Primer encuentro de jóvenes investigadores de la Red Española de Análisis Geométrico

Burjassot (Valencia), del 22 al 24 de Noviembre de 2007

1. Programa del encuentro

Jueves 22 – Aula 1.2

- 10:15–10:30. **Presentación**
- 10:30–11:30. **Olga Gil Medrano:** Campos minimizantes en las esferas
- 11:30–12:00. **Descanso café**
- 12:00–12:50. **José Antonio Gálvez:** Superficies de curvatura constante en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
- 12:50–13:40. **Judit Abardia:** Geometría integral y espacio hiperbólico complejo
- 13:40–15:15. **Almuerzo**
- 15:15–16:10. **Antonio Alarcón:** El problema de Calabi-Yau para superficies minimales en $\mathbb{R}^3$.

Viernes 23 – Aula 0.7

- 10:10–11:00. **César Rosales:** Problemas isoperimétricos y aplicaciones
- 11:00–11:50. **Vicente Palmer:** Hiperbolicidad y curvatura media en subvariedades
- 11:50–12:10. **Descanso café**
- 12:10–13:00. **Pablo Mira:** Superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos I
- 13:00–13:50. **Isabel Fernández:** Superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos II

Sábado 24 – Salón de grados

- 10:30–11:20. **Teresa Arias:** Study and use of Ledger's conditions
- 11:20–11:40. **Descanso café**
- 11:40–12:30. **Magdalena Rodríguez:** Problema de Dirichlet para superficies minimales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
- 12:30–13:30. **H. D. Cao:** por determinar

2. Resúmenes de las comunicaciones

Campos de vectores minimizantes en las esferas

Olga Gil (Universidad de Valencia)

Si consideramos los campos de vectores (o equivalentemente los flujos) definidos en un dominio del espacio euclideo y buscamos los que mejor se comportan, la respuesta resulta fácil: son aquellos que vienen dados por rectas que se mantienen equidistantes; en efecto ellos son los que alcanzan los valores mínimos de la energía y del área, por ejemplo. Si nos hacemos la misma pregunta en el caso de una superficie (o más generalmente de una variedad Riemanniana) antes de arriesgarnos con la respuesta que parece obvia: aquellos cuyo flujo venga dado por geodésicas equidistantes, debemos reflexionar que tales campos en general no existen: pueden estar prohibidos por la geometría de la variedad. En particular, en el caso de las esferas, esta sencilla pregunta planteada por H. Gluck y W. Ziller hace más de 20 años, está lejos de ser resuelta y está mostrándose como una fuente de interesantes descubrimientos.

Superficies de curvatura constante en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

José Antonio Gálvez (Universidad de Granada)

Dado un espacio modelo 2-dimensional $\mathbb{H}^2$, $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{S}^2$, estudiaremos si éste puede verse inmerso en uno de los espacios homogéneos $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

En particular, se demostrarán versiones generalizadas de los teoremas clásicos de Liebmann y Hilbert en estos espacios ambiente. Esto es, se demostrará que existe una única inmersión isométrica desde la esfera estándar de curvatura $c > 0$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y una única en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ si $c > 1$, salvo congruencias. No existe ninguna inmersión en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ si $0 < c < 1$. Además, veremos que el plano hiperbólico de curvatura $c \leq -1$ no puede ser isométricamente inmerso en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Geometría integral y espacio hiperbólico complejo

Judit Abardia (Universitat Autònoma de Barcelona)

Uno de los objetivos de la geometría integral es encontrar la medida de objetos geométricos (por ejemplo, las rectas en el plano) que cortan una figura (por ejemplo un convexo del plano). Para obtener una medida de estos objetos es necesario, en primer lugar, obtener una densidad. La posible existencia de ésta depende de la homogeneidad del espacio y de la transitividad del grupo de isometrías sobre el conjunto de objetos geométricos que consideramos.

Algunos de los primeros resultados los encontramos en la obra de Chern, Hadwiger, Blaschke y Santaló. Se obtienen resultados, principalmente, en el espacio euclideo. Tal y como ya apuntan, se pueden generalizar los resultados a espacios homogéneos.

Uno de los resultados clásicos es la fórmula de Cauchy-Crofton que dice que podemos recuperar la longitud de una curva del plano a partir de la medida de rectas que cortan la curva ponderada por el número de cortes de la recta con la curva. Eso es, muchos de los resultados nos permiten obtener información de un objeto a partir de cortes de éste con rectas, planos,...

Así, uno de los objetivos de mi tesis es estudiar geometría integral en el espacio hiperbólico complejo.

El espacio hiperbólico complejo es la (salvo isometrías) única variedad completa, simplemente conexa de Kaelher con curvatura holomorfa constante. Una de sus propiedades es que no existen hipersuperficies reales totalmente geodésicas. A pesar de esto podemos hacer geometría integral con los planos complejos y algunas hipersuperficies, como por ejemplo las mediatrices, llamadas bisectores, que son hipersuperficies minimales.

El problema de Calabi-Yau para superficies minimales en $\mathbb{R}^3$

Antonio Alarcón (Universidad de Granada)

Mostraremos las técnicas que usó N. Nadirashvili en la construcción del primer ejemplo de superficie minimal completa e inmersa en la bola unidad de $\mathbb{R}^3$. Refinamientos de sus argumentos han sido usados en la construcción de ejemplos con topologías más complicadas.

Problemas isoperimétricos y aplicaciones

César Rosales (Universidad de Granada)

Daremos una visión general del problema isoperimétrico más simple que se puede considerar sobre una variedad riemanniana y estudiaremos las principales técnicas analíticas y geométricas que intervienen en la resolución de este tipo de problemas y sus aplicaciones. Si queda tiempo mostraremos como se pueden utilizar flujos geométricos para la obtención de desigualdades isoperimétricas explícitas sobre el paraboloide elíptico de $\mathbb{R}^3$.

Hiperbolicidad y curvatura media en subvariedades

Vicente Palmer (Universitat Jaume I de Castelló)

Imaginad un helicoide hecho de un material conductor y homogéneo. Si se establece una diferencia de potencial en esta superficie, ¿cuál es la intensidad de la corriente generada sobre ella? ¿Existe alguna relación entre esta propiedad física y otras propiedades analíticas de la superficie, (como su hiperbolicidad)? ¿Cómo decir algo sobre estas propiedades usando cotas para la curvatura media de la superficie? La charla tratará de responder a alguna de estas cuestiones.

Superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos I

Pablo Mira (Universidad Politécnica de Cartagena)

En esta charla explicaremos los aspectos básicos de la teoría de superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos Riemannianos 3-dimensionales. En particular, motivaremos el interés de esta teoría, analizaremos los problemas más relevantes y presentaremos algunas de las herramientas de mayor alcance que vienen siendo utilizadas.

Superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos II

Isabel Fernández (Universidad de Sevilla)

En estas charla explicaremos cómo construir una aplicación de Gauss "hiperbólica" para superficies en uno de los espacios homogéneos, a saber, el espacio producto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{H}^2$ denota el plano hiperbólico. La principal propiedad de esta aplicación de Gauss es que es armónica en $\mathbb{H}^2$ cuando la curvatura media de la superficie es $H = 1/2$. Como consecuencia de este hecho resolveremos los problemas de Bernstein (i.e., la clasificación de los grafos enteros) tanto para superficies con $H = 1/2$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como para superficies minimales en otro de lo espacios homogéneos, el espacio de Heisenberg Nil_3.

Study and use of Ledger's conditions

Teresa Arias (Institute of Mathematics, Humbolt University, Berlin)

Ledger's conditions are an infinite series of curvature conditions denoted by L_q, $g \geq 2$. It was proved by L. Vanhecke that the "odd" Ledger conditions are already consequences of the "even" ones. Anyway, these inductively defined conditions soon become very complicated. Thiu, the expicit form of L_q is known only for small values of q ($q = 3, 5, 7$). Moreover, the difficulty of checking if they are satisfied or not on a given manifold increases with the dimension of the manifold.

On the other hand these conditions are so important because the property of being a D'Atri space (i.e., a space with volume preserving symmetries) is equivalent to the odd Ledger conditions. In addition, a Riemannian manifold (M, g) satisfying the first odd Ledger condition is said to be of type $\mathcal{A}$.

Now, we have found a way to study the Ledger conditions on the six and twelve dimensional Wallach's flag manifolds. Moreover, we have used it to determine when they are D'Atri spaces.

In addition, using it between other tools, we present the complete local classification of all 4-dimensional homogeneous spaces of type $\mathcal{A}$ in a simple and explicit form and, as a consequence, we prove correctly that all 4-dimensional homogeneous D'Atri spaces are locally naturally reductive.

Problema de Dirichlet para superficies minimales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Magdalena Rodríguez (Universidad Complutense de Madrid)

Sea $\Omega \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ un dominio cuya frontera $\partial\Omega$ está formada por un número finito de arcos C_i convexos (respecto de Ω), posiblemente en $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. En este trabajo conjunto con Harold Rosenberg, encontramos la condición necesaria y suficiente que ha de cumplir Ω para que, fijados cualesquiera valores continuos f_i sobre los arcos C_i (posiblemente $\pm\infty$) exista un grafo minimal definido sobre todo el dominio Ω que tome esos valores frontera.

3. Listado de participantes

- Judit Abardia Bochaca – Universitat Autònoma de Barcelona – juditab@mat.uab.cat
- Antonio Alarcón López – Universidad de Granada – alarcon@ugr.es
- Teresa Arias Marco – Humbolt University (Berlin) – arias@math.hu-berlin.de
- Isabel Fernández Delagado – Universidad de Sevilla – isafer@us.es
- José Antonio Gálvez López – Universidad de Granada – jagalvez@ugr.es
- Ana Hurtado Cortegana – Universitat Jaume I de Castelló – ahurtado@mat.uji.es
- Asunción Jiménez Grande – Universidad de Granada – asunjg@correo.ugr.es
- Pere Menal Ferrer – Universitat Autònoma de Barcelona – pmenal@mat.uab.cat
- Pablo Mira Carrillo – Universidad Politécnica de Cartagena – pablo.mira@upct.es
- Magdalena Rodríguez Pérez – Complutense de Madrid – magdalena@mat.ucm.es
- César Rosales Lombardo – Universidad de Granada – crosales@ugr.es
- Francisco Torralbo Torralbo – Universidad de Granada – ftorralbo@ugr.es