2. Cambios de variable. Métodos elementales de integración

Las ecuaciones diferenciales más sencillas son aquellas en las que la función f sólo depende de t,

$$x' = f(t) \implies x(t) = \int f(t)\,dt + c \quad \text{(Cálculo de Primitivas)}$$

Ejemplos

$x' = 1 \implies x(t) = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$x' = t \implies x(t) = \frac{t^2}{2} + C$

$x' = \operatorname{sen} t \implies x(t) = -\cos t + c$

Observación $x' = \operatorname{sen} x$ no es del tipo anterior. ~~Explica tono~~

Encuentra el error en el siguiente sofisma:

$$x' = \operatorname{sen} x \implies \int x' = \int \operatorname{sen} x \implies x = -\cos x + C$$

Si recuerdas, el cambio de variable era una herramienta muy útil en el cálculo de primitivas; en esta lección vamos a ver que también es útil para resolver ecuaciones. Ahora podemos cambiar de incógnita, de tiempo, de ambas cosas... Comenzamos con el

Cambio de incógnita

Partimos de una ecuación $x' = f(t, x)$ con incógnita $x = x(t)$ y definimos una nueva incógnita $y = y(t)$

por la ley $x=\phi(y)$; llegamos a una nueva ecuación $y'=g(t,y)$.

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ x' = f(t,x) \end{array}\right\} \to \underset{\text{Cambio}}{\boxed{x=\phi(y)}} \to \left\{\begin{array}{l} y = y(t) \\ y' = g(t,y) \end{array}\right.$$

Calculemos g en términos de f y ϕ. Por la regla de la cadena $x(t) = \phi(y(t))$

$$x=\phi(y) \Longrightarrow x'=\phi'(y)\,y'$$

Como $x'=f(t,x)$, $\phi'(y)\,y' = f(t,\phi(y)) \Rightarrow$

$$y' = \frac{1}{\phi'(y)} f(t,\phi(y))$$

(Suponemos $\phi' \neq 0$)

Si sabemos resolver esta ecuación y calcular $y(t)$, podemos recuperar $x(t)$ de la fórmula del cambio.

<u>Ejemplo</u> $x' = te^x$

$f(t,x) = te^x$, $D=\mathbb{R}^2$

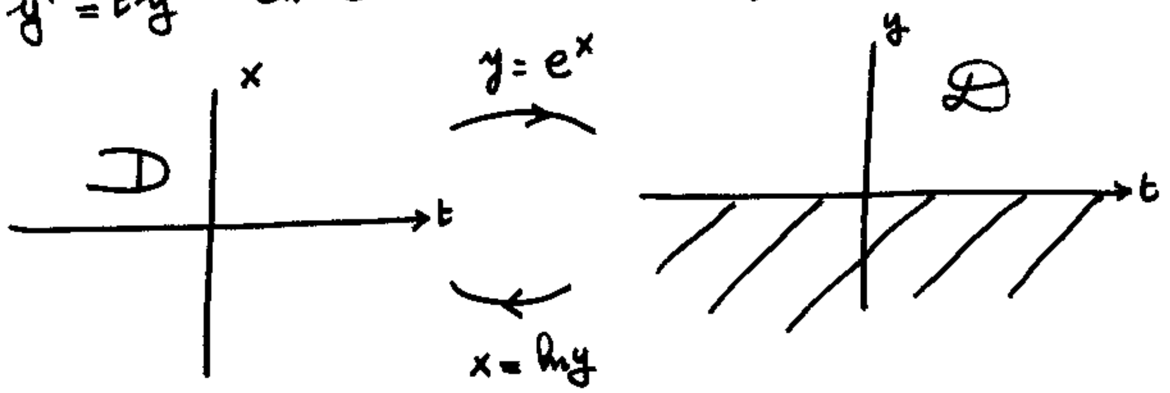
<u>Cambio</u> $e^x = y$, $x = \ln y$ $(\phi(y) = \ln y)$

Derivando $x = \ln y$,

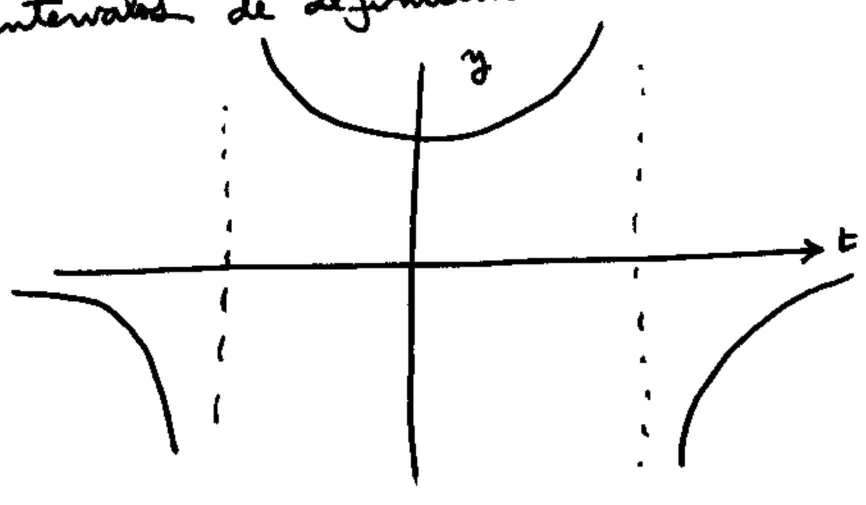
$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{y'}{y} \\ \parallel \\ te^x = ty \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = ty^2$$

La nueva ecuación está definida en todo el plano; sin embargo, sólo nos interesa la región $\{y > 0\}$. La razón está en el cambio, $e^x = y$, pues x puede tomar cualquier valor mientras y es positiva. Así, consideramos

$$y' = ty^2 \text{ en el dominio } \mathcal{D} = \{(t,y) : y > 0\}$$



La fórmula $y(t) = \dfrac{2}{1-t^2}$ produce tres soluciones de $y' = ty^2$ con intervalos de definición $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$



La rama ~~de paso~~ positiva nos conduce a una solución de la ecuación de partida,

$$x(t) = \ln\left(\frac{2}{1-t^2}\right), \quad t \in (-1,1).$$

Las otras ramas no se transportan al plano (t,x) al quedar fuera de $\mathcal{D}$.

Vamos a dar un formato general a lo visto en el ejemplo. Partimos de una función

$$\begin{aligned} \phi : (a,b) &\longrightarrow (\alpha,\beta) \\ y &\longmapsto \phi(y) = x \end{aligned}$$

que cumple:

- ϕ es biyectiva entre los intervalos (a,b) y (α,β)
- $\phi \in C^1$, $\quad \phi'(y) \neq 0 \quad \forall y \in (a,b)$

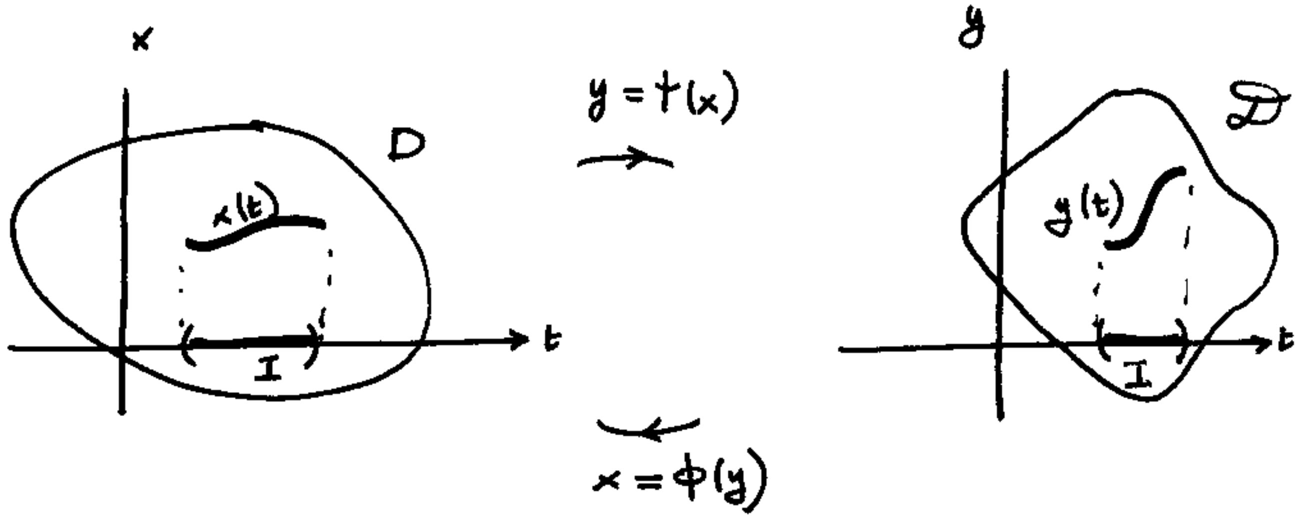
Llamaremos $\psi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$, $x \mapsto \psi(x) = y$ a la inversa.

Partimos de una ecuación

$$x' = f(t,x)$$

definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Para que el cambio $x = \phi(y)$ tenga sentido exigiremos $D \subset \mathbb{R} \times (\alpha,\beta)$; así el dominio D se transformará en

$$\mathcal{D} = \left\{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (t,\phi(y)) \in D \right\}$$



y la ecuación en

$$y' = \frac{1}{\phi'(y)} f(t, \phi(y)) \quad [= g(t,y)]$$

Si nos dan una solución $x(t)$ de la ecuación de partida, $y(t) = \psi(x(t))$ será una solución de la nueva ecuación. Por el contrario, si $y(t)$ es solución de la nueva, $x(t) = \phi(y(t))$ será solución de la ecuación de partida. Las ecuaciones, en los dominios D y $\mathcal{D}$, son equivalentes.

<u>Observación</u> las hipótesis sobre el cambio ϕ son razonables. Queremos que sea biyectiva para poder hacer y deshacer el cambio, $x = \phi(y)$, $y = \psi(x)$. Para poder derivar de manera que g resulte continua, ϕ debe ser C^1. Finalmente, para que $\frac{1}{\phi'}$ tenga sentido, ϕ' no debe anularse.

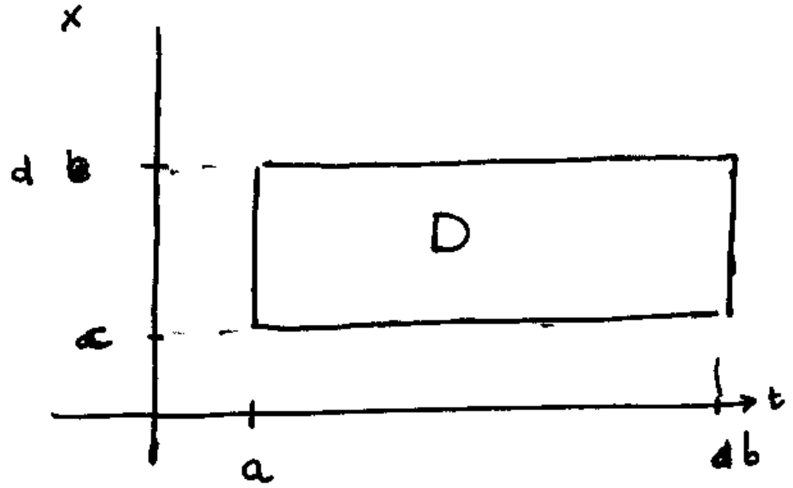
A continuación vamos a presentar una clase de ecuaciones que se llevan, por un cambio de incógnita, al cálculo de primitivas.

Ecuaciones de variables separables

Son de la forma

$$x' = h(t)\,g(x)$$

donde $h : (a,b) \to \mathbb{R}$, $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.
El dominio $D = (a,b) \times (c,d)$ es el rectángulo



(Describe D cuando alguno de los intervalos tiene extremos infinitos)

Ejemplos

① $x' = t e^x$, $h(t) = t$, $g(x) = e^x$, $D = \mathbb{R}^2$
[también es válido, $h(t) = 2t$, $g(x) = \frac{1}{2} e^x$]

② $x' = \sqrt{t}\,\ln x$, $h(t) = \sqrt{t}$, $g(x) = \ln x$, $D = (0,\infty) \times (0,\infty)$

③ $x' = \operatorname{sen} x$, $h \equiv 1$

④ $x' = \operatorname{sen} t$, $g \equiv 1$

⑤ $x' = x + t$ <u>No</u> es de variables separables
(pero $x' = e^{x+t}$ sí lo es)

Buscamos un cambio $x = \phi(y)$ que transforme

$$x' = h(t)\, g(x) \quad \text{en} \quad y' = h(t)$$

Será más claro si buscamos la inversa $y = \psi(x)$.

Entonces,

$$y = \psi(x) \Longrightarrow \quad y' = \psi'(x)\, x' = \psi'(x)\, g(x)\, h(t)$$

Nos interesa $\psi'(x) = \dfrac{1}{g(x)}$; así que el cambio es

$$\psi(x) = \int \frac{dx}{g(x)}$$

Resolución del problema de Cauchy

$$x' = h(t)\, g(x), \quad x(t_0) = x_0 . \quad t_0 \in (a,b),\ x_0 \in (c,d)$$

Distinguimos dos casos:

i) $g(x_0) \neq 0$. Podemos definir ψ cerca de x_0,

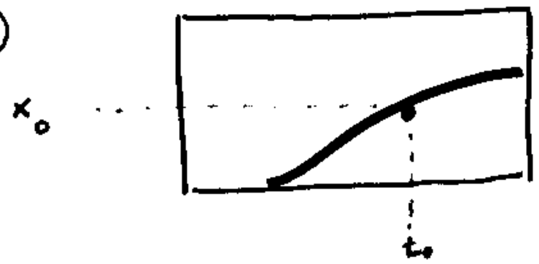
$$\psi(x) = \int \frac{dx}{g(x)}$$ (Por el T^a del Cálculo es un buen cambio)

$$y' = h(t) \Longrightarrow \quad y = \int h(t)\, dt + c \Longrightarrow x = \phi(y)$$

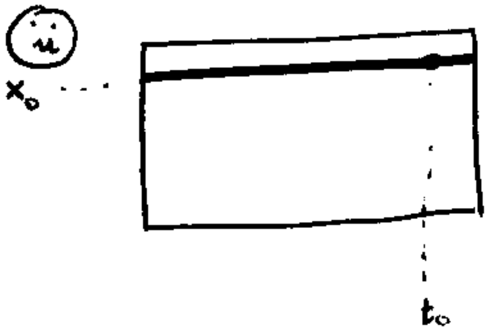
donde ϕ es la inversa de ψ y la constante c se ajusta para que $x(t_0) = x_0$

ii) $g(x_0) = 0$. La función constante $x(t) = x_0$ es solución

i



ii



Regla práctica para resolver $x' = h(t)g(x)$

En primer lugar hallamos las Soluciones constantes
(Ceros de g, $g(x_0) = 0$)
Luego las no constantes. Separando las variables

$$\frac{dx}{dt} = h(t)g(x) \Rightarrow \int \frac{dx}{g(x)} = \int h(t)dt$$

Si se saben hacer las integrales, llegamos a una ecuación

$$\Phi(x) = H(t) + cte$$

Si se sabe despejar x, $x = x(t)$

Ejemplo $x' = tx^2$, $x(0) = 1$

$D = \mathbb{R}^2$. Resolvemos la ecuación,
Sols Ctes, $g(x) = x^2 = 0 \Rightarrow x \equiv 0$ No nos sirve pues no cumple la condición inicial
Sols No Ctes

$$\frac{dx}{dt} = tx^2, \quad \int \frac{dx}{x^2} = \int t\,dt, \quad -\frac{1}{x} = \frac{t^2}{2} + c,$$

$$x(t) = -\frac{1}{\frac{t^2}{2} + C}$$

. Ajustamos la constante

$x(0) = 1$, $1 = -\frac{1}{C}$, $C = -1$

Solución $x(t) = -\dfrac{1}{\frac{t^2}{2} - 1} = \dfrac{2}{2 - t^2}$, $t \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$

¿Por qué no he escogido $(-\infty, -\sqrt{2})$ o $(\sqrt{2}, +\infty)$?

De nuevo $x' = \lambda x$

Es una ecuación de variables separables $[h \equiv \lambda, g(x) = x]$

Sols ctes $x \equiv 0$

Sols no ctes

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \Longrightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int \lambda dt, \quad \ln|x| = \lambda t + C$$

$$e^{\ln|x|} = e^{\lambda t + C}, \quad |x| = e^{C} e^{\lambda t}, \quad x = \pm e^{C} e^{\lambda t}$$

Haciendo $k = \pm e^{C}$ obtenemos

$$x(t) = k e^{\lambda t}, \ k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

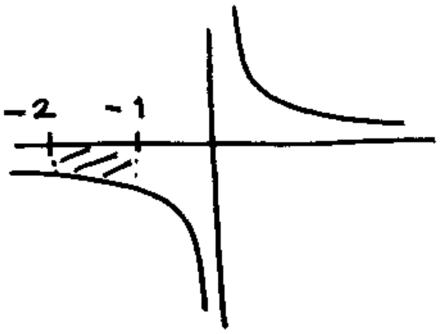
Si fusionamos las Sols de ambos tipos (ctes y no ctes) llegamos a la fórmula ya conocida

$$x(t) = k e^{\lambda t}, \ k \in \mathbb{R}.$$

Observaciones

- Ha sido importante usar la fórmula $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ y no $\int \frac{dx}{x} = \ln x$; en el segundo caso llegaríamos a la expresión $x = e^{C} e^{\lambda t}$ en lugar de $x = \pm e^{C} e^{\lambda t}$, y sólo obtendríamos las Sols positivas
- Recuerda el significado de la fórmula $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$: $\ln(-x)$ es la primitiva de $\frac{1}{x}$ en $(-\infty, 0)$ y $\ln(x)$ lo es en $(0, \infty)$. Así,

$$\int_{-2}^{-1} \frac{ds}{s} = \ln|s| \Big]_{-2}^{-1} = -\ln 2$$



pero $\int_{-2}^{2} \frac{ds}{s}$ no está definida

Explica el error: $\int_{-2}^{2} \frac{ds}{s} = \ln|s| \Big]_{-2}^{2} = 0.$

Resuelve los problemas de Cauchy

$x' = e^{t^2} x \,, \quad x(0) = 1$

$x' = e^{t^2} x \,, \quad x(1) = 0$

$x' = e^{t+x} \,, \quad x(0) = 1$

$x' = x^2 \,, \quad x(0) = 1.$

Más sobre el cambio de variable

Vamos a permitir que el cambio de variable dependa de t, es decir $x = \phi(t, y)$

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ x' = f(t, x) \end{array}\right\} \to \underbrace{\boxed{x = \phi(t, y)}}_{\text{Cambio}} \to \left\{\begin{array}{l} y = y(t) \\ y' = g(t, y) \end{array}\right.$$

Calculamos g a partir de la regla de la cadena,

$x(t) = \phi(t, y(t)) \Longrightarrow$

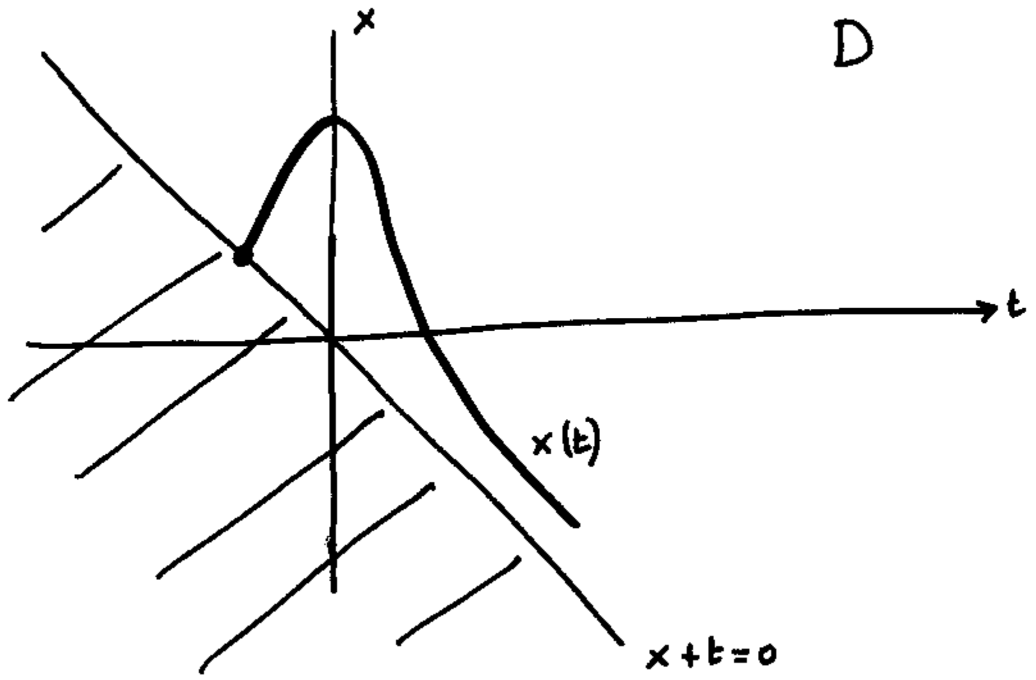
$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(t,y)\,y' \\ &\Vert \\ f(t,x) &= f(t,\phi(t,y)) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$g(t,y) = \frac{f(t,\phi(t,y)) - \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,y)}{\frac{\partial\phi}{\partial y}(t,y)}$$

<u>Ejemplo</u> $\quad x' = \frac{1}{x+t} - 1$

Estudiaremos esta ecuación en el dominio

$$D = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 : \; x + t > 0 \}$$



El cambio será $\; x + t = y \;, \; x = y - t$

$$\left.\begin{aligned} x' &= y' - 1 \\ &\Vert \\ \frac{1}{y} &- 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{y}$$

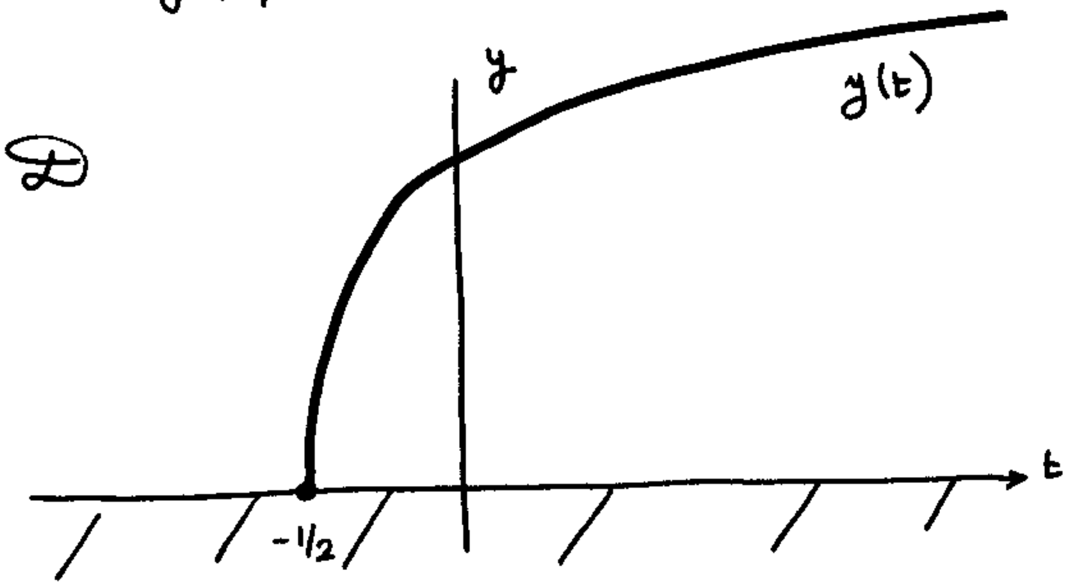
La nueva ecuación $y' = \frac{1}{y}$ se considera en el dominio

$$\mathcal{D} = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0 \}$$

Esta ecuación se puede integrar (variables separables)

y una solución es

$$y(t) = + \sqrt{2t+1} \ , \quad t \in \left(-\tfrac{1}{2}, +\infty\right)$$



De donde, $x(t) = \sqrt{2t+1} - t \, , \quad t \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

es solución de la ecuación original

Planteamiento general

Partimos de una función ("el cambio")

$$\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \, , \quad (t,y) \longmapsto \phi(t,y)$$

donde $\mathcal{D}$ es abierto y arco-conexo. Suponemos que la transformación

$$(t,y) \longmapsto (t,x) \quad \text{con } x = \phi(t,y)$$

lleva $\mathcal{D}$ en otro dominio $D \subset \mathbb{R}^2$.

Para poder hacer y deshacer el cambio supondremos que hay inversa; es decir, existe

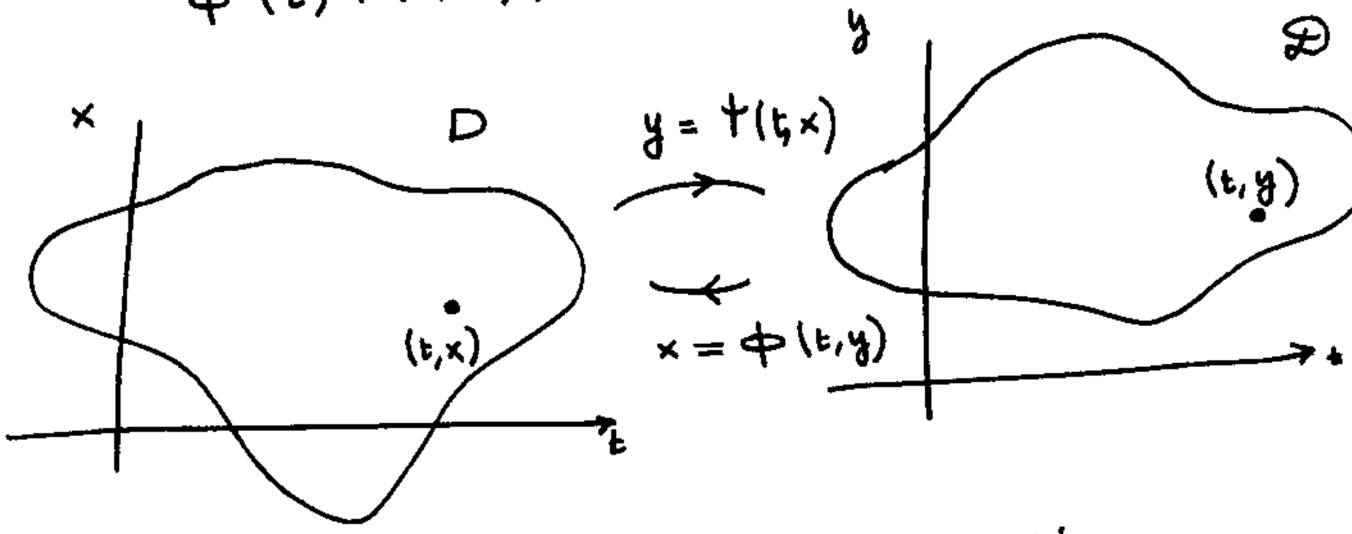
$$\psi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto \psi(t,x)$$

de manera que

$$(t,x) \mapsto (t,y), \quad y = \psi(t,x)$$

lleva D en $\mathcal{D}$ y además

$$\phi(t, \psi(t,x)) = x, \quad \psi(t, \phi(t,y)) = y$$



Suponemos que ϕ es de clase C^1 y cumple

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(t,y) \neq 0 \quad \forall (t,y) \in \mathcal{D}.$$

Entonces, dada una ecuación en D

$$x' = f(t,x),$$

ésta se transporta a $\mathcal{D}$ como

$$y' = \frac{f(t, \phi(t,y)) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,y)}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(t,y)}.$$

Las dos ecuaciones son equivalentes pues si $x(t)$ es solución en D, $y(t) = \psi(t, x(t))$ es solución en $\mathcal{D}$ y recíprocamente, dada $y(t)$ en $\mathcal{D}$, $x(t) = \phi(t, y(t))$ es solución en D.

Ecuaciones Homogéneas

Son de la forma

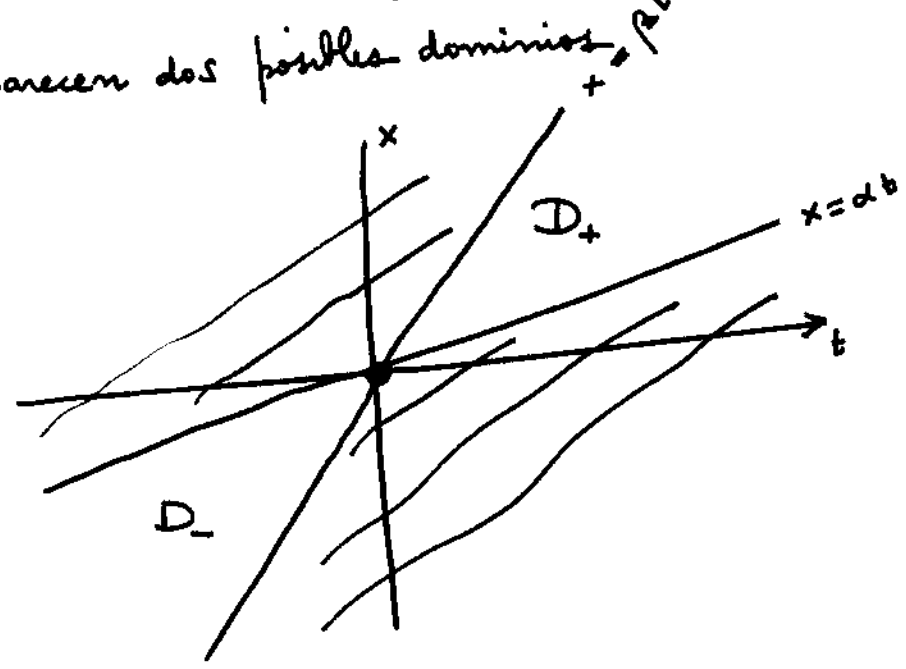
$$x' = q\left(\frac{x}{t}\right)$$

donde $q : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ es una función continua.

Para que la ecuación tenga sentido necesitamos

$$t \neq 0, \quad \alpha < \frac{x}{t} < \beta ;$$

así aparecen dos posibles dominios,



$$D_+ = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, \ \alpha < \frac{x}{t} < \beta \}$$

$$D_- = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 : t < 0, \ \alpha < \frac{x}{t} < \beta \}$$

[Describe a D_+ y D_- cuando $\alpha = -\infty$ o $\beta = +\infty$]

Ezemplos

① $x' = e^{\frac{x}{t}} + \frac{t}{x}$, $q(\xi) = e^{\xi} + \frac{1}{\xi}$

② $x' = \dfrac{t + \sqrt{t^2+x^2}}{x}$ $\left[= \dfrac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2}}{\left(\frac{x}{t}\right)} \; , t>0 \right]$

Más en general,

$$x' = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$$ donde P y Q son funciones homógeneas del mismo grado

$$P(\lambda t, \lambda x) = \lambda^m P(t,x) \, , \; Q(\lambda t, \lambda x) = \lambda^m Q(t,x) \, , \; \lambda > 0$$

En los libros de problemas aparece esta clase con frecuencia; en especial cuando P y Q son polinomios

$$x' = \frac{t^3 + 2t\,x^2 - 4t^2 x}{2t^3 - x^3} \; ;$$

se escriben con notaciones diversas

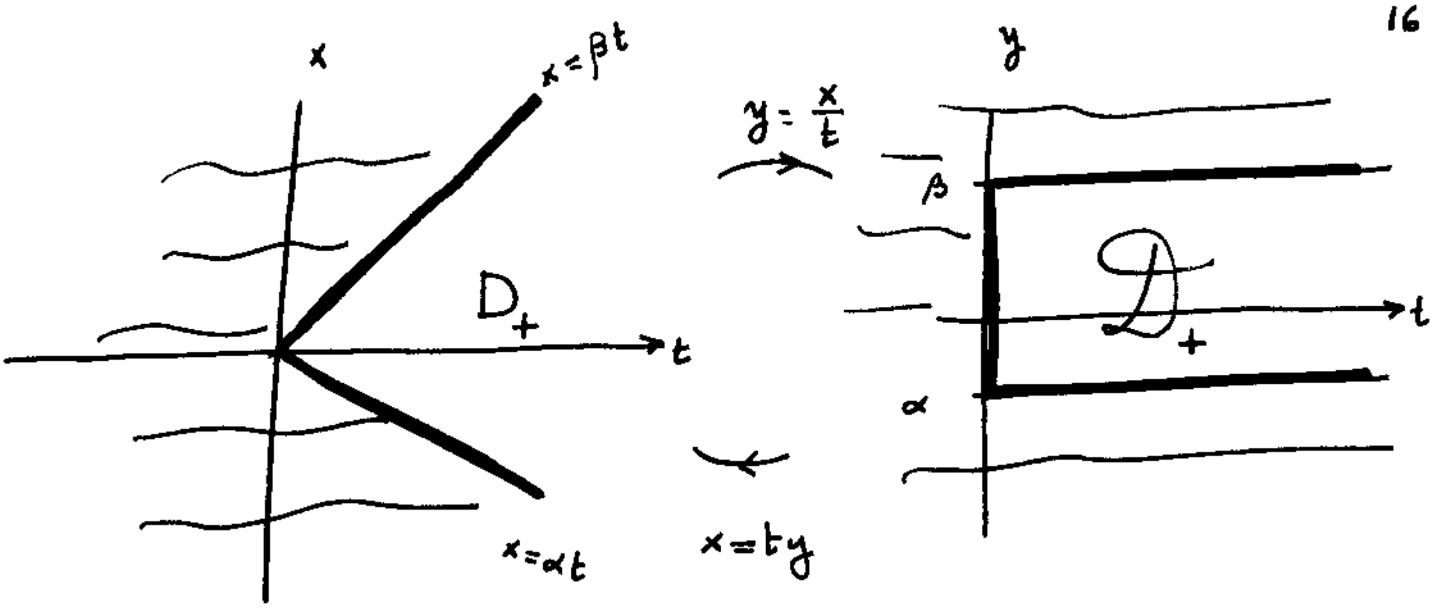
$$\left(4t^2x - 2tx^2 - t^3\right) dt + \left(2t^3 - x^3\right) dx = 0$$

Resolución

Empleamos el cambio $y = \frac{x}{t}$, con inversa $x = ty$

$$x = ty \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x' = y + t y' \\ \quad \shortparallel \\ q\left(\frac{x}{t}\right) = q(y) \end{array}\right\} \; y' = \frac{1}{t}\left[q(y) - y\right]$$

Ec. de variables separables

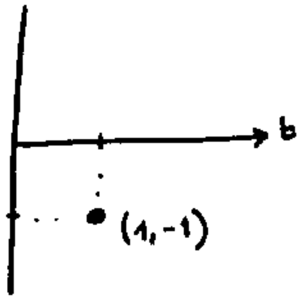


$$\mathcal{D}_+ = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, \ \alpha < y < \beta \}$$

<u>Ejemplo</u> Resuelve el problema de Cauchy

$$x' = \frac{x t^2 + x^3}{t^3} \quad , \quad x(1) = -1$$

$$D_+ = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0 \}$$



¿Por qué he elegido D_+ y no D_- ?

$$x' = \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^3$$

$$\frac{x}{t} = y \ , \quad x = ty, \quad \left.\begin{array}{l} x' = y + ty' \\ \parallel \\ y + y^3 \end{array}\right\} \ ty' = y^3$$

$$y' = \frac{1}{t} y^3, \quad \mathcal{D} = \{ (t,y) : t > 0 \}$$

Sol Cte $y = 0 \Longrightarrow x = 0$ no cumple la c.i.

Sols No Ctes

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int \frac{dt}{t} \qquad -\frac{1}{2y^2} = \ln t + C$$

[Observa que no he escrito $\ln|t|$, ¿?]

$$y^2 = \frac{1}{K-2\ln t}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{K-2\ln t}},$$

$$x(t) = \pm t\sqrt{\frac{1}{K-2\ln t}}$$

Ajustamos la constante K y el signo de la raíz

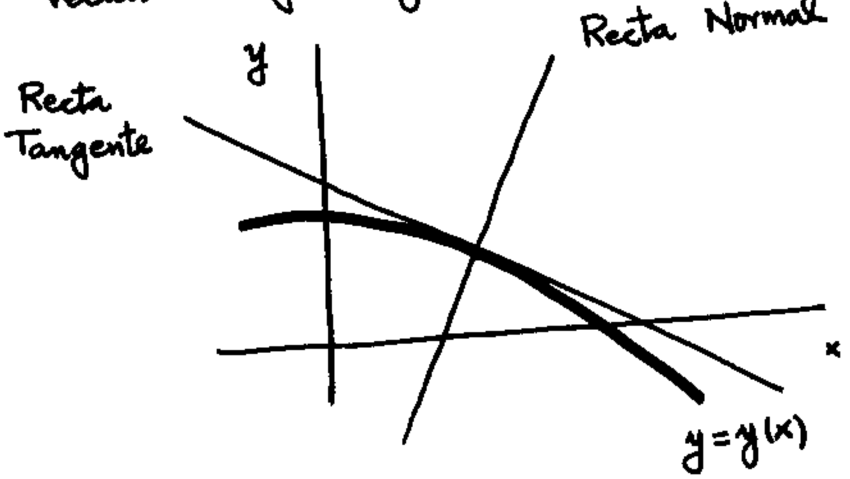
$$x(1) = -1 \longrightarrow K = 1,$$

$$x(t) = -t\sqrt{\frac{1}{1-2\ln t}}, \quad t \in (0, e^{1/2})$$

Un problema geométrico

En ocasiones una curva viene definida por propiedades de sus rectas tangentes y/o normales y la curva se obtiene como solución de una e.d. de 1^{er} orden.

Antes de dar un ejemplo recordamos cómo escribir las rectas tangente y normal a una curva $y=y(x)$



$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad (\perp)$

$\Longrightarrow$

pendiente tgte y'

pendiente normal $-\frac{1}{y'}$

Recta tgte en $(x, y(x))$

$$v - y = y'(u-x)$$

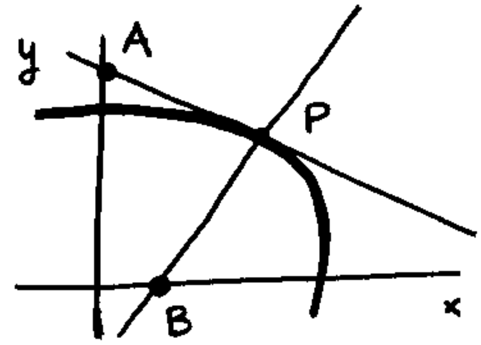
Recta normal en $(x, y(x))$

$$v - y = -\frac{1}{y'}(u-x)$$

Para describir la recta tgte he usado las variables u y v; podía haber usado cualquier otra pareja : α y β, $\blacksquare$ y $\oslash$, ...
Bueno, todas salvo x e y que se han "congelado" para fijar el punto de la curva (x,y) donde calculamos la tgte

Después de estos preliminares planteamos un <u>problema</u>:

Encuentra una curva en el plano (x,y) de manera que si A es el corte de la tangente con el eje y y B es el corte de la normal con el eje x



$A = (0, a)$

$B = (b, 0)$

entonces $a = b$. Esto debe ocurrir en cada punto P de la curva. Para fijar la curva suponemos además que pasa por el $(1,1)$.

<u>Resolución</u>: buscamos la curva en explícitas $y = y(x)$
[esperamos que exista]

<u>Cálculo de A</u> Recta tgte $v - y = y'(u-x)$, $u = 0 \Rightarrow$

$v = y - xy'$, $A = (0, y - xy')$

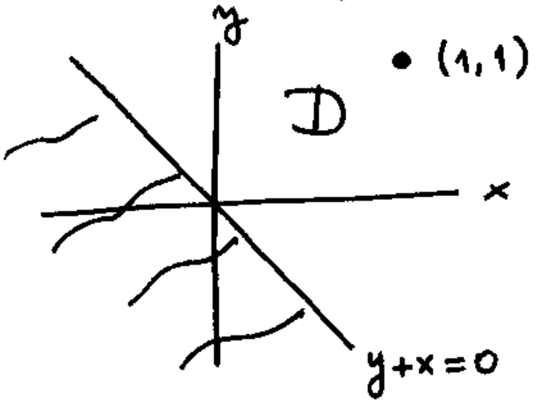
<u>Cálculo de B</u> Recta normal $v - y = -\frac{1}{y'}(u-x)$, $v = 0 \Rightarrow$

$u = yy' + x$, $B = (x + yy', 0)$

$a = b \rightsquigarrow \quad y - xy' = x + yy'$

$$y' = \frac{y-x}{y+x}, \quad y(1) = 1$$

Dominio $\mathcal{D} = \{(x,y) : y + x > 0\}$

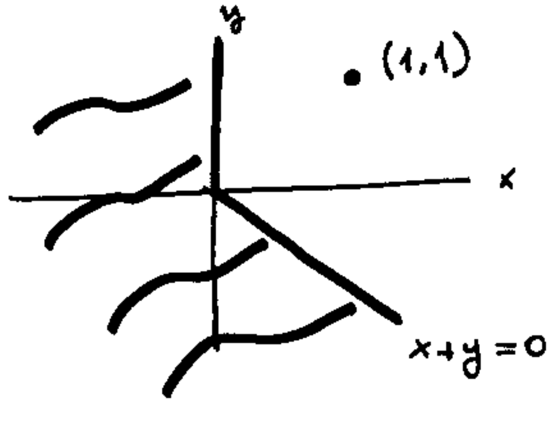


Para interpretar la ec. como homogénea dividimos numerador y denominador por x

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

Al escribir la ecuación de esta forma hemos introducido una singularidad artificial en $x=0$ y debemos restringir el dominio a

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : x > 0,\ x + y > 0\}$$



El cambio $z = \dfrac{y}{x}$, $y = xz$ transforma la ecuación a

$$z' = -\frac{1}{x}\,\frac{1+z^2}{1+z},$$

$$\int \frac{1+z}{1+z^2}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{arctg} z + \frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right) = -\ln x + C$$

Con el truco $\ln x = \frac{1}{2}\ln x^2$,

$$\operatorname{arctg} z + \frac{1}{2}\ln\left[x^2(1+z^2)\right] = C$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\sqrt{x^2+y^2} = C$$

$x = y = 1 \longrightarrow \quad C = \dfrac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$.

$y = y(x)$ viene definida de manera implícita.
Comprueba que se cumplen las hipótesis del Tª de la función implícita.

La fórmula que hemos obtenido está pidiendo un cambio a polares

$x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\theta + \ln r = C$ "espiral logarítmica",

curva muy querida por Johan Bernoulli

$r = e^{C-\theta}$

Eadem mutata resurgo

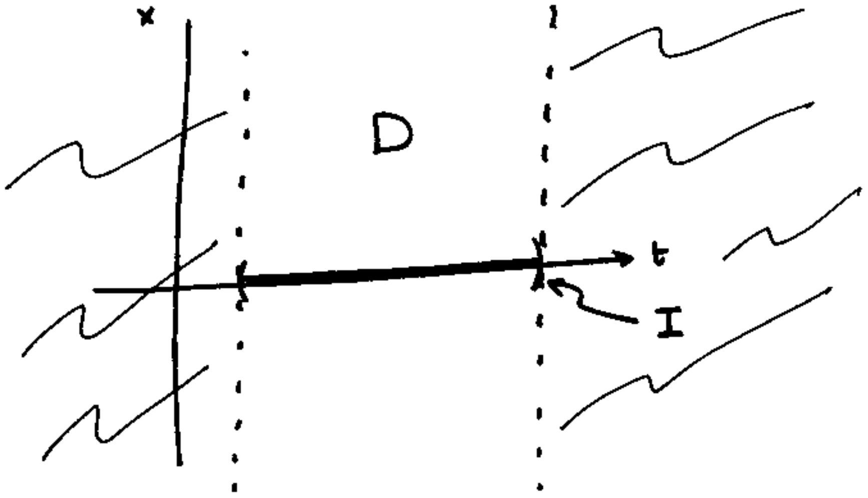
La ecuación lineal

Es de la forma

$$x' = a(t)x + b(t)$$

con $a, b : I \to \mathbb{R}$ continuas en un intervalo abierto I.

El dominio es la banda vertical $D = I \times \mathbb{R}$



Ejemplos

i) $x' = e^t x + \operatorname{sen} t$ ii) $x' = te^x + \operatorname{sen} t$ iii) $x' = e^t x + \operatorname{sen} x$

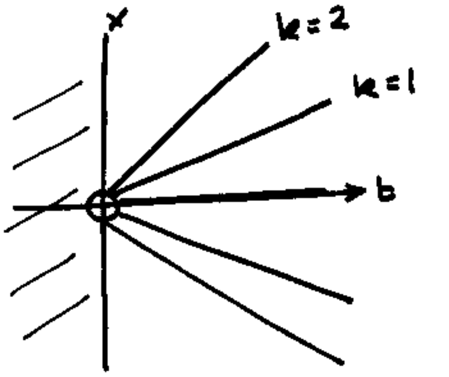
Sólo i) es lineal

Hay un caso especial en el que podemos resolver con facilidad

Ec. Lineal Homogénea $b \equiv 0$, $x' = a(t)x$ variables separables

Solución : $x(t) = k e^{A(t)}, \ k \in \mathbb{R}$

$A(t)$ primitiva de $a(t)$



Ejemplo $x' = \dfrac{x}{t}$, $D = (0,\infty)\times\mathbb{R}$

$$x(t) = k\, e^{\ln t} = kt \ , \quad t \in (0,\infty)$$

[Sobre terminología: la ec. lineal homogénea no guarda relación con las ecuaciones homogéneas que estudiamos antes]

La ecuación completa $(b \not\equiv 0)$

Efectuamos un cambio de variable sugerido por el caso anterior

$$x = y\, e^{A(t)}$$

[Comprueba que este cambio lleva D en D y cumple todos los requisitos de un buen cambio]

$$x' = y' e^{A} + y e^{A} A' = y' e^{A} + y e^{A} a$$

$$\shortparallel$$

$$ax + b = a y e^{A} + b$$

$$y' e^{A} = b \implies y' = b\, e^{-A}$$

$$y(t) = \int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt + k \ , \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{x(t) = k\, e^{A(t)} + e^{A(t)} \int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt}$$

Podemos decir que hemos resuelto la ecuación por "variación de la constante", de

$$x = k e^{A} \quad \text{pasamos a} \quad x = y e^{A}$$

k cte $\qquad\qquad$ $y = y(t)$

<u>Ejemplo</u> $\quad x' = \frac{x}{t} + 1 \;, \quad D = (0,\infty) \times \mathbb{R}$

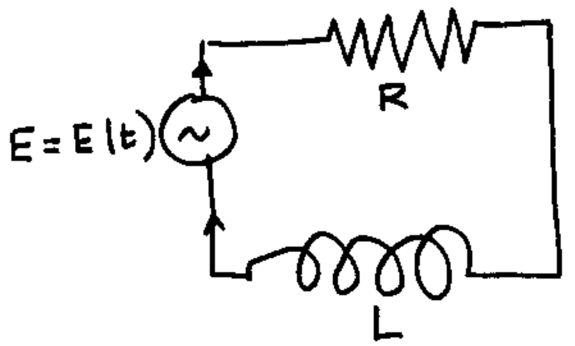
Cambio $x = yt$,

$$\left.\begin{array}{l} x' = y' t + y \\ \shortparallel \\ \frac{x}{t} + 1 = y + 1 \end{array}\right] \quad y' = \frac{1}{t} \;, \; y(t) = \ln t + C$$

$$\boxed{x(t) = t \ln t + Ct \;, \; t \in (0,\infty)}$$

<u>Circuitos eléctricos</u>

Considera un circuito.



La fuente $E(t)$ es una función conocida, así como R y L (constantes positivas). Buscamos la intensidad de corriente $i = i(t)$ y para ello calculamos las diferencias de potencial

 Ri  $L\dfrac{di}{dt}$

de donde,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \qquad \text{Ec. Lineal}$$

Ejemplos:

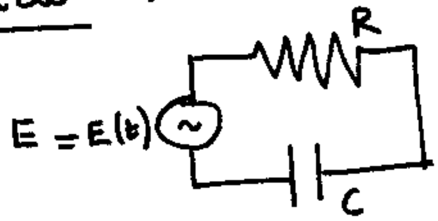
i) E constante

$$i(t) = \underbrace{k\,e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\frac{E}{R}}_{\text{estacionario}}$$

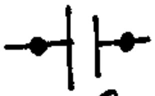
ii) $E(t) = \operatorname{sen} t$

$$i(t) = \underbrace{k\,e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t)}_{\text{oscilatorio}}$$

Ejercicio Estudio análogo para



(incógnita: carga $q = q(t)$

$\dfrac{dq}{dt} = i$,  $\dfrac{1}{C}q$)

Ecuación de Riccati

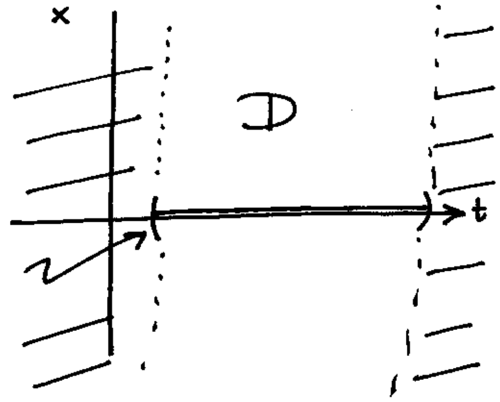
Es de la forma

$$x' = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$$

con $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas (I intervalo abierto). Al igual que en el caso lineal el dominio es una franja vertical. Tiene importancia histórica pues fue la primera ecuación para la que se probó que las soluciones podían no ser expresables a partir de funciones elementales y cuadraturas, y ello a pesar de que los coeficientes fuesen funciones racionales (Liouville 1839).

El dominio natural para esta ecuación es la banda vertical

$$D = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \; / \; t \in I \}$$

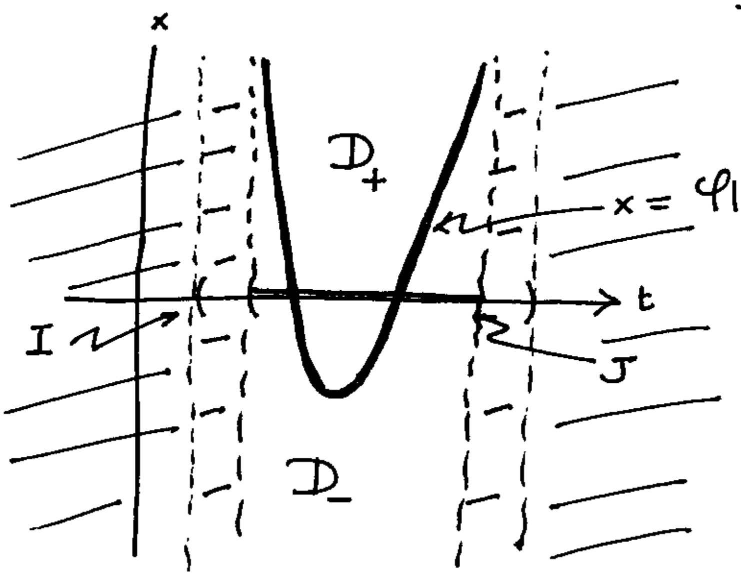


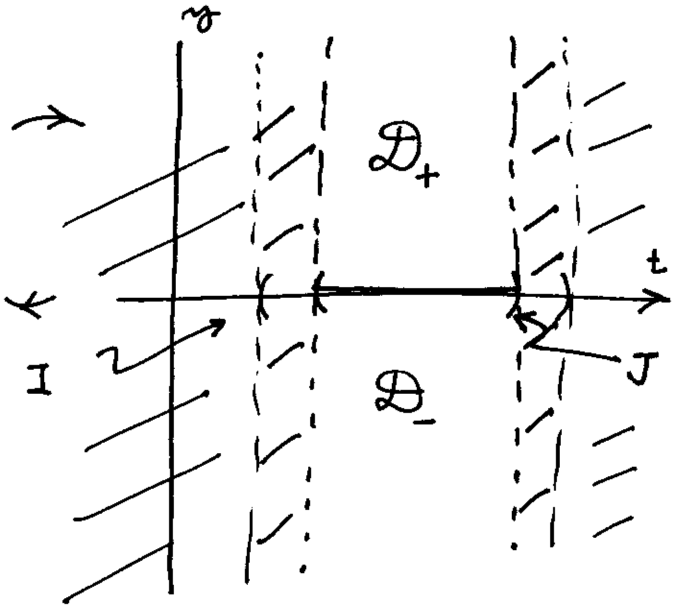
Supongamos que se conoce, de manera explícita, una solución particular $\varphi(t)$. Es posible resolver la ecuación con el cambio

$$\boxed{y = \frac{1}{x - \varphi(t)}}$$

Puede ocurrir que $\varphi(t)$ esté definida en todo I o sólo en un subintervalo $J \subset I$. En ~~este~~ el segundo caso el cambio sólo tiene sentido si $t \in J$. Consideramos la ecuación en uno de los dominios

$$\mathcal{D}_+ = \{ (t,x) / \; t \in J, \; x > \varphi(t) \}, \; \mathcal{D}_- = \{ (t,x) / \; t \in J, \; x < \varphi(t) \}$$





$$\mathcal{D}_+ = \{ (t,y) / \; t \in J, \; y > 0 \} \;, \; \mathcal{D}_- = \{ (t,y) / \; t \in J, \; y < 0 \}$$

Se cumplen todos los requisitos para un cambio admisible de D_+ en $\mathcal{D}_+$ o de D_- en $\mathcal{D}_-$.

La inversa del cambio es $x = \varphi(t) + \frac{1}{y}$, derivando

$$x' = \varphi' - \frac{y'}{y^2}$$

$$\| $$

$$a + bx + cx^2 = a + b\left(\varphi + \frac{1}{y}\right) + c\left(\varphi + \frac{1}{y}\right)^2 =$$

$$a + b\varphi + \frac{b}{y} + c\varphi^2 + \frac{2c\varphi}{y} + \frac{c}{y^2} \Longrightarrow$$

$$-\frac{y'}{y^2} = (b + 2c\varphi)\frac{1}{y} + \frac{c}{y^2}, \quad \boxed{y' = -\left(b(t) + 2c(t)\varphi(t)\right) y - c(t)}$$

Ec. Lineal

Ejemplo $\quad x' = -x^2$

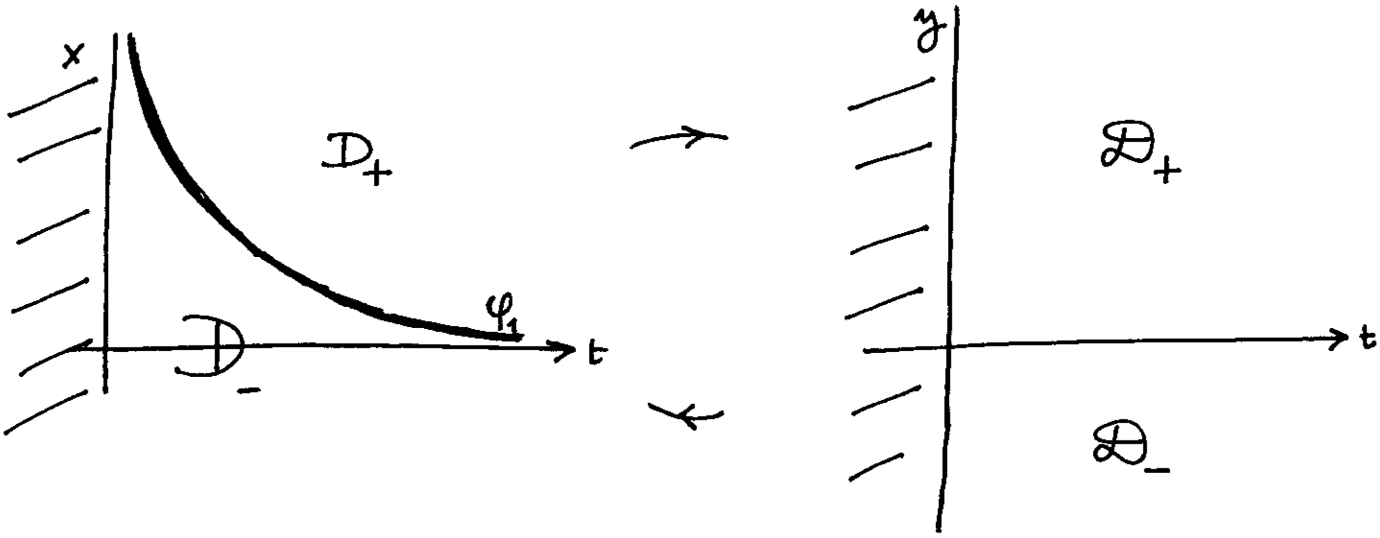
Esta ecuación es de Riccati (también de variables separadas). Una solución particular es $\varphi(t) = \frac{1}{t}$; bueno, en realidad esta fórmula encierra dos soluciones

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in (0, \infty); \qquad \varphi_2(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in (-\infty, 0).$$

El dominio de la ecuación es $D = \mathbb{R}^2$ pero el cambio de variable que queremos hacer $y = \frac{1}{x - \varphi_i(t)}$ nos obliga a restringirnos a uno de los semiplanos $t > 0$, $t < 0$.

Nos quedamos con φ_1 y trabajamos en

$$D_+ = \left\{ (t,x) : t > 0, \ x > \tfrac{1}{t} \right\} \text{ o } D_- = \left\{ (t,x) : t > 0, \ x < \tfrac{1}{t} \right\}$$



$$y = \frac{1}{x - \frac{1}{t}}, \qquad x = \frac{1}{t} + \frac{1}{y}$$

$$x' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y'}{y^2}$$

$$\|$$

$$-x^2 = -\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{y}\right)^2 = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{2}{ty}$$

$y' = 1 + \frac{2}{t} y$ Ec. Lineal con Soluciones

$$y(t) = -t + ct^2, \ c \in \mathbb{R}$$

Observamos que el eje horizontal $y=0$ se transforma por el cambio en $x=\infty$. Por eso sólo nos interesan los arcos de estas parábolas que quedan en $\mathcal{D}_+$ o $\mathcal{D}_-$ (las zonas donde el cambio es admisible)

$$x(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{-t+ct^2}, \ c \in \mathbb{R}$$

A estas soluciones tenemos añadir $x(t) = \varphi_1(t) = \frac{1}{t}$. Esta solución se perdió al efectuar el cambio pues $x = \varphi_1 \rightarrow y = \infty$

El cambio de variable empleado nos ha llevado a excluir $t=0$. Sin embargo la ecuación de partida está definida en todo el plano, $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$. ¿Cómo calculamos la solución que cumple $x(0) = 1$? En la fórmula anterior se produce una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ si hacemos $t=0$.

La reescribimos como

$$x(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t(ct-1)} = \frac{c}{ct-1}$$

$$x(0) = 1 \Longrightarrow C = -1, \qquad x(t) = \frac{1}{1+t}, \ t \in]-1, +\infty[$$

Esta fórmula se justifica por sustitución directa en la ecuación, pues el camino seguido para obtenerla no ha sido riguroso.