Física Estadística.
Relación 7

1. Sea un gas ideal formado por N bosones de masa m y sin espín en un volumen V a temperatura T, de manera que el número de partículas con energía entre ϵ y $\epsilon + d\epsilon$ es

$$n(\epsilon) = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\exp(\epsilon - \mu/kT) - 1} d\epsilon.$$

a) Qué condición debe satisfacer la distancia media entre partículas, $d = (V/N)^{1/3}$, para que se pueda aproximar esta distribución por la de Boltzmann?
b) Calcule la energía interna en la aproximación de primer orden

$$\frac{1}{e^x - 1} \simeq e^{-x}(1 + e^{-x}).$$

Nota: puede utilizar la identidad

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}.$$

2. Sea un gas de fotones a una temperatura T en un volumen V. Sabiendo que la densidad de estados ds $\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$:
a) Cuántos fotones hay?
b) Calcule la energía interna.
c) Qué forma tiene la densidad espectral de energía, $\rho(\omega)$?

3. El fondo cósmico de microondas que permea el universo equivale a un cuerpo negro a aproximadamente $3K$. Se supone que esta radiación es el resultado de la expansión adiabática de una nube de fotones mucho más caliente producida por el Big Bang.
a) Por qué la expansión es adiabática? (en vez de, por ejemplo, isoterma?)
b) Si en los próximos 10^{10} años el volumen del universo se duplica, cuál será entonces la temperatura de la radiación?
c) Cuánta enegía por metro cúbico contiene esta nube de radiación?

4. Encuentre la energía de Fermi para un gas de electrones mono-dimensional.

5. Encuentre la compresibilidad isoterma,

$$\kappa \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T,$$

de un gas ideal de Fermi a $T = 0$ con densidad n y energía de Fermi ϵ_F.