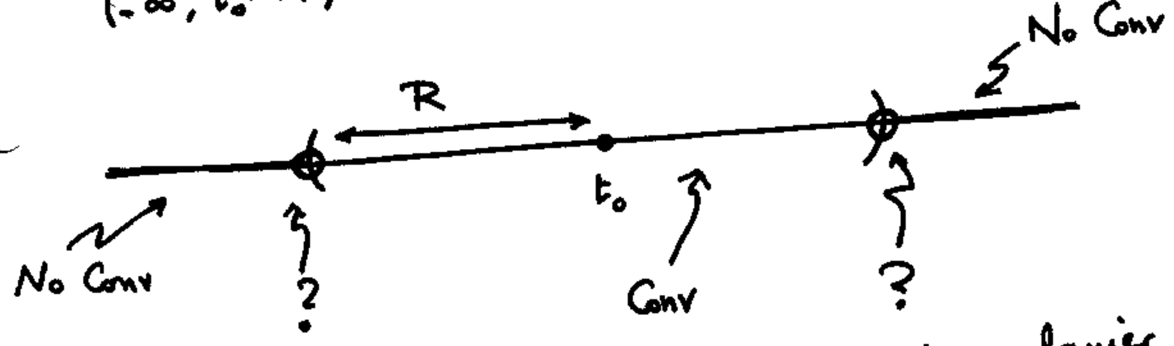
7. Resolución por Series de la ecuación lineal. Puntos ordinarios y singulares

Repaso de series de potencias. Funciones analíticas reales

Una serie de potencias tiene la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \dots$$

donde $t_0 \in \mathbb{R}$ es el centro de la serie y los coeficientes $a_0, a_1 \dots$ son reales. Podemos pensar que se trata de "polinomios de grado infinito". A cada serie de potencias se le asocia un radio de convergencia $R \in [0,\infty]$. Si $R=0$ la serie es formal, no define una función. Si $0<R<\infty$, la serie converge en el intervalo (t_0-R, t_0+R) y no lo hace en $(-\infty, t_0-R) \cup (t_0+R, +\infty)$



En los puntos t_0-R y t_0+R puede ocurrir cualquier cosa.

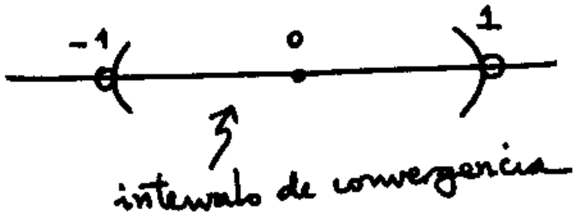
Finalmente, si $R=\infty$ la serie converge en todo $\mathbb{R}$.

Veamos tres <u>ejemplos</u>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, t^n \quad , \qquad R=0 \qquad \text{Serie Formal}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad |t|<1$$

$R=1$



$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t, \ t\in\mathbb{R}, \quad R=\infty$$

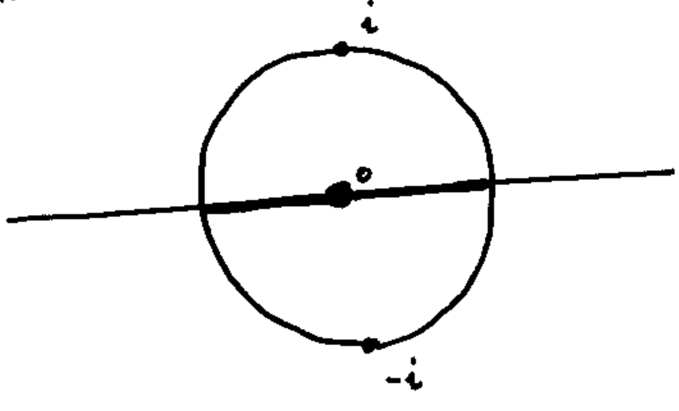
Dada una serie de potencias con radio $R>0$, podemos definir la función

$$f:(t_0-R,t_0+R)\to\mathbb{R}, \quad f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n .$$

Diremos que f es analítica en t_0. Por ejemplo, $\frac{1}{1-t}$ y e^t son analíticas en $t_0=0$.

<u>Nota</u> La teoría de funciones analíticas se ilumina cuando se admite que la variable t tome valores complejos. Por ejemplo, la función $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ es analítica en $t_0=0$ pero su desarrollo en serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$ tiene radio de convergencia $R=1$.

Desde la perspectiva de la variable real este hecho resulta oscuro ¿qué hay de particular en 1? Si admitimos $t\in\mathbb{C}$ la función f tiene polos en $\pm i$, el disco de convergencia se extiende hasta tocar las singularidades



$R=1$
distancia del centro t_0 a las singularidades $\pm i$

Las series de potencias se derivan término a término, como los polinomios. Así, la función

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$$

es derivable en (t_0-R, t_0+R) y su derivada vale

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \, (t-t_0)^{n-1}$$

(La serie ~~deriva~~ de f' también tiene radio R)

Veamos un ejemplo:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \, , \quad |t|<1$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \, t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \, , \quad |t|<1$$

<u>Ejercicio</u> : calcula $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Como la derivada es también una serie de potencias, podemos repetir este proceso tantas veces como queramos. Así f está en $C^{\infty}(t_0-R, t_0+R)$. Además, haciendo $t=t_0$ en la fórmula que da $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)\dots$ obtenemos

$$a_0 = f(t_0) \, , \quad a_1 = f'(t_0) \, , \quad a_2 \cdot 2 = f''(t_0) \, , \dots$$

en general

$$\boxed{a_n = \frac{f^{n)}(t_0)}{n!}}$$

De esta fórmula se sigue un hecho importante:

Sean $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n, \ |t-t_0| < R_1$

$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t-t_0)^n, \ |t-t_0| < R_2.$

Supongamos que, para algún $\varepsilon > 0$,

$$f(t) = g(t), \ t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon).$$

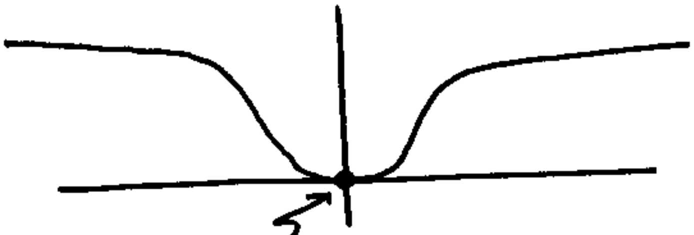
Entonces $a_n = b_n \ \forall n = 0, 1, \dots$

<u>Nota</u> Se sigue de aquí que si una función analítica en t_0 se conoce en un pequeño entorno $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$, entonces su continuación a $(t_0 - R, t_0 + R)$ es única.

Conviene también observar que no todas las funciones C^∞ son analíticas; por ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

está en $C^\infty(\mathbb{R})$ y cumple $f^{n)}(0) = 0, \ n = 0, 1, 2, \dots$



contacto ∞

Esta función no puede ser analítica en $t_0 = 0$ pues su serie sería la de $g \equiv 0$.

Las Series de potencias se suman y multiplican como polinomios.

Si
$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n, \quad |t-t_0|<R_f$$
$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (t-t_0)^n, \quad |t-t_0|<R_g$$

se cumple
$$(f+g)(t) = \sum (a_n+b_n)(t-t_0)^n$$
$$(f\cdot g)(t) = \sum c_n (t-t_0)^n \quad , \quad c_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}_{\text{producto de Cauchy}}$$

Además $\quad R_{f+g}, R_{f\cdot g} \geq \min(R_f, R_g)$

Para entender la fórmula del producto de Cauchy basta escribir las series de forma desarrollada

$$(a_0 + a_1 (t-t_0) + a_2 (t-t_0)^2+\dots)\cdot(b_0+b_1(t-t_0)+b_2(t-t_0)^2+\dots) =$$
$$\underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_1 b_0 + b_1 a_0)}_{c_1}(t-t_0) + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{c_2}(t-t_0)^2+\dots$$

Hay muchas otras propiedades de las funciones analíticas que ya debes conocer. En lo que sigue usaremos básicamente las propiedades de las que hemos hablado.

Series de potencias y ecuaciones diferenciales

La idea de usar series de potencias para resolver ecuaciones diferenciales se remonta a Newton. Veamos un ejemplo:

$x' = t^2 x$

Buscamos soluciones en serie centrada en $t_0 = 0$

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

$$x'(t) = \quad c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1}$$

Sustituyendo en la ecuación,

$$c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \dots = t^2 (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots) \Rightarrow$$

$$c_1 = 0, \ 2c_2 = 0, \ 3c_3 = c_0, \ \dots$$

¿Cómo sigue? Usamos la notación de sumatorias

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} = t^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2}$$

Para identificar coeficientes necesitamos que el grado de los monomios en ambas series coincida; hacemos cambios de índice, en la primera

$$m = n-1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+1} (m+1) t^m,$$

en la segunda

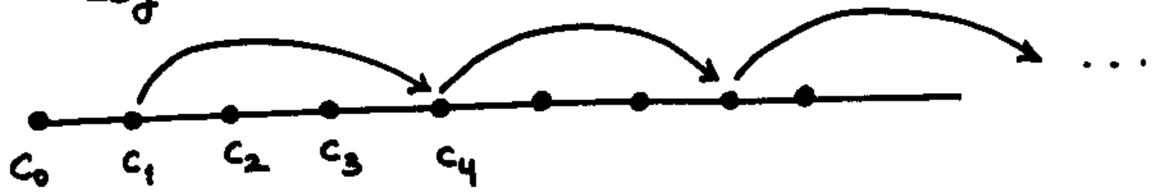
$$m = n+2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2} = \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} t^m$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+1}(m+1)t^m = \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2}t^m$$

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2t + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m+1}(m+1)t^m = \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2}t^m \Rightarrow$$

$$c_1 = 0, \quad 2c_2 = 0, \quad c_{m+1}(m+1) = c_{m-2}, \quad m \geq 2$$

Ley recursiva a tres términos



De $c_1 = 0$, $c_4 = 0$, $c_7 = 0, \ldots$ en general

$$c_{3p+1} = 0, \quad p \geq 0$$

De $c_2 = 0$, $c_5 = 0$, $c_8 = 0, \ldots$

$$c_{3p+2} = 0, \quad p \geq 0$$

Nos quedan los múltiplos de 3, que se obtienen a partir de c_0,

$$c_3 = \frac{1}{3}c_0, \quad c_6 = \frac{1}{6}c_3 = \frac{1}{6 \cdot 3}c_0,$$

$$c_9 = \frac{1}{9}c_6 = \frac{1}{9 \cdot 6 \cdot 3}c_0$$

$$c_{3p} = \frac{1}{3^p \cdot p!}c_0, \quad p \geq 0$$

¿Qué hacer con c_0? Observamos que $c_0 = x(0)$ es la condición inicial; por tanto, si queremos buscar todas las soluciones, debe quedar como parámetro

Escribimos la serie obtenida

$$x(t) = c_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{3^p \cdot p!} \; t^{3p}$$

$$\left(\text{Un error frecuente: } \cancel{\; x(t) = c_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{3^p p!} \, t^p} \right)$$

Hasta ahora sólo hemos llevado a cabo un proceso formal y no hay garantías de que la serie converja. Vamos a estudiar ahora un célebre ejemplo que se debe a Euler.

<u>Ejemplo 2</u>

$$t^2 x' = x - t$$

De nuevo buscamos soluciones de la forma

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

Sustituyendo,

$$t^2 \left(c_1 + 2c_2 t + 3 c_3 t^2 + \ldots \right) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots - t$$

$$c_1 t^2 + 2 c_2 t^3 + 3 c_3 t^4 + \ldots = c_0 + (c_1 - 1) t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \ldots$$

$$c_0 = 0 \,, \quad c_1 - 1 = 0 \,, \quad c_1 = c_2 \,, \quad 2 c_2 = c_3 \,, \quad 3 c_3 = c_4 \implies$$

$$c_0 = 0, \; c_1 = 1, \; c_2 = 1 \,, \; c_3 = 2 \,, \; c_4 = 3 \cdot 2, \ldots \; c_n = (n-1)!$$

Obtenemos la serie

$$x(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! \, t^n$$

que tiene radio de convergencia $R = 0$ y por tanto <u>no</u> converge

Ejercicio: comprueba que las soluciones de esta ecuación son de la forma

$$x(t) = c e^{-\frac{1}{t}} - e^{-\frac{1}{t}} \int_1^t \frac{1}{s} e^{\frac{1}{s}} ds \ , \ c \in \mathbb{R}$$

(funciones no analíticas en $t_0 = 0$)

El resultado siguiente establece condiciones para que la serie converja.

<u>Teorema</u> (Cauchy) Se considera una ecuación lineal

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) x' + a_0(t) x = b(t),$$

y se supone que todos los coeficientes a_i y b son expresables en serie de potencias centrada en t_0, y tienen radios de convergencia $R_i, R_b > 0$. Entonces todas las soluciones de la ecuación admiten un desarrollo del mismo tipo y el radio de convergencia es, al menos,

$$\min(R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}, R_b).$$

<u>Continuación de los ejemplos:</u>

$x' = t^2 x$, $n = 1$, $a_0(t) = t^2$, $b(t) \equiv 0$.
Como los coeficientes son polinomios, tienen radio de convergencia $R_b = R_0 = \infty$. Lo mismo le ha de ocurrir a las sols

$t^2 x' = x - t$, $n = 1$, $a_0(t) = -\frac{1}{t^2}$, $b(t) = \frac{1}{t}$. El T^a no se aplica en $t_0 = 0$.

Más ejemplos

① $x'' + x = 0 \quad , \; x(0) = 0, \; x'(0) = 1$

Sabemos que la solución admite un desarrollo

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n , \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Además, de las condiciones iniciales,

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1.$$

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n \, t^{n-1} , \quad x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n (n-1) t^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n (n-1) t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

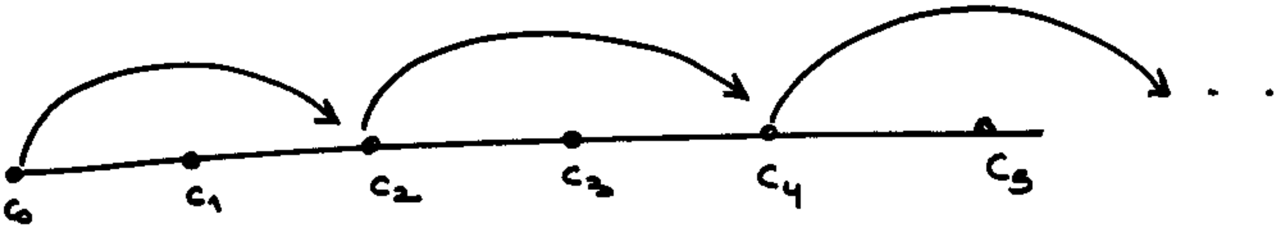
$n = m$

$n - 2 = m$ $\longrightarrow$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{m+2} (m+2)(m+1) t^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m = 0$$

$$c_{m+2} (m+2)(m+1) + c_m = 0, \quad m \geq 0$$

Recurrencia a dos términos,



$c_0 = 0 \longrightarrow c_2 = c_4 = \ldots = 0, \qquad c_{2p} = 0, \; p \geq 0$

$c_1 = 1 , \quad c_3 = -\dfrac{1}{3 \cdot 2} , \quad c_5 = -\dfrac{1}{5 \cdot 4} c_3 = \dfrac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$

En general, $c_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!}$

$$x(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} t^{2p+1},$$ desarrollo de la función seno

(2) $x'' + t^2 x = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$

De nuevo sabemos que la solución admite un desarrollo convergente en todo $\mathbb{R}$,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad c_0 = 0, \ c_1 = 1$$

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1}, \quad x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2} = 0$$

$n-2 = m$ $\qquad$ $n+2 = m$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{m+2} (m+2)(m+1) t^m + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} t^m = 0$$

$m = 0$, $\quad c_2 \cdot 2 \cdot 1 = 0$, $\qquad m = 1$, $\quad c_3 \cdot 3 \cdot 2 = 0$

$m \geq 2$, $\qquad c_{m+2} (m+2)(m+1) + c_{m-2} = 0$

Recurrencia a cuatro términos (*)

$c_0 = 0 \longrightarrow \quad c_4 = c_8 = c_{12} = \cdots = 0$, $\quad c_{4p} = 0$

(*) conviene observar que el orden de la recurrencia no está ligado al orden de la ecuación

$$c_2 = c_6 = c_{10} = \dots = 0, \quad c_{4p+2} = 0$$

$$c_3 = c_7 = c_{11} = \dots = 0, \quad c_{4p+3} = 0$$

$$c_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4}, \quad c_9 = -\frac{1}{9 \cdot 8} c_5 = \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$c_{4p+1} = \frac{(-1)^p}{(4p+1)4p\,(4(p-1)+1)4(p-1)\dots 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$x(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_{4p+1} t^{4p+1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Singularidades en la ecuación lineal

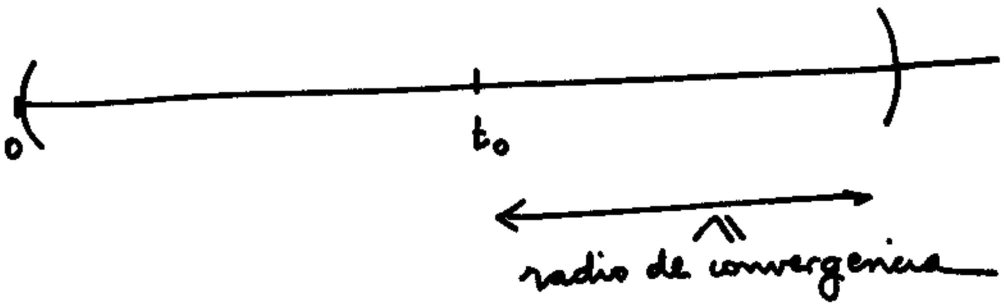
Pensemos en la ecuación

$$t^2 x'' + t e^t x' + x = 0$$

Si escogemos $t_0 > 0$, por ejemplo $t_0 = 2$, podemos desarrollar las soluciones en la forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-2)^n$$

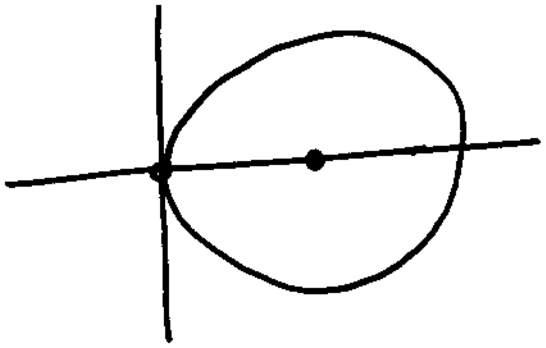
y la serie converge en $(0, 4)$, $R \geq 2$



Esto es así porque las funciones

$$a_1(t) = \frac{1}{t} e^t \ , \ a_0(t) = \frac{1}{t^2}$$

son desarrollables en serie de potencias centrada en t_0 y con radio t_0, pues 0 es un polo



¿Qué le ocurre a la ecuación cuando $t \to 0$? Este es el tipo de cuestión que vamos a ~~tratar~~ a partir de ahora; al final de la lección volveremos sobre este ejemplo concreto. Antes vamos a analizar una singularidad para la ecuación de Euler, porque en este caso las soluciones son explícitas.

Singularidades de la ecuación de Euler

Consideramos la ecuación

$$t^2 x'' + \alpha t x' + \beta x = 0$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes. Trabajamos en el intervalo $I = (0, \infty)$. Sabemos que el cambio $t = e^s$, $s = \ln t$, la reduce a

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + (\alpha - 1)\frac{dx}{ds} + \beta x = 0.$$

Llamamos r_1 y r_2 a las raíces del polinomio

$$r^2 + (\alpha - 1) r + \beta = 0$$

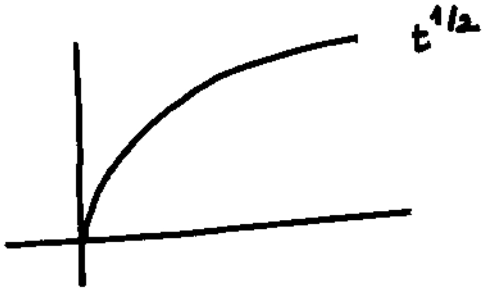
y distinguimos casos:

i) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$ "Raíces reales simples"

s. f. $\varphi_1(t) = t^{r_1}$, $\varphi_2(t) = t^{r_2}$ $\qquad \left(e^{r_1 s} \longrightarrow e^{r_1 \ln t} = t^{r_1} \right)$

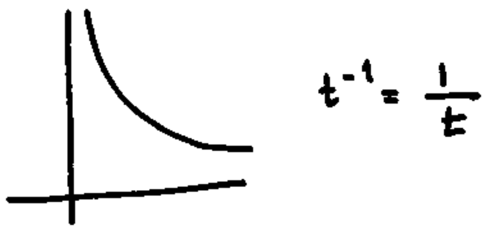
Pensemos en las propiedades de t^r cerca de $t = 0^+$

- $r > 0$ es una función continua en $[0, \infty)$



En general sólo admite un número finito de derivadas en 0, a menos que r sea natural. Por ejemplo, $t^{5/2}$ está en $C^2[0,\infty)$ pero no en $C^3[0,\infty)$

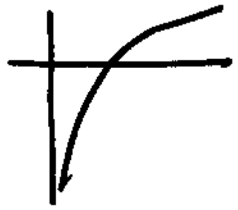
- $r = 0$ función cte
- $r < 0$



ii) $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$ "Raíz doble"

s.f. $\varphi_1(t) = t^r$, $\varphi_2(t) = t^r \ln t$ $\qquad \left(s e^{r_0 s} \longrightarrow \ln t \, e^{r \ln t} \right)$

La función $t^r \ln t$ es continua en $t = 0$ si $r > 0$ y tiene una asíntota si $r \leq 0$

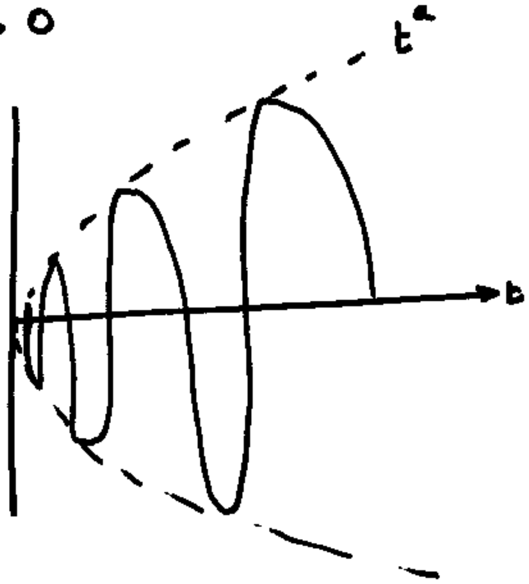


iii) $r_1 = a + ib$, $r_2 = \bar{r}_1$, $b \neq 0$ "Raíces Complejas"

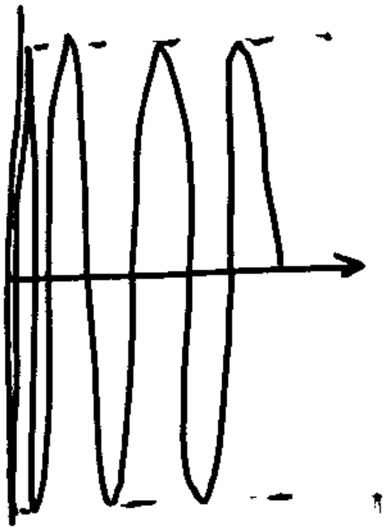
s.f. $\varphi_1(t) = t^a \cos(b \ln t)$, $\varphi_2(t) = t^a \operatorname{sen}(b \ln t)$

$$\left(e^{(a+ib)s} \rightarrow e^{a \ln t} e^{ib \ln t} \right)$$

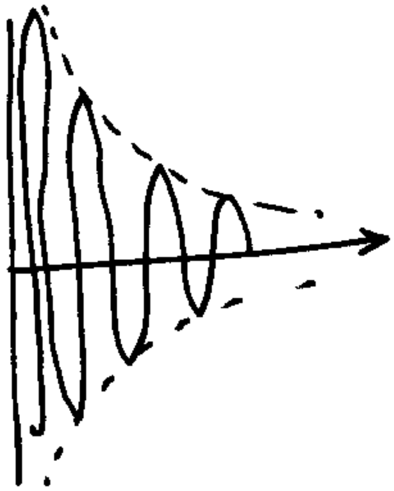
$a > 0$



$a = 0$



$a < 0$



aparecen infinitos ceros que se acumulan en $t = 0^+$

Ahora tenemos una buena compresión del comportamiento de la ecuación de Euler en la singularidad.

Por ejemplo, pregunta: ¿para qué valores de α y β están acotadas todas las soluciones en un entorno de $t=0^+$?

Respuesta: $r_1>0$, $r_2\geq 0$, o bien $r_1=a+ib$, $a\geq 0$.

Puntos singulares-regulares

Consideramos la ecuación

$$(t-t_0)^2x''+(t-t_0)\alpha(t)x'+\beta(t)x=0\,,\ t>t_0$$

donde $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son analíticas en t_0. Como hay una singularidad en t_0, en general no hay esperanza de poder encontrar soluciones en serie de potencias centradas en t_0 (recordemos el ejemplo de Euler). Para $\alpha\equiv$ cte y $\beta\equiv$ cte recuperamos la ecuación de Euler. Por analogía, en el caso general vamos a buscar soluciones de la forma

$$x(t)=(t-t_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(t-t_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(t-t_0)^{n+r}$$

donde ahora $r\in\mathbb{C}$. Estas series (más generales que las de potencias) reciben el nombre de Series de Frobenius. En general, las series de Frobenius no son regulares en t_0 pero como se obtienen como producto de $(t-t_0)^r$ y una serie de potencias, su manipulación formal es la que se puede imaginar.

Definimos la <u>ecuación indicial</u>

$$r^2 + (\alpha(t_0) - 1) r + \beta(t_0) = 0$$

que tendrá dos raíces r_1 y r_2.

<u>Caso 1</u> : $\quad r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

Existe un sistema fundamental del tipo

$$\varphi_1(t) = (t-t_0)^{r_1} h_1(t), \quad \varphi_2(t) = (t-t_0)^{r_2} h_2(t)$$

donde h_1 y h_2 son analíticas en t_0. Además, su radio de convergencia cumple:

$$R_1, R_2 \geq \min(R_\alpha, R_\beta).$$

<u>Nota</u> Si r_1 y r_2 no son reales, se tomarán las partes real e imaginaria de φ_1

<u>Ejemplo</u> $\quad t^2 x'' + \frac{1}{2} t x' + \frac{1}{2} t^2 x = 0, \quad t > 0$

$t_0 = 0$, $\alpha(t) = \frac{1}{2}$, $\beta(t) = \frac{1}{2} t^2$ analíticas en t_0, $R = \infty$.

Ec. indicial $\quad r^2 + \left(-1 + \frac{1}{2}\right) r + 0 = 0$, $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 0$

$r_1 - r_2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Existirá un s. f. del tipo

$$\varphi_1(t) = t^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad \varphi_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n, \quad t \in (0, \infty).$$

Vamos a calcular φ_1, para ello conviene expresarla en la forma

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+\frac{1}{2}}$$

Derivando,

$$\varphi_1'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n+\tfrac{1}{2}\right) t^{n-\frac{1}{2}}, \quad \varphi_1''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{1}{2}\right) t^{n-\frac{3}{2}}$$

(Ahora no perdemos términos al derivar, n siempre empieza en $n=0$. Las fórmulas anteriores tienen sentido para $t>0$, pero no para $t=0$).

Si sustituimos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{1}{2}\right) t^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{2}\, t^{n+\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2} c_n t^{n+\frac{5}{2}} = 0$$

Para identificar coeficientes debemos ordenar los monomios; sería un error escribir

$$c_n \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{1}{2}\right) + c_n \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} c_n = 0$$

no soy del mismo grado!

En las dos primeras series haremos $m=n$; en la última $m=n+2$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\left(m-\tfrac{1}{2}\right) t^{m+\frac{1}{2}} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{2}\, t^{m+\frac{1}{2}} + \sum_{m=2}^{\infty} \tfrac{1}{2} c_{m-2}\, t^{m+\frac{1}{2}} = 0$$

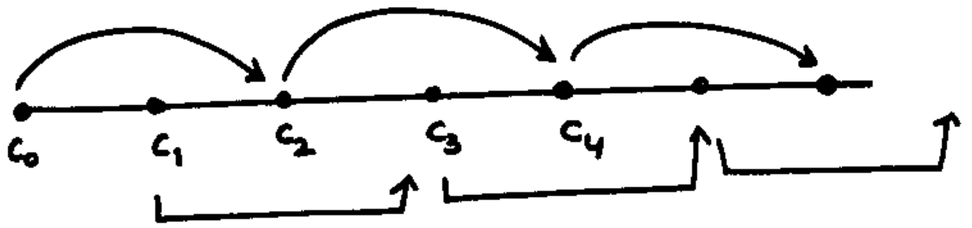
Podemos identificar coeficientes,

$m=0, \quad c_0 \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + c_0 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0, \quad 0=0$ no hay condición

$m=1, \quad c_1 \cdot \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + c_1 \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$

$m \geqslant 2, \quad c_m \left(m+\frac{1}{2}\right) m + \frac{1}{2} c_{m-2} = 0$

Es una recurrencia a dos términos



De donde

$$c_m = -\frac{c_{m-2}}{2m\left(m+\frac{1}{2}\right)}$$

$$c_1 = 0 \rightarrow c_3 = c_5 = \cdots = 0, \quad c_{2p+1} = 0, \ p \geqslant 0$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2\cdot 2\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{2\cdot 4\left(4+\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_0}{2^2\cdot 4\cdot 2\left(4+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{c_0}{2^4\cdot 2\cdot 1\cdot\left(4+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)}$$

$$c_{2p} = \frac{(-1)^p c_0}{2^{2p}\, p!\left(2p+\frac{1}{2}\right)\left(2(p-1)+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(4+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)}, \quad p \geqslant 1$$

Hacemos $c_0 = 1$,

$$\varphi_1(t) = t^{1/2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \, t^{2p+\frac{1}{2}}}{2^{2p} p! \left(2p+\frac{1}{2}\right)\left(2(p-1)+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(4+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)}$$

(En este tipo de cálculos siempre ha de aparecer un parámetro sin determinar (en nuestro caso c_0) : si $\varphi_1(t)$ cumple los requisitos, tambien lo hace $k\varphi_1(t)$ para $k \neq 0$)

Ahora podríamos calcular $\varphi_2(t)$. En este caso sí es analítica en $t_0 = 0$ porque está asociada a la raíz $r_2 = 0$ y la serie de Frobenius se transforma en una serie de potencias.

Se obtiene $d_1 = 0$, $d_n = -\dfrac{1}{2n\left(n-\frac{1}{2}\right)} d_{n-2}$, $n \geq 2$.

Caso 2 : $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$

Podemos ordenar r_1 y r_2 de modo que se cumpla

$$r_1 = r_2 + m, \quad m \geq 0$$

Existe un sistema fundamental

$$\varphi_1(t) = (t-t_0)^{r_1} h_1(t), \quad \varphi_2(t) = (t-t_0)^{r_2} h_2(t) + \gamma \varphi_1(t) \ln(t-t_0)$$

donde h_1 y h_2 son analíticas en t_0 con radio de convergencia

$$R_1, R_2 \geq \min(R_\alpha, R_\beta).$$

La constante $\gamma \in \mathbb{R}$ ha de ser determinada junto con h_1 y h_2.

<u>Ejemplo</u> $\quad t x'' + t x' - x = 0$

La reescribimos como $t^2 x'' + t\,\alpha(t) x' + \beta(t) x = 0$ con $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = -t$. Ec. indicial $r^2 - r = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$

Hay una solución no trivial de la forma

$$\varphi_1(t) = t \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \ , \ t \in (0, \infty)$$

Si hacemos cálculos encontramos que se puede escoger $\varphi_1(t) = t$. Buscamos φ_2 en la forma

$$\varphi_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n + \gamma t \ln t \ , \ t \in (0,\infty).$$

Derivando,

$$\varphi_2'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n n t^{n-1} + \gamma + \gamma \ln t$$

$$\varphi_2''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} d_n n (n-1) t^{n-2} + \frac{\gamma}{t}.$$

Sustituyendo, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} d_n n (n-1) t^n + \gamma t +$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n n t^{n+1} + \gamma t^2 + \gamma t^2 \ln t - \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^{n+1} - \gamma t^2 \ln t = 0$$

Se cancelan los términos con logaritmo. Reordenando las series $(n \to m,\ n+1 \to m,\ n+1 \to m)$

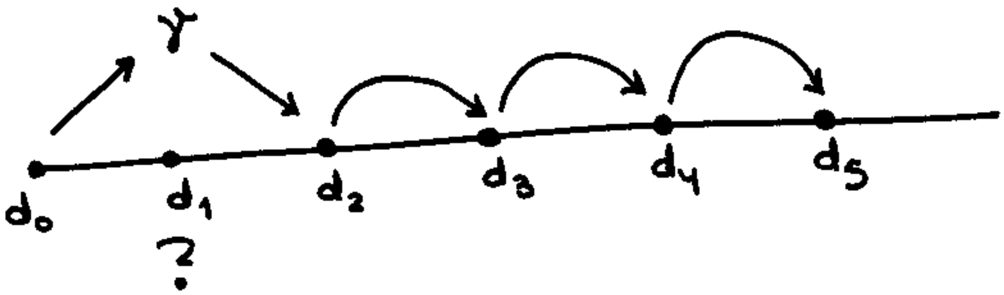
$$\sum_{m=2}^{\infty} d_m m (m-1) t^m + \sum_{m=2}^{\infty} d_{m-1} (m-1) t^m - \sum_{m=1}^{\infty} d_{m-1} t^m + \gamma t + \gamma t^2 = 0$$

$m = 1 \qquad -d_0 + \gamma = 0$

$m = 2 \qquad d_2\, 2\cdot 1 + d_1 \cdot 0\,1 - d_1 + \gamma = 0$

$$m \geq 3 \qquad d_m = -\frac{(m-2)\, d_{m-1}}{m\,(m-1)}$$

$\gamma = d_0$, $\quad d_2 = -\dfrac{\gamma}{2}$. Nos queda ahora una recurrencia a un término que se calcula con paciencia. Si hacemos $d_0 = 1$ (por ejemplo)



¿Qué pasa con d_1? Podemos dar a d_1 cualquier valor (incluido 0). Como $\varphi_1(t) = t$, al variar d_1 sólo estamos escribiendo otra solución de la ecuación. Para fijar ideas, llamemos $\varphi_2(t)$ a la solución que se obtiene con $d_0 = 1$, $d_1 = 0$. Entonces

$$\varphi_2(t) + c\,\varphi_1(t), \quad c \in \mathbb{R}$$

es otra solución que cumple los mismos requisitos que φ_2.

Algo de terminología

Dada una ecuación

$$P(t)\,x'' + Q(t)\,x' + R(t)\,x = 0$$

con P, Q y R analíticas en t_0, se dirá que t_0 es un __punto regular__ si $P(t_0) \neq 0$. En este caso las soluciones son analíticas en t_0. Por el contrario, si $P(t_0) = 0$ se dirá que t_0 es un __punto-singular__. Un punto singular t_0 se dirá __singular-regular__ si los cocientes

$$(t-t_0)\,\frac{Q(t)}{P(t)} \;,\quad (t-t_0)^2\,\frac{R(t)}{P(t)} \quad \text{son analíticos en } t_0.$$

Para identificar esta definición en el formato anterior dividimos la ecuación por $P(t)$ y multiplicamos por $(t-t_0)^2$, se obtiene

$$(t-t_0)^2\,x'' + (t-t_0)\,\underbrace{(t-t_0)\frac{Q(t)}{P(t)}}_{\alpha(t)}\,x' + \underbrace{(t-t_0)^2\frac{R(t)}{P(t)}}_{\beta(t)}\,x = 0.$$

En los puntos singulares-regulares se puede obtener un desarrollo de Frobenius de las soluciones.

Por último, t_0 es __singular-irregular__ en cualquier otro caso. Para esta situación no disponemos de teoría sobre desarrollos de las soluciones en t_0

Comportamiento de las soluciones en el entorno de una singularidad

En muchos casos la teoría de los puntos singulares-regulares nos permite describir el comportamiento de las soluciones sin necesidad de calcular el desarrollo en serie de Frobenius de las soluciones. Volvemos al ejemplo con el que iniciamos el estudio de singularidades:

$$t^2x'' + te^tx' + x = 0, \quad t \in (0,\infty)$$

Hay una singularidad en $t_0 = 0$, punto singular regular con $\alpha(t) = e^t$, $\beta(t) = 1$. En ambos casos la serie de potencias tiene radio de convergencia $R = \infty$, lo mismo le ocurrirá a los desarrollos de las soluciones.

Ec. indicial: $r^2 + (\alpha(0)-1)r + \beta(0) = 0$

$r^2 + 1 = 0$, $r = \pm i$

Existe un s.f. (complejo) de la forma

$$\phi_1(t) = t^i \sum a_n t^n, \quad \phi_2(t) = t^{-i} \sum b_n t^n$$

Un s.f. real se puede obtener al tomar las partes real e imaginaria de $\phi_1(t)$. Como $t^i = \cos(\ln t) + i \operatorname{sen}(\ln t)$ está acotada cerca de $t = 0^+$ (de hecho en todo $(0,\infty)$), se sigue que todas las soluciones están acotadas cerca de $t = 0^+$.

Desarrollos en infinito

En ocasiones puede ser interesante obtener un desarrollo en serie de las soluciones centrado en ∞. Para hacer esto no se requiere una nueva teoría, es suficiente cambiar la variable independiente :

$$t = \frac{1}{s} \quad , \qquad \infty \longleftrightarrow 0$$

Veamos un par de ejemplos :

- La ecuación de coeficientes constantes en $t_0 = \infty$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0 \quad , \quad a,b \in \mathbb{R}$$

$$t = \frac{1}{s} \quad , \quad x = x(s)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{t^2}\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{t^3}\frac{dx}{ds} + \frac{1}{t^4}\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$s^4\frac{d^2x}{ds^2} + 2s^3\frac{dx}{ds} - as^2\frac{dx}{ds} + bx = 0$$

$$s^4\frac{d^2x}{ds^2} + (2s^3 - as^2)\frac{dx}{ds} + bx = 0 \quad \Longrightarrow$$

∞ es un punto singular-irregular a menos que $a = b = 0$

- La ecuación de Euler en $t_0 = \infty$

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + at\frac{dx}{dt} + bx = 0 ; \quad s^2\frac{d^2x}{ds^2} + (2s - as)x + bx = 0$$

$$s = \frac{1}{t} \qquad \Longrightarrow \infty \text{ punto singular - regular}$$