Métodos matemáticos de la Física IV

Curso 04-05

Relación de problemas nº 1

(1) Describe en cada caso los posibles dominios donde está definida la ecuación diferencial y los posibles intervalos de definición de las soluciones dadas

(i) $x' = 2t + \ln(1-t^2+x)$; $x(t) = t^2$

(ii) $x' = \dfrac{x}{\operatorname{sen}(t^2-x^2)}$; $x(t) = 0$

(iii) $x' = \dfrac{t}{1-x}$; $x(t)$ cumple $2x - x^2 - 1 = t^2$, $x(0) = 1$

(iv) $x' = 2x + f(t)$ donde $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ es continua y

$$x(t) = \int_0^t e^{2(t-s)} f(s)\,ds$$

(v) $x' = e^{-x}$; $x(t) = \ln|t|$

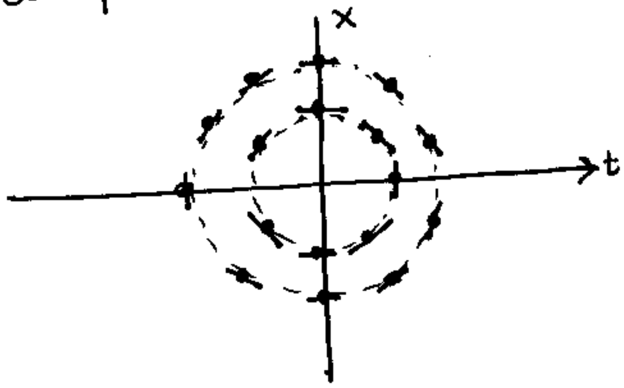
(2) Decide en cada caso si la afirmación es correcta o falsa (y explica las razones)

(a) Las soluciones de la ecuación $x' = t^2 + x^2$ no tienen máximos ni mínimos

(b) La función $F(t) = \int_3^t \operatorname{sen}(s^2)\,ds$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})$

(c) La solución de $x' = e^x - t - 1$, $x(0) = 0$ alcanza un mínimo local en $t = 0$

(d) El campo de direcciones asociado a $f: \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ es



y $x(t) = \cos t$ es una solución de

$x' = f(t, x)$

Métodos matemáticos de la Física IV

Relación de problemas nº 2

Curso 04-05

3) i) Encuentra todos los cambios de variable del tipo

$$x = \phi(y)$$

que dejan invariante la ecuación

$$x' = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Se supone $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijectiva, C^1 y $\phi'(y) \neq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$

ii) Sea $G = \{ \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, / \, \phi \text{ cambio obtenido en i)} \}$.

Demuestra que G es un grupo para la composición

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(y) = \phi_1(\phi_2(y)).$$

4) Se aplica el cambio de variables $x = y + \frac{1}{y}$ a la ecuación

$$x' = tx$$

(i) Determina las zonas de validez de este cambio y los dominios de la ecuación transportada al plano (t, y).

(ii) Resuelve la ecuación en y.

Métodos matemáticos de la Física IV

Relación de problemas nº 3 Curso 04-05

(5) La ecuación de Bernoulli tiene la forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^n$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $n \in \mathbb{R}$.

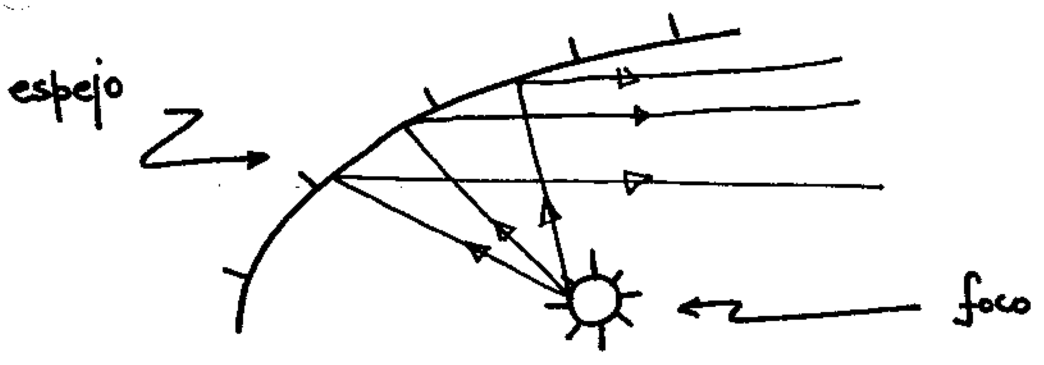
(i) Comprueba que el cambio de variable $z = x^\alpha$ de $\{x>0\}$ en $\{z>0\}$ transforma una ecuación de Bernoulli en otra del mismo tipo. Encuentra un exponente apropiado para que la ecuación se transforme en una lineal $(n=0)$.

(ii) Resuelve el problema

$$x' = x + t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1$$

¿Está definida la solución en $(-\infty, +\infty)$?

(6) Se ha colocado un foco luminoso y se pretende construir un espejo de manera que los rayos reflejados sean paralelos

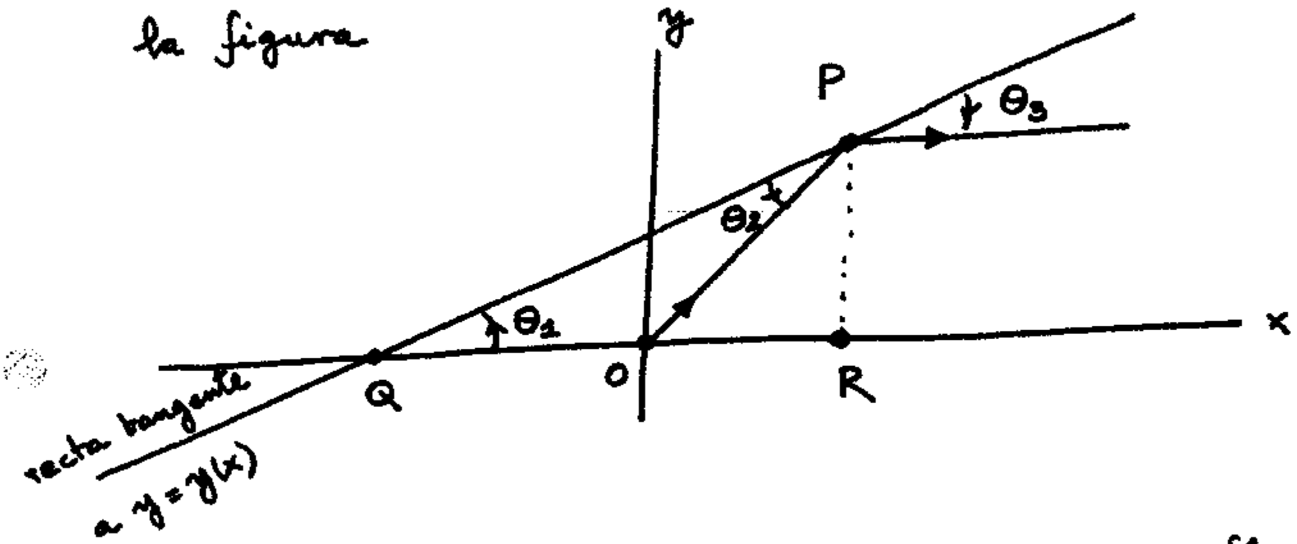


Situamos en el foco el origen de coordenadas de un plano (x,y) y hacemos coincidir la dirección del eje x con la de los rayos reflejados.

Buscaremos una curva del tipo $y = y(x)$ y supondremos

$$x > 0, \quad y(x) > 0, \quad y'(x) > 0.$$

i) Sea $P = (x, y(x))$ un punto cualquiera de la curva. Observa la figura



El ángulo de incidencia θ_2 debe coincidir con el reflejado θ_3. Deduce de la figura que se cumple $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$.

ii) Deduce la ecuación diferencial que cumple $y = y(x)$ a partir de la fórmula

$$\tan \theta_1 = \frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}$$

iii) Resuelve la ecuación obtenida en ii) y comprueba que el espejo ha de ser un arco de parábola.

[L. Elsgoltz. Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. Editorial Mir. Página 40].

Métodos matemáticos de la Física IV

Relación de problemas nº 4

Curso 04-05

(7) (i) Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto (F_1(x,y),F_2(x,y))$ un campo de clase C^1 que cumple

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}=0 \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Demuestra que existe $\varphi\in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-F_2,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=F_1 \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

(ii) Sea $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\mapsto (F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$ un campo de clase C^1 que cumple

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x},\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x},\quad \frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial y} \text{ en } \mathbb{R}^3.$$

Demuestra que existe $V\in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x}=F_1,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=F_2,\quad \frac{\partial V}{\partial z}=F_3.$$

(iii) Generaliza el resultado anterior a campos $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ con dimensión $n\geq 4$

(iv) ¿Existe una función $V=V(x_0,x_1,x_2,x_3)$ tal que $\frac{\partial V}{\partial x_0}=-1$, $\frac{\partial V}{\partial x_i}=1$, $i=1,2,3$?

Métodos matemáticos de la Física IV

Relación de problemas n° 5

Curso 04-05

(8) Encuentra:

(i) una ecuación exacta que admita el factor integrante $\mu(t,x) = t \cdot x$

(ii) un factor integrante para las ecuaciones lineales

(iii) un factor integrante para las ecuaciones de variables separables

(iv) un factor integrante para la ecuación homogénea $x' = q\left(\frac{x}{t}\right)$

(v) todos los campos conservativos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de clase C^1, tales que $F_2(x_1, x_2) = -x_2$.

(9) En ocasiones una ecuación diferencial se puede resolver si se intercambian los papeles de las variables

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(t,x) \rightsquigarrow t' = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t,x)}$$

En este ejercicio tratamos de comprender este procedimiento.

Dada una función $x = \varphi(t)$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t_0) = x_0$; se dirá que φ es localmente invertible en t_0 si existen intervalos abiertos U, V con $t_0 \in U$, $x_0 \in V$ tales que la restricción de φ, $\varphi : U \to V$, es biyectiva. La función $t = \psi(x)$, $\psi : V \to U$, inversa de $\varphi : U \to V$, se llama inversa local.

i) Se supone φ de clase C^1 y $\varphi'(t_0) \neq 0$. Justifica la existencia de una inversa local ψ [Se sabe que en este caso también ψ es de clase C^1]. Justifica la fórmula

$$\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(\psi(x))}, \quad x \in V.$$

ii) Sea $x = \varphi(t)$ una solución de $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Se supone que $f(t_0, x_0) \neq 0$. Demuestra que φ tiene una inversa local $t = \psi(x)$ que cumple $t' = \dfrac{1}{f(t,x)}$, $t(x_0) = t_0$.

iii) Halla la solución de $x' = \dfrac{1}{t + \operatorname{sen} x}$, $x(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Métodos matemáticos de la Física IV

Relación de problemas nº 6

Curso 04-05

(10) Decide en cada caso si es cierto que el funcional $\mathcal{F}[y]$ alcanza un mínimo en la función $y(x)$.

i) $\mathcal{F}[y] = \int_0^{3\pi/2} \{y'(x)^2 - y(x)^2\}\,dx,\ y(0) = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$y(x) \equiv 0$

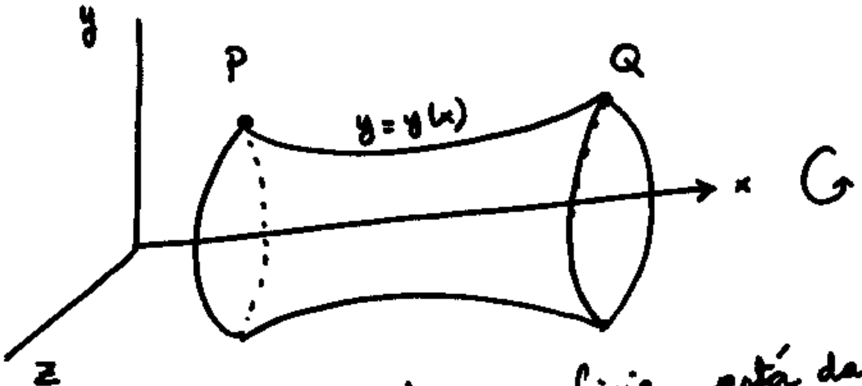
ii) $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \{\frac{1}{2}y'(x)^2 + \cos y(x)\}\,dx,\ y(0) = y(1) = \pi$

$y(x) \equiv \pi$

iii) $\mathcal{F}[y] = \int_0^{\pi} \{y'(x)^2 - y(x)^4\}\,dx,\ y(0) = y(\pi) = 0$

$y(x) = \operatorname{sen} x.$

(11) Sea $y = y(x)$ una curva en el plano x, y $\{y > 0\}$ que une dos puntos $P = (a, A)$ y ~~B~~ $Q = (b, B)$. En el espacio x, y, z se rota la curva alrededor del eje x y se obtiene una superficie de revolución



Se sabe que el área de esta superficie está dado por

$$\mathcal{A}[y] = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx,$$

Encuentra la ecuación de Euler-Lagrange asociada y calcula las extremales.

(12) Se consideran las funciones

$$\varphi_1(t) = \operatorname{ch} t, \quad \varphi_2(t) = \cos t.$$

Encuentra los intervalos I de $\mathbb{R}$ en los que φ_1 y φ_2 forman un sistema fundamental para alguna ecuación

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

con $a_0, a_1 \in C(I)$.

(13) i) Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(I)$. Demuestra que φ_1 y φ_2 forman un sistema fundamental para alguna ecuación lineal y homogénea de 2º orden en I si y sólo si

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

ii) Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^n(I)$ funciones dadas. Enuncia y demuestra un resultado análogo para la ecuación de orden n.

iii) Construye una ecuación de orden 4 que tenga las soluciones 1, t, $\operatorname{sen} t$, $\cos t$.

Métodos matemáticos de la Física IV

Relación de problemas nº 8

Curso 2004-05

(14) Decide de forma razonada la validez de cada afirmación

i) la solución de $x'' + 4x = 1$, $x(0) = \frac{5}{4}$, $x'(0) = 0$ cumple $x(\pi) = \frac{5}{4}$.

ii) la ecuación $x' = 3x + t^3$ admite una solución polinómica.

iii) la solución de $x'' + 2x = 1 + t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, cumple $x(\pi) = 1 + \frac{\pi}{4}$.

iv) la solución de $x'' + 2x = 3\cos t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, cumple $x(2\pi) = 3 - 2\cos\left(2^{3/2}\pi\right)$.

v) la solución de $x'' + x' + x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ cumple

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

vi) el cambio de variables $\sqrt{t}\, x = y$ transforma la ecuación

$$t^2 x'' + t x' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)x = 0$$

en una ecuación de coeficientes constantes.

vii) existe una ecuación lineal y homogénea, de coeficientes constantes y de orden 7, que admite las soluciones

$$\varphi_1(t) = (t^3 + 2t^4)\cos 2t \,, \quad \varphi_2(t) = t\, e^{-t}$$

(15) Resuelve

$$\left.\begin{array}{l} x''' - 6x'' + 11x' - 6x = \operatorname{sen} t \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0 \end{array}\right\}$$

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA IV

Relación de problemas nº 9

Curso 2004-05

(16) Dada una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)$ se define su transformada de Fourier $\mathcal{F}[f] = g$, $g = g(\omega)$,

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

i) $\mathcal{F}[f]$ está bien definida si f es absolutamente integrable, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

ii) Si f es par,

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$$

iii) Encuentra una fórmula análoga para f impar

iv) Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$, con f y f' absolutamente integrables. Se supone además que $\lim_{|t| \to \infty} f(t) = 0$. Encuentra una fórmula que ligue a las transformadas de Fourier de f y f'.

v) Calcula $\mathcal{F}[f]$ si $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$

(17) Se define la función

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ 2-t, & t \in]1, \infty[\end{cases}$$

¿Es cierto que su transformada de Laplace $\mathcal{L}f = F$ está dada por

$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{s}, & s \in]0,1] \\ \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}, & s \in]1, \infty[\end{cases}$$

?

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA IV

Relación de problemas nº 10

Curso 2004-05

(18) Se define $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k$, $n \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Demuestra las identidades

$$S_{n+1}(t) = t\,S_n(t) + 1, \quad S_{n+1}(t) = t^{n+1} + S_n(t).$$

A partir de aquí concluye que si $t \neq 1$

$$S_n(t) = \frac{t^{n+1} - 1}{t - 1}$$

y si $|t| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$.

Por derivación e integración de esta fórmula suma las series $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (n+1)}$.

(19) Decide de forma razonada qué afirmaciones son correctas

(i) la función $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n^2}$ está bien definida para $t \in (-1,1)$ y alcanza un mínimo en $t = 0$.

(ii) las funciones $\operatorname{sen}(e^t)$, $\tan t$, $\ln(1-t)$, $t^{1/3}$, $\frac{1}{t+e^t}$ son analíticas en $t_0 = 0$.

(iii) La función $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ es analítica en $t_0 = 0$ y cumple

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}, \quad |t| < 1.$$

(iv) la función $f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(t) = \arctan t$, es analítica en $t_0 = 0$ y cumple

$$\arctan t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}, \quad |t| < 1.$$

(v) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, 3^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{\pi}{6}.$$

(20) ¿Son correctas las afirmaciones siguientes?

i) La solución de $x' + \frac{2t}{1+t^2}x = 0$, $x(0) = 1$, es analítica en $t_0 = 0$ y tiene radio de convergencia $R = \infty$

ii) La solución de $x'' + tx' + \frac{1}{1+t+t^2}x = 0$, $x(1) = 0$, $x'(1) = 1$ es analítica en $t_0 = 1$ y tiene radio de convergencia $R > 1$

iii) Las soluciones de $t^2x'' + tx' + 3x = \operatorname{sen} t$ son analíticas en $t_0 = 0$ con radio de convergencia $R = \infty$

iv) Idéntica situación a la de iii) pero $t_0 = 1$, $R \geq 1$.

(21) Considera la ecuación

$$x'' - t^3 x = 0.$$

i) Calcula el desarrollo en serie de potencias de las soluciones si el centro t_0 es el origen

ii) Determina el radio de convergencia de las series obtenidas.