Física Estadística.
Soluciones relación 8

1. *Sea un sistema de N momentos magnéticos ideales localizados en los vértices de un retículo. El hamiltoniano del sistema es*

$$\mathbb{H} = -H \sum_i^N \sigma_i,$$

donde H representa la energía aportada por un campo magnético externo y σ_i es una variable binaria del sitio i que adopta el valor $\sigma_i = 1$ si el momento de i se encuentra alineado con el campo, y $\sigma = -1$ si lo está en el sentido contrario.

a) Obtenga una expresión para la magnetización media, $m \equiv \sum_i^N \sigma_i$, en función de T y H (ecuación de estado).

b) Cuánto vale la susceptibilidad magnética, $\chi(T, H)$? Compruebe que se cumple la ley de Curie del paramagetismo, $\chi_0 \equiv \chi(T, H = 0) = C/T$.

c) Hay magnetización expontánea (ferromagnetismo)?

a) Cada espín (momento) puede adoptar uno de dos estados posibles, alineado o antialineado, contribuyendo una energía $-H$ o H, respectivamente. La magnetización, en función de los números de espies alineados y antialineados, es por tanto,

$$m = \frac{1}{N}(n_\uparrow - n_\downarrow).$$

La probabilidad de estar alineado con el campo es $\frac{n_\uparrow}{N} \sim e^{\beta H}$, mientras que la de estar antialineado es $\frac{n_\downarrow}{N} \sim e^{-\beta H}$, con $\beta \equiv (kT)^{-1}$. Por lo tanto, la magnetización es

$$m = \frac{e^{\beta H} - e^{-\beta H}}{e^{\beta H} + e^{-\beta H}} = \tanh(\beta H).$$

b)

$$\chi(T, H) \equiv \left(\frac{\partial m}{\partial T}\right)_T = \frac{\beta}{\cosh^2(\beta H)}.$$

Si $H = 0$, $\chi_0 = \beta$, luego $\chi_0 = C/T$, con $C = k$.

c) En ausencia de campo externo ($H = 0$), $m = 0$, luego no hay magnetización espontánea. (Esto se debe a que estamos suponiendo que el sistema es ideal.)

2. *El ferromagnetismo ocurre como consecuencia de las interacciones entre partículas. Para dar cuenta de esto, Pierre Weiss consideró un campo efectivo* $H_{eff} = H + \lambda m$ *en la situación discutida en el problema anterior (a esto se le llama aproximación de campo medio).*

a) Cuál es ahora la ecuación de estado, $m(T, H)$*?*

b) Obtenga la temperatura crítica, T_c*, por debajo de la cual existen soluciones ferromagnéticas (*$m \neq 0$*) en ausencia de campo externo.*

c) Cuánto vale la magnetización cerca del punto crítico, $T \lesssim T_c$*, en ausencia de campo externo (*$H = 0$*)? Nota: puede hacer uso del desarrollo* $\tanh^{-1}(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$.
Cuál es el exponente crítico β *(que no ha de confundirse con* $\beta = 1/kT$*)?*

d) Calcule la susceptibilidad magnética. Particularice para $H = 0$ *en las fases paramagnética (*$T > T_c$*) y ferromagnética (*$T < T_c$*). Cuál es el exponente* γ*?*

e) Obtenga la isoterma crítica, $H(T = T_c)$*. Cuánto vale el exponente* δ*?*

a) Ahora la ecuación de estado es

$$m = \tanh(\beta H + \beta\lambda m),$$

conocida como la ecuación de Curie-Weiss.

b) Gráficamente, se observa que existirán soluciones $m \neq 0$ cuando $\beta\lambda > 1$. Es decir, cuando

$$T < T_c = \frac{\lambda}{k}.$$

c) Como $m \simeq 0$, podemos escribir:

$$\beta(H + \lambda m) = \tanh^{-1} m = m + \frac{1}{3}m^3 + \ldots$$

Fijando $H = 0$,

$$\beta\lambda m = m + \frac{1}{3}m^3 + \ldots,$$

de donde

$$m(T \lesssim T_c, H = 0) \simeq \pm\sqrt{3}(\beta\lambda - 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\left(\frac{T_c - T}{T}\right).$$

El exponente β es por tanto 1/2.

d) Tomando la derivada parcial con respecto de m tenemos

$$\beta\left(\frac{\partial H}{\partial m} + \lambda\right) = 1 + m^2 + \ldots$$

luego

$$\chi^{-1} = kT(1+m^2) - \lambda.$$

Si $H = 0$ y $T > T_c$, tenemos que $m = 0$, así que

$$\chi_0 = \frac{1}{k}(T - T_c)^{-1}.$$

En el caso $T \lesssim T_c$, podemos usar que $m^2 \simeq 3(\beta\lambda - 1)$, con lo que

$$\chi \simeq \frac{1}{2k}(T - T_c)^{-1}.$$

El exponente γ vale, por tanto, -1.

e) Fijando $T = T_c \Rightarrow \beta\lambda = 1$ en la ecuación de estado, tenemos que

$$\beta_c H + m = m + \frac{1}{3}m^3 + ...$$

de manera que la isoterma crítica es

$$H(T = T_c) = \frac{1}{3\beta_c}m^3 = \frac{1}{3}kT_c m^3.$$

El exponente es, por tanto, $\delta = 3$.