Física Estadística.
Soluciones relación 7

1. *Sea un gas ideal formado por N bosones de masa m y sin espín en un volumen V a temperatura T, de manera que el número de partículas con energía entre ϵ y $\epsilon + d\epsilon$ es*

$$n(\epsilon) = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\exp(\epsilon - \mu/kT) - 1} d\epsilon.$$

a) Qué condición debe satisfacer la distancia media entre partículas, $d = (V/N)^{1/3}$, para que se pueda aproximar esta distribución por la de Boltzmann?
b) Calcule la energía interna en la aproximación de primer orden

$$\frac{1}{e^x - 1} \simeq e^{-x}(1 + e^{-x}).$$

Nota: puede utilizar la identidad

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}.$$

a) La distribución es equivalente a la de Boltzmann si $e^{\frac{-\mu}{kT}} \gg 1$ (límite de gas diluido). En este caso podemos obtener el número de partículas como

$$N = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \sqrt{\epsilon} e^{-(\epsilon-\mu)/kT} d\epsilon = V\lambda^{-3} e^{\mu/kT},$$

donde $\lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$ es la longitud de onda de de Broglie (longitud de onda térmica). Luego la condición $e^{\frac{-\mu}{kT}} \gg 1$ es equivalente a

$$e^{\frac{-\mu}{kT}} = \frac{V}{N}\lambda^{-3} = \left(\frac{d}{\lambda}\right)^3 \gg 1.$$

Es decir, que las partículas se encuentren separadas por distancias mucho mayores que las longitudes de onda asociadas a su energía cinética.

b) La energía interna es

$$U = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \left[e^{\mu/kT} \int_0^\infty \epsilon^{3/2} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon + e^{2\mu/kT} \int_0^\infty \epsilon^{3/2} e^{-2\epsilon/kT} d\epsilon \right]$$
$$= \frac{3}{2} NkT \left(1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{d^3}\right).$$

2. *Sea un gas de fotones a una temperatura T en un volumen V. Sabiendo que la densidad de estados es $\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$:*
a) Cuántos fotones hay?
b) Calcule la energía interna.
c) Qué forma tiene la densidad espectral de energía, $\rho(\omega)$?

Los fotones son bosones con energía $\epsilon = \hbar\omega$, y el potencial químico es $\mu = 0$, así que

$$\overline{N} = \int \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}.$$

b) La energía interna es

$$U = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

c) De $u = U/V = \int_0^\infty \rho(\omega) d\omega$, tenemos que

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

3. *El fondo cósmico de microondas que permea el universo equivale a un cuerpo negro a aproximadamente $3K$. Se supone que esta radiación es el resultado de la expansión adiabática de una nube de fotones mucho más caliente producida por el Big Bang.*
a) Por qué la expansión es adiabática? (en vez de, por ejemplo, isoterma?)
b) Si en los próximos 10^{10} años el volumen del universo se duplica, cuál será entonces la temperatura de la radiación?
c) Cuánta enegía por metro cúbico contiene esta nube de radiación?

a) La nube de fotones es un sistema aislado; por lo tanto, su expansión es adiabática.
b) La energía de la radiación de cuerpo negro es $E \propto VT^4$. De $TdS = dE + PdV$, tenemos

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \propto VT^3,$$

por lo que $S \propto VT^3$ (con a una constante).
En una expansión adiabática reversible, la entropía S permanece constante. Por lo tanto, si V se duplica, T decrecerá en un factor $2^{-1/3}$. Así que después de 10^{10} años, la temperatura de la radiación de fondo será $T = 3/2^{1/3}K$.
c) Según el problema anterior,

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{15} \frac{(kT)^4}{(c\hbar)^3} \simeq 10^{-14} J/m^3.$$

4. *Encuentre la energía de Fermi para un gas de electrones mono-dimensional.*

El número de estados en un intervalo dk es

$$dN = g\frac{Ldk}{2\pi\hbar},$$

donde $g = 2s+1 = 2$ y L es la longitud del metal.El número total de electrones N (igual al de átomos) es

$$N = \int_{-k_F}^{k_F} dN = g\frac{L}{2\pi\hbar}\int_{-k_F}^{k_F} dk = \frac{2Lk_F}{\pi\hbar}.$$

Por lo tanto,

$$p_F = \pi\hbar\frac{N}{2L} = \frac{\pi\hbar}{2d},$$

donde d es la distancia entre átomos.La energía de Fermi es

$$\epsilon_F = \frac{k_F^2}{2m} = \frac{(\pi\hbar)^2}{8md^2}.$$

5. *Encuentre la compresibilidad isoterma,*

$$\kappa \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T,$$

de un gas ideal de Fermi a $T = 0$ con densidad n y energía de Fermi ϵ_F.

Tenemos, por un lado, $PV = \frac{2}{3}E$, y por otro,

$$P = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T.$$

Como la energía libre es $F = E - TS$ y la temperatura es cero, $F = E$, luego

$$P = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = -\frac{3}{2}\left[\frac{\partial(PV)}{\partial V}\right]_T = -\frac{3}{2}\left[V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T + P\right].$$

Por lo tanto,

$$V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{5}{3}P,$$

o bien

$$\kappa \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{3}{5P}.$$

A $T = 0$, tenemos

$$P = \frac{2E}{3V} = \frac{2}{3V}2\frac{V}{(2\pi)^3}\int_{k<k_F} d^3k\frac{\hbar^2k^2}{2m} = \frac{\hbar^2k_F^5}{15m\pi^2}.$$

Por otra parte, de

$$nV = N = 2\frac{V}{(2\pi)^3}\int_{k<k_F} d^3k$$

obtenemos

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}.$$

En un gas ideal, la energía de una partícula es

$$\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

luego

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}.$$

Así tenemos que, a $T = 0$,

$$p = \frac{2}{5}n\epsilon_F,$$

y

$$\kappa = \frac{3}{2n\epsilon_F}.$$