Física Estadística.
Soluciones relación 1

October 19, 2009

1. *Una partícula se mueve en el seno de un potencial unidimensional* $V(x) = Ax^2 + Bx^4$ *con* $A < 0$ *y* $B > 0$. *Dibuje el potencial y las trayectorias en el espacio de las fases correspondientes a él. Discuta si existe algún punto de inestabilidad. Hay cortes de trayectorias en el diagrama?*

El hamiltoniano del sistema es

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x),$$

luego si la partícula tiene una energía E, el momento puede escribirse en términos de la posición:

$$p(x) = \pm\sqrt{2m[E - V(x)]}.$$

Estas curvas, simétricas alrededor del eje x, describen las trayectorias posibles en el espacio $x-p$, que la partícula recorrerá en sentido horario (suponiendo que se coloca la coordenada x en abscisas, incrementando de izquierda a derecha, y la p en ordenadas, de abajo a arriba). El punto $(0,0)$ es inestable, y partir de él la partícula puede seguir cualquiera de dos trayectorias (tangenciales) posibles. En ningún punto las trayectorias se cortan, ya que vienen dadas por las ecuaciones de Hamilton, que son ecuaciones diferenciales de primer orden.

2. *Dos partículas se mueven sobre una circunferencia con velocidades constantes* ω_1 *y* ω_2, *de modo que el ángulo del vector de posición de cada una respecto a una dirección arbitraria viene dado por* $\theta_i(t) = \omega_i t$. *El estado instantáneo del sistema se puede describir con un punto en el interior de un cuadrado de lado* 2π *y ejes* θ_1 *y* θ_2. *Qué condición debe satisfacer la razón* ω_1/ω_2 *para que la trayectoria que recorre dicho punto llene densamente el interior del cuadrado?*

El punto que describe el sistema seguirá líneas rectas paralelas. Ningún número finito de líneas rectas cubre densamente una superficie, así que se llenará densamente el espacio de las fases si una línea nunca coincide con otra anterior; es decir, si el sistema no entra en ningún ciclo periódico. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el sistema se encuentra inicialmente en el punto $(0,0)$ y que $\omega_1 \geq \omega_2$. Este punto se moverá trazando una línea recta oblicua hasta otro punto $(2\pi, 2\pi\omega_2/\omega_1)$. Si después de un número n de vueltas de la partícula 1 el sistema vuelve a recorrer una línea ya trazada, se tendrá que $2\pi n = 2\pi\omega_1/\omega_2 m$, con m algún número natural. Por lo tanto, en este caso $n/m = \omega_1/\omega_2$ será un número racional. La condición necesaria y suficiente para que se cubra densamente el espacio de las fases (y el sistema sea ergódico) es, pues, que ω_1/ω_2 sea un número irracional; es decir, que las velocidades sean inconmensurables.

3. *Sea un borracho ideal en una farola. Cada paso que da es de longitud L y en una dirección aleatoria de entre cuatro (norte, sur, este u oeste). Después de tres pasos, cuál será la probabilidad de que se encuentre dentro de un círculo de radio* $2L$ *centrado en la farola?*

En total, el borracho tiene a su disposición 4^3 trayectorias. Hay dos maneras distintas de salir en tres pasos: i) dar tres pasos en una dirección, y ii) dar dos pasos en una dirección, y un paso hacia el lado. Existen 4 formas de hacer la primera y $6 \times 4 = 24$ de hacer la segunda. Por tanto, la probabilidad de que se siga encontrando dentro del círculo después de tres pasos es

$$P = 1 - \frac{4+24}{4^3} = \frac{9}{16}$$

4. *Estime el tiempo necesario para que una molécula de aire en una habitación llegue a una distancia de* $L = 5$ *metros de donde está. Considere que no hay movimiento macroscópico del aire, que la temperatura y la presión son uniformes, y que el camino libre medio y la velocidad media de las moléculas son* $l = 5 \cdot 10^{-6}$ m *y* $v = 500$ m/s*, respectivamente.*

Como la difusión molecular es un proceso aleatorio, se cumple que $L^2 = nl^2$, donde n es el número de choques que sufre la molécula durante su recorrido. Por lo tanto, el tiempo estimado es

$$t = n\frac{l}{v} = \frac{L^2}{lv} = 10^4 s.$$

5. *Tenemos dos clases de bacteria E. Coli: "rojos" y "verdes". Cada una se reproduce por mitosis una vez por hora; es decir, una roja se divide en dos rojas, y una verde se divide en dos verdes. Consideraremos las bacterias idénticas en todo salvo en los marcadores rojo y verde. Permitimos que una colonia de 5000 rojas y 5000 verdes se alimente y se reproduzca. Para mantener constante la población total, se introduce un depredador que come bacterias aleatoriamente, de manera que siempre hay 10000 bacterias.*

a) Si dejaramos evolucionar las bacterias sin depredador durante mucho tiempo, habría un número $N \gg 10000$ de ellas. El que el depredador se las coma aleatoriamente es equivalente a seleccionar un número $n = 10000$ como supervivientes. Como $N \gg n$, podemos considerar que todas las selecciones posibles son idénticas. Hay 2^n formas de elegir n bacterias. Para cada selección, hay C_m^n formas de que m sean rojas. Por lo tanto, la distribución de probabilidad es

$$p(m) = \frac{1}{2^n} C_m^n = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad m = 0, 1, ...n.$$

b) Se requiere que $N \gg n$. En la práctica, suele considerarse suficiente $N/n \simeq 100$. Como $N = 2^t n$, un tiempo de 6 a 7 horas bastaría.

6. *Una caja de volumen* $2V$ *es dividida en mitades por una fina partición. El lado de la izquierda contiene un gas perfecto a presión* p_0 *y el lado de la derecha está inicialmente vacío. Se perfora la partición con un pequeño agujero de área* A. *Cuál es la presión* p *en el lado de la izquierda como función del tiempo? Considere que la temperatura es constante a ambos lados de la caja, y exprese el resultado en términos de la velocidad media* v.

Como el agujero es pequeño, podemos suponer que los gases a ambos lados se encuentran en equlibrio térmico en cualquier momento. Si el número de partículas por unidad de volumen en el lado izquierdo en el tiempo $t = 0$ es n_0, los números de partículas por unidad de volumen en el tiempo t en los lados izquierdo y derecho son $n(t)$ y $n_o - n(t)$, respectivamente. Por lo tanto tenemos que

$$V \frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{A}{6} n(t) v + \frac{A}{6} [n_0 - n(t)] v,$$

donde $v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ es la velocidad media de las partículas. Esto se puede simplificar a

$$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{A}{3V} n(t) v = \frac{A}{6V} n_0 v.$$

Con la condición $n(0) = n_0$, tenemos

$$n(t) = \frac{n_0}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{Av}{3V} t \right) \right]$$

y, para la presión,

$$p(t) = \frac{p_0}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{Av}{3V} t \right) \right].$$