Física Estadística.
Soluciones relación 5

December 9, 2009

1. *Obtenga expresiones para la superficie y el volumen de una esfera n-dimensional.*

Considérese un espacio n-dimensional, en el que la posición de un punto viene dada por el vector $\vec{r}$, de componentes cartesianas $(x_1, ...x_n)$. El elemento de volumen dV_n en este espacio es

$$d^n r = \prod_{i=1}^{n}(dx_i).$$

Por tanto, el volumen V_n de una esfera de radio R será

$$V_n(R) = \int ... \int \prod_{i=1}^{n}(dx_i),$$

donde las integrales son sobre coordenadas x_i tales que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq R^2.$$

Como V_n será proporcional a R^n, se puede escribir

$$V_n(R) = C_n R^n,$$

donde C_n es una constante que depende de la dimensión del espacio. El elemento de volumen puede escribirse

$$dV_n = S_n(R)dR = nC_n R^{n-1}dR,$$

donde $S_n(R)$ es la superficie de la esfera.

Para evaluar C_n utilizaremos la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \pi^{1/2}.$$

Multiplicando n integrales de este tipo, tenemos

$$\pi^{n/2} = \int_{x_i=-\infty}^{\infty} ... \int \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \prod_{i=1}^{n}(dx_i) = \int_0^{\infty} \exp(-R^2)nC_n R^{n-1}dR.$$

Haciedo uso de la identidad

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha y^2) y^\nu dy = \frac{1}{2\alpha^{(\nu+1)/2}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right), \quad \nu > -1,$$

con $\alpha = 1$, tenemos que la expresión anterior vale

$$\pi^{n/2} = nC_n \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)! C_n,$$

luego la constante es

$$C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}.$$

Así, tenemos que el volumen de una esfera n-dimensional de radio R es

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} R^n,$$

y su superficie,

$$S_n(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^{n-1}.$$

2. *Los tres niveles de energía más bajos de cierta molécula son $E_1 = 0$, $E_2 = \epsilon$ y $E_1 = 10\epsilon$. Para un sistema de N partículas, demuestre que por debajo de cierta temperatura T_c sólo estarán poblados los niveles E_1 y E_2, y estime T_c.*

El número total de partículas será $N = N_1 + N_2 + N_3$. De acuerdo con la estadística de Boltzmann,

$$\frac{N_3}{N_2} = \exp\left(-\frac{9\epsilon}{kT}\right),$$

y

$$\frac{N_3}{N_1} = \exp\left(-\frac{10\epsilon}{kT}\right),$$

luego

$$N_3 = \frac{N}{1 + \exp(9\epsilon/(kT)) + \exp(10\epsilon/(kT))}$$

Cuando $N_3 < 1$, no estará ocupado el nivel 3. Esto ocurrirá por debajo de una temperatura T_c tal que

$$1 = \frac{N}{1 + \exp(9\epsilon/(kT_c)) + \exp(10\epsilon/(kT_c))}.$$

Si $N \gg 1$, tendremos, aproximadamente,

$$T_c \simeq \frac{10\epsilon}{k \ln N}.$$

Energía (eV)	población
$30.1 \cdot 10^{-3}$	3.1%
$21.5 \cdot 10^{-3}$	8.5%
$12.9 \cdot 10^{-3}$	23%
$4.3 \cdot 10^{-3}$	63%

3. *Un sistema de partículas que obedece estadística de Maxwell-Boltzmann está en contacto con un baño térmico a temperatura T. Si la distribución en los niveles de energía (no degenerados) es la siguiente, cuál es la temperatura del sistema?*

La relación entre las ocupaciones de dos niveles obedecerá

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{kT}\right),$$

de donde

$$T = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{k} \frac{1}{\ln(n_2/n_1)}.$$

Para las distintas parejas de niveles, tenemos: $T = 99.2, 99.5, 99.0, 99.5, 100.2$, y $98.8K$. Podemos estimar T como la media,

$$T = 99.4K.$$

4. *Considere un vidrio en el que una fracción de los átomos pueden ocupar una de dos posiciones algo diferentes, dando lugar a dos niveles de energía, $\Delta_i > 0$ y $-\Delta_i$, para el átomo i.*
a) Si cada átomo tiene los mismos niveles, Δ y $-\Delta$, calcule la contribución de cada estos átomos a la capacidad calorífica.
b) Si estas energías están distribuidas aleatoriamente según $\rho(\Delta)$, encuentre la capacidad calorífica a baja temperatura.

a) La energía media por átomo es

$$\bar{\epsilon} = \Delta \tanh\left(\frac{\Delta}{kT}\right).$$

Su contribución al calor específico será

$$c_V = \frac{d\bar{\epsilon}}{dT} = 4k\left(\frac{\Delta}{kT}\right)^2 \frac{1}{(e^{\Delta/(kT)} + e^{-\Delta/(kT)})^2}.$$

Sumando los términos para los N átomos,

$$C_V = 4Nk\left(\frac{\Delta}{kT}\right)^2 \frac{1}{(e^{\Delta/(kT)} + e^{-\Delta/(kT)})^2}.$$

b) La contribución del átomo i es

$$c_i = 4k\left(\frac{\Delta_i}{kT}\right)^2 \frac{1}{(e^{\Delta_i/(kT)} + e^{-\Delta_i/(kT)})^2}.$$

Si $kT \ll \Delta_i$, podemos aproximar

$$c_i \simeq 4k \left(\frac{\Delta_i}{kT}\right)^2 e^{-2\Delta_i/(kT)}.$$

Sumando de nuevo sobre todos los átomos, tenemos

$$C_v \simeq 4k \sum_i \left(\frac{\Delta_i}{kT}\right)^2 e^{-2\Delta_i/(kT)} \simeq 4k \int \left(\frac{\Delta}{kT}\right)^2 e^{-2\Delta/(kT)} \rho(\Delta) d\Delta.$$