

## Relación de ejercicios del tema 2

Topología II. Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática

Curso 2023/2024

Profesor: Rafael López Camino

Actualización: 04/09/2023, hora: 09:33:18

---

Si no se dice nada, se supondrá que  $(\tilde{X}, p)$  es un espacio recubridor de  $X$ .

1. Probar que la aplicación recubridora es abierta.
2. Probar que la familia de todos los entornos fundamentales del espacio base es una base de abiertos de la topología.
3. Si  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Z \rightarrow \tilde{X}$  son homeomorfismos, entonces  $(\tilde{X}, f \circ p)$  es recubridor de  $Y$  y  $(Z, p \circ g)$  de  $X$ .
4. Si  $Y$  es un espacio discreto, entonces  $(X \times Y, p: X \times Y \rightarrow X)$  es recubridor de  $X$ .
5. Sea  $Z = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \tilde{X} \times \tilde{X} : p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)\}$ . Probar que  $(Z, f)$  es recubridor de  $X$  donde  $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$ .
6. (Composición de recubridores) Probar que si  $(Y, f)$  es recubridor de  $X$  y  $(X, g)$  es recubridor de  $Z$  donde las fibras son finitas, entonces  $(Y, g \circ f)$  es recubridor de  $Z$ .
7. Si  $\tilde{X}$  es el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y  $X$  el hiperboloides reglado  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , encontrar  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  de manera que  $(\tilde{X}, p)$  es recubridor de  $X$ .
8. Consideramos la hélice

$$H = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Probar que  $H$  es un recubridor de  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$  mediante la proyección ortogonal.

9. Supongamos que todas las fibras son finitas. Probar que  $\tilde{X}$  es compacto y Hausdorff si y sólo si  $X$  es compacto y Hausdorff.
10. (Recubridor de la banda de Möbius). Consideramos  $\mathbb{M}$  como cociente de  $\mathbf{I}^2$  de la forma habitual. Sea  $\tilde{X} = \mathbb{R} \times \mathbf{I}$  y el homeomorfismo  $f: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{M}$  definido por  $f(x, y) = (x+1, 1-y)$ . Sea  $G$  el grupo generador por  $f$ . Probar que  $G$  actúa propia y discontinuamente sobre  $\tilde{X}$  y deducir que  $\tilde{X}$  es un recubridor de  $\mathbb{M}$ .

11. (Recubridor de la banda de Möbius de dos hojas). Consideramos  $X = \mathbf{I}^2 \cup ([1, 2] \times \mathbf{I})$  con la relación de equivalencia  $\sim$  identificando los lados  $\{0, 2\} \times \mathbf{I}$  para que dé un cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbf{I}$ . Hallar una aplicación  $p: X/\sim \rightarrow \mathbb{M}$  para que  $(X, p)$  sea un recubridor de  $\mathbb{M}$ .
12. Probar que la aplicación  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $((n, m), (x, y)) \rightarrow (x+n, y+m)$ , es una acción continua y que es propiamente discontinua. Deducir que  $\mathbb{R}^2$  es un recubridor del toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .
13. (continuación del anterior). Consideramos el toro como el cociente  $T = \mathbb{R}^2/G$ , con  $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Definimos
 
$$f: T \rightarrow T, \quad f([(x, y)]) = [A(x, y)],$$
 donde  $A(x, y)$  es el producto de las dos matrices y los corchetes indican clase de equivalencia. Probar que  $(T, f)$  es un recubridor de  $n$  hojas de  $T$ . Calcular el grupo de automorfismos de  $(T, f)$ .
14. Construir una aplicación recubridora de dos hojas del toro sobre la botella de Klein y deducir que el recubridor universal de  $\mathbb{K}$  es  $\mathbb{R}^2$ .
15. Probar que  $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es isomorfismo si y sólo si  $p$  es homeomorfismo.
16. Consideramos  $(\mathbb{S}^1, p_n(z) = z^n)$  recubridor de  $\mathbb{S}^1$ . Probar que la aplicación  $p_m$  tiene un levantamiento mediante  $p_n$  si y sólo si  $m = nk$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . En tal caso, se tiene  $\tilde{p}_m = p_k$  donde  $\tilde{p}_m$  es el único levantamiento de  $p_m$  con condición inicial  $\tilde{p}_m(1) = 1$ .
17. Hallando los automorfismos del recubridor universal, hallar recubridores del toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .
18. Clasificar los recubridores del cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ .
19. Clasificar los recubridores del cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbf{I}$ .
20. Clasificar los recubridores de  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 2$ .
21. Clasificar los recubridores de  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ,  $n, m \geq 2$ .

22. Sea  $\tilde{X} = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\cup_{n \in \mathbb{Z}} [0, 1] \times \{n\})$  y  $X = \mathbb{S}^1 \cup \{(x, 0) : 1 \leq x \leq 2\}$ . Hallar  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  para que  $(\tilde{X}, p)$  sea recubridor de  $X$ . Probar que es el recubridor universal y deducir todos los recubridores de  $X$ .

23. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  el grupo  $G = \{\phi_{n,m} : n, m \in \mathbb{Z}\}$  de homeomorfismos de  $\mathbb{R}^2$  donde

$$\phi_{n,m}(x, y) = A^n(x, y) + (n, (-1)^n m).$$

Haciendo actuar  $G$  sobre  $\mathbb{R}^2$  de manera natural, probar que  $G$  actúa propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$  y el espacio de órbitas es  $\mathbb{K}$ .

24. Consideramos el toro  $T$  como cociente de  $\mathbb{R}^2$  con la relación  $(x, y) \sim (x', y')$  si  $x' - x \in 2\mathbb{Z}$ ,  $y - y' \in \mathbb{Z}$ . Sea  $f: T \rightarrow T$  dado por  $f([(x, y)]) = [(x + 1, -y)]$ . Probar que  $f$  es un homeomorfismo y que  $G = \{1_T, f\}$  es un grupo que actúa propia y discontinuamente sobre  $T$ . Probar que  $T/G$  es homeomorfo a la botella de Klein y deducir que  $T$  es un recubridor de dos hojas de  $\mathbb{K}$ .

25. Determinar el grupo de automorfismos para los siguientes recubridores:

- (a)  $(\mathbb{R}, p(t) = e^{2\pi it})$  de  $\mathbb{S}^1$ .
- (b)  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, p \times p)$  de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .
- (c)  $(\mathbb{R}^2, p \times 1_{\mathbb{R}})$  de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ .
- (d)  $(\mathbb{S}^1, p_n(z) = z^n)$  de  $\mathbb{S}^1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- (e)  $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_n \times p_m)$  de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .
- (f)  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p \times p_n)$  de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

26. Hallar el recubridor universal de  $\mathbb{D} \setminus \{(0, 0)\}$  y de la corona circular  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq |(x, y)| \leq 2\}$ .

27. Hallar el recubridor universal de  $\mathbb{S}^2$  junto con un arco en el exterior de la bola unidad que una los dos polos de la esfera.

28. Estudiar si  $\mathbb{S}^1$  puede ser recubridor de  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  de  $\mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{P}$  de  $\mathbb{S}^1$ , y  $\mathbb{S}^1$  de  $\mathbb{P}$ .

29. Si  $\alpha$  es un lazo en  $X$ , ¿es necesariamente alguno de sus levantamientos un lazo en  $\tilde{X}$ ?

30. Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^2$ . ¿Es  $(\mathbb{C}, f)$  recubridor de  $\mathbb{C}$ ?

31. Probar que si  $\tilde{X}$  es compacto y simplemente conexo, entonces  $\pi_1(X)$  es finito.

32. Sea  $G$  un subgrupo de homeomorfismos de  $X$  actuando sobre  $X$ . Si la aplicación proyección  $p: X \rightarrow X/G$  es recubridora, entonces la acción es propiamente discontinua.
33. Sea  $X$  un espacio cuyo grupo fundamental es finito. Probar que si  $(X, p)$  es recubridor, entonces  $p$  es un homeomorfismo.
34. (a) Si  $\tilde{X}$  es compacto, el número de hojas es finito.  
(b) Si  $\tilde{X}$  es simplemente conexo,  $\text{card}(\pi_1(X))$  es el número de hojas.  
(c) Si  $X$  es compacto y el número de hojas es finito,  $\tilde{X}$  es compacto.
35. Sean  $p_1: Z \rightarrow Y$ ,  $p_2: Y \rightarrow X$  dos aplicaciones continuas, sobreyectivas y abiertas. Supongamos que  $(Z, p_2 \circ p_1)$  es recubridor de  $X$ . Probar que  $(Z, p_1)$  es recubridor de  $Y$  si y sólo si  $(Y, p_2)$  lo es de  $X$ .