Física Estadística.
Relación 6

1. Un sólido contiene N partículas (distinguibles), cada una con momento magnético μ, que no interactúan entre sí. El sistema está inmerso en un campo magnético de intensidad H, de manera que cada partícula puede encontrarse en uno de dos niveles energéticos, $\epsilon_1 = 0$ o $\epsilon_2 = 2\mu H$
a) Encuentre la entropía en función de n, el número de partículas en el estado más energético.
b) Obtenga el valor máximo de la entropía.
c) Supongamos que la capacidad calorífica se puede aproximar por una función de la temperatura del tipo

$$C(T) = c_1 \left(\frac{2T}{T_1} - 1 \right), \quad \text{si } T_1/2 < T < T_1,$$
$$C(T) = 0, \quad \text{en caso contrario.}$$

Obtenga el valor máximo de la capacidad calorífica, c_1, utilizando consideraciones entrópicas.
d) Discuta la posibilidad de temperaturas negativas.
e) Hay alguna transición de fase?

2. Considere N espines en una cadena, tratándolo como un modelo de Ising de una dimensión, definido por:

$$H = -J \sum_{n=1}^{N-1} s_n s_{n+1},$$

donde cada espín puede tomar los valores $s_n = \pm 1$.
a) Obtenga la función de partición.
b) Encuentre la capacidad calorífica por espín.

3. El modelo de Hopfield consiste en N neuronas binarias, con posibles actividades $s_i = \pm 1$, conectada cada una con todas las demás a través de unos pesos sinápticos ω_{ij} de manera que cada neurona percibe un campo

$$h_i = \sum_j \omega_{ij} s_j.$$

En cada paso temporal, cada neurona tiene una probabilidad

$$P(s_i \to +1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\beta h_i)$$

de adoptar el estado $s_i = +1$, donde β es una temperatura inversa, y

$$P(s_i \to -1) = 1 - P(s_i \to +1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh(\beta h_i)$$

de adoptar el estado $s_i = -1$. Se puede guardar una serie de M patrones de actividad $\xi_i^\mu = \pm 1$ en los pesos sinápticos de acuerdo con la regla de Hebb,

$$\omega_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{M} \xi_i^\mu \xi_j^\mu.$$

Cada patrón se convierte así en un atractor de la dinámica, de manera que temperatura cero el sistema evoluciona de manera que, para algún patrón ν, las actividades evolucionan hasta que $s_i = \xi_i^\nu$, y la red recupera el patrón ν. La medida en que el sistema recupera de esta manera algún patrón viene dada por el solapamiento

$$m \equiv \frac{1}{1+M/N}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{1}{N}\sum_{j}\xi_i^\mu s_i.$$

4. a) Para un sistema de electrones (en ausencia de interacciones), demuestre que la probabilidad de encontrar un electrón en un estado con energía Δ sobre el potencial químico μ es igual a la probabilidad de encontrar la ausencia de un electrón a una energía Δ por debajo de μ a cualquier temperatura T dada.
b) Suponga que la densidad de estados es

$$\begin{aligned} D(\epsilon) &= a(\epsilon - \epsilon_g)^{1/2}, \qquad \text{si } \epsilon > \epsilon_g, \\ D(\epsilon) &= 0, \qquad \text{si } 0 < \epsilon < \epsilon_g, \\ D(\epsilon) &= b(-\epsilon)^{1/2}, \qquad \text{si } \epsilon < 0, \end{aligned}$$

Para $T = 0$ todos los estados con $\epsilon < 0$ están ocupados y los demás vacíos; mientras que para $T > 0$, algunos estados con $\epsilon > 0$ estarán ocupados y asimismo algunos con $\epsilon < 0$ estarán vacíos. Si $a = b$, cuánto vale μ? Discuta cómo cambia μ cuando $a > b$ y cuando $b > a$..
c) Si, a $T = 0$, existe un exceso de n_d electrones que no pueden ser acomodados a $\epsilon < 0$, cuánto valdrá ahora μ?