UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV
Primer Parcial. 6 de Febrero, 2001

- *Entrega los ejercicios por separado*
- *Duración del examen: 3 horas y media. Puntuación máxima: 30*

1. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = -\frac{x}{t} + f(tx), \quad t > 0$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada que se supone continua.
[3] i) Se define la nueva incógnita $u = u(t)$, dada por

$$u = tx.$$

Prueba que esta fórmula define un cambio de variables entre dominios apropiados y transporta la ecuación diferencial al plano (t, u).
[7] ii) Halla la solución de

$$x' = -\frac{x}{t} + e^{tx}, \quad x(1) = 0.$$

2. Se considera la ecuación

$$x'' - t^3 x = 0.$$

[8] i) Calcula el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de las soluciones.
[2] ii) Determina el radio de convergencia de dichas series.

3. Sea $F : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (t, x_1, x_2, p_1, p_2) \mapsto F(t, x_1, x_2, p_1, p_2)$ una función de clase C^2. Se define el funcional (que depende de dos funciones):

$$\mathcal{F}[x_1, x_2] = \int_0^1 F(t, x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))dt$$

con dominio

$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2)/\ x_1, x_2 \in C^1[0,1],\ x_1(0) = \alpha_1,\ x_2(0) = \alpha_2,\ x_1(1) = \beta_1,\ x_2(1) = \beta_2\}$$

(α_i, β_i números dados).
[10] i) Demuestra que si $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo en $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$, con $x_i \in C^2[0,1]$, entonces x_1 y x_2 cumplen

$$F_{x_i}(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) - \frac{d}{dt} F_{p_i}(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = 0, \quad i = 1, 2.$$