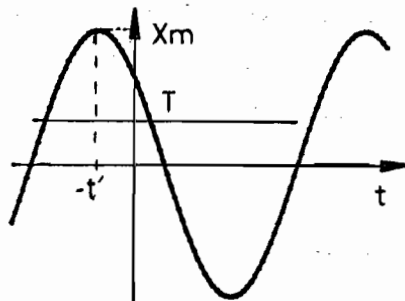


Figura B1

A ω se le llama frecuencia angular, sus unidades son radianes/segundo, y está relacionada con la frecuencia real f según la expresión $\omega = 2\pi f$ ya que $f \cong 1/T$, sus unidades son Hertz o ciclos/segundo.

Φ es el valor de la fase en el origen de tiempos, esto es, si la señal tiene una fase Φ para $t=0$ quiere decir que alcanzó su valor máximo un tiempo t' antes del origen, siendo $\omega t' = \Phi$; $t'/T = \Phi/2\pi$. Relativo al periodo de las funciones armónicas, la fase representa la fracción de dicho periodo en la cual la señal está adelantada respecto al origen de tiempos.

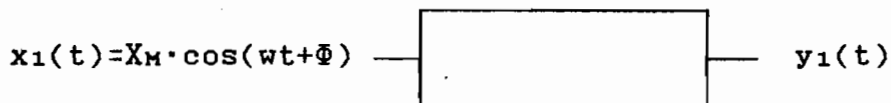
X_M se conoce como la amplitud de la señal y coincide con el valor del máximo de dicha señal.

En resumen, conoceremos perfectamente una señal alterna si conocemos su frecuencia angular ω , y con ella su frecuencia f y su periodo T , su amplitud X_M y su fase

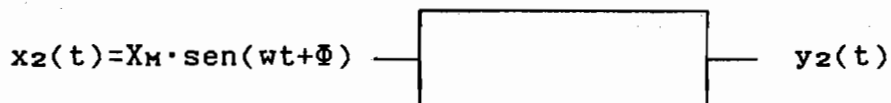
en el origen Φ .

Para el análisis de circuitos en corriente alterna utilizaremos un formalismo basado en la variable compleja que tiene como justificación el principio de superposición:

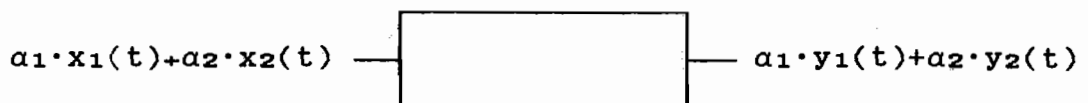
Si sobre un sistema lineal actúa una señal de entrada alterna $x_1(t) = X_M \cdot \cos(\omega t + \Phi)$ y se obtiene a la salida una respuesta $y_1(t)$, la resolución del problema radica en obtener dicha señal de salida $y_1(t)$.



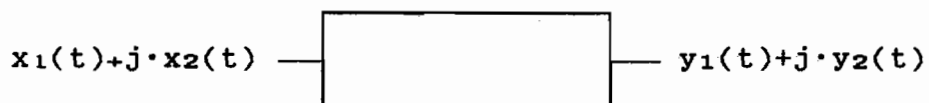
Supongamos ahora que sobre el sistema actúa una señal de entrada $x_2(t) = X_M \cdot \sin(\omega t + \Phi)$ y el sistema responde dando una salida $y_2(t)$.



Si ahora actúa sobre el sistema una combinación lineal de las entradas anteriores se obtendrá como salida la misma combinación lineal para las salidas individuales.



Este resultado, válido para cualquier valor de las constantes a_1 y a_2 será válido para $a_1 = 1$ y $a_2 = -1 \equiv j$.



Si deseamos calcular $y_1(t)$, podemos suponer que sobre el sistema actúa la combinación lineal $X_M \cdot \cos(\omega t + \Phi) + j \cdot X_M \cdot \sin(\omega t + \Phi)$ obteniendo una salida compleja $y_1(t) + j \cdot y_2(t)$. La parte real de esta salida compleja será la salida $y_1(t)$ buscada.

Para representar estas señales complejas a menudo utilizaremos la fórmula de Euler: $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \cdot \text{sen}\alpha$.

$$x(t) = X_M \cdot \cos(\omega t + \Phi) + j \cdot X_M \cdot \text{sen}(\omega t + \Phi) = X_M \cdot e^{j(\omega t + \Phi)} = X_M \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\Phi}$$

Separando la dependencia temporal del resto, podemos expresar:

$$x(t) = X \cdot e^{j\omega t} \text{ donde } X = X_M \cdot e^{j\Phi}$$

es un número complejo llamado **fasor** que lleva información acerca de la amplitud y fase de la señal.

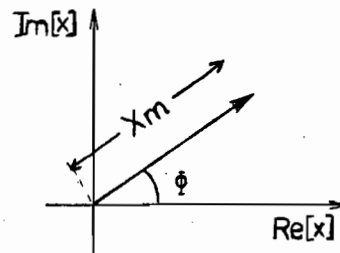


Figura B2

B.2-1 Relación entre la tensión y la corriente para los elementos pasivos en corriente alterna.

a) Resistencia. Supongamos que en los extremos de una resistencia de valor R cae una tensión $v = v_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\Phi}$, la corriente que circula a través de ella tomará el valor

$$i = v/R = v_m/R \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\Phi}$$

De esta expresión se puede deducir que la intensidad y la tensión están en fase; la amplitud o valor máximo de la intensidad es proporcional a la amplitud de la tensión.

Representación temporal

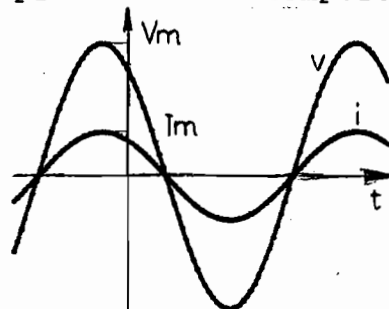


Figura B3

Representación fasorial

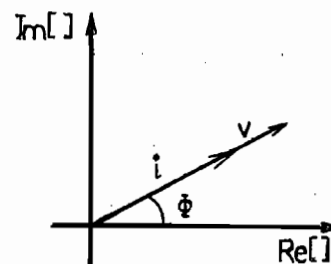


Figura B4

b) Condensador. Sin pérdida de generalidad supondremos que la tensión entre los extremos del condensador se puede expresar por $v = v_m \cdot \cos\omega t$. Como la relación tensión-intensidad es $i = C \cdot dv/dt$, la corriente que circula tomará el valor

$$i = -C \cdot v_m \cdot \omega \cdot \text{sen}\omega t = \omega \cdot C \cdot v_m \cdot \cos(\omega t + \pi/2)$$

Si utilizamos el formalismo complejo y suponemos una tensión $v=v_m \cdot e^{j\omega t}$, la intensidad tomará el valor:

$$i=C \cdot dv/dt = j \cdot \omega \cdot C \cdot v_m \cdot e^{j\omega t} = j \cdot \omega \cdot C \cdot v$$

Como j se puede expresar como un complejo de módulo 1 y fase $\pi/2$, la intensidad tomará la expresión:

$$i=\omega \cdot C \cdot v_m \cdot e^{j(\omega t+\pi/2)}$$

En este caso la intensidad está adelantada en fase respecto a la tensión en $\pi/2$, es decir la cuarta parte de un periodo.

Representación temporal

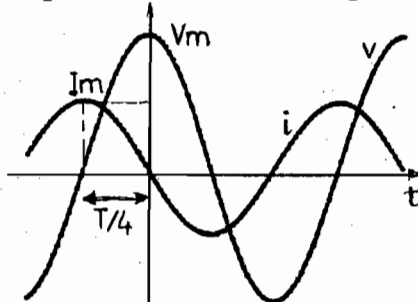


Figura B5

Representación fasorial

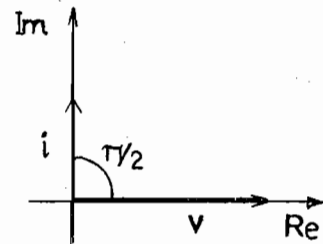


Figura B6

c) Inductor. Supongamos que por un inductor circula una intensidad de valor $i=I_m \cdot \cos \omega t$; como la relación tensión intensidad es $v=L \cdot di/dt$ tendremos una tensión

$$v=-L \cdot I_m \cdot \omega \cdot \text{sen} \omega t = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos(\omega t+\pi/2).$$

Si utilizamos el formalismo complejo y suponemos una intensidad $i=I_m \cdot e^{j\omega t}$, la tensión tomará el valor:

$$v=L \cdot di/dt = j \cdot \omega \cdot L \cdot I_m \cdot e^{j\omega t} = j \cdot \omega \cdot L \cdot i$$

$$v=\omega \cdot L \cdot I_m \cdot e^{j(\omega t+\pi/2)}$$

Ahora la tensión está adelantada en fase respecto a la intensidad en $\pi/2$.

Representación temporal

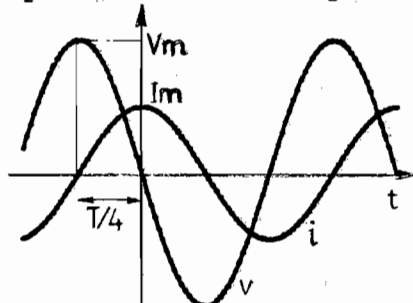


Figura B7

Representación fasorial

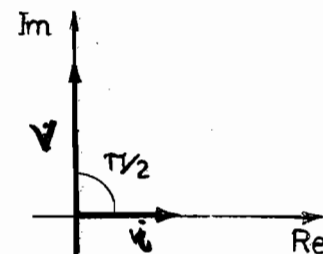


Figura B8

Resumiendo:

Para resistencias $v=R \cdot i$ y multiplicando por $e^{-j\omega t}$ obtenemos la relación entre fasores $V=R \cdot I$.

Para condensadores $v=i/(j \cdot \omega \cdot C)$ y Para sus fasores $V=I/(j \cdot \omega \cdot C)$.

Para inductores $v=j \cdot \omega \cdot L \cdot i$ y Para sus fasores $V=j \cdot \omega \cdot L \cdot I$.

En la práctica aunque se haya afirmado que la señal real de salida de un circuito, utilizando el formalismo complejo, se obtiene tomando la parte real de la salida compleja resultante, esto no será necesario en la práctica. En efecto, ya que los fasores llevan información sobre la amplitud y fase de la señal, una vez fijada o conocida la frecuencia (que coincide con la de las señales de entrada) podemos establecer una aplicación biyectiva entre las señales reales y sus fasores complejos asociados:

$$\text{Fijada } \omega, x(t)=X_M \cdot \cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow X=X_M \cdot e^{j\phi}$$

En consecuencia podemos analizar los circuitos en corriente alterna utilizando operaciones algebraicas entre los fasores.

B.2-2 Impedancias.

Utilizando el formalismo de los fasores hemos deducido unas relaciones de proporcionalidad entre tensiones y corrientes para los elementos pasivos. Al factor de proporcionalidad se le llama impedancia de dicho elemento y es, en general, un número complejo: $Z \equiv v/i$.

Para una resistencia $Z_R=v/i=R$

Para un condensador $Z_C=v/i=1/(j \cdot \omega \cdot C)=1/(\omega \cdot C) \cdot e^{-j\pi/2}$

Para un inductor $Z_L=v/i=j \cdot \omega \cdot L=\omega \cdot L \cdot e^{j\pi/2}$

Podemos enunciar una ley llamada de Ohm, por extensión, para fasores de la forma:

$$V=I \cdot Z$$

Se define la admitancia de un elemento como la inversa de su impedancia: $Y \equiv 1/Z$;

$$Y_R=1/R \quad Y_C=j \cdot \omega \cdot C=\omega \cdot C \cdot e^{j\pi/2} \quad Y_L=1/(j \cdot \omega \cdot L)=1/(\omega \cdot L) \cdot e^{-j\pi/2}$$

B.2-3 Teoremas. Ejemplos.

Los teoremas de Thevenin y Norton, la equivalencia entre fuentes de tensión e intensidad y los métodos de análisis de circuitos por nudos y por mallas, que se estudiaron en la parte A de este libro en el tratamiento de las señales continuas, son perfectamente válidos para señales alternas; las diferencias esenciales son que donde hablábamos de resistencias ahora trabajaremos con impedancias y donde antes se hablaba de tensiones e intensidades ahora trabajaremos con los fasores de tensiones e intensidades.

El teorema de superposición tiene un valor práctico cuando nos encontramos con un circuito de alimentación continua y alterna simultáneamente. La salida según el teorema será la suma de las salidas individuales reales, y se muestra especial atención sobre la palabra real pues aunque cuando en alterna trabajamos con el formalismo complejo, tanto las señales de entrada como las de salida son reales, y por tanto al final de un problema habrá que establecer la relación entre los fasores y las señales reales solución de dicho problema.

En los ejemplos siguientes mostraremos la aplicabilidad de todos estos teoremas.

Ejemplo 1. Cálculo de v_o en el circuito de la figura B9 utilizando las leyes de Kirchoff mediante el método del análisis por mallas.

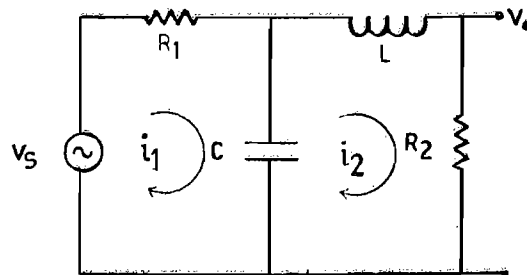


Figura B9

Sea $v_s = v_M \cdot \cos \omega t$, el fador asociado será :

$$V_s = v_M \cdot e^{j0} = v_M$$

Aplicando la primera ley de Kirchoff a las dos

mallas se obtienen las expresiones:

$$V_s = I_1 \cdot R_1 + (I_1 - I_2) \cdot 1/(j \cdot \omega \cdot C)$$

$$0 = I_2 \cdot j \cdot \omega \cdot L + I_2 \cdot R_2 + (I_2 - I_1) \cdot 1/(j \cdot \omega \cdot C)$$

De este sistema de ecuaciones tendremos que despejar el valor de I_2 pues lo que queremos calcular es la tensión v_o , que en notación fasorial $V_o = I_2 \cdot R$. Resolviendo entonces el sistema tendremos:

$$I_2 = \frac{[j\omega CV_s]}{\sqrt{[-\omega^2 LC - \omega^2 C^2 R_1 R_2 + j\omega(CR_1 - \omega^2 C^2 LR_1 + CR_2)]}}$$

que expresado en forma polar, es decir dando su módulo y fase quedaría $I_2 = I_{2M} \cdot e^{j\Phi}$ con

$$\Phi = \pi/2 - \arctg \frac{CR_1 - \omega^2 C^2 LR_1 + CR_2}{-\omega \cdot (LC + C^2 R_1 R_2)}$$

$$I_{2M} = \frac{\omega CV_M}{\sqrt{(\omega^2 LC + \omega^2 C^2 R_1 R_2)^2 + \omega^2 (CR_1 - \omega^2 C^2 LR_1 + CR_2)^2}}$$

Como aplicación numérica supongamos que la señal de entrada tiene una frecuencia $f = 50000$ Hz y una amplitud $V_M = 10$ V y para los componentes $C = 100$ nF, $R_1 = 100$ Ω , $L = 1$ mH, $R_2 = 10$ k Ω . Sustituyendo en las expresiones de la fase y el módulo obtendremos:

$$\Phi = -1.29 \text{ rad} \quad I_{2M} = 0.3 \text{ mA}$$

La intensidad está retrasada en fase respecto a la tensión en 1.29 rad, es decir, $1.29/2\pi \cdot 100 = 20.5\%$ del periodo. La tensión $V_o = 0.3e^{-j1.29} \text{ mA} \cdot 10 \text{ k}\Omega = 3e^{-j1.29} \text{ V}$. Y la tensión real será igual a:

$$v_o = 3V \cdot \cos(\omega t - 1.29)$$

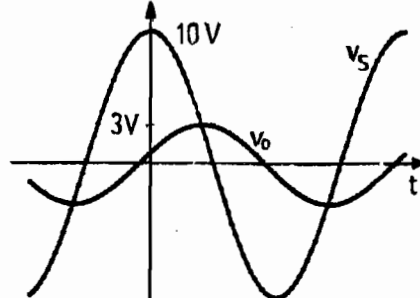


Figura B10

Para la resolución de este problema se ha elegido

el análisis de mallas, que no quiere decir que sea el más rápido ni el más eficaz.

Ejemplo 2. Cálculo de v_o en el circuito de la figura B11.

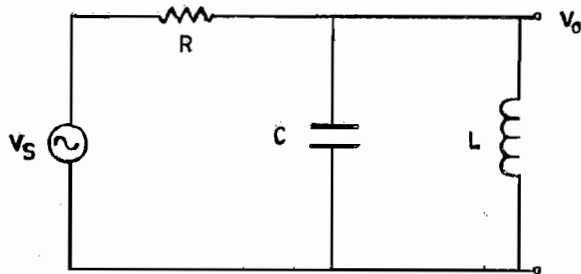


Figura B11

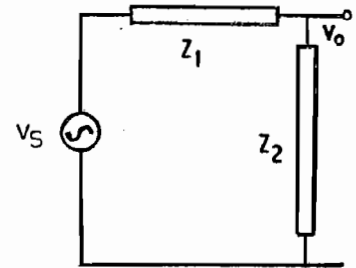


Figura B12

En el cálculo de las impedancias $Z_1=R$ y para Z_2 hay que tener en cuenta que las impedancias en alterna juegan el mismo papel que las resistencias en continua siendo idénticas las reglas de asociación; en consecuencia

$$Z_2=Z_C \parallel Z_L = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

El circuito queda como un divisor de tensión con lo que la tensión de salida $V_o=V_s \cdot Z_2/(Z_1+Z_2)$, que sustituyendo por los valores de las impedancias queda

$$V_o=V_s \cdot \frac{j\omega L}{R(1-\omega^2 LC)+j\omega L}$$

Si $V_s=V_M$ el módulo y fase de la tensión de salida son:

$$V_{oM} = \frac{L\omega V_M}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\Phi = \pi/2 - \arctg \frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}$$

En la expresión de Z_2 se observa que si $\omega^2=1/LC$ se anula el denominador y $Z_2 \rightarrow \infty$. En este caso el módulo de V_o es V_M y la fase es cero. En cambio si $\omega \rightarrow 0$ ó $\omega \rightarrow \infty$; $V_o \rightarrow 0$.

Al valor de la frecuencia que hace que la tensión de salida sea máxima e igual a la de la entrada se le llama frecuencia de resonancia de este circuito. Más adelante se precisarán estos conceptos.

Ejemplo 3. Circuito con una fuente dependiente de intensidad.

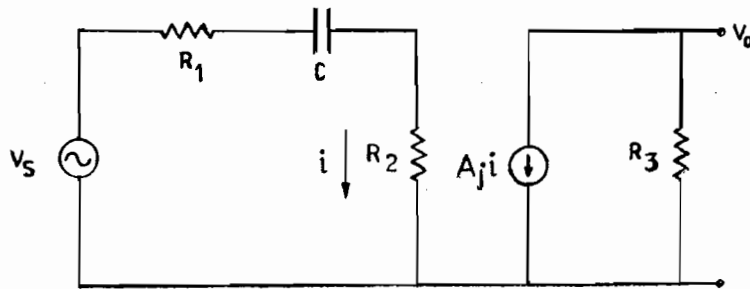


Figura B13

En este caso la fuente de intensidad tiene un valor nominal proporcional a la intensidad que pasa por R_2 , $i_s = A_I \cdot i$ siendo A_I el factor de proporcionalidad. Para calcular el valor nominal de la fuente de intensidad es necesario calcular la magnitud eléctrica de la cual depende, en este caso, la corriente i :

$$I = \frac{V_s}{R_1 + R_2 + 1/(j\omega C)},$$

$$I_s = \frac{A_I \cdot V_s}{R_1 + R_2 + 1/(j\omega C)},$$

como por la resistencia R_3 solo pasa la intensidad de esta fuente:

$$V_o = -I_s R_3 = -A_I R_3 V_s \frac{j\omega C}{1 + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

de donde podemos obtener el módulo y la fase:

$$V_{oM} = A_I R_3 V_M \frac{\omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}}$$

$$\Phi = -\pi/2 - \arctg(\omega C(R_1 + R_2))$$

La tensión real $v_o = V_{oM} \cdot \cos(\omega t + \Phi)$.

Ejemplo 4. Calcular la tensión entre los extremos de la resistencia R_4 del circuito de la figura B14 utilizando el teorema de Thevenin.

El primer paso será agrupar elementos y sustituirlos por impedancias equivalentes como se ve en la figura B15. Una vez hecho esto sustituiremos el circuito visto

$R_1=100 \Omega$ $C=10 \text{ nF}$
 $R_2=1 \text{ k}\Omega$ $L=1 \text{ mH}$
 $R_3=R_4= 870 \Omega$
 $f=30 \text{ kHz}$
 $i_s=2\text{mA} \cdot \cos(\omega t + 0.523 \text{ rad})$
 $v_s=5\text{V} \cdot \cos \omega t$

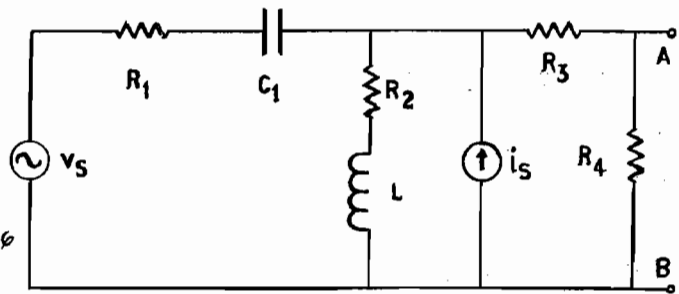


Figura B14

desde los terminales A y B por una fuente ideal de tensión y una impedancia en serie según el teorema de Thevenin.

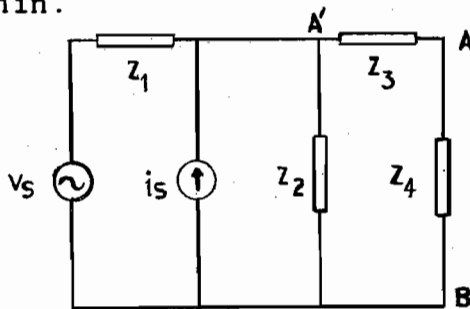


Figura B15

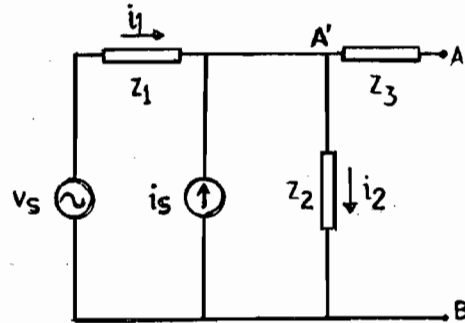


Figura B16

El valor de la fuente de tensión será la tensión que cae entre A y B en circuito abierto: en circuito abierto no puede pasar corriente por Z_3 , por tanto $V_A = V_{A'}$.

Llamando I_1 a la corriente que circula por Z_1 e I_2 a la que circula por Z_2 :

$$V_A - V_B = I_2 Z_2 = V_s - I_1 Z_1 \quad I_1 Z_1 + I_2 Z_2 = V_s$$

$$I_1 + I_s = I_2 \quad I_1 - I_2 = -I_s$$

multiplicando la segunda ecuación por Z_1 y restando se tiene:

$$I_2 = \frac{V_s + I_s Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{con lo que}$$

$$V_A - V_B = I_2 Z_2 = Z_2 \cdot \frac{V_s + I_s Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Si sustituimos valores y expresamos todo en forma binómica tendremos: $Z_1 = (100 - j530.52) \Omega$, $Z_2 = (1000 + j188.5) \Omega$, $Z_3 = 870 \Omega$, $V_s = 5\text{V}$, $I_s = (1.732 + j) \cdot 10^{-3} \text{ A}$, que llevado a la última expresión tendremos una tensión Thevenin

$$V_t = V_A - V_B = (4.79 + j1.722) \text{ V}$$

Para calcular la impedancia Thevenin anulamos las

fuentes, cortocircuitamos las de tensión y abrimos las de intensidad, quedando una agrupación de impedancias como en la de la figura B17.

$$Z_t = Z_3 + Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)$$

$$Z_t = (1167.7 - j372.6) \Omega$$

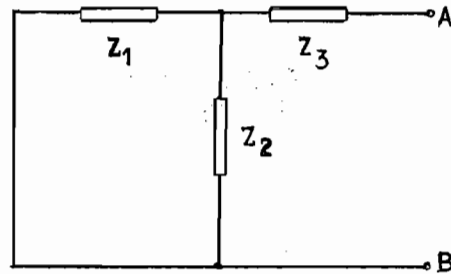


Figura B17

Sustituyendo el circuito inicial visto desde A y B por el circuito equivalente, la tensión que cae en R_4 será $V_A - V_B = V_t \cdot R_4 / (R_4 + Z_t) = 2.138 \cdot e^{j0.166} \text{ V}$; y su valor real será por tanto $V_A - V_B = 2.138 \cdot \cos(\omega t + 0.166) \text{ V}$.

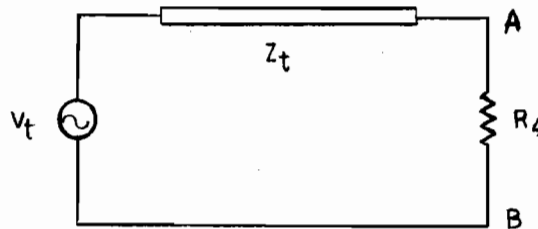


Figura B18

Ejemplo 5. Resolver el problema del ejemplo anterior convirtiendo todas las fuentes a fuentes de corriente.

Si nos fijamos en la figura B15 la combinación de la fuente V_s en serie con Z_1 puede convertirse en una fuente de intensidad $I_N = V_s / Z_1$, que sustituyendo valores tomaría la forma: $I_N = 9.262 \cdot e^{j0.44}$, en paralelo con una impedancia $Z_N = Z_1 = (100 - j530.5) \Omega$.

El circuito resultante se muestra en la figura B19.

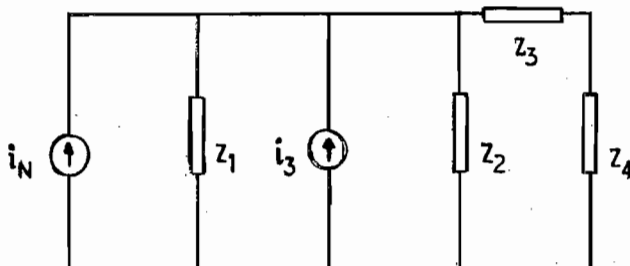


Figura B19

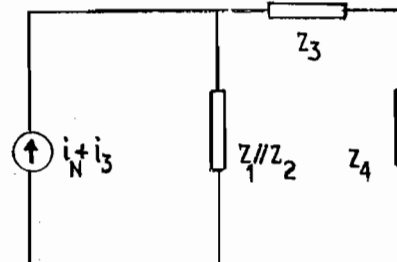


Figura B20

Z_1 y Z_2 tienen sus terminales comunes, están en paralelo. Por otro lado I_N e I_s inyectan corriente al mismo nudo, por tanto sus efectos se suman; el circuito resultante se muestra en la figura B20.

Como se observa del circuito, ahora resulta más fácil terminar el problema si se convierte la fuente de intensidad en tensión en lugar de dejarlo tal como está:

$$V_t = (I_N + I_s) \cdot (Z_1 // Z_2) = (4.79 + j1.723) \text{ V}$$

resultado idéntico al obtenido utilizando el método de Thevenin. El resto del cálculo es por tanto idéntico al del ejemplo anterior.

Ejemplo 6. Resolver el problema del ejemplo anterior utilizando el teorema de Norton.

Si nos fijamos en la figura B15 vamos a sustituir todo el circuito visto desde A y B por una fuente ideal de corriente y una impedancia en paralelo. El valor de la fuente de intensidad es el de la corriente entre A y B en cortocircuito (figura B21).

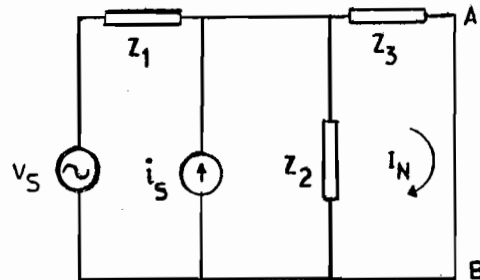


Figura B21

Para resolver el problema convertiremos la fuente de intensidad I_s por una fuente de tensión:

$$Z_2 = 1000 + j188.5 = 1017.6 \cdot e^{j10.67^\circ} \Omega$$

$$V_{s2} = I_s \cdot Z_2 = 1.543 + j1.326 \text{ V}$$

Una vez modificado el circuito podemos calcular la intensidad Norton mediante el método de mallas (Figura B22):

$$V_s - V_{s2} = I_1(Z_1 + Z_2) - I_N Z_2$$

$$V_{s2} = -I_1 Z_2 + I_N (Z_2 + Z_3)$$

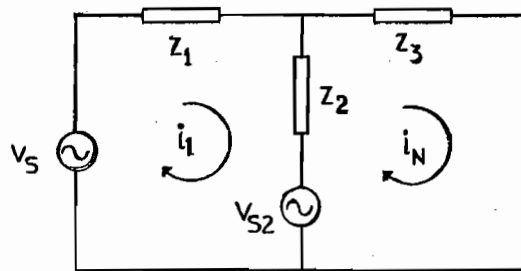


Figura B22

Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a una expresión para la intensidad Norton:

$$I_N = \frac{V_{s2}Z_1 + V_s Z_2}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$

que sustituyendo por sus valores se obtiene:

$$I_N = 4.153 \cdot 10^{-3} e^{j0.21} \text{ A}$$

La impedancia equivalente se calcula igual que en el caso del equivalente Thevenin y por tanto tendrá el mismo valor:

$$Z_N = (1168 - j373) \Omega$$

Para terminar el problema queda calcular la tensión que cae en los extremos de la impedancia Z_4 (figura B23):

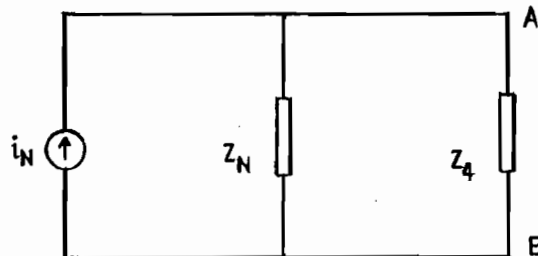


Figura B23

$$V_A - V_B = I_N \cdot Z_N \parallel Z_4 = 2.138 e^{j0.17} \text{ V}$$

Como siempre la tensión real haciendo la transformación correspondiente queda de la forma:

$$V_A - V_B = 2.138 \cdot \cos(\omega t + 0.166) \text{ V}$$

Ejemplo 7. Circuito con alimentación continua y alterna simultáneamente. Calcular la tensión de salida v_o para el circuito de la figura B24. Los valores de los parámetros son los siguientes:

$R_1 = 100 \Omega$ $C_1 = 10 \text{ nF}$
 $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1 \text{ k}\Omega$
 $L_1 = 1 \text{ mH}$ $f = 30 \text{ kHz}$
 $V_s = 10e^{j\omega t}$ $V_{cc} = 30 \text{ V}$

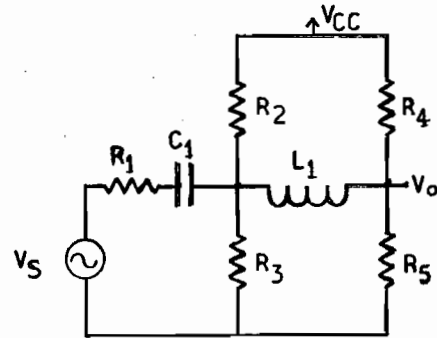


Figura B24

Para resolver el circuito se hará uso del teorema de superposición: en primer lugar se hallará la respuesta debida únicamente a la fuente continua; para ello anularemos la fuente v_s cortocircuitándola. Posteriormente se obtendrá la respuesta debida únicamente a la fuente v_s , anulando en este caso la fuente de continua: $V_{cc}=0$, la respuesta de real, cuando las dos fuentes actúan a la vez, es la suma de respuestas obtenidas por separado.

NOTA. La respuesta correspondiente a la señal alterna hay que expresarla en su forma real, pues aunque se trabaje con fasores en un circuito solo existen tensiones e intensidades reales.

a) En condiciones de continua los condensadores se comportan como circuitos abiertos y los inductores como cortocircuitos (figura B25).

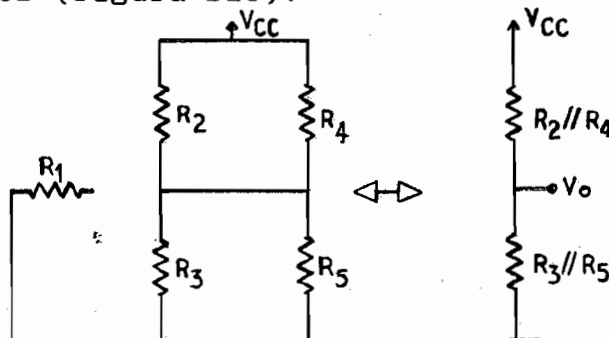


Figura B25

$$V_o = V_{cc} \cdot \frac{R_3 // R_5}{R_2 // R_4 + R_3 // R_5} = 15 \text{ V}$$

b) En alterna la fuente de tensión continua se anulará, es decir, el punto en el que está conectada V_{cc} se conectará en este caso al punto de potencial cero,

esto es, se cortocircuitará con el punto de toma a tierra. El circuito resultante se muestra en la figura B26:

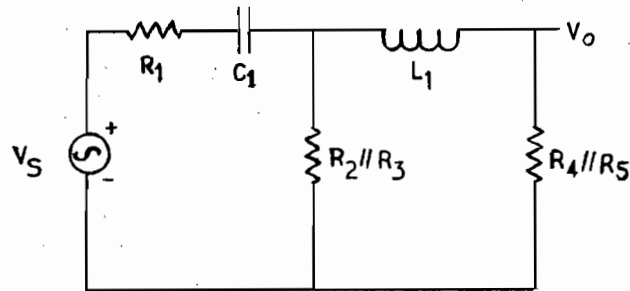


Figura B26

Si hacemos el análisis de impedancias el circuito y los valores de las impedancias quedan de la forma :

$$\begin{aligned} Z_1 &= (100 - j530) \Omega \\ Z_2 &= 500 \Omega \\ Z_3 &= j188 \\ Z_4 &= 500 \Omega \end{aligned}$$

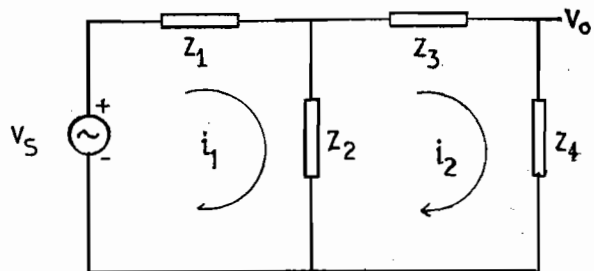


Figura B27

Resolviendo el circuito mediante el método de mallas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$V_S = I_1(Z_1 + Z_2) - I_2 Z_2$$

$$0 = -I_1 Z_2 + I_2(Z_3 + Z_4)$$

De este sistema podemos despejar la intensidad I_2 ,

$$I_2 = \frac{V_S Z_2}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

El valor de la tensión $V_o = I_2 \cdot Z_4$; sustituyendo todas las impedancias por sus valores obtenemos:

$$V_o = 3.21 + j2.74 \text{ V} = 4.22 e^{j0.71} \text{ V}$$

El desfase es de 0.22 rad y la amplitud de 4.22 V. Como el periodo de las funciones armónicas es de 2π , el desfase respecto a la tensión de entrada será $0.22/2\pi = 11.2\%$ del periodo. En la figura B28 se representan las tensiones

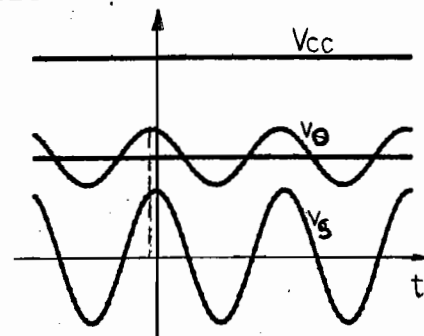


Figura B28

de entrada y de salida.

B.3 Análisis de Fourier.

Se ha estudiado ya como responde un sistema lineal ante una señal armónica. La importancia fundamental del conocimiento de la respuesta en frecuencia de un sistema se debe al siguiente resultado:

Cualquier señal periódica se puede expresar como combinación lineal de señales armónicas. En concreto: si $f(t)$ es una señal periódica, con periodo T , es decir $f(t)=f(t+T)$ para cualquier instante de tiempo t , $f(t)$ es desarrollable en serie de señales armónicas en la forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = C_0 + C_1 e^{j\omega_0 t} + C_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots \\ + C_{-1} e^{-j\omega_0 t} + C_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \dots$$

siendo $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f$

A cada una de las funciones armónicas que aparecen en la combinación lineal se le llama armónico de la señal, por ejemplo $C_1 e^{j\omega_0 t}$ sería el armónico de primer orden, $C_2 e^{j2\omega_0 t}$ sería el armónico de segundo orden, etc.

Para la obtención de los coeficientes del desarrollo en serie se evaluará la siguiente integral:

$$I_k = \int_0^T f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt = \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^T C_n \cdot e^{j(n-k)\omega_0 t} \cdot dt$$

$$\text{la integral } \int_0^T e^{j(n-k)\omega_0 t} \cdot dt = \begin{cases} \frac{e^{j(n-k)\omega_0 T} - 1}{j(n-k)\omega_0} & \text{si } n \neq k \\ T & \text{si } n = k \end{cases}$$

$$\text{de este modo } I_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_0^T e^{j(n-k)\omega_0 t} \cdot dt = C_k \cdot T$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$$

Propiedad:

$$C_{-k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-j(-k\omega_0 t)} \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot dt$$

Si C_k^* es el conjugado de C_k ,

$$C_k^* = \frac{1}{T} \int_0^T f^*(t) \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot dt$$

[como $f(t)$ es real coincide con su conjugada $f(t)=f^*(t)$]

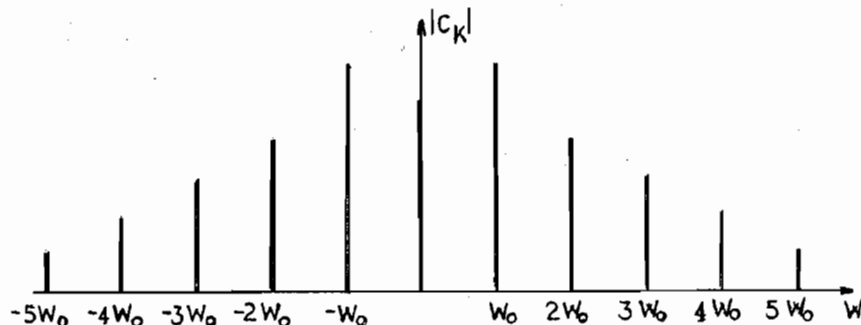
De la última expresión se deduce que $C_k^*=C_{-k}$.

En consecuencia, el módulo de C_k coincide con el de C_{-k} ya que $|C_k^*|=|C_k|=|C_{-k}|$, y la fase de C_k está desfasada en π radianes respecto a la de C_{-k} . Conocido el armónico $C_k e^{jk\omega_0 t}$ de la señal periódica conoceremos también su armónico simétrico $C_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$, es decir, cada armónico aporta la misma información que su simétrico. Si en el desarrollo en serie de Fourier aparece un armónico, debe aparecer su simétrico para que la combinación de ambos sea un número real:

$$\begin{aligned} C_k e^{jk\omega_0 t} + C_{-k} e^{-jk\omega_0 t} &= C_k e^{jk\omega_0 t} C_k^* e^{-jk\omega_0 t} \\ &= C_k e^{jk\omega_0 t} + (C_k e^{jk\omega_0 t})^* = 2 \cdot \text{Re}[C_k e^{jk\omega_0 t}] \\ 2 \cdot \text{Re}[|C_k| \cdot e^{j\Phi_k} e^{jk\omega_0 t}] &= 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \Phi_k) \end{aligned}$$

Al conjunto de coeficientes C_k del desarrollo en serie de Fourier se le llama espectro de la señal. Al conjunto $|C_k|$ en función de w se le llama espectro de amplitudes y es simétrico ya que $|C_k|=|C_{-k}|$. La fase de C_k nos proporciona la fase del armónico correspondiente.

Ejemplo 1:



Ejemplo 2: Obtención del desarrollo en serie de Fourier para una onda cuadrada como la representada en la

figura B29.

$$f(t) = \begin{cases} V_m & \text{si } 0 \leq t < T/2 \\ -V_m & \text{si } T/2 \leq t < T \end{cases}$$

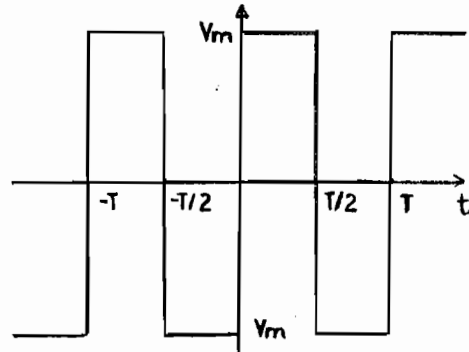


Figura B29

Para la obtención del desarrollo de Fourier se han de calcular los coeficientes del mismo.

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jk\omega t} \cdot dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} V_m \cdot e^{-jk\omega t} \cdot dt + \int_{T/2}^T -V_m \cdot e^{-jk\omega t} \cdot dt \right]$$

$$= \frac{V_m}{T} \frac{e^{-jk\omega t}}{-jk\omega} \Big|_0^{T/2} - \frac{V_m}{T} \frac{e^{-jk\omega t}}{-jk\omega} \Big|_{T/2}^T =$$

$$= \frac{V_m}{-jk\omega T} (e^{-jk\omega T/2} - 1 - e^{-jk\omega T} + e^{-jk\omega T/2}), \text{ como } e^{-jk\omega T} = \begin{cases} 1 & k=\text{par} \\ -1 & k=\text{impar} \end{cases}$$

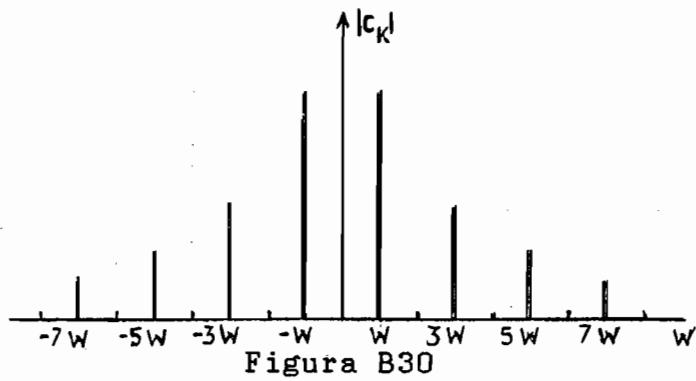
$$\text{entonces } C_k = \begin{cases} 0 & k=\text{par} \\ \frac{4 \cdot V_m}{j2\pi k} & k=\text{impar} \end{cases}$$

$$\text{Como } f(t) = C_0 + C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{j2\omega t} + \dots + C_{-1} e^{-j\omega t} + C_{-2} e^{-j2\omega t} + \dots$$

$$\text{y } C_k e^{jk\omega t} + C_{-k} e^{-jk\omega t} = \frac{4 \cdot V_m}{j2\pi k} \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{j} = \frac{4 \cdot V_m}{\pi k} \text{ sen } k\omega t,$$

$$f(t) = \frac{4 \cdot V_m}{\pi} \left(\text{sen } \omega t + \frac{\text{sen } 3\omega t}{3} + \frac{\text{sen } 5\omega t}{5} + \frac{\text{sen } 7\omega t}{7} + \dots \right)$$

El espectro de amplitudes de la señal cuadrada se representa en la figura B30. Teóricamente son necesarios infinitos términos para reconstruir la señal original, sin embargo ya que los coeficientes son decrecientes al aumentar el orden del armónico, generalmente se obtiene



una buena aproximación con un número finito de términos. En la figura B31 se representa la aproximación que se obtendría sumando un número de n términos. Cuando $n=1$ se representa únicamente el armónico fundamental:

$$4 \cdot V_m / \pi \cdot \text{sen} \omega t.$$

Se observa también que después de representar 128 términos se obtiene una señal que aproxima bastante bien a la señal original.

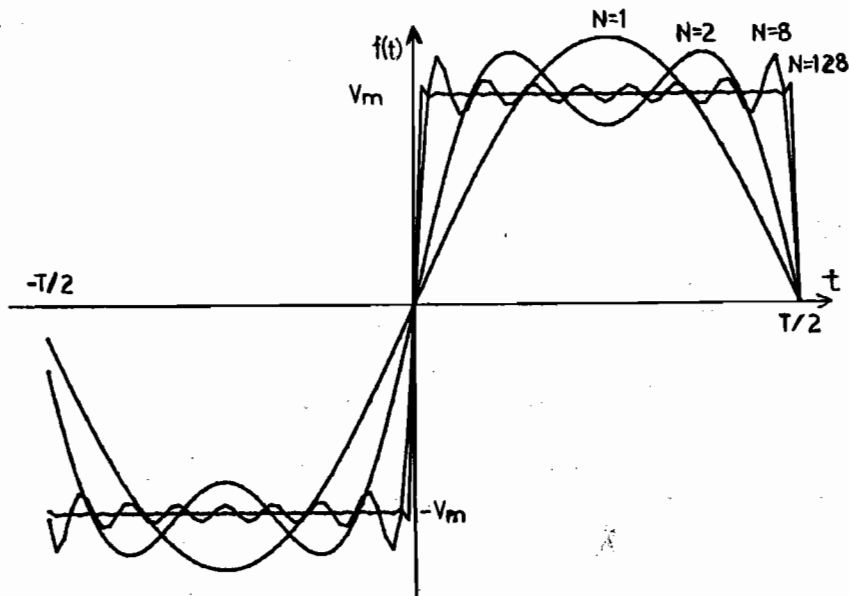


Figura B31

Si la señal no es periódica, también puede desarrollarse como combinación lineal de armónicos pero, en este caso,

de frecuencias infinitamente próximas con lo que la suma debe sustituirse por una integral:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

donde los coeficientes $F(\omega)$ se pueden calcular según

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

A $F(\omega)$ se le llama espectro de la señal y cumple prácticamente todas las propiedades del espectro discreto. En concreto, el espectro de amplitudes sigue siendo simétrico para que $f(t)$ sea una función real.

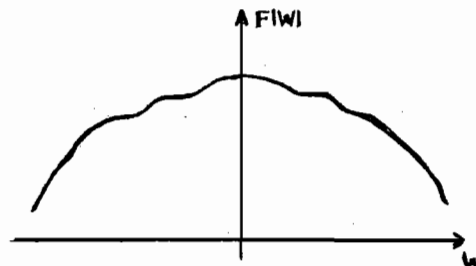


Figura B32

B.3-1 Concepto de filtro.

Se denomina filtro a cualquier sistema capaz de actuar de forma diferente sobre distintas bandas de frecuencias.

Puede haber filtros que permitan pasar señales de frecuencias bajas y eliminen o atenúen las de altas frecuencias: serían filtros paso-bajo. Otros eliminarán las de bajas frecuencias dejando pasar las de altas frecuencias, son los filtros paso-alto. Otro tipo de filtros permiten el paso de señales cuya frecuencia está comprendida en un determinado intervalo de frecuencias, eliminando el resto, son los filtros paso-banda.

Dentro del marco del análisis de Fourier hemos visto que una señal, periódica o no, se puede expresar en combinación de una serie de armónicos de distinta fre-

cuencia. Si esta señal actúa como entrada de un filtro, a la salida de éste, cada uno de los armónicos se habrá visto modificado de manera diferente dependiendo de su frecuencia: se habrán atenuado, eliminado o amplificado.

B.4 Valores medios y eficaces. Potencia.

Se define el valor medio de una función periódica como:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot dt, \text{ siendo } t \text{ el periodo de la señal.}$$

Si la señal es armónica, es decir, del tipo $x(t) = X_M \cdot \cos(\omega t + \Phi)$, su valor medio es nulo. En efecto:

$$\begin{aligned} \overline{x(t)} &= \frac{1}{T} \int_0^T X_M \cdot \cos(\omega t + \Phi) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T X_M \cdot (\cos \omega t \cdot \cos \Phi - \text{sen} \omega t \cdot \text{sen} \Phi) \cdot dt \\ &= \frac{X_M}{T} \left[\cos \Phi \int_0^T \cos \omega t \cdot dt - \text{sen} \Phi \int_0^T \text{sen} \omega t \cdot dt \right] \\ &= \frac{X_M}{T} \left[\cos \Phi \left[\frac{\text{sen} \omega t}{\omega} \right]_0^T + \text{sen} \Phi \left[\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^T \right] = 0 \end{aligned}$$

Se define el valor eficaz de una señal periódica como:

$$x_{\text{ef}} = \sqrt{\overline{x^2(t)}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 \cdot dt}$$

En el caso de una señal armónica, el valor eficaz se obtiene dividiendo la amplitud por $\sqrt{2}$. En efecto:

$$\begin{aligned} x_{\text{ef}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X_M^2 \cdot \cos^2(\omega t + \Phi) \cdot dt} \\ &= \sqrt{\frac{X_M^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2(\omega t + \Phi)}{2} dt} \\ &= \sqrt{\frac{X_M^2}{T} \left[\int_0^T \frac{dt}{2} + \frac{\cos 2\Phi}{2} \int_0^T \cos 2\omega t \cdot dt - \frac{\text{sen} 2\Phi}{2} \int_0^T \text{sen} 2\omega t \cdot dt \right]} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{X_M^2}{T} \left[\frac{T}{2} + \frac{\cos 2\Phi}{2} \left[\frac{\sin 2\omega t}{\omega} \right]_0^T + \frac{\sin 2\Phi}{2} \left[\frac{\cos 2\omega t}{\omega} \right]_0^T \right]} = \frac{X_M}{\sqrt{2}}$$

La justificación del empleo extendido de los valores eficaces en el análisis de circuitos eléctricos se encuentra en el concepto de potencia.

La potencia eléctrica es la energía que se transfiere a un elemento por unidad de tiempo. Esta energía transferida puede ser almacenada por el elemento o disipada transformándola en energía térmica. En el primer caso la energía almacenada suele ser devuelta de nuevo por el elemento, siendo en este caso negativa.

La expresión de la potencia es:

$$P = i \cdot v, \text{ su unidad es el watio}$$

En el caso de corriente continua esta magnitud es constante en el tiempo: $P = I \cdot V$.

En el caso de corriente alterna, el producto $i(t) \cdot v(t)$ es variable con el tiempo y se llama potencia instantánea:

$$P(t) = i(t) \cdot v(t) = I_m \cos(\omega t + \Phi) V_m \cos \omega t$$

donde Φ es el desfase de la intensidad respecto a la tensión.

Generalmente la magnitud que interesa es la potencia media en un periodo, que es la potencia neta que se transfiere para producir trabajo. ^{o ser disipada en forma de calor.} A esta magnitud se le denomina potencia activa y se calcula según la expresión:

$$\begin{aligned} P_a = P(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T I_m \cdot \cos(\omega t + \Phi) \cdot V_m \cdot \cos \omega t \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} I_m V_m \left[\cos \Phi \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt - \sin \Phi \int_0^T \sin \omega t \cdot \cos \omega t \cdot dt \right] \\ &= \frac{1}{T} I_m V_m \left[\cos \Phi \cdot \left(\frac{T}{2} + \int_0^T \frac{\cos 2\omega t}{2} \right) - \sin \Phi \int_0^T \frac{\sin 2\omega t}{2} \cdot dt \right] \\ &= I_m V_m \cos \Phi / 2; \end{aligned}$$

$$P_a = I_{ef} \cdot V_{ef} \cdot \cos \Phi$$

A $\cos \Phi$ se le llama factor de potencia. En el caso de los elementos pasivos toma los valores:

Resistencia: $i=v/R$ $\cos\Phi=1$
 Condensador: $i=v/Z_C=wCve^{j\pi/2}$ $\cos\Phi=0$
 Inductor : $i=v/Z_L=v/(wL)\cdot e^{-j\pi/2}$ $\cos\Phi=0$

La potencia activa disipada por un condensador o un inductor es cero (recordamos que este resultado se refiere al valor medio sobre un periodo; el valor medio cero significa que durante medio periodo el elemento almacena energía y durante el otro medio periodo la devuelve al resto del circuito). La potencia disipada por una resistencia corresponde al valor máximo permitido para el factor de potencia. A este valor máximo se le denomina potencia aparente.

$$P_Q = I_{ef} \cdot V_{ef}$$

para el tratamiento de los elementos reactivos (condensador e inductor) es decir de aquellos para los cuales la potencia activa es nula se define la magnitud potencia reactiva, que representa el valor de la energía almacenada promediada durante el tiempo en el cual se almacena:

$$P_R = I_{ef} \cdot V_{ef} \cdot \text{sen}\Phi,$$

siendo Φ , al igual que antes el desfase de la intensidad respecto a la tensión.

Para relacionar estas definiciones con el formalismo de los fasores complejos que se ha desarrollado para el análisis de señales alternas, se define la potencia compleja como:

$$S = \frac{1}{2} \cdot I^* \cdot V$$

Si $I = I_m e^{j\phi}$ y $V = V_m e^{j\theta}$ entonces

$$S = \frac{1}{2} \cdot I_m e^{-j\phi} \cdot V_m e^{j\theta} = \frac{1}{2} \cdot I_m \cdot V_m \cdot e^{-j(\phi-\theta)} = I_{ef} \cdot V_{ef} e^{j\phi}$$

siendo $\phi = \Phi - \theta$ el desfase de la intensidad respecto a la tensión.

En consecuencia :

$$S = I_{ef} \cdot V_{ef} \cdot (\cos\phi - j\text{sen}\phi) = I_{ef} \cdot V_{ef} \cdot \cos\phi - j \cdot I_{ef} \cdot V_{ef} \cdot \text{sen}\phi$$

$$S = P_a - jP_R$$

De donde deducimos que la potencia activa es la parte real de S y la potencia reactiva es la parte ima-

gitaria de S cambiada de signo.

Ejemplo 1: Calcular la potencia activa y reactiva suministradas por una tensión alterna de 10 V de amplitud a la impedancia de la figura B33.

La impedancia de esta combinación de elementos es $Z=R+1/(j\omega C)=R-j/(\omega C)$ que expresado en forma polar o exponencial queda:

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{-j \arctg(1/\omega RC)} = 166.8 e^{-j0.4} \Omega$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot I^* \cdot V \quad ; \quad S = \frac{1}{2} \frac{V^*}{Z^*} \quad V = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V|^2}{Z^*} = 0.3 \cdot e^{-j0.4}$$

$$I = V/Z$$

Potencia activa : $P_a = \text{Re}(S) = 0.3 \cos 0.4 = 0.09 \text{ W}$

Potencia reactiva : $P_R = -\text{Im}(S) = 0.3 \text{sen} 0.4 = 0.23 \text{ W}$

Potencia aparente : $P_Q = |S| = 0.3 \text{ W}$.

Este mismo resultado podría obtenerse utilizando el formalismo temporal:

$$v(t) = 10 \cdot \cos 2\pi 10^3 t \quad V \rightarrow V = 10 \text{ V}$$

$$I = V/Z = 0.06 \cdot e^{j0.4} \text{ A} \quad i(t) = 0.06 \cos(2\pi 10^3 t + 0.4)$$

$$V_{ef} = 10/\sqrt{2} = 7.07 \text{ V}, \quad I_{ef} = 0.06/\sqrt{2} = 0.04 \text{ A}, \quad \Phi = 0.4 \text{ rad}$$

Factor de potencia: $\cos \Phi = 0.3$

$$\text{sen} \Phi = 0.95$$

$$P_a = I_{ef} \cdot V_{ef} \cdot \cos \Phi = 0.09 \text{ W}$$

$$P_R = I_{ef} \cdot V_{ef} \cdot \text{sen} \Phi = 0.23 \text{ W}.$$

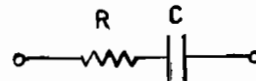


Figura B33

B.5 Formalismo basado en la transformada de Laplace.

En este apartado se va a tratar una nueva forma de analizar circuitos mediante la transformada de Laplace.

La definición y propiedades de esta transformada se pueden estudiar en el apéndice A.2.

B.5-1 Método basado en la transformada de la ecuación del circuito.

Para analizar un circuito mediante la transformada de Laplace se han de seguir los siguientes pasos:

a) Aplicar las leyes de Kirchoff para obtener la

ecuación que represente al circuito, es decir, aquella que me relacione la entrada y la salida del circuito. La ecuación que obtengamos será una ecuación diferencial.

b) Aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación diferencial para obtener una ecuación algebraica en la variable s . De esta ecuación en s despejamos la transformada de Laplace de la señal de salida: $V_o(s)$.

c) Obtener la transformada inversa de la transformada de la salida con el fin de conocer la señal de salida en función del tiempo t : $v_o(t)$. Para ello deberemos expresar la transformada de la salida, $V_o(s)$, como una combinación lineal de funciones cuya transformada inversa ya conozcamos, y lo más simple es expresarlo como suma de fracciones simples.

Analizaremos a continuación los siguientes ejemplos aplicando paso a paso cada uno de los tres puntos anteriores.

Ejemplo 1: Para el circuito de la figura B34 y dada la entrada $v_i(t)$ que se muestra en la misma figura calcular la tensión de salida $v_o(t)$.

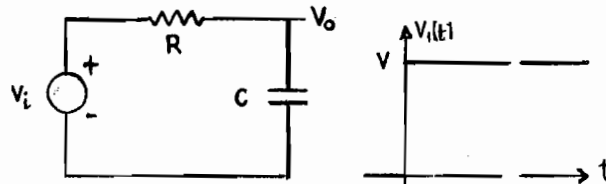


Figura B34

La tensión de entrada $v_i(t)$ es una función escalón proporcional a la función escalón unidad, es decir:

$$v_i(t) = V \cdot u(t)$$

a) Si aplicamos la leyes de Kirchoff obtendremos la ecuación del circuito:

$$V_i(t) = i(t) \cdot R + v_o(t)$$

$$v_i(t) = C \cdot R \cdot \frac{dv_o}{dt} + v_o$$

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_o}{dt}$$

con $v_o(0) = 0$ ya que el condensador estaba inicialmente descargado.

b) Si aplicamos la transformada de Laplace a ambos

miembros de la ecuación del circuito resultará:

$$L[v_1(t)] = L[C \cdot R \cdot dv_o/dt + v_o],$$

utilizando las propiedades del apéndice A.2 tendremos:

$$V \cdot L[u(t)] = CRL[dv_o/dt] + L[v_o],$$

$$V \cdot 1/s = CR[s \cdot V_o(s) - v_o(0)] + V_o(s),$$

como $v_o(0) = 0$ tendremos entonces para la transformada de Laplace de la salida:

$$V_o(s) = \frac{V}{s(CRs+1)}$$

c) En este apartado se descompondrá $V_o(s)$ como suma de fracciones simples para después aplicar la transformada inversa y conocer, en definitiva, $v_o(t)$.

$$V_o(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{CRs+1}$$

Se han de calcular los coeficiente A y B, para ello compararemos las dos expresiones anteriores:

$$V_o(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{CRs+1} = \frac{V}{s(CRs+1)} = \frac{A(CRs+1) + Bs}{s(CRs+1)}$$

igualando los numeradores (que han de coincidir para cualquier valor de la variable s):

$$ACR + B = 0$$

$$B = -VCR, \text{ de este modo } V_o(s) \text{ queda:}$$

$$A = V$$

$$V_o(s) = \frac{V}{s} - \frac{VCR}{CRs+1}$$

aplicando por último la transformada inversa,

$$L^{-1}[V_o(s)] = V \cdot u(t) - V \cdot C \cdot R \cdot e^{-t/RC} / (R \cdot C),$$

$$v_o(t) = V \cdot [1 - e^{-t/RC}] \quad t > 0$$

Ejemplo 1: Para el circuito de la figura B35 y dada la entrada $v_1(t)$ que se muestra en la misma figura calcular la tensión de salida $v_o(t)$.

Para el análisis de este circuito procederemos de manera similar al ejemplo anterior:

a) Ecuación del circuito:

$$V_1(t) = i(t) \cdot R + L \cdot di/dt + v_o(t)$$

$$v_1(t) = C \cdot R \cdot dv_o/dt + LCd^2v_o/dt^2 + v_o$$

$$i(t) = C \cdot dv_o/dt$$

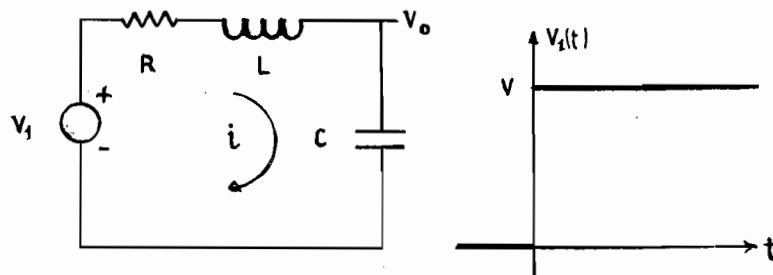


Figura B35

como la tensión inicial en el condensador es cero, entonces $v_o(0)=0$, y como la corriente inicial de la bobina es cero, $i(0)=0$, entonces la dv_o/dt evaluada en $t=0$ es también cero.

b) Transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación del circuito:

$$V_1(s) = LC[s^2V_o(s) - sv_o(0) - dv_o(t)/dt_{t=0}] +$$

$$+ RC[sV_o(s) - v_o(0)] + V_o(s)$$

$$V_1(s) = (LCs^2 + RCs + 1)V_o(s)$$

$$V_o(s) = \frac{V/s}{LCs^2 + RCs + 1}$$

c) Transformada inversa de la salida:

Para darle mayor generalidad a la solución de este problema definimos:

$$V_1(s) = \frac{V}{s}, \quad LC = \frac{1}{\omega_o^2}, \quad \frac{2\delta}{\omega_o} = RC, \quad \delta = \frac{RC}{2} \cdot \omega_o = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$V_o(s) = \frac{V_1(s)}{(s/\omega_o)^2 + 2\delta(s/\omega_o) + 1} = \frac{V_1(s)\omega_o^2}{s^2 + 2\delta\omega_o s + \omega_o^2}$$

Como se sabe se ha de descomponer en factores el denominador para poder expresar la función como suma de fracciones simples. Para ello distinguiremos tres casos:

(i) Las raíces del denominador son reales:

$$s_1 \equiv -\sigma_1 = -\delta\omega_o + \sqrt{\delta^2\omega_o^2 - \omega_o^2}$$

$$s_2 \equiv -\sigma_2 = -\delta\omega_o - \sqrt{\delta^2\omega_o^2 - \omega_o^2}$$

$$-\sigma_1 = \omega_o(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})$$

$$-\sigma_2 = \omega_o(-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})$$

Para que σ_1 y σ_2 sean reales es necesario que el radicando sea positivo : $\delta^2 - 1 > 0$ $\delta > 1$.

en este caso el denominador se puede expresar según:

$$s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2 = (s + \sigma_1)(s + \sigma_2),$$

y la transformada de la salida tendrá la forma:

$$V_o(s) = \frac{V\omega_0^2}{s(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \sigma_1} + \frac{C}{s + \sigma_2} =$$

$$= \frac{A(s + \sigma_1)(s + \sigma_2) + Bs(s + \sigma_2) + C(s + \sigma_1)s}{s(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)}$$

Comparando los numeradores:

$$A(s + \sigma_1)(s + \sigma_2) + Bs(s + \sigma_2) + C(s + \sigma_1)s = V\omega_0^2$$

Han de coincidir para cualquier valor de s , en concreto:

si $s=0$ $A\sigma_1\sigma_2 = V\omega_0^2$ $A = \frac{V\omega_0^2}{(\sigma_1\sigma_2)}$

si $s = -\sigma_1$ $B(-\sigma_1)(-\sigma_1 + \sigma_2) = V\omega_0^2$ $B = \frac{V\omega_0^2}{\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2)}$

si $s = -\sigma_2$ $C(-\sigma_2)(-\sigma_2 + \sigma_1) = V\omega_0^2$ $C = \frac{V\omega_0^2}{\sigma_2(\sigma_2 - \sigma_1)}$

una vez conocido el valor de los coeficientes podemos calcular la transformada inversa de $V_o(s)$:

$$v_o(t) = L^{-1}[V_o(s)] = Au(t) + Be^{-\sigma_1 t} + Ce^{-\sigma_2 t}$$

$$= \frac{V\omega_0^2}{\sigma_1\sigma_2} \left[u(t) + \frac{\sigma_2 e^{-\sigma_1 t} - \sigma_1 e^{-\sigma_2 t}}{\sigma_1 - \sigma_2} \right] = V \left(1 - \frac{\sigma_2 e^{-\sigma_1 t} - \sigma_1 e^{-\sigma_2 t}}{\sigma_2 - \sigma_1} \right)$$

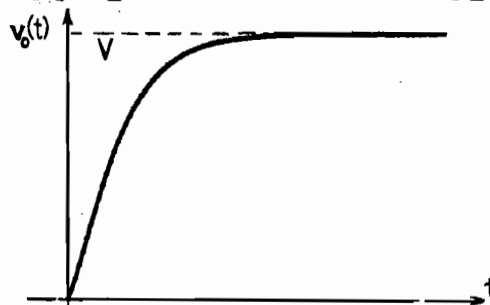


Figura B36

(ii) Raíces del denominador complejas conjugadas:

$$s_1 = \omega_0(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})$$

$$s_2 = \omega_0(-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})$$

con $\delta^2 - 1 < 0$ $\delta < 1$ $\sqrt{\delta^2 - 1} = j\sqrt{1 - \delta^2}$.

Si definimos $\sigma_1 \equiv \sigma w_0$, $w_1 \equiv w_0 \sqrt{1 - \delta^2}$ tendremos,

$$s_1 = -\sigma_1 + jw_1$$

$$s_2 = -\sigma_1 - jw_1$$

El denominador se expresa según:

$$s^2 + 2\delta w_0 s + w_0^2 = (s - s_1)(s - s_2) = (s + \sigma_1 - jw_1)(s + \sigma_1 + jw_1) = (s + \sigma)^2 + w_1^2$$

$$V_o(s) = \frac{Vw_0^2}{s[(s + \sigma_1)^2 + w_1^2]}$$

En este caso el polinomio de segundo grado no se puede factorizar quedándose de la forma:

$$V_o(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s + \sigma_1)^2 + w_1^2} = \frac{A(s + \sigma_1)^2 + Aw_1^2 + Bs^2 + Cs}{s[(s + \sigma_1)^2 + w_1^2]}$$

Comparando los numeradores obtenemos:

términos de 2° grado $A + B = 0$

términos de 1° grado $2A\sigma_1 + C = 0$

términos independientes $A(\sigma_1^2 + w_1^2) = Vw_0^2$,

despejando los coeficientes de las expresiones anteriores tendremos:

$$A = V \quad B = -V \quad C = -2V\sigma_1$$

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{V}{s} - V \frac{s + 2\sigma_1}{(s + \sigma_1)^2 + w_1^2} = \\ &= \frac{V}{s} - V \frac{s + \sigma_1}{(s + \sigma_1)^2 + w_1^2} - V \frac{\sigma_1}{w_1} \frac{w_1}{(s + \sigma_1)^2 + w_1^2} \end{aligned}$$

Aplicando ahora la transformada inversa:

$$v_o(t) = L^{-1}[V_o(s)] = V(u(t) - e^{-\sigma_1 t} \cos w_1 t - \sigma_1/w_1 e^{-\sigma_1 t} \sin w_1 t) =$$

$$= V \cdot \left(1 - \frac{w_1/w_0 \cos w_1 t + \sigma_1/w_0 \sin w_1 t}{w_1/w_0} e^{-\sigma_1 t} \right) =$$

$$= V \cdot \left(1 - \frac{w_0}{w_1} \sin(w_1 t + \delta) e^{-\sigma_1 t} \right) \quad \text{con } \text{tg } \delta = \frac{w_1}{\sigma_1}$$

(iii) Raíz real doble:

Nos encontramos en este caso cuando $\delta = 1$, ahora

$$s_1 = s_2 = -\delta w_0 = -w_0,$$

el denominador se factoriza según la expresión:

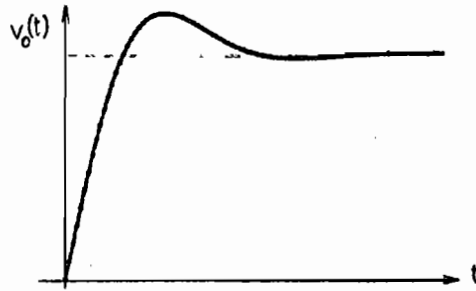


Figura B37

$$s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2 = (s + \omega_0)^2$$

$$V_o(s) = \frac{V\omega_0^2}{s(s + \omega_0)^2}$$

En este caso la separación en fracciones simples será:

$$V_o(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \omega_0} + \frac{C}{(s + \omega_0)^2} = \frac{A(s + \omega_0)^2 + Bs(s + \omega_0) + Cs}{s(s + \omega_0)^2}$$

Comparando los coeficientes de ambos numeradores término a término:

términos de 2º grado $A + B = 0$

términos de 1º grado $2A\omega_0 + \omega_0 + C$

términos independientes $A\omega_0^2 = V\omega_0^2$,

despejando los coeficientes de las expresiones anteriores tendremos:

$$A = V \quad B = -V \quad C = -V\omega_0$$

$$V_o(s) = \frac{V}{s} - V \frac{1}{(s + \omega_0)} - V \frac{\omega_0}{(s + \omega_0)^2}$$

Aplicando ahora la transformada inversa:

$$v_o(t) = L^{-1}[V_o(s)] = V(u(t) - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}) =$$

$$v_o(t) = V \cdot (1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t})$$

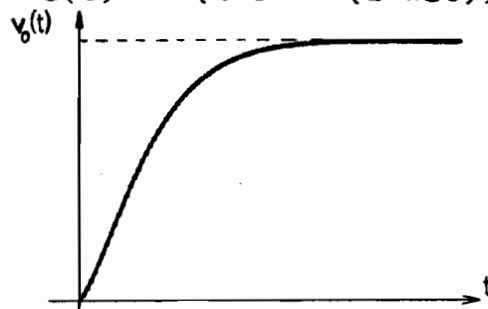


Figura B38

Este tercer paso para calcular la tensión $v_o(t)$ mediante la transformada inversa de $V_o(s)$, ^{no es siempre necesario.} ~~A~~fortunadamente, en gran parte de los problemas de interés podemos extraer información suficiente de $V_o(s)$ sin tener que calcular la señal en función del tiempo $v_o(t)$.

B.5-2 Método basado en la transformada del circuito.
Impedancias.

En la práctica resulta mucho más simple a la hora de analizar un circuito, realizar los pasos 1 y 2 en sentido inverso, es decir, aplicar primero la transformada de Laplace a cada elemento del circuito y aplicar posteriormente las leyes de Kirchoff al circuito transformado. Esto es posible ya que las leyes de Kirchoff son lineales y la transformada también:

$$1^{\text{a}} \text{ ley : } \sum_j^{\text{nudo}} i_j(t) = 0 \qquad \sum_j^{\text{nudo}} I_j(s) = 0$$

$$2^{\text{a}} \text{ ley : } \sum_j^{\text{malla}} v_j(t) = 0 \qquad \sum_j^{\text{malla}} V_j(s) = 0$$

Se ha de conocer por tanto la relación que existe entre $V(s)$ e $I(s)$ para cada elemento:

a) Resistencia:

$$v(t) = i(t) \cdot R \qquad V(s) = I(s) \cdot R$$

A la relación entre $V(s)$ e $I(s)$, en el caso de que sean proporcionales se le llama impedancia. En este caso la impedancia es:

$$Z_R = R \qquad V(s) = I(s) \cdot Z_R$$

y la resistencia se representa por:

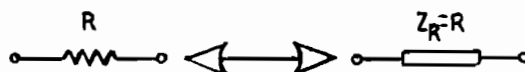


Figura B39

b) Condensador :

$$i(t) = C \cdot dv(t)/dt \quad I(s) = C \cdot [sV(s) - v(0)]$$

Definimos la impedancia del condensador Z_C :

$$Z_C = 1/Cs \quad I(s) = V(s)/Z_C - Cv(0)$$

o bien despejando $V(s)$ $V(s) = I(s)Z_C + v(0)/s$

Ambas relaciones son equivalentes y permiten representar al condensador mediante los siguientes circuitos equivalentes:

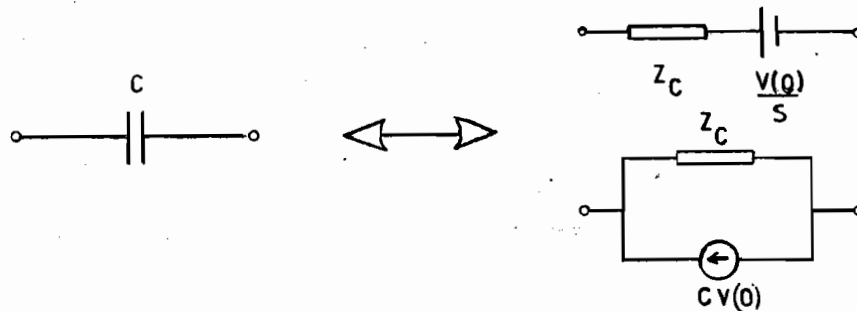


Figura B40

c) Inductor :

$$v(t) = L \cdot di(t)/dt \quad V(s) = L \cdot [sI(s) - i(0)]$$

Definimos la impedancia del inductor Z_L :

$$Z_L = Ls \quad V(s) = I(s) \cdot Z_L - Li(0)$$

o bien despejando $I(s)$ $I(s) = V(s)/Z_L + i(0)/s$

Ambas relaciones son equivalentes y permiten representar al inductor mediante los siguientes circuitos equivalentes:

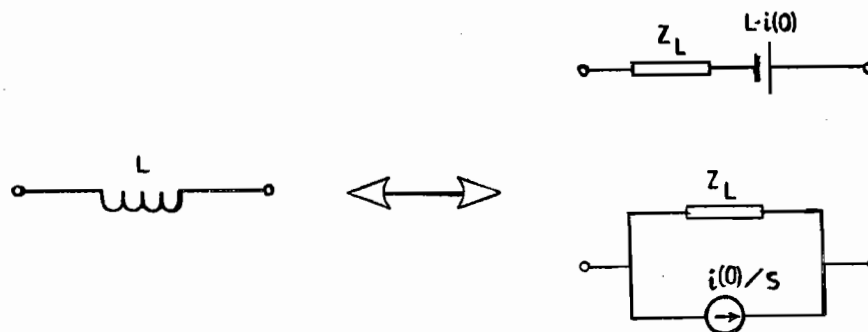


Figura B41

Utilizando estos resultados, obtenemos la transformada de Laplace de $v_o(t)$ mediante el siguiente procedimiento:

a) Aplicación de la transformada de Laplace al

circuito: equivalente a sustituir cada elemento por su modelo en el dominio de la transformada, según se ha visto anteriormente.

b) Aplicación de las leyes de Kirchoff en el dominio de la transformada.

Quedaría aún un tercer paso que es el mismo que el del apartado B.5-1, es decir obtener $v_o(t)$ a partir de $V_o(s)$ mediante la transformada inversa de Laplace.

Se vuelve a recalcar que este método es mucho más rápido y sencillo que el expuesto en el apartado anterior. Veremos su aplicación analizando el circuito de la figura B35.

Ejemplo 2: Analizar el circuito del ejemplo 1 del apartado B.5-1 mediante el procedimiento que se acaba de estudiar.

a) Si sustituimos cada elemento de dicho circuito por su modelo en el dominio de la transformada quedaría un circuito como se muestra en la figura B42.

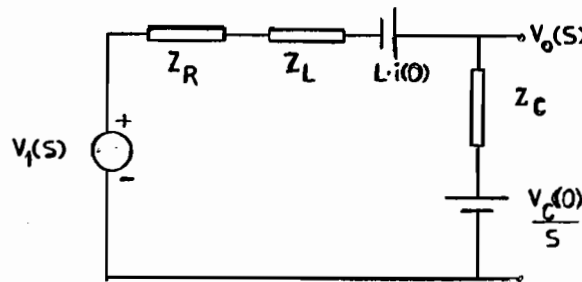


Figura B42

En nuestro caso $v_o(0)=0$ e $i(0)=0$, con lo que desaparecen las fuentes de tensión correspondientes a las condiciones iniciales:

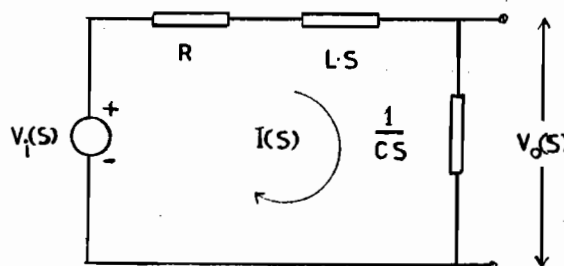


Figura B43

b) Aplicando las leyes de Kirchoff en el dominio de

la transformada tendremos las siguientes expresiones:

$$V_1(s) = I(s)R + LsI(s) + I(s)/Cs$$

$$V_o(s) = I(s)/Cs$$

de donde podemos despejar $V(s)$,

$$V_o(s) = \frac{V_1(s)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

expresión que coincide con la que se obtuvo en el ejemplo del apartado anterior para $V_o(s)$.

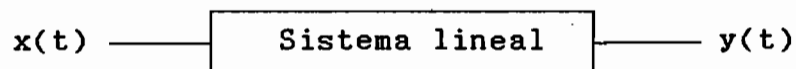
El siguiente paso sería obtener la salida $v_o(t)$ que ya se ha analizado para este circuito.

B.6 Función de transferencia.

B.6.1 Definición. Ejemplos.

Si representamos un circuito como un sistema lineal, excitado por una entrada externa $x(t)$ de forma que responda con una salida $y(t)$ (puede ser una tensión o una corriente cualquiera), se define la función de transferencia del circuito como la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la de la entrada suponiendo que el circuito estaba inicialmente relajado.

Se entiende por una situación de relajación total inicial a aquella en la cual todas las condiciones iniciales son nulas, es decir, condensadores descargados y corrientes por las bobinas nulas.



$$L[x(t)] = X(s)$$

$$L[y(t)] = Y(s)$$

$$T(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (\text{bajo condiciones iniciales nulas})$$

Debido a la linealidad del sistema, $X(s)$ e $Y(s)$ son proporcionales y por tanto $T(s)$ sólo depende del circuito.

Ejemplo 1. Calcular la función de transferencia del circuito de la figura B44.

Definimos como magnitud de entrada $v_1(t)$ y como salida $v_o(t)$, la función de transferencia por tanto,

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

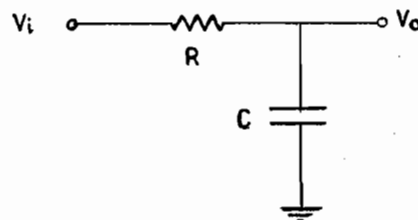


Figura B44

Debido a la hipótesis de que las condiciones iniciales son nulas, cada elemento pasivo se sustituye solo por su impedancia.

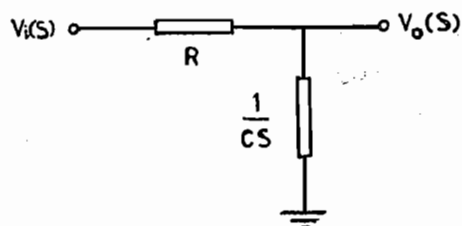


Figura B45

$$v_i(s) = I(s)[R + 1/Cs]$$

$$V_o(s) = I(s)/Cs$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/Cs}{R + 1/Cs} = \frac{1}{RCs + 1}$$

por tanto
$$T(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

Ejemplo 2. Para el circuito de la figura B46 se define ahora la función de transferencia:

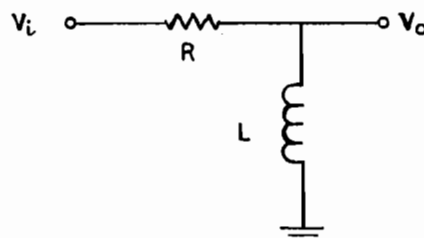


Figura B46

$$T(s) = \frac{I(s)}{V_i(s)} \text{ . Como } V_i(s) = I(s)[R + Ls] \text{ entonces :}$$

$$T(s) = \frac{1}{R + Ls}$$

En este caso la función de transferencia tiene dimensiones de Ω^{-1} .

Ejemplo 3. Para el circuito de la figura B47 se define ahora la función de transferencia:

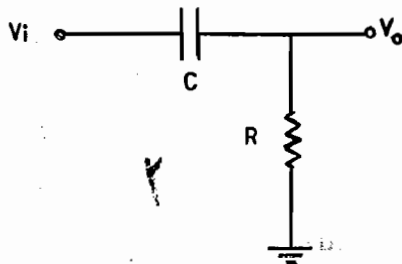


Figura B47

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad \text{Como } V_i(s) = I(s)[R + 1/Cs] \text{ y } V_o(s) = I(s)R$$

$$T(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + 1/Cs} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

Ejemplo 4. Para el circuito de la figura B48 se define ahora la función de transferencia:

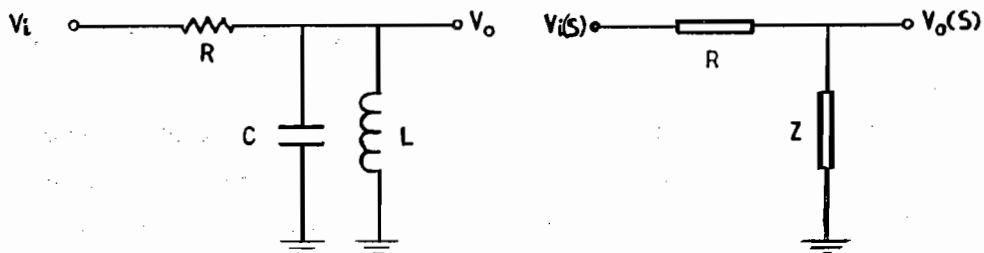


Figura B48

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

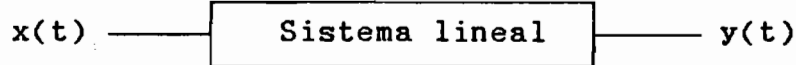
Z es la combinación en paralelo de $1/Cs$ y Ls :

$$Z = \frac{Ls}{1 + LCs^2}$$

$$T(s) = \frac{Z}{R + Z} = \frac{Ls}{R(1 + LCs^2) + Ls} = \frac{(L/R)s}{LCs^2 + L/Rs + 1}$$

B.6-2 Información que se obtiene a partir de la función de transferencia.

1. Obtención de la ecuación diferencial del sistema.



La forma más general de representar la relación entre la salida y la entrada de un sistema lineal es mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

En el caso de que las condiciones iniciales sean nulas, situación para la que se define la función de transferencia podemos calcular la misma aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación diferencial:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}$$

donde Q_m y P_n son polinomios en s de grado m y n respectivamente.

De este resultado podemos concluir lo siguiente:

- Si el sistema es lineal, la función $T(s)$ es racional, es decir, es un cociente de polinomios.

- Los coeficientes de los polinomios del numerador y denominador coinciden con los coeficientes de las derivadas respectivas en la ecuación diferencial. En consecuencia, si conocemos dichos coeficientes conoceremos la ecuación diferencial.

2. Se puede conocer la salida de un sistema inicialmente relajado sin más que conocer la entrada.

En efecto, ya que $T(s) = Y(s)/X(s)$ y además $T(s)$ solo depende del circuito, si conocemos el circuito ($T(s)$) y la entrada $x(t)$ entonces,

$$Y(s) = T(s) \cdot X(s) = T(s) \cdot L[x(t)]$$

$$y(t) = L^{-1}[T(s) \cdot L[x(t)]]$$

En concreto, si la señal de entrada es una señal impulso unidad, $x(t) = \delta(t)$ su transformada es $X(s) = 1$, y la transformada de la salida coincide exactamente con la función de transferencia:

$$Y(s) = T(s) \cdot 1 = T(s)$$

$$y(t) = L^{-1}[T(s)]$$

Es decir, la transformada inversa de la función de transferencia nos proporciona la respuesta del circuito ante una entrada impulso unidad.

3. Información sobre estabilidad del sistema.

Para que un sistema sea estable es necesario que la señal de salida sea cero o tienda a cero en ausencia de entrada; en concreto si la entrada es una señal impulso en $t=0$, como esta señal es nula para $t > 0$ es necesario que la salida tienda a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

sistema estable

$$x(t) = \delta(t) \qquad y(t) = L^{-1}[T(s)] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

Como la función $T(s)$ es racional, podemos descomponerla en fracciones simples y calcular la transformada inversa de cada una por separado. Dichas fracciones simples serán de la forma:

raíz real simple	: $s = \sigma$	$\frac{A}{s - \sigma}$	$\xrightarrow{L^{-1}}$	$e^{\sigma t}$
raíz real múltiple	: $s = \sigma$	$\frac{A}{(s - \sigma)^k}$	$\xrightarrow{L^{-1}}$	$t^{k-1} e^{\sigma t}$
raíces complejas conjugadas	: $s = \sigma \pm j\omega$	$\frac{As + B}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$	$\xrightarrow{L^{-1}}$	$e^{\sigma t} \cos \omega t$ $e^{\sigma t} \sin \omega t$

La respuesta del sistema ante una entrada impulso es por lo tanto del tipo:

$$y(t) = Ae^{\sigma t} + \dots + Bt^{k-1}e^{\sigma t} + \dots + Me^{\sigma t} \cos \omega t + Ne^{\sigma t} \sin \omega t + \dots$$

Todos los términos están modulados por una función exponencial. Para que la salida $y(t)$ tienda a cero cuando

$t \rightarrow \infty$ es necesario que todas las exponenciales sean decrecientes, es decir, $\sigma < 0$ para todas las exponenciales. Como σ es la parte real de la raíz del denominador de $T(s)$ entonces:

"Para que un sistema sea estable es necesario que la parte real de las raíces del denominador, también llamados polos, de la función de transferencia ~~tengan su~~ ^{sea} ~~parte real~~ negativa".

Ejemplo 1. En el circuito de la figura B49 se considera la tensión $v_i(t)$ aplicada como tensión de

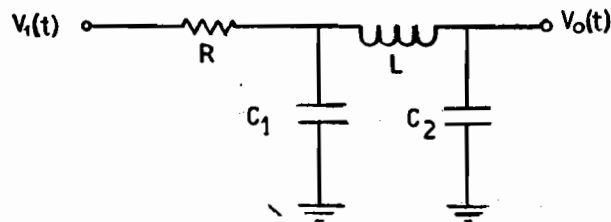


Figura B49

entrada y la señal $v_o(t)$ en los extremos del condensador C_2 como señal de salida. Calcular:

- i) La función de transferencia.
- ii) La salida ante una entrada impulso unidad en $t=0$
- iii) Analizar la estabilidad.
- iv) La ecuación diferencial del circuito.

Analizar este circuito para los dos casos siguientes:

- a) $R=200 \Omega$, $C_1= 2\text{nF}$, $C_2= 18 \text{ nF}$, $L= 5/18 \text{ mH}$.
- b) $R=500 \Omega$, $C_1= 1\text{nF}$, $C_2= 5 \text{ nF}$, $L= 4/5 \text{ mH}$.

Solución:

i) Una vez transformado el circuito como se ve en la figura B50, lo analizamos mediante el método de mallas.

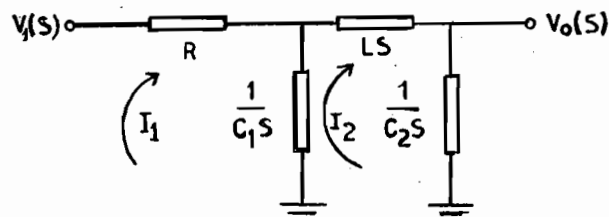


Figura B50

El sistema de ecuaciones que resulta es :

$$V_1 = I_1(R + 1/C_1s) - I_2(1/C_1s)$$

$$0 = -I_1(1/C_1s) + I_2(1/C_1s + Ls + 1/C_2s)$$

de estas ecuaciones debemos despejar I_2 ya que la salida $V_o = I_2 \cdot 1/C_2s$

$$V_o = I_2 \cdot 1/C_2s = \frac{V_1 \cdot 1/C_1s \cdot 1/C_2s}{(R + 1/C_1s)(1/C_1s + Ls + 1/C_2s) - (1/C_1s)^2}$$

multiplicando numerador y denominador por C_1sC_2s ,

$$V_o = \frac{V_1}{(RC_1s + 1)(C_2/C_1 + LC_2s^2 + 1) - C_2/C_1}$$

la función de transferencia quedará:

$$T(s) = \frac{1}{LRC_1C_2s^3 + LC_2s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1}$$

sustituyendo los valores de los elementos resulta:

$$a) \quad T(s) = \frac{1}{2 \cdot 10^{-18}s^3 + 5 \cdot 10^{-12}s^2 + 4 \cdot 10^{-8}s + 1}$$

$$b) \quad T(s) = \frac{1}{2 \cdot 10^{-18}s^3 + 4 \cdot 10^{-12}s^2 + 3 \cdot 10^{-8}s + 1}$$

ii) Como sabemos, la respuesta ante una señal impulso unidad es la transformada inversa de la función de transferencia. Para obtenerla, hemos de descomponer $T(s)$ como suma de fracciones simples.

Caso a): Calculamos las raíces del denominador.

$$P(s) = 2 \cdot 10^{-18}s^3 + 5 \cdot 10^{-12}s^2 + 4 \cdot 10^{-8}s + 1$$

llamando $10^{-8} \cdot s \equiv z$ entonces $P(z) = 2z^3 + 5z^2 + 4z + 1$, cuyas raíces son :

$$z_1 = -1 \quad z_2 = -1/2 \quad z_3 = -1$$

y las raíces de $P(s)$:

$$s_1 = -10^8 \quad s_2 = -0.5 \cdot 10^8 \quad s_3 = -10^8$$

La función de transferencia se puede factorizar de la forma :

$$T(s) = \frac{10^{18}/2}{(s + 10^8)^2 (s + 1/2 \cdot 10^8)}$$

y descomponer en fracciones simples:

$$T(s) = \frac{A}{s+10^8} + \frac{B}{(s+10^8)^2} + \frac{C}{s+1/2 \cdot 10^8}$$

$$= \frac{A(s+1/2 \cdot 10^8)(s+10^8) + B(s+1/2 \cdot 10^8) + C(s+10^8)^2}{(s+1/2 \cdot 10^8)(s+10^8)^2}$$

Como el numerador ha de ser $10^{18}/2$ para cualquier valor de s :

$$\text{si } s = -10^8 \quad B(-10^8 + 1/2 \cdot 10^8) = 10^{18}/2 \quad B = -10^{12}$$

$$\text{si } s = -1/2 \cdot 10^8 \quad C(10^8 - 1/2 \cdot 10^8) = 10^{18}/2 \quad C = 2 \cdot 10^8 \quad 10^{12}$$

para calcular A podemos imponer por ejemplo, que el coeficiente del término de segundo grado en el numerador sea cero,

$$A+C=0 \quad A=-C = -2 \cdot 10^8 = -10^{12}$$

Aplicando la transformada inversa,

$$v_o(t) = L^{-1}[T(s)] = -2 \cdot 10^8 e^{-10^8 t} - 10^{12} t e^{-10^8 t} + 2 \cdot 10^8 e^{-10^8/2 \cdot t} \quad V$$

Caso b): Calculamos las raíces del denominador.

$$P(s) = 2 \cdot 10^{-18} s^3 + 4 \cdot 10^{-12} s^2 + 3 \cdot 10^{-6} s + 1$$

llamando $10^{-6} \cdot s \equiv z$ entonces $P(z) = 2z^3 + 4z^2 + 3z + 1$, cuyas raíces son :

$$z_1 = -1 \quad z_2 = -1/2 + j1/2 \quad z_3 = -1/2 - j1/2$$

y las raíces de $P(s)$:

$$s_1 = -10^6 \quad s_2 = -0.5 \cdot 10^6 (1-j) \quad s_3 = -0.5 \cdot 10^6 (1+j)$$

La función de transferencia se puede factorizar de la forma :

$$T(s) = \frac{10^{18}/2}{(s+10^8)(s+1/2 \cdot 10^8(1-j))(s+1/2 \cdot 10^8(1+j))}$$

La pareja de factores correspondientes a los polos complejos la podemos agrupar de la forma:

$$(s+1/2 \cdot 10^8(1-j))(s+1/2 \cdot 10^8(1+j)) = (s+1/2 \cdot 10^8)^2 + (1/2 \cdot 10^8)^2$$

y descomponer en fracciones simples:

$$T(s) = \frac{A}{s+10^8} + \frac{Bs+C}{(s+1/2 \cdot 10^8)^2 + (1/2 \cdot 10^8)^2}$$

$$= \frac{A(s^2 + 10^{12}/2 + s10^8) + B(s^2 + 10^8 s) + C(s+10^8)}{(s+10^8)[(s+1/2 \cdot 10^8)^2 + (1/2 \cdot 10^8)^2]}$$

Igualando los coeficientes de los dos numeradores:

$$A+B=0$$

$$C=0$$

$$10^8 A + 10^8 B + C = 0$$

$$A = 10^8$$

$$10^{12}/2 \cdot A + 10^8 C = 10^{18}/2$$

$$B = -10^8$$

$$T(s) = \frac{10^8}{s+10^8} - \frac{10^8 s}{(s+1/2 \cdot 10^8)^2 + (1/2 \cdot 10^8)^2}$$

Aplicando la transformada inversa,

$$v_o(t) = L^{-1}[T(s)] = 10^8 e^{-10^8 t} - 10^8 [e^{-10^8/2 t} \cos(10^8/2 \cdot t) - e^{-10^8/2 t} \sin(10^8/2 \cdot t)]$$

En ambos casos la señal se atenúa con el tiempo hasta anularse según una dependencia exponencial decreciente con constantes de tiempo del orden de microsegundos.

iii) Como ya se ha calculado, tanto en el caso a) como en el b), la parte real de las raíces del denominador es negativa y la salida decrece por tanto, exponencialmente en el tiempo ante una entrada impulso unidad. El sistema es por tanto estable.

iv) La ecuación diferencial del circuito se puede obtener fácilmente a partir de la función de transferencia:

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LRC_1 C_2 s^3 + LC_2 s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1}$$

$$V_i(s) = (LRC_1 C_2 s^3 + LC_2 s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1) \cdot V_o(s),$$

$$v_i(t) = RLC_1 \frac{d^3 v_o}{dt^3} + LC_2 \frac{d^2 v_o}{dt^2} + R(C_1 + C_2) \frac{dv_o}{dt} + v_o$$

4. Respuesta en frecuencia del sistema.

Analizaremos ahora la respuesta de un sistema con una función de transferencia $T(s) = Q_m(s)/P_n(s)$ ante una entrada armónica $x(t) = X_m \cdot e^{j\omega_0 t}$.

$$\text{Como } T(s) = Y(s)/X(s), \quad Y(s) = T(s) \cdot X(s).$$

Calculamos $L[x(t)] = X(s) = X_m \cdot 1/(s - j\omega_0)$, entonces

$$Y(s) = \frac{Q_m(s) \cdot X_m}{P_n(s)(s - j\omega_0)}$$

Intentaremos separar $Y(s)$ en forma de una suma de dos fracciones:

$$\frac{A}{(s-j\omega_0)} + \frac{R(s)}{P_n(s)} = \frac{AP_n(s) + (s-j\omega_0) \cdot R(s)}{(s-j\omega_0) \cdot P_n(s)}$$

A y $R(s)$ se desconocen en principio pero se pueden calcular igualando los numeradores de las dos expresiones anteriores:

$$AP_n(s) + (s-j\omega_0) \cdot R(s) = Q_m(s)X_m$$

igualdad válida para cualquier valor de s . En concreto, si hacemos $s = j\omega_0$, tendremos $AP_n(j\omega_0) = Q_m(j\omega_0)X_m$ de donde se obtiene:

$$A = X_m \frac{Q_m(j\omega_0)}{P_n(j\omega_0)} = X_m \cdot T(j\omega_0)$$

donde $T(j\omega_0)$ es el valor de la función de transferencia evaluada en $s = j\omega_0$ siendo ω_0 la frecuencia angular de la señal de entrada.

El cociente $R(s)/P_n(s)$ es una función racional cuyo denominador coincide con el de la función de transferencia, por tanto, todas sus raíces tienen parte real negativa (condición de estabilidad). Para calcular su transformada inversa lo descomponemos en suma de fracciones simples obteniendo una suma de términos que decaen exponencialmente con el tiempo. Se trata por tanto de un término transitorio, que al cabo de un cierto tiempo habrá desaparecido.

$$\text{El término } \frac{T(j\omega_0) \cdot X_m}{(s-j\omega_0)},$$

corresponde a la respuesta permanente, que se mantiene mientras lo haga la entrada. La parte de salida correspondiente a este término será la respuesta permanente o estacionaria y vale:

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{T(j\omega_0) \cdot X_m}{(s-j\omega_0)} \right] = T(j\omega_0) X_m e^{j\omega_0 t}$$

En resumen, la respuesta estacionaria a una entrada armónica es también armónica y se obtiene simplemente

multiplicando la entrada por la función de transferencia evaluada en $j\omega_0$, siendo ω_0 la frecuencia angular de la entrada y por tanto de la salida.

Como $T(j\omega_0)$ es un número complejo, se podrá expresar de la forma $T(j\omega_0) = |T(j\omega_0)| \cdot e^{j\phi}$. En consecuencia:

$$y(t) = |T(j\omega_0)| \cdot X_m \cdot e^{j(\omega_0 t + \phi)}$$

La amplitud de la salida es la amplitud de la entrada multiplicada por el módulo de la función de transferencia evaluada en $j\omega_0$.

La fase de la salida se obtiene sumando a la fase de la entrada la de la función de transferencia.

Ejemplo 2. Dado el circuito de la figura B51 con $R_1 = 1k\Omega$, $C_1 = 1nF$, $C_2 = 10nF$, $L = 560\mu H$.

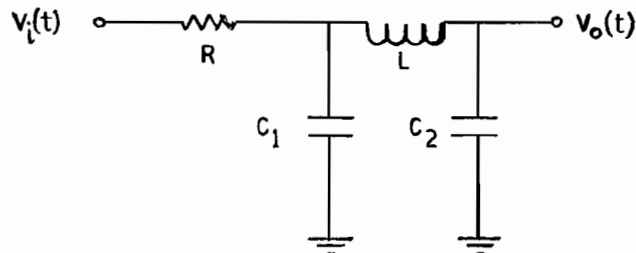


Figura B51

Si la tensión de entrada $v(t)$ es una señal armónica con amplitud 1 V y frecuencia 100000 Hz, obténgase la señal de salida.

Solución: Como conocemos la función de transferencia del circuito de la figura (ejemplo 1 de este apartado), basta con evaluarla en $j\omega$, siendo $\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 100000$.

$$T(s) = \frac{1}{LRC_1C_2s^3 + LC_2s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1}$$

$$T(j\omega) = \frac{1}{LRC_1C_2(j\omega)^3 + LC_2(j\omega)^2 + R(C_1 + C_2)j\omega + 1}$$

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC_2 + j[R(C_1 + C_2)\omega - LRC_1C_2\omega^3]}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$T = 0.177 \cdot e^{j1.35}$$

La función de salida será:

$$v_o(t) = 0.177 \cdot e^{j(2 \cdot \pi \cdot 100000 \cdot t + 1.35)} \text{ V.}$$

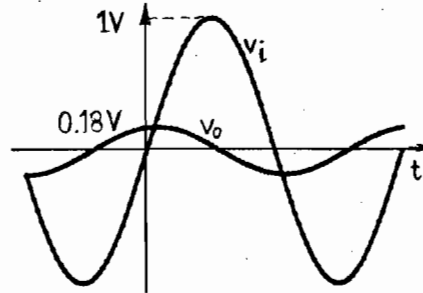


Figura B52

Conocida la función de transferencia de un sistema podemos conocer la salida ante una entrada armónica para cualquier frecuencia que tenga esta. Conocida la función de transferencia conoceremos pues la respuesta en frecuencia del sistema.

B.6-3 Diagrama de Bode.

Para representar gráficamente la respuesta en frecuencia de un sistema se utiliza el diagrama de Bode, que representa tanto la amplitud como la fase de la función de transferencia en función de la frecuencia, en concreto representa:

- $20 \cdot \log_{10}|T(j\omega)|$ en función de $\log_{10}\omega$.
- Φ en función de $\log_{10}\omega$.

Definiciones:

Sea H una magnitud cualquiera; si esta magnitud la expresamos como $20 \cdot \log_{10}(H)$ se dice que esta magnitud está expresada en decibelios. Si # Potencia $10 \cdot \log_{10}^{(H)}$

Dadas dos frecuencias w_1 y w_2 se dicen que su diferencia es una década cuando $w_2 = 10 \cdot w_1$, o bien $\log w_2 - \log w_1 = 1$.

Veamos algunos casos particulares simples:

1. Sistema con un solo polo.

La función de transferencia para este circuito es:

$$T(s) = \frac{1/Cs}{R+1/Cs} = \frac{1}{RCs+1}$$

si llamamos $RC \equiv \tau$ o bien $w_c = 1/RC$ entonces,

$$T(s) = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1}{s/\omega_c + 1}$$

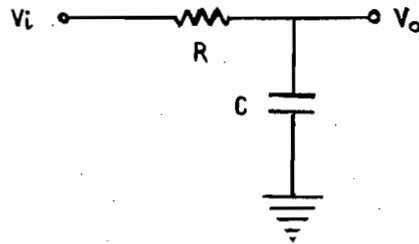


Figura B53

Para obtener la respuesta en frecuencia para cualquier ω evaluamos $T(s)$ en $s=j\omega$.

$$T(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega/\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}} e^{-j\arctg(\omega/\omega_c)}$$

Para representar $20 \cdot \log_{10} |T(j\omega)|$ evaluamos el valor de esta magnitud para frecuencias muy altas o muy bajas, tomando como referencia la frecuencia ω_c , es decir, serán bajas frecuencias aquellas que verifiquen $\omega \ll \omega_c$, y altas frecuencias, $\omega \gg \omega_c$.

$$+20 \cdot \log_{10} |T(j\omega)| \approx 20 \cdot \log_{10} \sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2} = -10 \cdot \log_{10} (1+(\omega/\omega_c)^2)$$

$$\text{Si } \omega \ll \omega_c, \omega/\omega_c \ll 1, 20 \cdot \log_{10} |T(j\omega)| \approx -10 \cdot \log_{10} (1) = 0$$

$$\text{Si } \omega \gg \omega_c, \omega/\omega_c \gg 1, 20 \cdot \log_{10} |T(j\omega)| \approx -20 \cdot \log_{10} (\omega/\omega_c) = -20 \cdot \log_{10} (\omega) + 20 \cdot \log_{10} (\omega_c)$$

Tomando $\log \omega$ como variable independiente, la expresión anterior es la de una recta cuya pendiente es -20, es decir, si ω se multiplica por 10, ($\log \omega$ se incrementa en una unidad) entonces $20 \cdot \log_{10} |T(j\omega)|$ disminuye en 20 decibelios. La pendiente es pues de -20 dB/década.

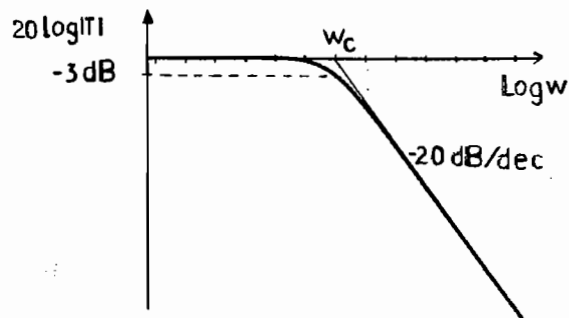


Figura B54

Si $w=w_c$, $20 \cdot \log_{10}|T(jw)| = -20 \cdot \log_{10} \sqrt{2} \approx -3$ dB.

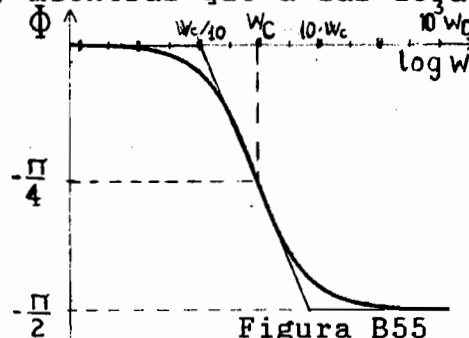
Para representar la fase también estudiamos el comportamiento para altas y bajas frecuencias.

Si $w \ll w_c$, $w/w_c \ll 1$, $\Phi = -\arctg(w/w_c) \approx 0$.

Si $w \gg w_c$, $w/w_c \gg 1$, $\Phi = -\arctg(w/w_c) \approx -\arctg(\infty) = -\pi/2$.

Si $w=w_c$, $w/w_c=1$, $\Phi = -\arctg(1) \approx -\pi/4$.

El circuito apenas afecta a las señales de baja frecuencia, mientras que a las de alta frecuencia las



atenúa y desfasa. Tiene un comportamiento de filtro paso-baja.

2. Sistema con un polo y un cero.

La función de transferencia para este circuito es:

$$T(s) = \frac{R}{R+1/Cs} = \frac{RCs}{RCs+1}$$

si llamamos $RC \equiv \tau$ o bien $w_c = 1/RC$ entonces,

$$T(s) = \frac{s/w_c}{s/w_c+1}$$

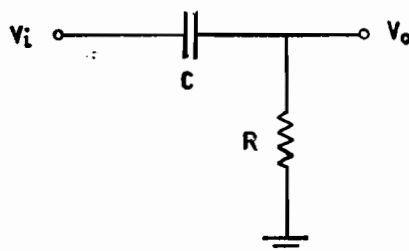


Figura B56

Para obtener la respuesta en frecuencia para cualquier w evaluamos $T(s)$ en $s=jw$.

$$T(jw) = \frac{jw/w_c}{1+jw/w_c} = \frac{w/w_c}{\sqrt{1+(w/w_c)^2}} e^{j(\pi/2 - \arctg(w/w_c))}$$

$$20 \cdot \log_{10} |T(j\omega)| = 20 \cdot \log_{10}(\omega/\omega_c) - 20 \cdot \log_{10} \sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}$$

El primer término es la ecuación de una recta de pendiente positiva 20 dB/dec. El segundo término es análogo al del apartado anterior. El término $|T(j\omega)|$ será la suma de los dos términos anteriores.

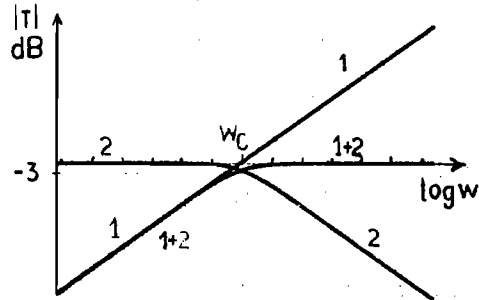


Figura B57

Análogamente la fase se puede obtener como la suma de dos términos; el primero constante de valor $\pi/2$ y el segundo análogo al del apartado anterior.

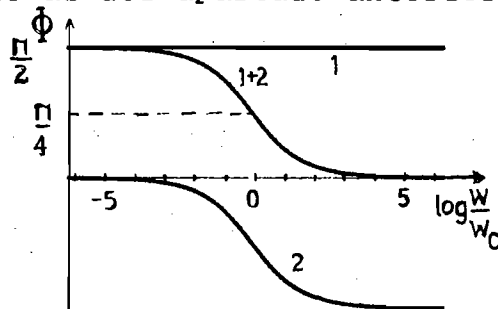


Figura B58

En este caso, el sistema no modifica la amplitud ni la fase de las señales de alta frecuencia. Se comporta como un filtro paso-alta.

3. Sistema con un polo doble.

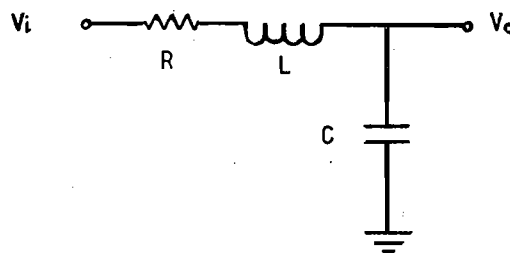


figura B59

La función de transferencia para este circuito es:

$$T(s) = \frac{1/Cs}{1/Cs + R + Ls} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

si llamamos $LC \equiv 1/w_c^2$, $w_c = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, $RC \equiv 2\delta/w_c$, $\delta = R/2 \cdot \sqrt{C/L}$

Con estas definiciones la función de transferencia se expresa en una forma más general:

$$T(s) = \frac{1}{s^2/w_c^2 + 2\delta s/w_c + 1}$$

Para obtener la respuesta en frecuencia para cualquier w evaluamos $T(s)$ en $s=jw$.

$$T(jw) = \frac{1}{1 - w^2/w_c^2 + j2\delta w/w_c}$$

$$|T(jw)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - w^2/w_c^2)^2 + 4\delta^2 w^2/w_c^2}} \quad \Phi = -\arctg \frac{2\delta w/w_c}{1 - w^2/w_c^2}$$

Suponemos que la función de transferencia tiene un polo doble, o dos polos complejos conjugados. Para ello es necesario que $4\delta^2/w_c^2 - 4/w_c^2 \leq 0$, $\delta^2 - 1 \leq 0$, $\delta^2 \leq 1$, $\delta \leq 1$.

Estudiamos el comportamiento para altas y bajas frecuencias:

$$\text{Si } w \ll w_c, \quad 20 \cdot \log_{10} |T(jw)| = -20 \cdot \log_{10} \sqrt{(1 - w^2/w_c^2)^2 + 4\delta^2 w^2/w_c^2} \\ \approx -20 \log(1) = 0$$

$$\text{Si } w \gg w_c, \quad 20 \cdot \log_{10} |T(jw)| = -20 \cdot \log_{10} \sqrt{(-w^2/w_c^2)^2} \\ \approx -40 \log(w/w_c)$$

La asíntota para altas frecuencias es una recta de pendiente -40dB/dec , doble de la que se obtendría cuando el polo era simple.

$$\text{Si } w = w_c, \quad 20 \cdot \log_{10} |T(jw)| = -20 \cdot \log_{10} \sqrt{4\delta^2} = -20 \log(2\delta).$$

Por ejemplo, si $\delta = 0.1$ $-20 \log(2\delta) = 13.98 \text{ dB}$
 si $\delta = 0.5$ $-20 \log(2\delta) = 0 \text{ dB}$
 si $\delta = 1/\sqrt{2}$ $-20 \log(2\delta) = -3 \text{ dB}$

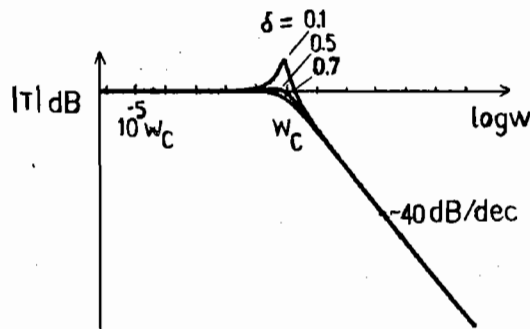


Figura B60

Análogamente para la fase:

Si $\omega < \omega_c$, $\Phi \approx -\arctg(0) = 0$

Si $\omega = \omega_c$, $\Phi \approx -\arctg(\infty) = -\pi/2$

Si $\omega > \omega_c$, $\Phi \approx -\pi$

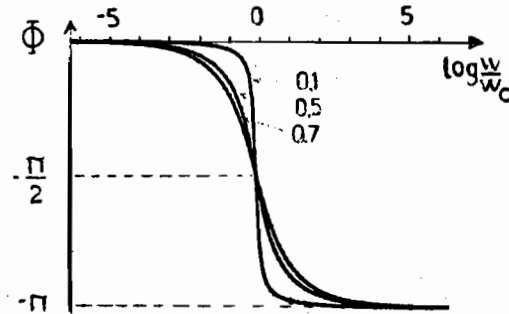


Figura B61

4. Filtro paso-banda resonante.

Como ejemplo de filtro paso-banda estudiaremos el circuito de la figura B62. Llamamos $Z = Ls + 1/Cs$.

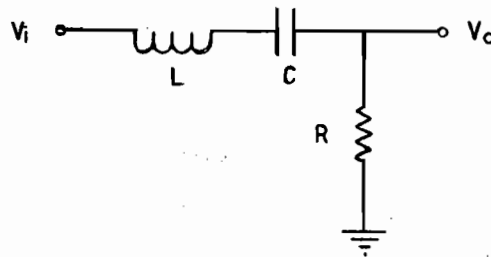


Figura B62

La función de transferencia del circuito será :

$$T(s) = \frac{R}{R + Z(s)}$$

Para estudiar la respuesta en frecuencia evaluamos T en $j\omega$:

$$T(j\omega) = \frac{R}{R + Z(j\omega)} \quad \text{con } Z(j\omega) = \frac{1 - LC\omega^2}{j\omega C}$$

La máxima salida se obtendrá cuando la frecuencia de la entrada sea $\omega = 1/\sqrt{LC}$, en este caso $1 - LC\omega^2 = 0$ y $Z(j\omega) = 0$. Cuando esto ocurra, $T(j\omega) = 1$ y la salida coincidirá con la entrada. Estudiemos el diagrama de Bode de este circuito:

$$T(j\omega) = \frac{R}{R + (1 - LC\omega^2)/(j\omega C)} = \frac{j\omega CR}{(1 - LC\omega^2) + j\omega CR}$$

$$= \frac{jw/w_1}{1-w^2/w_0^2+j2\delta w/w_0}, \quad w_1 = \frac{1}{CR}, \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \frac{2\delta}{w_0} = \frac{1}{w_1}, \quad \delta = \frac{R\sqrt{C}}{2L}$$

Como ya se ha analizado la dependencia con la frecuencia de los términos jw/w_1 y $1/(1-w^2/w_0^2+j2\delta w/w_0)$ por separado, el diagrama de Bode será la suma de ambos.

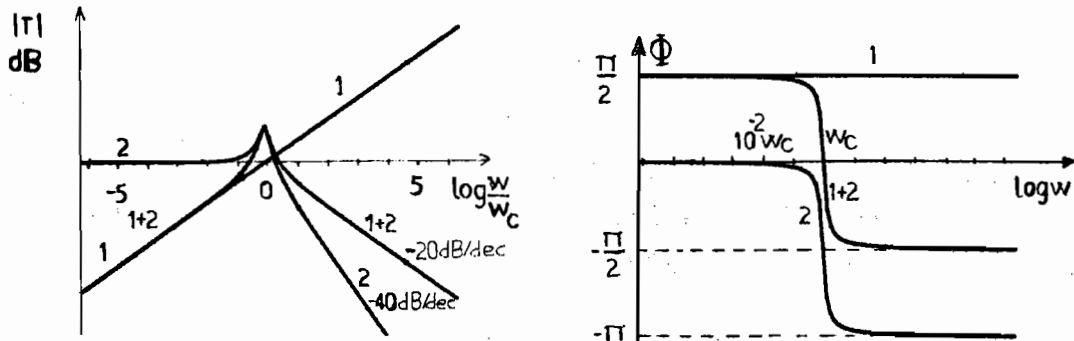


Figura B63

El circuito solo deja pasar las señales con frecuencias próximas a w_0 (banda de frecuencias) mientras que atenúa y desfasa las señales con frecuencias mayores y menores.

Ejemplo 1. Representación del diagrama de Bode para el circuito de la figura B49 tomando v_1 como entrada y v_o como salida para los casos:

- a) $R = 200 \Omega$, $C_1 = 2 \text{ nF}$, $C_2 = 18 \text{ nF}$, $L = 5/18 \text{ mH}$.
- b) $R = 500 \Omega$, $C_1 = 1 \text{ nF}$, $C_2 = 5 \text{ nF}$, $L = 0.8 \text{ mH}$.

Estos dos casos han sido estudiados en el ejemplo 1 del apartado B.6-2. La función de transferencia es:

$$T(s) = \frac{1}{LRC_1C_2s^3 + LC_2s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1}$$

También se obtuvieron para los dos casos las siguientes factorizaciones:

$$a) T(s) = \frac{10^{10}/2}{(s+10^6)^2(s+1/2 \cdot 10^6)} = \frac{1}{(s/w_1+1)^2(s/w_2+1)}$$

con $w_1=10^6$ y $w_2=0.5 \cdot 10^6$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } T(s) &= \frac{10^{18}/2}{(s+10^6)(s+1/2 \cdot 10^6(1-j))(s+1/2 \cdot 10^6(1+j))} \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 10^{-18}(s+10^6)(s^2+10^6s+10^{12}/2)} \\
 &= \frac{1}{(s/w_1+1)(s^2/w_2^2+2\delta s/w_2+1)} \quad \text{con } \begin{matrix} w_1=10^6 \\ w_2=10^6/\sqrt{2} \\ \delta=1/\sqrt{2} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

a) La respuesta en frecuencia nos vendrá dada por:

$$T(jw) = \frac{1}{(jw/w_1+1)^2(jw/w_2+1)}$$

$$|T(jw)| = \frac{1}{\left[\sqrt{(w^2/w_1^2+1)} \right]^2 \sqrt{(w^2/w_2^2+1)}}$$

$$20 \log |T(jw)| = -20 \log(\sqrt{1+w^2/w_1^2}) - 20 \log(\sqrt{1+w^2/w_1^2}) - 20 \log(\sqrt{1+w^2/w_2^2})$$

$$\Phi = -\arctg(w/w_1) - \arctg(w/w_1) - \arctg(w/w_2).$$

De este resultado se deduce que el diagrama de Bode se obtendrá como la suma de tres términos, cada uno de ellos correspondiente a un raíz. En este caso los dos primeros términos coinciden ya que una de las raíces es doble. La forma del diagrama de Bode para cada uno de los términos individuales ya ha sido estudiado por lo que el diagrama total se puede obtener directamente.

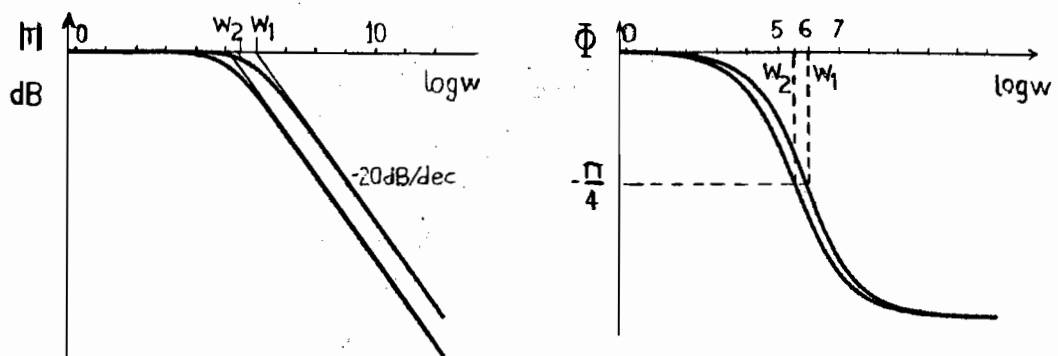


Figura B64

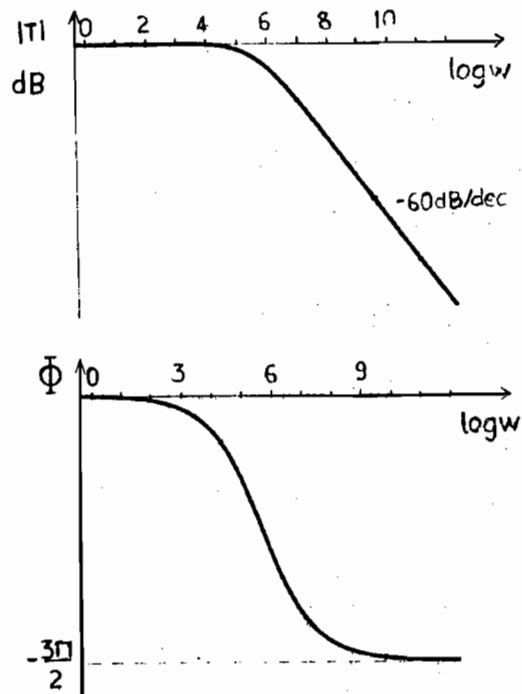


Figura B65

b) En este caso,

$$T(j\omega) = \frac{1}{(j\omega/w_1 + 1)(1 - \omega^2/w_2^2 + j2\delta\omega/w_2)}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2/w_1^2 + 1)} \sqrt{((1 - \omega^2/w_2^2)^2 + 4\delta^2\omega^2/w_2^2)}}$$

$$20 \log |T(j\omega)| = -20 \log \sqrt{(1 + \omega^2/w_1^2)} - 20 \log \sqrt{(1 - \omega^2/w_2^2)^2 + 4\delta^2\omega^2/w_2^2}$$

$$\Phi = -\arctg(\omega/w_1) - \arctg \frac{2\delta\omega/w_2}{1 - \omega^2/w_2^2}$$

El diagrama de bode es la suma de dos términos cuya forma se ha estudiado anteriormente.

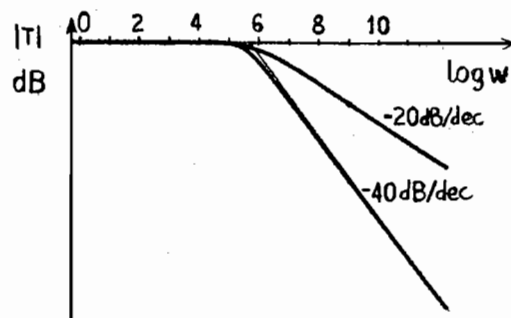


Figura B66

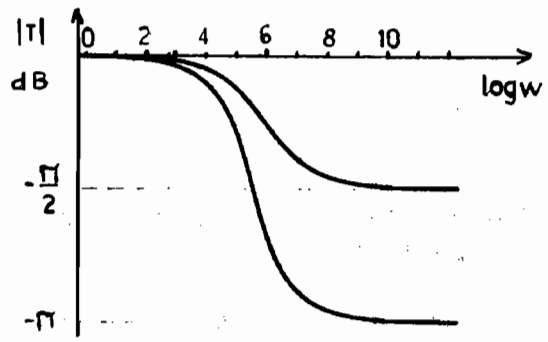


Figura B66

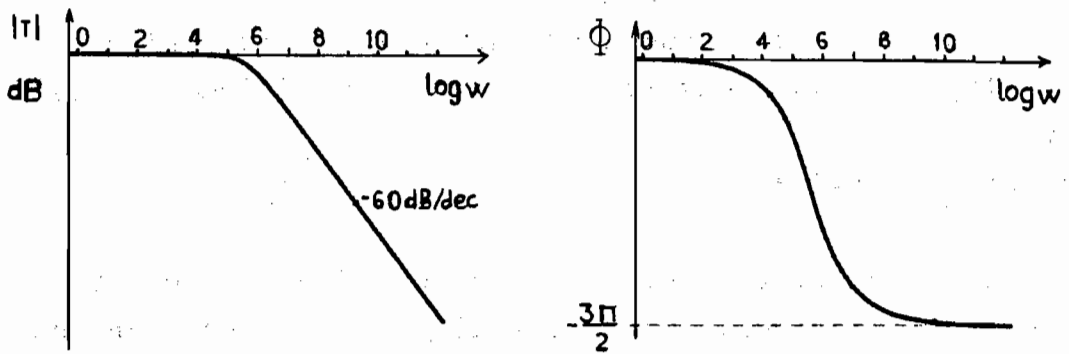


Figura B67

B.7 Problemas:

1.- Obtenga la impedancia equivalente de las asociaciones de la figura B68. $\zeta = 1 \text{ kHz}$.

Solución: a) $24.7 - j \cdot 155.2 \ \Omega$ b) $1725 - j \cdot 257 \ \Omega$ c) $3.98 \cdot e^{j \cdot 270} \ \text{M}\Omega$

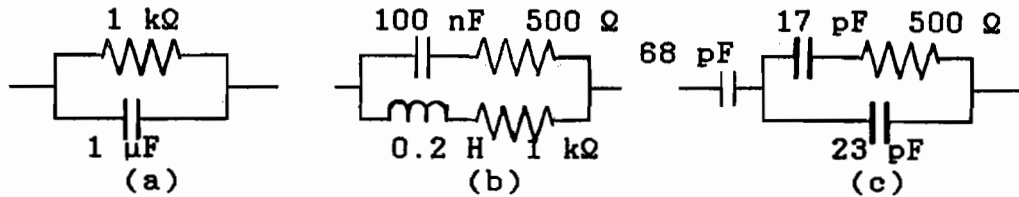


Figura B68

2.- Calcule la frecuencia para la cual la intensidad que circula por las ramas de la figura B69 tiene la misma amplitud.

Solución: 72343 Hz

3.- En el circuito del problema anterior (Figura B69), calcule la intensidad que circula por la fuente de tensión, si su amplitud es $V_m = 5 \text{ V}$, cuando la tensión instantánea que proporciona es cero. Suponga que la frecuencia es la calculada en el problema anterior.

Solución: $\pm 1.136 \text{ mA}$

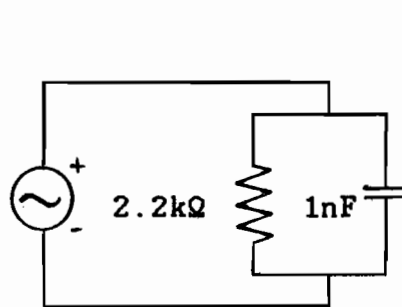


Figura B69

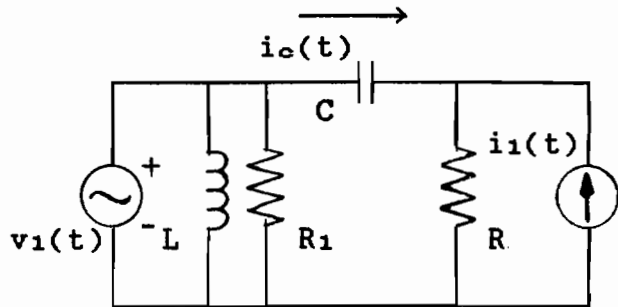


Figura B70

4.- Obtenga la intensidad que circula por el condensador del circuito de la figura B70 si:

$$R = 10 \text{ k}\Omega \quad C = 1 \ \mu\text{F} \quad L = 1 \ \mu\text{H} \quad \omega = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$i_1(t) = 1 \cdot \cos(\omega t + \pi/2) \text{ mA} \quad v_1(t) = 10 \cdot \cos(\omega t) \text{ V}$$

Solución: $1.41 \cdot \cos(\omega t - 0.685) \text{ mA}$

5.- Para el circuito de la figura B71, obtenga:

a) La frecuencia a la cual v_o está en fase con v_1 .

b) La relación entre R_1 , R_2 , C_1 , C_2 para que, a la frecuencia anterior $v_o = v_1/3$.

Solución: a) $\omega = 1/\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}$

b) $R_1/R_2 + C_2/C_1 = 2$

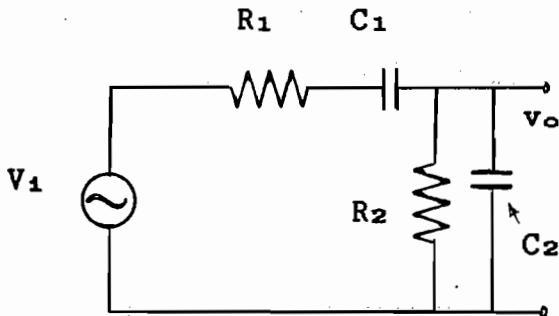


Figura B71

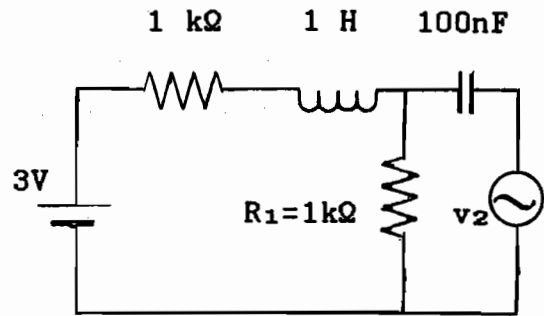


Figura B72

6.- Calcule los valores extremos de la intensidad que circula por la resistencia R_1 del circuito de la figura B72 y el valor de esa corriente cuando la tensión de la fuente $v_2 = 5 \cdot \cos(\omega t)$ con frecuencia 1 kHz alcanza su valor instantáneo máximo.

Solución: 4.28, -1.28 mA ; 2.365 mA

7.- Dado el circuito de la figura B73, obtenga la intensidad que circula por R_1 cuando se aplican las señales:

$$v_1(t) = 2 \cdot \sin(\omega t) \text{ V} \quad v_2(t) = 3 \cdot \cos(\omega t + \pi/4) \quad \omega = 1000 \text{ s}^{-1}$$

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega \quad R_2 = 2 \text{ k}\Omega \quad C = 0.35 \text{ }\mu\text{F} \quad L = 1 \text{ H}$$

Solución: $i = 1.507 \cdot \cos(\omega t + 0.41) \text{ mA}$

8.- En el circuito de la figura B74, obtenga la corriente $i(t)$ que circula si $v(t) = 5 \cdot \cos(\omega_1 t) + 2 \cdot \cos(\omega_2 t - \pi/4) \text{ V}$ con $f_1 = 10 \text{ kHz}$ y $f_2 = 100 \text{ kHz}$

Solución: $42.3 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^4 t - 0.56) + 3.14 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^5 t - 2.198) \text{ mA}$

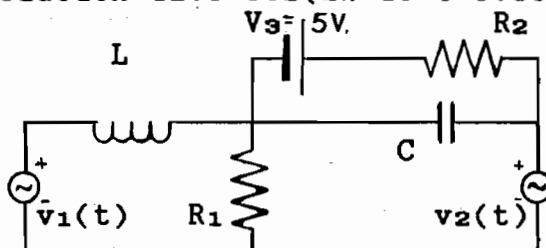


Figura B73

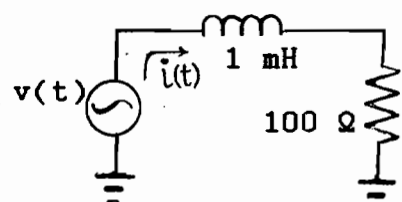


Figura B74

9.- Un instrumento medidor de capacidades utiliza el circuito de la figura B75. Si el voltímetro V, que mide tensiones eficaces, tiene un fondo de escala de 10 V, (es decir, mide tensiones eficaces entre 0 y 10 V), calcule el valor de la autoinducción L para que el rango de medida de capacidades sea de 100 pF. [La fuente de tensión alterna v_s genera una tensión de amplitud 20 mV y frecuencia 1 MHz. Suponga que la impedancia de entrada del voltímetro es infinita.]

Solución: 612 μ H

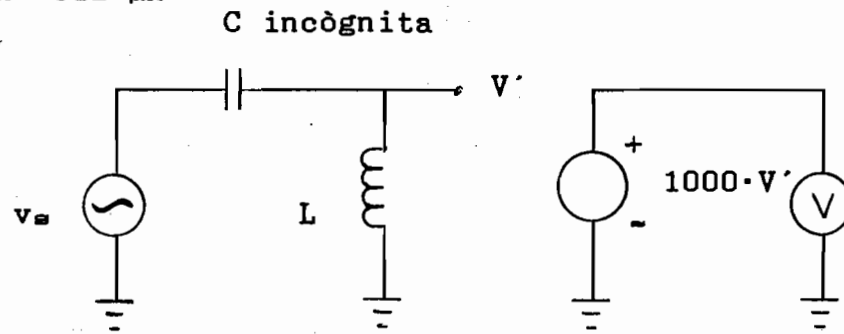


Figura B75

10.- Para el circuito de la figura B76 se representa la señal de entrada v_1 en la pantalla del osciloscopio. Calcule la señal de salida y representéla sobre la misma pantalla. Para el eje de abscisas la base de tiempo es de 0.2 ms/DIV y para el de ordenadas la escala es de 1 VOLTS/DIV.

Solución : Dibujada a trazos.
1 k Ω

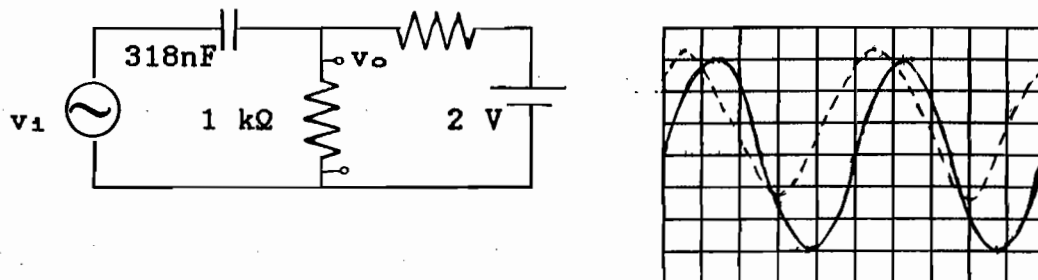


Figura B77

11.- Compruebe que la corriente que circula por R2 en el circuito de la figura B78-a coincide con la corriente que

circula por R_1 en el circuito de la figura B78-b. A este resultado enunciado con generalidad se le conoce como Teorema de Reciprocidad.

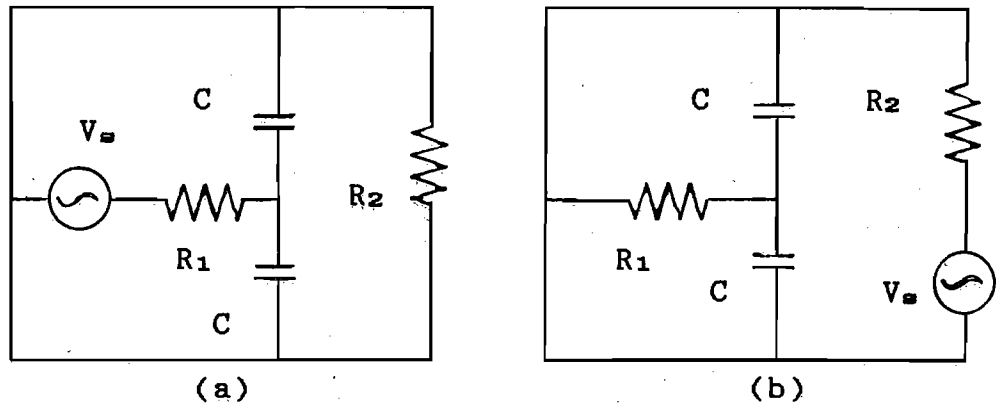


Figura B78

12.- Demuestre los siguientes enunciados:

a) Los circuitos de las figuras B79-a y B79-b son equivalentes en el sentido de que las tensiones en los nudos 1 y 2 son las mismas y las corrientes que salen de dichos nudos también, si se verifica:

$$Z_1 = Z/(1-K) \quad \text{y} \quad Z_2 = Z/(1-1/K) \quad \text{con} \quad K \equiv V_2/V_1$$

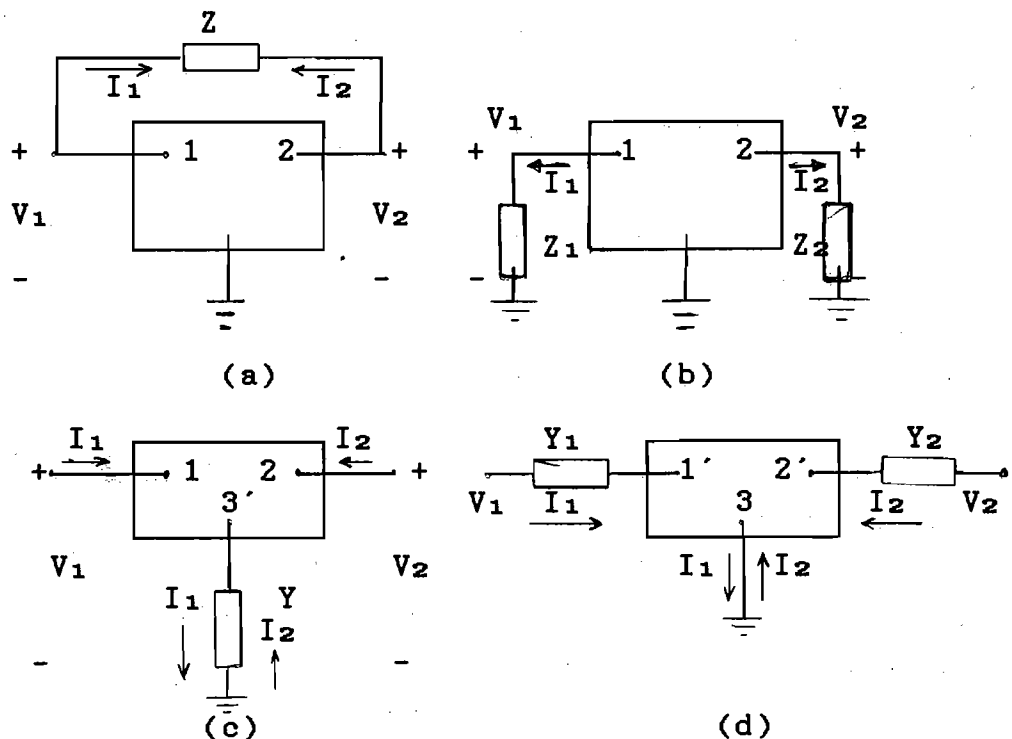


Figura B79

b) Los circuitos de las figuras B79-c y B79-d también son equivalentes en el sentido anterior si se cumple:

$$Y_1 = Y/(1-K) \quad Y_2 = Y \cdot K/(K-1) \quad \text{con } K \equiv I_2/I_1$$

[Los enunciados anteriores se conocen con el nombre de Teorema de Miller.]

13.- En la figura B80 se representa el circuito equivalente de Thèvenin de una red activa que suministra potencia a una impedancia Z_L . ¿Cuál ha de ser el valor de Z_L para que la potencia activa transferida sea máxima?

Solución: $Z_L = Z_s^*$

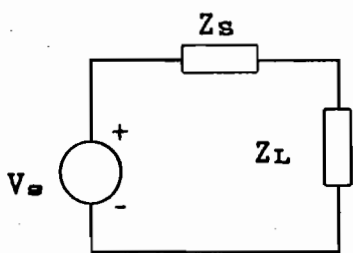


Figura B80

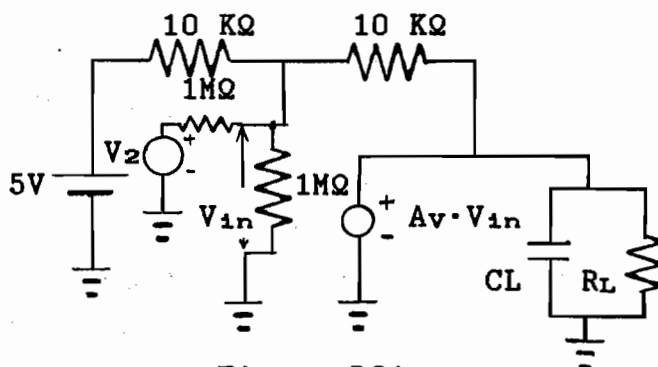


Figura B81

14.- Calcule la intensidad que circula por la red $R_L C_L$ del circuito de la figura B81 si $v_2(t) = 1 \cdot \cos(2\pi 100 \cdot t)$, $R_L = 10^{10} \Omega$ y $C_L = 100 \text{ nF}$.

Solución: $-500.005 + 628.3 \cdot \sin(2\pi 100 \cdot t) - 1 \cdot \cos(2\pi 100 \cdot t) \text{ pA}$

15.- En la figura B82 se representa un circuito RLC en serie. Obtenga:

a) La frecuencia de resonancia definida como aquella para la cual la impedancia vista desde el generador es mínima.

b) La impedancia de la bobina y el condensador a esa frecuencia.

c) El valor de R para que a esa frecuencia la amplitud de la tensión entre los extremos del condensador sea 5 veces la de la fuente de tensión.

d) La potencia máxima almacenada en el condensador o la bobina durante un ciclo y la potencia máxima disi-

pada por la resistencia también en un ciclo.

e) El factor de calidad, definido como:

$$Q = 2 \cdot \pi \frac{\text{Potencia almacenada por ciclo}}{\text{Potencia disipada por ciclo}}$$

Solución: a) 5033 Hz, b) $\pm j \cdot 3162$, c) 632.4 Ω
 d) 3.953 mW, 19.77 mW, e) 1.26

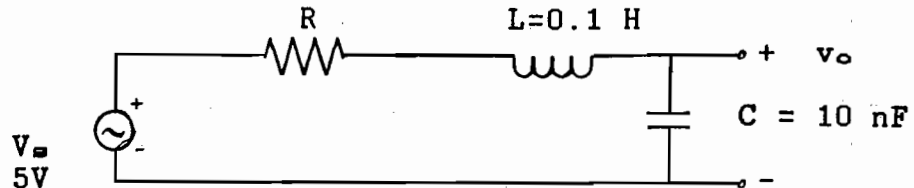


Figura B82

16.- Para el circuito del problema anterior (Figura B82), con los valores de R, C y L anteriores, obtenga:

a) La frecuencia para la cual la amplitud de salida es máxima.

b) Las frecuencias para las cuales la amplitud de v_o es la mitad de la máxima, y el ancho de banda definido como la diferencia entre dichas frecuencias.

c) El error que se comete al tomar la frecuencia de resonancia como la frecuencia del máximo ($f_r = f_{max}$) y al tomar las frecuencias que limitan la banda como $f_r \pm f_r/(2 \cdot Q)$.

d) Compruebe que estos errores disminuyen bastante para unos valores de R, L y C tales que $Q > 10$.

Solución: a) 4982.3 Hz, b) 6873.2 Hz, 1551.25 Hz.

c) 1%, 2.3%, 95.7%

17.- La tensión de entrada del circuito de la figura B83 es una señal triangular tal como se representa en la misma figura.

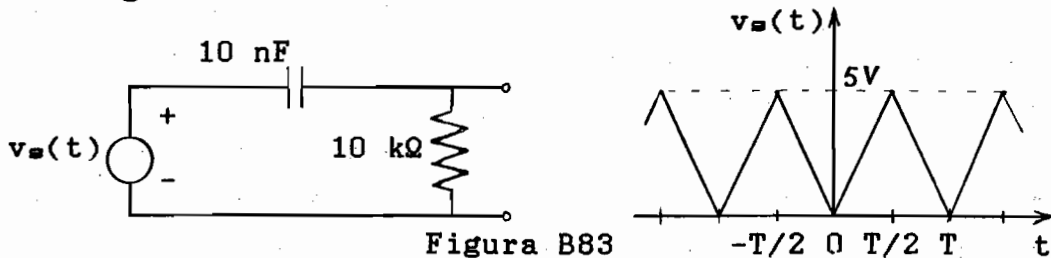


Figura B83

a) Compruebe que $v_s(t)$ se puede expresar según:

$$v_s(t) = \frac{5}{2} - \frac{20}{\pi^2} \cdot \left(\cos(\omega t) + \frac{\cos(3\omega t)}{3^2} + \frac{\cos(5\omega t)}{5^2} + \dots \right)$$

b) Si $T = 1$ ms, obtenga los tres primeros armónicos de la salida v_o .

Solución: b) $1.078 \cdot e^{j1.01}$, $0.199 \cdot e^{j0.488}$, $0.077 \cdot e^{j0.308}$

18.- Conocido el circuito de la figura B84 con los valores de los parámetros: $r = 600 \Omega$, $R = 10^{11} \Omega$, $C = 100$ pF,

a) Obtenga la corriente que circula por r en función del tiempo si la fuente de tensión v_s varía temporalmente según $v_s(t) = 5 - 0.05 \cdot t$ V (con t en segundos) tal como se representa en la figura.

b) Calcule la diferencia con la corriente que habría si $C = 0$.

Solución: a) $45 \cdot (1 - 0.011 \cdot t - e^{-at})$ pA, con $a = 1.667 \cdot 10^7$ s⁻¹

b) $45 \cdot (-0.1111 + 1.11 \cdot 10^{-9} \cdot t - e^{-at})$ pA

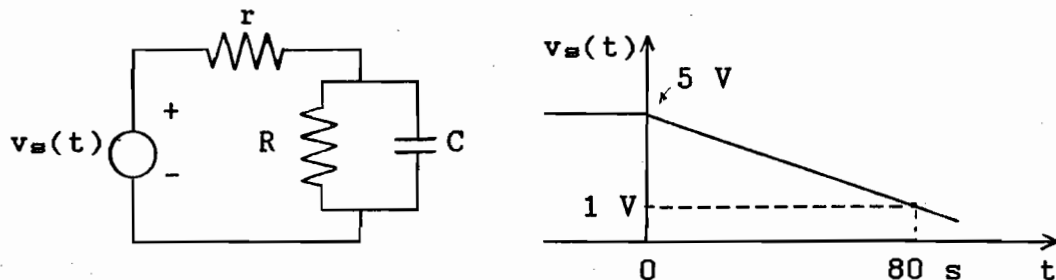


Figura B84

19.- Los cuatro primeros armónicos de una señal periódica de frecuencia fundamental 500 Hz tienen amplitudes de 5 V, 3 V, 1.5 V y 0.7 V respectivamente, frecuencias angulares ω_0 , $3\omega_0$, $5\omega_0$ y $7\omega_0$ y están en fase.

a) Utilizando un circuito LCR en serie, diseñe un filtro paso baja de segundo orden (caída de 40 dB/Dec), con frecuencia de corte $f_c = 2000$ Hz y coeficiente de amortiguamiento $\delta = 1/\sqrt{2}$.

b) Calcule la señal de salida que daría este filtro ante la entrada periódica descrita anteriormente si ambas se aproximan por sus cuatro primeros armónicos.

20.- Obtenga los circuitos equivalentes de Thèvenin en el dominio de la transformada de Laplace ante una entrada arbitraria para las redes de la figura B85. Particularice para el caso de una entrada armónica de frecuencia angular w .

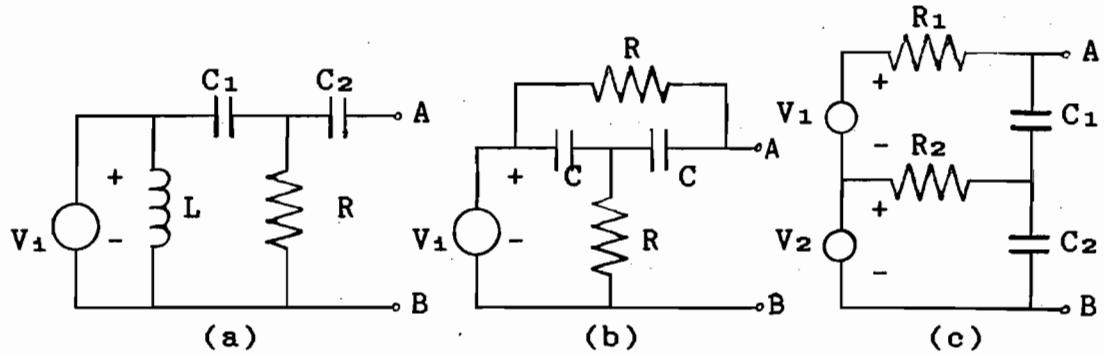


Figura B85

21.- Represente el diagrama de Bode de las siguientes funciones de transferencia factorizadas:

a) $T(s) = \frac{A_0 \cdot (s/w_1 + 1)(s/w_0)}{(1 + s/w_2) \cdot (1 + s/w_3) \cdot (1 + s/w_0)}$ con $A_0=100$
 $w_0=100 \text{ s}^{-1}$
 $w_1=1000 \text{ s}^{-1}$
 $w_2=10^4 \text{ s}^{-1}$
 $w_3=10^5 \text{ s}^{-1}$

b) $T(s) = \frac{A_0 \cdot (s/w_1 + 1)(s/w_2 + 1)}{(1 + s/w_3) \cdot ((s/w_2)^2 + 2\delta \cdot s/w_2 + 1)}$ con $A_0=20$
 $f_1=1000 \text{ Hz}$
 $f_2=10^4 \text{ Hz}$
 $f_3=10^5 \text{ Hz}$
 $\delta=0.1$

22.- En el circuito de la figura B86, $R_1= 1 \text{ k}\Omega$, $R_2= 10 \text{ k}\Omega$
 Represente el diagrama de Bode para:

- a) $C_1 = C_2 = 10 \text{ nF}$
- b) $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 1 \text{ nF}$
- c) $C_1 = 100 \text{ nF}$, $C_2 = 1 \text{ nF}$

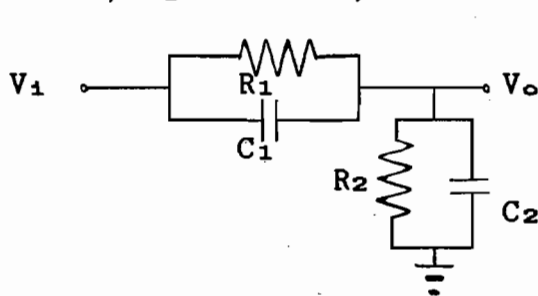


Figura B86

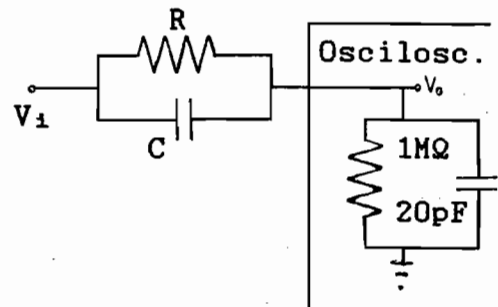


Figura B87

23.- En el circuito de la figura B87 se representa la red equivalente de entrada de un osciloscopio, a la cual hay conectada una tensión V_i a través de una sonda atenuadora, también representada por una red RC. Calcule los valores de R y C para que la entrada al osciloscopio sea independiente de la frecuencia de V_i y para que la amplitud sea 10 veces inferior.

Solución: $R = 9 \text{ M}\Omega$, $C = 2.22 \text{ pF}$

24.- En la figura B88-a se representan dos sistemas lineales. El primero tiene una función de transferencia con un solo polo: $T(s) = A_0 / (1 + s/\omega_0)$

y el segundo una función de transferencia β constante:

$$Y(s) = \beta \cdot X(s)$$

En la figura B88-b se representa simbólicamente un sumador.

Obtenga la función de transferencia del sistema de la figura B88-c y calcule los valores de β para los cuales el sistema es inestable. Compruebe que la nueva función de transferencia también es de un solo polo, es decir:

$$T_f(s) = A_f / (1 + s/\omega_f)$$

y que se verifica la igualdad $A_f \cdot \omega_f = A_0 \cdot \omega_0$.

Represente los diagramas de Bode de $T(s)$ y $T_f(s)$.

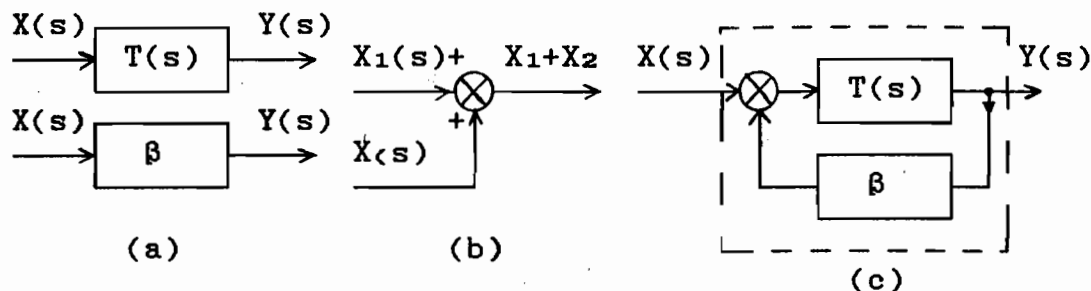


Figura B88

25.- Calcule la respuesta de un filtro paso-baja de primer orden (con una caída de -20 dB/Dec) ante una función escalón.

Solución: Variación exponencial con constante de tiempo igual a la inversa de la frecuencia angular de corte.

26.- Indique si es posible eliminar los primeros armónicos de una señal cuadrada con un filtro paso-alta de primer orden. ¿Y con un filtro de segundo orden?. Obtenga cual es el armónico de máxima amplitud en cada caso.

Solución: No con un filtro de primer orden, sí con uno de segundo orden.

27.- En la figura B89-a se representan dos redes RC que se comportan como filtros paso baja y paso alta respectivamente. Si se conectan en serie, tal como muestra la figura B98-b, obtenga:

a) La función de transferencia y el diagrama de Bode.

b) La frecuencia para la que se obtiene el máximo ^{dicho} de la función de transferencia así como ~~del módulo de dicha función.~~ ~~valor máximo~~

Solución: b) 1000 rad/s, 1/3 o -9.54 dB.

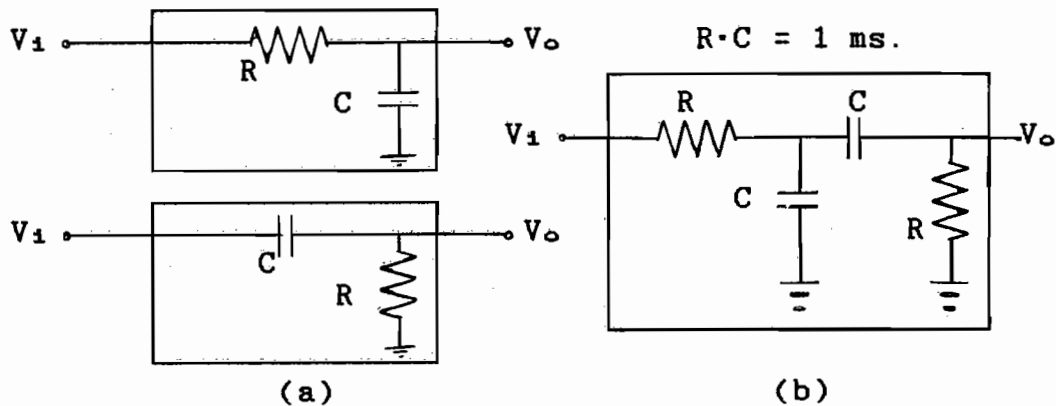


Figura B89

APENDICE 1 : NUMEROS COMPLEJOS

El objetivo de este apéndice es repasar las propiedades de los números complejos que van a ser útiles para el seguimiento del texto, en concreto, del formalismo de fasores para el análisis de circuitos en condiciones AC. No pretende en absoluto hacer una teoría matemática del cuerpo de los complejos.

Un número complejo tiene dos componentes: A una de ellas se le llama parte real y a la otra parte imaginaria. Por ejemplo, si representamos el complejo en forma binomial:

$$z = a + j \cdot b \quad a \equiv \text{Re}[z] \quad b \equiv \text{Im}[z]$$

siendo z un número complejo, a y b números reales y j un número imaginario puro que a veces se define como

$$j \equiv \sqrt{-1}$$

Una forma equivalente de representar z es en forma de un par ordenado $z = (a,b)$ que nos da la misma información que la representación binomial. Preferimos la representación binomial porque nos permitirá efectuar operaciones algebraicas de forma más directa.

Los números complejos se suelen representar en un diagrama cartesiano llamado plano complejo. Veamos unos ejemplos:

$$z_1 = 2 + j \cdot 3$$

$$z_2 = -1 + j \cdot 2$$

$$z_3 = -4 - j$$

$$z_4 = 4$$

$$z_5 = -2 \cdot j$$

$$z_6 = 2 - j \cdot 3$$

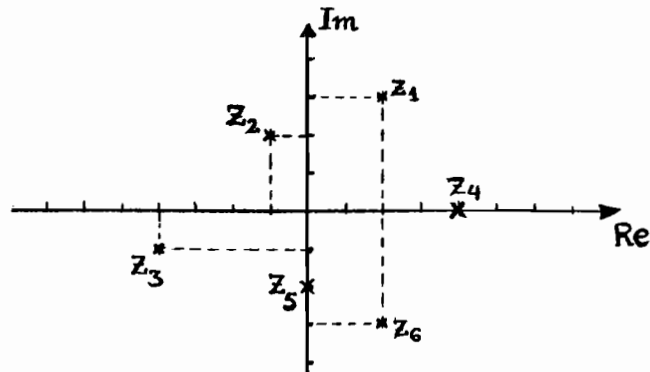


Figura AP1-1

Se define el conjugado de un complejo $z = a+j \cdot b$ como $z^* = a-j \cdot b$. Obviamente, cada complejo tiene uno y solo un conjugado. En el plano complejo z y z^* son simé-

tricos respecto al eje real, véase por ejemplo la representación de z_1 y z_2 en la figura AP1-1.

Otra forma de representar un número complejo es en forma polar, en la cual también son necesarios dos números reales: El módulo y la fase del complejo.

El módulo en la representación polar es la distancia del origen del plano complejo al punto, y la fase es el ángulo que forman el vector que une el origen con el punto y el semieje

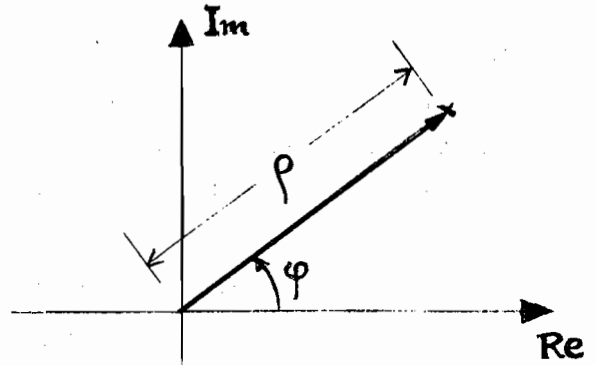


Figura AP1-2

real positivo. El complejo se representa en la forma

$$z = \rho \angle \phi$$

Matemáticamente se suele definir el módulo del complejo como:

$$\sqrt{z \cdot z^*}$$

de manera que, si $z = a + j \cdot b$ y $z^* = a - j \cdot b \Rightarrow$
 $z \cdot z^* = (a + j \cdot b) \cdot (a - j \cdot b) = a^2 - j^2 \cdot b^2 = a^2 + b^2$
 ya que $j^2 = -1$. Por tanto

$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$

La relación anterior y otras se pueden obtener gráficamente de forma más intuitiva observando la gráfica AP1-2 :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{tg}(\phi) = b/a \Rightarrow \phi = \text{arctg}(b/a)$$

$$a = \rho \cdot \cos(\phi)$$

$$b = \rho \cdot \text{sen}(\phi)$$

Utilizando la identidad :

$$e^{ja} = \cos(a) + j \cdot \text{sen}(a)$$

podemos obtener una expresión directa que nos relacione las representaciones polar y binómica:

$$a + j \cdot b = \rho \cdot \cos(\phi) + j \cdot \rho \cdot \text{sen}(\phi) = \rho \cdot e^{j\phi}$$

Esta última forma, llamada forma exponencial del

complejo, será la que se utilice generalmente en el texto para representar un complejo en forma polar. Como

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} \text{ y } \phi = \arctg(b/a) \Rightarrow$$

$$a + j \cdot b = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{j\phi} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{j \cdot \arctg(b/a)}$$

Ejemplos: Veamos unos ejemplos de paso de forma polar a binómica y viceversa. En primer lugar expresaremos en forma exponencial los complejos representados en forma binómica en la figura AP1-1.

$$1) z_1 = 2 + j \cdot 3$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\phi_1 = \arctg(3/2) = 0.983 \text{ rad.}$$

$$z_1 = \sqrt{13} \cdot e^{j \cdot 0.983}$$

$$2) z_2 = -1 + j \cdot 2$$

$$\Rightarrow \rho_2 = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Importante: Para el cálculo de la fase hemos de hacer algunas precisiones: La función $\arctg(x)$, para estar unívocamente definida, restringe su recorrido entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, sin embargo hay complejos con su fase fuera de dicho intervalo cuya tangente coincide con la de alguna fase dentro de dicho intervalo. (Por ejemplo $\delta_1=30^\circ$ y $\delta_2=210^\circ$ tienen la misma tangente). Si se evalúa la función $\arctg(x)$ mediante una calculadora, el resultado se reducirá siempre al intervalo $(-\pi/2, \pi/2]$. Tendremos que ver en qué cuadrante está el número para ver si el resultado es bueno o si hay que sumarle $\pm\pi$ radianes.

En este ejemplo, z_2 está claramente en el segundo cuadrante (véase la figura AP1-1), por lo que a pesar de que la calculadora nos da el siguiente resultado:

$\arctg(-2/1) = \arctg(-2) = -1.1071 \text{ rad.} = -63.43^\circ$
correspondiente al cuarto cuadrante, hemos de sumar π radianes obteniendo:

$$\phi_2 = -1.1071 + \pi = 2.0344 \text{ rad.} = 116.57^\circ$$

Por tanto $z_2 = \sqrt{5} \cdot e^{j \cdot 2.0344}$

$$3) z_3 = -4 - j$$

$$\Rightarrow \rho_3 = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\phi_3 = \arctg(1/4) = 0.2450 \text{ rad.}$$

Sin embargo, sabemos que z_3 está en el tercer cuadrante, por lo que su fase debe estar entre π y $3\pi/2$, por tanto hemos de sumar o restar π . El resultado es:

$$\phi_3 = 3.3866 \text{ rad. o } \phi_3 = -2.8966 \text{ rad.}$$

Ambos resultados sí son equivalentes ya que difieren en 2π .

$$z_3 = \sqrt{17} \cdot e^{j \cdot \text{---}} = \sqrt{17} \cdot e^{-2.8966}$$

$$4) z_4 = 4$$

$$\Rightarrow \rho_4 = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

$$\phi_4 = \arctg(0/4) = 0 \text{ rad.}$$

$$z_4 = 4 \cdot e^{j \cdot 0} = 4$$

$$5) z_5 = -2 \cdot j$$

$$\Rightarrow \rho_5 = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\phi_5 = \arctg(-2/0) = \arctg(-\infty) = -\pi/2 \text{ rad.}$$

z_5 está situado sobre el semieje imaginario negativo.

$$z_5 = 2 \cdot e^{-j \cdot \pi/2}$$

$$6) z_6 = 2 - j \cdot 3$$

$$\Rightarrow \rho_6 = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\phi_6 = \arctg(-3/2) = -0.983 \text{ rad.}$$

En este caso el valor es correcto ya que z_6 está en el cuarto cuadrante.

$$z_6 = \sqrt{13} \cdot e^{-j \cdot 0.983}$$

Observamos que z_6 en cualquiera de las formas es el conjugado de z_1 , ya que se obtiene a partir de aquel sustituyendo j por $-j$.

$$7) z_7 = 3 \cdot e^{j\pi} \Rightarrow$$

$$z_7 = 3 \cdot [\cos(\pi) + j \cdot \text{sen}(\pi)] = -3$$

z_7 está sobre el semieje real negativo.

$$\begin{aligned}
 8) \quad z_8 &= 5 \cdot e^{-j \cdot 27.5^\circ} \quad \Rightarrow \\
 z_7 &= 5 \cdot [\cos(-27.5^\circ) + j \cdot \sin(-27.5^\circ)] = \\
 &= 5 \cdot [\cos(-27.5^\circ) - j \cdot \sin(27.5^\circ)] = \\
 &= 4.4351 - j \cdot 2.3087
 \end{aligned}$$

Operaciones: Comentaremos ahora únicamente las operaciones algebraicas que se utilizan en el texto :

a) En forma binómica podemos sumar, restar, multiplicar y dividir fácilmente:

$$\begin{aligned}
 \text{Sea } z_1 &= a + j \cdot b \quad \text{y} \quad z_2 = c + j \cdot d \quad \Rightarrow \\
 z_1 + z_2 &= (a + j \cdot b) + (c + j \cdot d) = (a + c) + j \cdot (b + d) \\
 z_1 - z_2 &= (a + j \cdot b) - (c + j \cdot d) = (a - c) + j \cdot (b - d) \\
 z_1 \cdot z_2 &= (a + j \cdot b) \cdot (c + j \cdot d) = a \cdot c + a \cdot j \cdot d + j \cdot b \cdot c + j^2 b \cdot d \\
 &= (a \cdot c - b \cdot d) + j \cdot (a \cdot d + b \cdot c)
 \end{aligned}$$

Para dividir complejos, conviene multiplicar el numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + j \cdot b}{c + j \cdot d} = \frac{(a + j \cdot b) \cdot (c - j \cdot d)}{(c + j \cdot d) \cdot (c - j \cdot d)} = \\
 &= \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + j \cdot (b \cdot c - a \cdot d)}{c^2 + d^2}
 \end{aligned}$$

b) En forma polar la multiplicación y división son más cómodas:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \rho_1 \cdot e^{j\theta_1} \quad \text{y} \quad z_2 = \rho_2 \cdot e^{j\theta_2} \\
 z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 \cdot e^{j\theta_2} = (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\
 z_1 / z_2 &= \rho_1 \cdot e^{j\theta_1} / \rho_2 \cdot e^{j\theta_2} = (\rho_1 / \rho_2) \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_2)}
 \end{aligned}$$

Cuando el resultado final deba ser expresado necesariamente en forma polar, como será nuestro caso en el análisis de circuitos, resulta conveniente hacer la división pasando previamente a forma polar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + j \cdot b}{c + j \cdot d} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{j \cdot \arctg(b/a)}}{\sqrt{c^2 + d^2} \cdot e^{j \cdot \arctg(d/c)}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} \cdot e^{j \cdot [\arctg(b/a) - \arctg(d/c)]}$$

Ejemplo: Con los complejos de la figura AP1-1, calculamos

$$z = \frac{z_1 \cdot z_2 + z_3}{z_4 + z_5 \cdot z_6} \quad \text{expresando el resultado en}$$

forma polar:

$$\frac{(2 + 3 \cdot j) \cdot (-1 + 2 \cdot j) + (-4 - j)}{4 + (-2 \cdot j) \cdot (2 - 3 \cdot j)} = \frac{-2 - 3 \cdot j + 4 \cdot j - 6 - 4 - j}{4 - 4 \cdot j - 6} =$$

$$\frac{-12 - 4 \cdot j}{-2 - 4 \cdot j} = \frac{6}{1 + 2 \cdot j} = \frac{6}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \cdot e^{j \cdot [0 - \arctg(2/1)]} =$$

$$= 2.6833 \cdot e^{j \cdot 1.1071}$$

APENDICE 2 : TRANSFORMADA DE LAPLACE

En este apéndice resumiremos algunas de las propiedades de la Transformada de Laplace que se utilizan en el texto para el análisis de circuitos. Con el fin de alcanzar rápidamente los resultados deseados quizá haya que sacrificar la rigurosidad matemática en alguna ocasión, a pesar de esto damos la demostración de las propiedades con el único fin de que el lector se familiarice con la técnica.

Definición : Dada una función real de variable real le asociamos una función compleja de variable compleja, a la cual llamamos su transformada de Laplace, en la forma siguiente:

$$x \longrightarrow X = L[x]$$

donde x es una función real y X es una función compleja. La variable independiente de x es t , que tomará valores reales y la variable independiente de la función X es s , que tomará valores complejos: $s = \sigma + j \cdot \omega$. El valor de la transformada de Laplace en un punto s se obtiene según la integral:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

Propiedad 1: La transformada de Laplace es una transformación lineal, es decir:

$$\text{Si } X_1 = L[x_1] \text{ y } X_2 = L[x_2] \text{ entonces}$$

$$L[\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2] = \alpha_1 \cdot X_1 + \alpha_2 \cdot X_2$$

Dem: Consecuencia directa de la linealidad de la integral.

Ejemplo 1: Sea u la función escalón unidad, definida

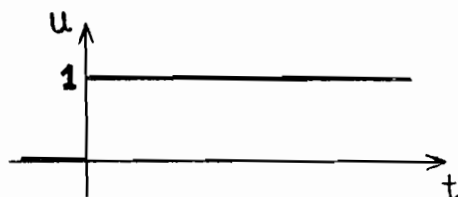


Figura AP2-1

según:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

y representada en la

figura AP2-1. La transformada de Laplace de u es:

$$L[u] = 1/s$$

Dem:

$$\begin{aligned} L[u(t)] &= \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} dt = \left. \frac{e^{-s \cdot t}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Propiedad 2:

$$\text{Si } v(t) = dx/dt \text{ y } X(s) = L[x]$$

entonces $V(s) = L[v] = L[dx/dt] = s \cdot X(s) - x(0)$

Dem :

$$\begin{aligned} L\left[\frac{dx}{dt}\right] &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \\ &= \left. x \cdot e^{-s \cdot t} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x \cdot e^{-s \cdot t} dt = -x(0) + s \cdot X(s) \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Sea $\delta(t) = du/dt$ la función impulso unidad, definida como la derivada de la función escalón unidad. Como $u(t)$ es constante si $t \neq 0$ y discontinua en $t=0$:



$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

[Esta función, tal como la hemos definido no estaría definida en $t=0$

Figura AP2-2

ya que una función discontinua no es derivable. Matemáticamente podría entenderse como un límite de funciones, por ejemplo gaussianas, pero incluso físicamente el valor ∞ tampoco es alcanzable por lo que la función impulso también debe entenderse como una idealización.]

$$L[\delta] = 1$$

Dem: $L[\delta] = L[du/dt] = s \cdot L[u] - u(0) = s \cdot 1/s = 1$

Propiedad 3:

$$\text{Si } X(s) = L[x] \Rightarrow L\left[\int_0^t x(t') dt'\right] = \frac{X(s)}{s}$$

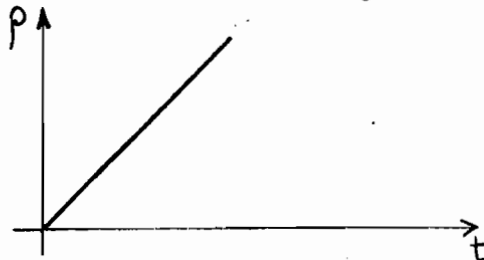
Dem:

$$\int_0^{\infty} \int_0^t x(t') dt' \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^t x(t') dt' \cdot \frac{e^{-s \cdot t}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t') \frac{e^{-s \cdot t}}{-s} dt$$

$$= \frac{1}{s} \cdot X(s) \quad \text{Este término se anula ya que en 0 se anula la integral y en } \infty \text{ la exponencial.}$$

Ejemplo 3:

Sea $\rho(t) = \int_0^t u(t') dt'$ la función rampa unidad



$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$L[\rho(t)] = \frac{1}{s^2}$$

Figura AP2-3

Dem: $L[\rho] = L\left[\int_0^t u(t') dt'\right] = \frac{L[u(t)]}{s} = \frac{1/s}{s} = \frac{1}{s^2}$

Ejemplo 4: Transformada de una exponencial.

$$x(t) = e^{a \cdot t} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}$$

Dem:

$$\int_0^{\infty} e^{a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s) \cdot t} dt = \frac{e^{(a-s) \cdot t}}{a-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

(Para que se anule la exponencial es necesario que sea decreciente, es decir, $\text{Re}(a-s) < 0$)

Ejemplo 5: Transformada de la función $\text{sen}(w \cdot t)$

$$L[\text{sen}(w \cdot t)] = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

Dem: $e^{jw t} = \cos(w \cdot t) + j \cdot \text{sen}(w \cdot t)$
 Como $e^{-jw t} = \cos(w \cdot t) - j \cdot \text{sen}(w \cdot t)$ $\Rightarrow \text{sen}(w \cdot t) = \frac{e^{jw t} - e^{-jw t}}{2 \cdot j}$

$$\Rightarrow L[\text{sen}(w \cdot t)] = L\left[\frac{e^{jw t} - e^{-jw t}}{2 \cdot j}\right] = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{s-j \cdot w} - \frac{1}{s+j \cdot w}\right)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \frac{(s+j \cdot w) - (s-j \cdot w)}{s^2 + w^2} = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

Ejemplo 5: Transformada de la función $\cos(w \cdot t)$

$$L[\cos(w \cdot t)] = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

Dem:

$$\cos(w \cdot t) = \frac{1}{w} \cdot \frac{d[\text{sen}(w \cdot t)]}{dt} \Rightarrow$$

$$L[\cos(w \cdot t)] = \frac{1}{w} \cdot L\left[\frac{d[\text{sen}(w \cdot t)]}{dt}\right] = \frac{1}{w} \cdot s \cdot L[\text{sen}(w \cdot t)]$$

$$= \frac{s}{s^2 + w^2}$$

Propiedad 4: Teoremas de desplazamiento.

$$\text{a) Si } L[x] = X(s) \Rightarrow L[u(t-t_0) \cdot x(t-t_0)] = e^{-s \cdot t_0} \cdot X(s)$$

$$\text{Dem: } L[u(t-t_0) \cdot x(t-t_0)] = \int_0^{\infty} u(t-t_0) \cdot x(t-t_0) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt =$$

$$= \int_0^{\infty} u(t') \cdot x(t') \cdot e^{-s \cdot (t_0 + t')} \cdot dt = e^{-s \cdot t_0} \cdot \int_0^{\infty} x(t') \cdot e^{-s \cdot t'} \cdot dt' =$$

$$= e^{-s \cdot t_0} \cdot X(s)$$

$$\text{b) Si } L[x(t)] = X(s) \Rightarrow L[e^{-a \cdot t} \cdot x(t)] = X(s+a)$$

$$\text{Dem: } L[e^{-a \cdot t} \cdot x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt =$$

$$= \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-(s+a) \cdot t} \cdot dt = X(s+a)$$

Ejemplo 7: Transformada de la función $e^{-\sigma \cdot t} \cdot \text{sen}(w \cdot t)$

$$L[e^{-\sigma \cdot t} \cdot \text{sen}(w \cdot t)] = \frac{w}{(s+\sigma)^2 + w^2}$$

Ejemplo 8: Transformada de la función $e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(w \cdot t)$

$$L[e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(w \cdot t)] = \frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + w^2}$$

Ejemplo 9: Transformada de la función $t \cdot \exp(-\sigma \cdot t)$

$$L[t \cdot e^{-\sigma \cdot t}] = \frac{1}{(s + \sigma)^2}$$

Dem : Los tres ejemplos anteriores se demuestran sin más que aplicar el teorema de desplazamiento en la variable compleja.

Ejemplo 10:

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Dem: $L[t^2] = L\left[\int_0^t 2 \cdot t' dt'\right] = \frac{2}{s} \cdot L[t] = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$

$$L[t^3] = L\left[\int_0^t 3 \cdot t'^2 dt'\right] = \frac{3}{s} \cdot L[t^2] = \frac{3}{s} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{3!}{s^4}$$

Por inducción se demostraría para t^n .

Ejemplo 11:

$$L[t^n \cdot e^{-\sigma t}] = \frac{n!}{(s + \sigma)^{n+1}}$$

Dem: Aplicando el teorema de desplazamiento.

Propiedad 5: Transformada de una derivada n-ésima

$$L\left[\frac{d^n x}{dt^n}\right] = s^n \cdot L[x] - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} \frac{dx}{dt}\Big|_0 - \dots - \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\Big|_0$$

Dem : A partir de la derivada primera, por inducción.

Los resultados anteriores se resumen en la tabla AP2-1 de la página siguiente.

x	\xrightarrow{L}	X
	$\xleftarrow{L^{-1}}$	
u		$1/s$
δ		1
ρ		$\frac{1}{s^2}$
dx/dt		$s \cdot X(s) - x(0)$
$\frac{d^n x}{dt^n}$	$s^n \cdot L[x] - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} \frac{dx}{dt} \Big _0 - \dots - \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \Big _0$	
$\int_0^t x(t') dt'$		$\frac{X(s)}{s}$
$e^{a \cdot t}$		$\frac{1}{s-a}$
$\sin(w \cdot t)$		$\frac{w}{s^2 + w^2}$
$\cos(w \cdot t)$		$\frac{s}{s^2 + w^2}$
$u(t-t_0) \cdot x(t-t_0)$		$e^{-s \cdot t_0} \cdot X(s)$
$e^{-a \cdot t} \cdot x(t)$		$X(s+a)$
$e^{-\sigma \cdot t} \cdot \sin(w \cdot t)$		$\frac{w}{(s+\sigma)^2 + w^2}$
$e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(w \cdot t)$		$\frac{s + \sigma}{(s+\sigma)^2 + w^2}$
$t \cdot e^{-\sigma \cdot t}$		$\frac{1}{(s+\sigma)^2}$
t^n		$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n \cdot e^{-\sigma t}$		$\frac{n!}{(s + \sigma)^{n+1}}$

Tabla AP2-1

Otras propiedades:

Propiedad 5: Teorema del valor inicial.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$$

Propiedad 6: Teorema del valor final.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$$

Transformada inversa:

En lugar de obtener la transformada inversa mediante integración en el plano complejo lo haremos utilizando la tabla de transformadas de Laplace en sentido inverso.

En el texto, generalmente interesa obtener la transformada inversa de funciones racionales para lo cual habrá que descomponerlas previamente como suma de fracciones simples. Al hacer la descomposición podemos obtener fracciones simples correspondientes a:

1) Una raíz real simple:

$$\frac{A}{s - a} \xrightarrow{L^{-1}} A \cdot e^{at}$$

2) Una raíz real múltiple:

$$\frac{A}{(s - a)^k} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{A}{(k-1)!} \cdot e^{at} \cdot t^{k-1}$$

3) Dos raíces complejas conjugadas:

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{s - (-\sigma + j\omega)} + \frac{A_2}{s - (-\sigma - j\omega)} = \frac{(A_1 + A_2) \cdot s + (A_1 + A_2)\sigma + (A_1 - A_2)j\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \\ & = \frac{M \cdot s + N}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-\sigma t} \cdot [M \cdot \cos(\omega t) + (N - M\sigma) \cdot \text{sen}(\omega t)] \end{aligned}$$

Ejemplo: Transformada inversa de:

$$\frac{s^4 + s^3 + s^2 + s + 1}{s^5 + 6 \cdot s^4 + 15 \cdot s^3 + 20 \cdot s^2 + 14 \cdot s + 4}$$

Factorizamos el denominador. Para ello obtenemos las

raíces por el método de Ruffini:

-1	1	6	15	20	14	4
		-1	-5	-10	-10	-4
-1	1	5	10	10	4	0
		-1	-4	-6	-4	
-2	1	4	6	4	4	0
		-2	-4	-4	-4	
	1	2	2	0		

$$s^5 + 6 \cdot s^4 + 15 \cdot s^3 + 20 \cdot s^2 + 14 \cdot s + 4 = (s+1)^2 \cdot (s+2) \cdot (s^2 + 2s + 2)$$

Hacemos la separación en fracciones simples:

$$\frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{Ms+N}{s^2+2s+2} = \frac{s^4+s^3+s^2+s+1}{(s+1)^2(s+2)(s^2+2s+2)}$$

Reduciendo a común denominador e igualando los polinomios de los numeradores término a término obtenemos una ecuación para cada coeficiente:

$$\text{Coef. de } s^4 \quad A + M + C = 1$$

$$\text{Coef. de } s^3 \quad 5A + B + 4M + N + 4C = 1$$

$$\text{Coef. de } s^2 \quad 10A + 4B + 5M + 4N + 7C = 1$$

$$\text{Coef. de } s \quad 10A + 6B + 2M + 5N + 6C = 1$$

$$\text{Tno. independiente} \quad 4A + 4B + 2N + 2C = 1$$

La solución es: $A = -3$, $B = 1$, $C = 11/2$, $M = -3/2$, $N = -1$

$$\text{Por tanto, } F(s) = \frac{-3}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{11/2}{s+2} + \frac{-3/2 \cdot s - 1}{s^2 + 2s + 2}$$

y como $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$

$$f(t) = -3 \cdot e^{-t} + t \cdot e^{-t} + 11/2 \cdot e^{-2t} - 3/2 \cdot e^{-t} \cdot \cos(t) + 1/2 \cdot \text{sen}(t)$$

